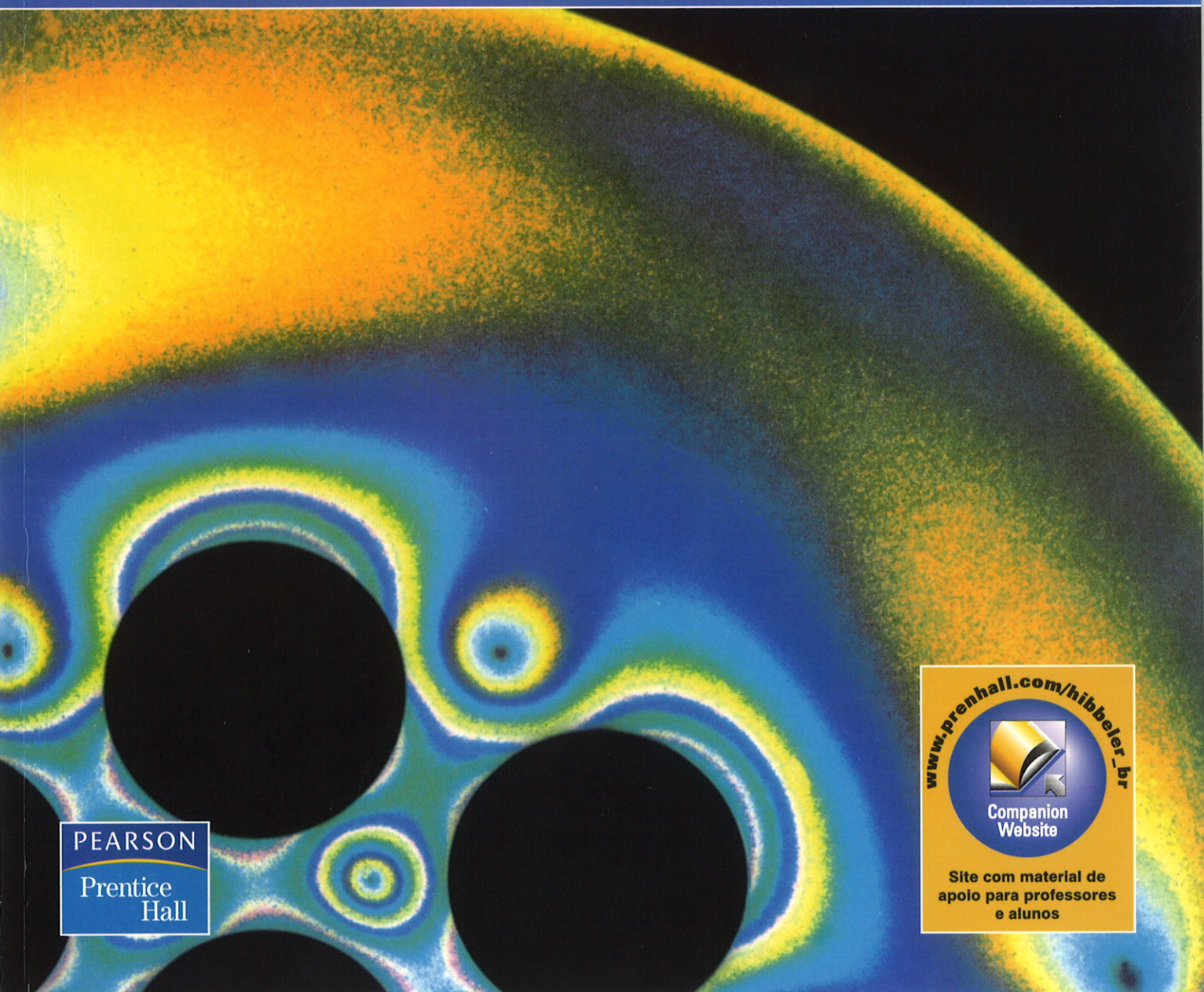
R.C. HIBBELER

Resistência DOS Materiais

5ª edição



PEARSON
Prentice Hall

www.prenhall.com/hibbeler_br

Companion Website

Site com material de apoio para professores e alunos

SUMÁRIO

PREFÁCIO ix

1 TENSÃO 1

1.1 Introdução 1
1.2 Equilíbrio de um Corpo Deformável 2
1.3 Tensão 15
1.4 Tensão Normal Média em uma Barra com Carga Axial 17
1.5 Tensão de Cisalhamento Média 23
1.6 Tensão Admissível 35

2 DEFORMAÇÃO 51

2.1 Deformação 51
2.2 Conceito de Deformação 51

3 PROPRIEDADES MECÂNICAS DOS MATERIAIS 62

3.1 Teste de Tração e Compressão 62
3.2 Diagrama Tensão-Deformação 63
3.3 Comportamento da Tensão-Deformação de Materiais Dúcteis e Frágeis 67
3.4 Lei de Hooke 70
3.5 Energia de Deformação 72
3.6 Coeficiente de Poisson 80
3.7 Diagrama Tensão-Deformação de Cisalhamento 82
*3.8 Falha de Materiais Devido à Fluência e à Fadiga 84

4 CARGA AXIAL 90

4.1 Princípio de Saint-Venant 90
4.2 Deformação Elástica de um Elemento com Carregamento Axial 92
4.3 Princípio da Superposição 102
4.4 Membro com Carga Axial Estaticamente Indeterminado 103
4.5 Método das Forças para Analisar Membros com Carga Axial 108
4.6 Tensão Térmica 114
4.7 Concentrações de Tensão 121
*4.8 Deformação Axial Inelástica 125
*4.9 Tensão Residual 129

5 TORÇÃO 137

5.1 Deformação por Torção de um Eixo Circular 137
5.2 Fórmula da Torção 139
5.3 Transmissão de Potência 147
5.4 Ângulo de Torção 153
5.5 Elementos Estaticamente Indeterminados Carregados com Torque 166
*5.6 Eixos Sólidos Não-Circulares 172
*5.7 Tubos de Parede Fina com Seções Transversais Fechadas 174
5.8 Concentração de Tensão 183
*5.9 Torção Inelástica 185
*5.10 Tensão Residual 191

6 FLEXÃO 199

6.1 Diagramas de Força Cortante (Cisalhamento) e Momento Fletor 199
6.2 Método Gráfico para Construir os Diagramas de Força Cortante (Cisalhamento) e Momento Fletor 206
6.3 Deformação por Flexão de um Membro Reto 221
6.4 Fórmula da Flexão 224
6.5 Flexão Assimétrica 237
*6.6 Vigas Compostas 247
*6.7 Vigas de Concreto Armado 251
*6.8 Vigas Curvas 253
6.9 Concentrações de Tensão 261
*6.10 Flexão Inelástica 268
*6.11 Tensão Residual 275

7 CISALHAMENTO TRANSVERSAL 283

7.1 Cisalhamento em Elementos Retos 283
7.2 Fórmula do Cisalhamento 284
7.3 Tensões de Cisalhamento em Vigas 286
7.4 Fluxo de Cisalhamento em Estruturas Compostas por Vários Elementos 298
7.5 Fluxo de Cisalhamento em Elementos de Paredes Finas 305
*7.6 Centro de Cisalhamento 309

8 CARGAS COMBINADAS 320

8.1 Vasos de Pressão com Paredes Finas 320
8.2 Estado de Tensão Provocado por Cargas Combinadas 325

9 TRANSFORMAÇÃO DE TENSÃO 342

9.1 Transformação no Estado Plano de Tensões 342
9.2 Equações Gerais de Transformação de Tensão para o Estado Plano 346
9.3 Tensões Principais e Tensão de Cisalhamento Máxima no Plano 349
9.4 Círculo de Mohr — Estado Plano de Tensões 360
9.5 Tensão em Eixos que se Deve à Carga Axial e à Torção 368
9.6 Variações de Tensão ao Longo de uma Viga Prismática 369
9.7 Tensão de Cisalhamento Máxima Absoluta 373

10 TRANSFORMAÇÃO DA DEFORMAÇÃO 383

10.1 Estado Plano de Deformações 383
10.2 Equações Gerais de Transformação para o Estado Plano de Deformações 384
*10.3 Círculo de Mohr — Estado Plano de Deformações 390
*10.4 Deformação por Cisalhamento Máxima Absoluta 396
10.5 Rosetas 399
10.6 Relações Material-Propriedade 403
*10.7 Teorias da Falha 413

11 PROJETO DE VIGAS E EIXOS 425

11.1 Base para o Projeto da Viga 425
11.2 Projeto de Viga Prismática 426
*11.3 Vigas Totalmente Solicitadas 436
*11.4 Projeto de Eixos 440

12 DEFLEXÃO DE VIGAS E EIXOS 449

12.1 A Linha Elástica 449
12.2 Inclinação e Deslocamento pelo Método da Integração Direta 452
*12.3 Funções de Descontinuidade 465
*12.4 Inclinação e Deslocamento pelo Método dos Momentos de Áreas 473
12.5 Método da Superposição 484
12.6 Vigas e Eixos Estaticamente Indeterminados 490
12.7 Vigas e Eixos Estaticamente Indeterminados — Método da Integração Direta 490
*12.8 Vigas e Eixos Estaticamente Indeterminados — Método dos Momentos de Áreas 494
12.9 Vigas e Eixos Estaticamente Indeterminados — Método da Superposição de Efeitos 499

13 FLAMBAGEM DE COLUNAS 510

13.1 Carga Crítica 510
13.2 Coluna Ideal com Apoios de Pino 512
13.3 Colunas com Vários Tipos de Apoio 517
*13.4 Fórmula da Secante 526
*13.5 Flambagem Inelástica (Plástica) 532
*13.6 Projeto de Colunas para Carregamento Concêntrico 538
*13.7 Projeto de Colunas para Carregamento Excêntrico 546

14 MÉTODOS DE ENERGIA 555

14.1 Trabalho Externo e Energia de Deformação 555
14.2 Energia de Deformação Elástica para Vários Tipos de Carga 558
14.3 Conservação de Energia 569
14.4 Carga de Impacto 574
*14.5 Princípio do Trabalho Virtual 582
*14.6 Método das Forças Virtuais Aplicado a Treliças 586
*14.7 Método das Forças Virtuais Aplicado a Vigas 592
*14.8 Teorema de Castigliano 600
*14.9 Teorema de Castigliano Aplicado a Treliças 601
*14.10 Teorema de Castigliano Aplicado a Vigas 605

A PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DE UMA ÁREA 611

A.1 Centróide de uma Área 611
A.2 Momento de Inércia de uma Área 613
A.3 Produto de Inércia de uma Área 616
A.4 Momentos de Inércia de uma Área em torno de Eixos Inclinados 618
A.5 Círculo de Mohr para Momentos de Inércia 620

B PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DE PERFIS ESTRUTURAIS 625

C INCLINAÇÕES E DESLOCAMENTOS DE VIGAS 633

D REVISÃO DOS FUNDAMENTOS DE ENGENHARIA 635

RESPOSTAS 651

ÍNDICE 666

PREFÁCIO

Este livro tem por objetivo oferecer ao aluno uma apresentação clara e completa tanto da teoria como da aplicação dos princípios fundamentais da resistência dos materiais. A compreensão do assunto baseia-se na explanação do comportamento físico dos materiais sob carga e na modelagem desse comportamento para desenvolver a teoria. A ênfase é dada à importância de satisfazer as condições de equilíbrio, compatibilidade da deformação e comportamento do material.

Principais características

• ***Resumos.*** As seções "Procedimento de análise" e "Pontos importantes" orientam a solução de problemas e fornecem um resumo dos conceitos.

• ***Fotografias.*** Fotografias são apresentadas ao longo do livro para demonstrar como os princípios de resistência dos materiais se aplicam a situações do mundo real. Em algumas seções, elas mostram como os materiais se deformam ou falham sob carga, a fim de proporcionar uma compreensão conceitual dos termos e princípios aplicados.

• ***Problemas.*** Os problemas equilibram aplicações fáceis, médias e difíceis, e alguns requerem que a solução seja obtida no computador. Foram tomados cuidados especiais na apresentação e na solução dos problemas e todos os conjuntos de problemas foram revisados e suas soluções foram verificadas e reverificadas para assegurar a clareza e a precisão numérica.

Conteúdo

Os assuntos foram estruturados em 14 capítulos. O Capítulo 1 começa com a revisão de conceitos importantes da estática, seguida pela definição formal de tensão normal e tensão de cisalhamento e pela discussão de tensão normal em elementos com carga axial e tensão de cisalhamento média causada por cisalhamento direto. No Capítulo 2 são definidas deformação normal e deformação por cisalhamento e no Capítulo 3 são discutidas algumas propriedades mecânicas dos materiais. Nos capítulos 4, 5 e 6, são abordados, respectivamente, carga axial, torção e flexão. Em cada um desses capítulos são considerados os comportamentos linear-elástico e elastoplástico do material. São incluídos também tópicos relacionados a concentrações de tensão e tensão residual. No Capítulo 7, é discutido o cisalhamento transversal, bem como tubos de parede fina, fluxo de cisalhamento e centro de cisalhamento. O Capítulo 8 oferece a revisão parcial do material desenvolvido nos capítulos anteriores, na qual é discutido o estado de tensão resultante de carregamentos múltiplos. No Capítulo 9 são apresentados os conceitos de transformação de estados de tensão multiaxial. De modo similar, o Capítulo 10 discute os métodos de transformação da deformação, incluindo a aplicação de várias teorias de defeitos. O Capítulo 11, que aborda aplicações de projeto de vigas e eixos, funciona como resumo adicional e revisão do material anterior. No Capítulo 12 são abordados vários métodos para cálculo de deflexão de vigas e eixos e há também uma discussão para determinar as reações nesses membros se forem estaticamente indeterminadas. O Capítulo 13 fornece a discussão da flambagem de colunas e, por fim, no Capítulo 14 são considerados o problema de impacto e a aplicação de vários métodos de energia para calcular deflexões.

As seções do livro que contêm material mais avançado são indicadas por um asterisco (*), para que possam ser incluídas no curso se houver tempo. Além disso, esse material oferece uma referência adequada para princípios básicos quando é abordado em outros cursos e pode ser usado como base para projetos especiais.

Método Alternativo de Abordagem. Alguns professores preferem abordar tensão e deformação *primeiro*, antes de discutir aplicações específicas de carga axial, torção, flexão e cisalhamento. Um método possível para essa abordagem é primeiro discutir a tensão e sua transformação, capítulos 1 e 9, seguidos por deformação e sua transformação, Capítulo 2 e primeira parte do Capítulo 10. A discussão e os exemplos nesse último capítulo foram montados para possibilitar isso. Os conjuntos de problemas também foram subdivididos para que esse material possa ser abordado sem o conhecimento prévio dos capítulos envolvidos. Os capítulos 3 a 8 podem então ser abordados na seqüência.

Características Especiais

Organização e Abordagem. A fim de ajudar tanto o professor como o aluno, os conteúdos de cada capítulo estão organizados em seções bem definidas. Grupos de seções selecionadas contêm a explicação de tópicos específicos, seguida por problemas na forma de exemplos ilustrativos e um conjunto de problemas para resolver em casa. Os tópicos de cada seção estão localizados em subgrupos identificados por títulos em negrito. O propósito dessa notação é apresentar um método estruturado para introduzir cada definição ou conceito novo e tornar o livro conveniente para referência e revisão posteriores. Além disso, os termos importantes do capítulo foram destacados em negrito para oferecer meios convenientes para revisão.

Conteúdo do Capítulo. Cada capítulo inicia-se com uma fotografia que ilustra uma aplicação ampla do material nele contido. Em seguida, são fornecidos os "Objetivos do capítulo" para dar uma visão geral do material que será abordado.

Procedimentos de Análise. Encontrado em várias seções do livro, esse recurso oferece ao estudante um método lógico e ordenado para aplicar a teoria. Os problemas contidos nos exemplos são então resolvidos usando-se as diretrizes do método, a fim de esclarecer a aplicação numérica. Deve-se compreender, no entanto, que uma vez dominados os princípios relevantes e tendo adquirido confiança e julgamento suficientes, o estudante pode então desenvolver seus próprios procedimentos para resolver problemas.

Compreensão Conceitual. Com base em fotografias inseridas ao longo do livro, são fornecidos exemplos da teoria a fim de ilustrar algumas das características conceituais mais importantes e mostrar o significado físico de muitos dos termos usados nas equações.

Problemas em Forma de Exemplo. Todos os problemas em forma de exemplo são concisos e fáceis de compreender. Novos exemplos foram adicionados ao longo do livro e alguns da edição anterior foram reduzidos.

Problemas para Resolver em Casa. Numerosos problemas do livro descrevem situações reais encontradas na prática da engenharia. Espera-se que tal realismo tanto estimule o interesse do estudante pelo assunto como forneça os meios para desenvolver a habilidade para transformar a descrição física de um problema em um modelo ou representação simbólica a que se possa aplicar os princípios.

Ao longo do livro há um equilíbrio dos problemas que usam o SI e o sistema britânico (FPS — pés-libras-segundo), para que os estudantes tenham oportunidade de testar suas habilidades nos dois sistemas. Além disso, em qualquer conjunto, tentou-se ordenar os problemas por ordem de dificuldade crescente. As respostas para os problemas, exceto os que são múltiplos de 4, estão relacionadas no fim do livro. Para chamar a atenção do usuário para um problema sem resposta, foi colocado um asterisco (*) antes do número do problema. As respostas contêm três algarismos significativos, mesmo que os dados conhecidos das propriedades do material sejam fornecidos com menor precisão. Apesar de parecer uma prática não recomendável, foi adotada para dar ao estudante melhor oportunidade de confirmar sua solução. A precisão de todos os problemas e suas soluções foram verificadas independentemente. Um quadrado preto (símbolo) é usado para identificar os problemas que requerem utilização de análise numérica ou computador.

Apêndices. Os apêndices do livro oferecem uma fonte de revisão e uma relação tabular de dados. O Apêndice A fornece informações sobre centróide e momento de inércia da área. Os apêndices B e C tabulam dados para perfis estruturais, deflexão e inclinação para vários tipos de vigas e eixos. O Apêndice D, intitulado "Revisão dos Fundamentos da Engenharia", contém problemas típicos, com soluções parciais.

Verificação da Precisão. Nesta edição houve verificação e revisão rigorosas das páginas. Além da revisão do autor de todas as figuras e páginas, Karim Nohra, da University of South Florida, e Scott Hendricks, do

Virginia Polytechnic Institute, reverificaram as provas das páginas duas vezes e juntos revisaram integralmente o Manual de Soluções.

Material de apoio. No site do livro estão disponíveis recursos adicionais para professores e estudantes, como as figuras do livro em forma de apresentação e o Manual de Soluções em inglês.

Agradecimentos

Ao longo dos anos, este texto foi desenvolvido com as sugestões e comentários de muitos dos meus colegas professores. Seu encorajamento e vontade de fornecer crítica construtiva foram muito apreciados e espero que aceitem este reconhecimento anônimo.

Agradeço aos revisores: Patrick Kwon da Michigan State University, Cliff Lissenden da Penn State University, Dahsin Liu da Michigan State University, Ting-Wen Wu da University of Kentucky, Javad Hashemi da Texas Tech University e Assimina Pelegri da Rutgers — State University of New Jersey. Um agradecimento especial a Karim Nohra da University of South Florida e Scott Hendricks do Virginia Polytechnic Institute, que verificaram rigorosamente tanto o texto como o Manual de Soluções. Quero também agradecer a todos os meus alunos que usaram a edição anterior e fizeram comentários para melhorar seu conteúdo. Por último, sou grato pela ajuda de minha esposa, Cornelie (Conny), pelo tempo gasto para preparar o manuscrito para publicação.

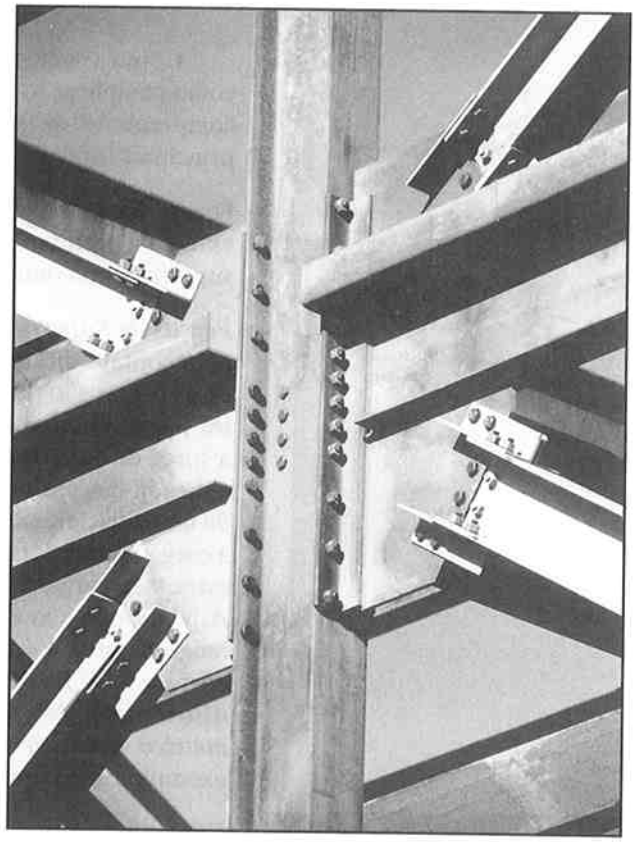
Eu gostaria imensamente que você entrasse em contato comigo caso tivesse comentários ou sugestões em relação ao conteúdo desta edição.

RUSSELL CHARLES HIBBELER
hibbeler@bellsouth.net

1 TENSÃO

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

Neste capítulo revisaremos alguns princípios importantes da estática e mostraremos como eles são usados para determinar os esforços internos resultantes em um corpo. Serão introduzidos ainda os conceitos de tensão normal e tensão de cisalhamento e discutiremos aplicações específicas da análise e do projeto de elementos submetidos a carga axial ou a cisalhamento.



Os parafusos usados no acoplamento desta estrutura metálica estão submetidos a tensão. Neste capítulo discutiremos como os engenheiros projetam tais acoplamentos e suas amarrações.

1.1 INTRODUÇÃO

A ***resistência dos materiais*** é um ramo da mecânica que estuda as relações entre cargas *externas* aplicadas a um corpo deformável e a intensidade das forças *internas* que atuam dentro do corpo. Esse assunto abrange também o cálculo da *deformação* do corpo e o estudo da sua *estabilidade*, quando ele está submetido a forças externas.

No projeto de qualquer estrutura ou máquina é necessário *primeiro* usar os princípios da estática para determinar as forças que atuam tanto sobre como no interior de seus vários membros. As dimensões dos elementos, sua deflexão e sua estabilidade dependem não só das cargas internas como também do tipo de material do qual esses elementos são feitos. Assim, a determinação precisa e a compreensão do *comportamento do material* são de vital importância para o desenvolvimento das equações usadas na resistência dos materiais. Observe que muitas fórmulas e procedimentos de projeto, definidos nas normas da engenharia e usados na prática, baseiam-se nos fundamentos da resistência dos materiais e, por essa razão, compreender os princípios dessa matéria é muito importante.

Evolução Histórica. A origem da resistência dos materiais remonta ao início do século XVII, época em que Galileu realizou experiências para estudar os efeitos de cargas em hastes e vigas feitas de vários materiais. Entretanto, para a compreensão adequada, foi necessário estabelecer descrições experimentais precisas das propriedades mecânicas de um material. Os métodos para tais descrições foram consideravelmente melhorados no início do século XVIII. Naquela época, estudos sobre o assunto, tanto experimentais como teóricos, foram realizados, principalmente na França, por notáveis como Saint-Venant, Poisson, Lamé e Navier. Como seus estudos baseavam-se em aplicações da mecânica a corpos materiais, eles denominaram esses estudos 'resistência dos materiais'. Atualmente, no entanto, referimo-nos a eles como 'mecânica de corpos deformáveis' ou simplesmente 'mecânica dos materiais'.

Com o passar do tempo, depois que muitos dos problemas fundamentais da resistência dos materiais foram resolvidos, tornou-se necessário usar técnicas de matemática avançada e de computador para resolver problemas mais complexos. Como resultado, essa matéria ampliou-se para outras disciplinas de mecânica avançada, tais como a *teoria da elasticidade* e a *teoria da plasticidade*. A pesquisa nesses campos está em andamento não só para satisfazer a demanda pela resolução de problemas avançados de engenharia, como também para justificar o uso mais amplo e as limitações em que a teoria fundamental da resistência dos materiais é baseada.

1.2 EQUILÍBRIO DE UM CORPO DEFORMÁVEL

Como a estática desempenha um papel relevante tanto no desenvolvimento como na aplicação da resistência dos materiais, é muito importante ter uma boa compreensão de seus fundamentos. Por essa razão, revisaremos alguns dos principais fundamentos da estática que serão usados ao longo de todo o texto.

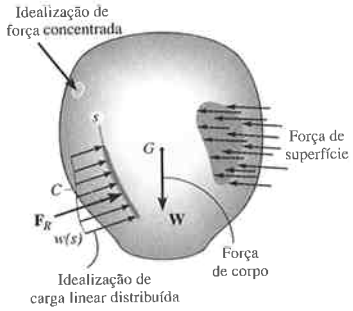
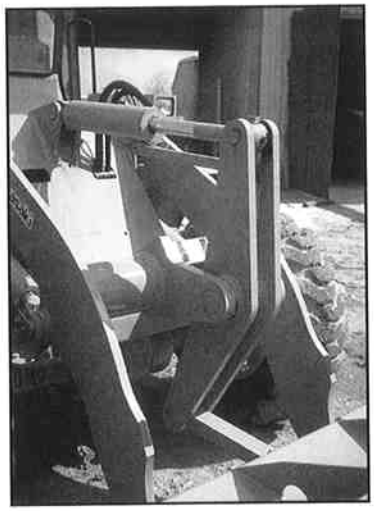


Figura 1.1

Forças Externas. Um corpo pode ser submetido a diversos tipos de cargas externas; entretanto, qualquer uma delas pode ser classificada como força de superfície ou como força de corpo (Figura 1.1).

Forças de Superfície. Como o nome indica, as ***forças de superfície*** são causadas pelo contato direto de um corpo com a superfície de outro. Em todos os casos essas forças são distribuídas pela *área* de contato entre os corpos. Se essa área for pequena em comparação com o total da área da superfície do corpo, então a força de superfície pode ser *imaginada* como uma única ***força concentrada***, aplicada em um *ponto* do corpo. Por exemplo, a força do solo sobre as rodas de uma bicicleta pode ser considerada uma força concentrada quando se estuda a carga na bicicleta. Se a carga na superfície for aplicada ao longo de uma área estreita, a carga pode ser *imaginada* como uma ***carga linear distribuída***, $w(s)$. Aqui a carga é medida como tendo uma intensidade de força/comprimento ao longo da área e é representada graficamente por uma série de setas ao longo da reta s. ***A força resultante de w(s), F_R, equivale à área sob a curva de distribuição da carga, e sua resultante atua no centróide C ou centro geométrico dessa área.*** A carga ao longo do comprimento de uma viga é um exemplo típico em que essa idealização é freqüentemente aplicada.



Muitos elementos de máquina são acoplados por pino a fim de permitir rotação livre nos seus acoplamentos. Esses apoios exercem uma força sobre o elemento, mas não criam momento.

Força de Corpo. Desenvolve-se uma ***força de corpo*** quando um corpo exerce uma força sobre outro sem contato físico direto entre eles. Os exemplos incluem os efeitos causados pela gravidade da Terra ou seu campo eletromagnético. Apesar de as forças de corpo afetarem cada uma das partículas que compõem tal corpo, essas forças são representadas normalmente por uma única força concentrada que atua sobre o corpo. No caso da gravidade, essa força é chamada ***peso*** do corpo e atua no centro de gravidade desse corpo.

Reações do Apoio. As forças de superfície que se desenvolvem nos apoios ou pontos de contato entre corpos são chamadas ***reações***. Nos problemas bidimensionais, ou seja, corpos submetidos a sistemas de forças coplanares, os apoios mais encontrados são os mostrados na Tabela 1.1. Observe cuidadosamente o símbolo usado para representar cada apoio e o tipo de reação que ele exerce sobre o elemento em contato com ele. Em geral, pode-se determinar o tipo de reação do apoio imaginando o elemento a ele acoplado como sendo transladado ou girado em uma direção em particular. ***Se o apoio impede a translação em dada direção, então deve ser desenvolvida uma força naquela direção. Da mesma forma, se a rotação for impedida, deve ser aplicado um conjugado sobre o elemento.*** Por exemplo, um apoio de rolete somente impede a translação na direção do contato, perpendicular ou normal à superfície.

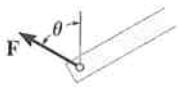
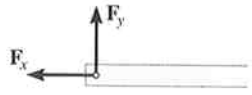
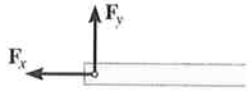
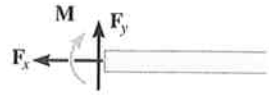
Tipo de acoplamento	Reação	Tipo de acoplamento	Reação
Cabo	 Uma incógnita: F	Pino externo	 Duas incógnitas: F_x, F_y
Rolete	Uma incógnita: F	Pino interno	 Duas incógnitas: F_x, F_y
Apoio	Uma incógnita: F	Engaste	 Três incógnitas: F_x, F_y, M

Tabela 1.1

Portanto, o rolete exerce uma força normal **F** sobre o elemento no ponto de contato. Como o elemento pode girar livremente em torno do rolete, não pode ser desenvolvido no elemento um conjugado.

Equações de Equilíbrio. O equilíbrio de um corpo requer tanto o ***equilíbrio de forças***, para evitar que o corpo sofra translação ou tenha movimento acelerado ao longo de uma trajetória retilínea ou curvilínea, como o ***equilíbrio de momentos***, para evitar a rotação do corpo. Essas condições podem ser expressas matematicamente por duas equações vetoriais.

$$\begin{aligned} \Sigma \mathbf{F} &= \mathbf{0} \\ \Sigma \mathbf{M}_O &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Nesse caso, $\Sigma \mathbf{F}$ representa a soma de todas as forças que atuam sobre o corpo, e $\Sigma \mathbf{M}_O$ é a soma dos momentos de todas as forças em relação a um ponto qualquer O tanto sobre o corpo como fora dele. Se for estabelecido um sistema de coordenadas x, y, z com origem no ponto O, os vetores força e momento podem ser decompostos em componentes ao longo dos eixos de coordenadas, e as duas equações anteriores podem ser escritas em forma escalar, como seis equações, que são as seguintes:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0 \quad & \Sigma F_y &= 0 \quad & \Sigma F_z &= 0 \\ \Sigma M_x &= 0 \quad & \Sigma M_y &= 0 \quad & \Sigma M_z &= 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Na prática da engenharia, em geral, a carga sobre um corpo pode ser representada como um sistema *coplanar de forças*. Se esse for o caso e as forças se localizarem no plano x–y, então as condições do equilíbrio do corpo podem ser especificadas por apenas três equações escalares de equilíbrio. Ou seja:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0 \\ \Sigma F_y &= 0 \\ \Sigma M_O &= 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Nesse caso, se o ponto O for a origem das coordenadas, então os momentos serão sempre direcionados ao longo do eixo de z, que é perpendicular ao plano que contém as forças.

A aplicação, com sucesso, das equações de equilíbrio requer a especificação completa de todas as forças conhecidas e desconhecidas que atuam *sobre* o corpo. ***A melhor maneira de considerar essas forças é desenhar o diagrama de corpo livre.*** Obviamente, se o diagrama de corpo livre for desenhado corretamente, os efeitos de todas as forças e conjugados aplicados serão considerados quando as equações de equilíbrio forem escritas.

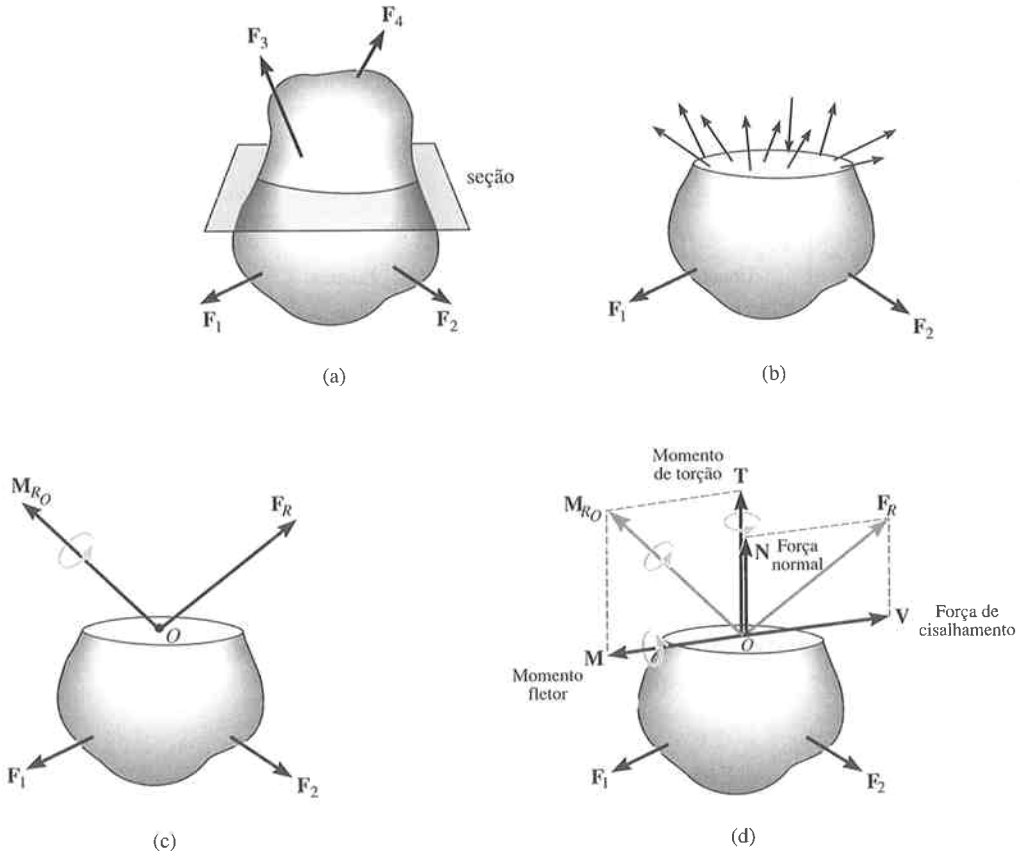


Figura 1.2

Carga interna resultante. Uma das aplicações mais importantes da estática na análise dos problemas de resistência dos materiais é ser capaz de determinar a força resultante e o momento em que atuam no *interior* do corpo, necessários para manter o corpo unido quando submetido a cargas externas. Por exemplo, consideremos o corpo mostrado na Figura 1.2*a*, mantido em equilíbrio por quatro forças externas.[1] A fim de determinar as *cargas internas* que atuam em uma região específica no interior do corpo, é necessário usar o ***método das seções***. Esse método requer que seja feita uma seção ou 'corte' através da região em que as cargas internas devem ser determinadas. As duas partes do corpo são então separadas, e o diagrama de corpo livre de uma das partes é desenhado (Figura 1.2*b*). Nele, pode-se verificar que realmente há uma *distribuição* de força interna atuando na área 'exposta' da seção. Essas forças representam os efeitos do material da parte superior do corpo atuando sobre o material adjacente da parte inferior.

[1] O peso do corpo não é mostrado, visto que é muito reduzido e, portanto, desprezível em comparação com as outras forças.

Apesar de a distribuição exata da carga interna ser *desconhecida*, podemos usar as equações de equilíbrio para relacionar as forças externas sobre o corpo à *força resultante* $\mathbf{F}_R$ e ao *momento* $\mathbf{M}_{R_O}$ *em qualquer ponto específico* O da área secionada (Figura 1.2*c*). Observe que $\mathbf{F}_R$ atua no ponto O, apesar de seu valor calculado ser *independente* da localização desse ponto. Por outro lado, $\mathbf{M}_{R_O}$ depende dessa localização, uma vez que os braços do momento devem prolongar-se de O para a reta de ação de cada força externa no diagrama de corpo livre. Veremos mais adiante que o ponto O é mais comumente escolhido como *centróide* da área secionada; assim, escolheremos sempre essa localização para O, a menos que se informe o contrário. Além disso, se o elemento for comprido e estreito, como no caso de uma haste ou viga, a seção considerada é geralmente *perpendicular* ao eixo longitudinal do elemento. Essa seção é denominada ***seção transversal***.

Três Dimensões. Mais adiante mostraremos como relacionar as cargas resultantes $\mathbf{F}_R$ e $\mathbf{M}_{R_O}$ com a *distribuição de forças* na área secionada e desenvolver então equações para serem usadas na análise e no projeto. Para tal, entretanto, devem ser considerados os componentes de $\mathbf{F}_R$ e $\mathbf{M}_{R_O}$ que atuam tanto normal ou perpendicularmente à área secionada como no plano da área (Figura 1.2*d*). São definidos quatro tipos diferentes de cargas resultantes, como segue:

***Força Normal*, N.** Essa força atua perpendicularmente à área. É criada sempre que as forças externas tendem a empurrar ou puxar as duas partes do corpo.

***Força de Cisalhamento*, V.** A força de cisalhamento localiza-se no plano da área e é criada quando as cargas externas tendem a provocar o deslizamento das duas partes do corpo, uma sobre a outra.

***Momento de Torção ou Torque*, T.** Esse efeito é criado quando as cargas externas tendem a torcer uma parte do corpo em relação à outra.

***Momento Fletor*, M.** O momento fletor é provocado pelas cargas externas que tendem a fletir o corpo em relação ao eixo localizado no plano da área.

Observe que a representação gráfica do momento ou torque é mostrada em três dimensões como um vetor associado a uma rotação. Pela *regra da mão direita*, o polegar indica o sentido da flecha do vetor e os outros dedos indicam a tendência da rotação (torção ou flexão). Em um sistema de coordenadas x, y, z, cada umas das cargas apresentadas é determinada diretamente pelas seis equações de equilíbrio aplicadas a qualquer segmento do corpo.

Cargas Coplanares. Se o corpo estiver submetido a um *sistema de forças coplanares* (Figura 1.3*a*), então existirão na seção apenas os componentes de força normal, de cisalhamento e momento fletor (Figura 1.3*b*). Se usarmos os eixos de coordenadas x, y, z, com origem definida no ponto O, como mostrado no segmento da esquerda, então uma solução direta para **N** é obtida aplicando-se $\Sigma F_x = 0$, e **V** é obtida diretamente de $\Sigma F_y = 0$. Finalmente, o momento fletor $\mathbf{M}_O$ é determinado diretamente pela soma dos momentos em torno do ponto O (eixo do z), $\Sigma M_O = 0$, a fim de eliminar os momentos provocados pelas incógnitas **N** e **V**.

A fim de projetar os elementos da estrutura do prédio, antes é necessário determinar as cargas internas de diversos pontos ao longo de seu comprimento.

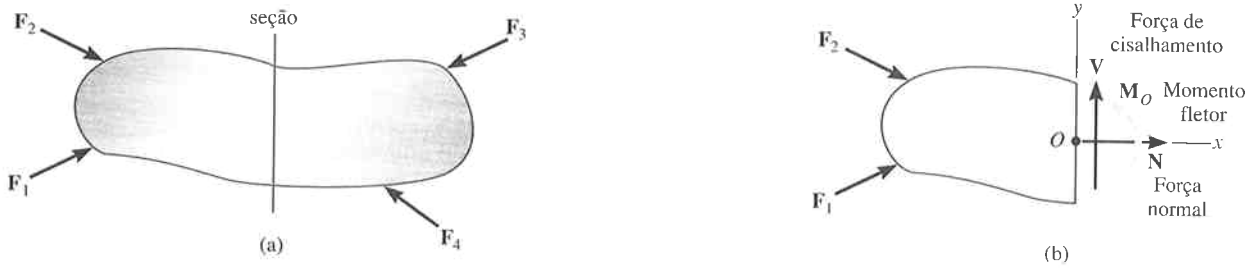


Figura 1.3

PONTOS IMPORTANTES

- *Resistência dos materiais* é o estudo da relação entre as cargas externas que atuam em um corpo e a intensidade das cargas internas no interior desse corpo.
- As forças externas podem ser aplicadas a um corpo como *cargas de superfície distribuídas* ou *concentradas* ou como *forças de corpo* que atuam em todo o volume do corpo.
- Cargas lineares distribuídas produzem uma *força resultante* com *grandeza* igual à *área* sob o diagrama de carga e com *localização* que passa pelo *centróide* dessa área.
- Um apoio produz uma *força* em uma direção particular sobre seu elemento acoplado, se ele *impedir a translação* do elemento naquela direção, e produz *momento binário* no elemento se *impedir a rotação*.
- As equações de equilíbrio $\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$ e $\Sigma \mathbf{M} = \mathbf{0}$ devem ser satisfeitas a fim de impedir que o corpo se translade com movimento acelerado e que tenha rotação.
- Quando se aplicam as equações de equilíbrio, é importante primeiro desenhar o diagrama de corpo livre do corpo a fim de considerar todos os termos das equações.
- O método das seções é usado para determinar as cargas internas resultantes que atuam sobre a superfície do corpo secionado. Em geral, essas resultantes consistem em uma força normal, uma força de cisalhamento, um momento de torção e um momento fletor.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

O método das seções é usado para determinar a resultante das cargas *internas* em um ponto localizado na seção de um corpo. A aplicação do método das seções requer os seguintes passos para obter tais resultantes.

Reações dos Apoios

- Decidir primeiro qual segmento do corpo será considerado. Se esse segmento tiver um apoio ou elemento de ligação com outro corpo (tipo rótula), então *antes* de secionar o corpo será necessário determinar as reações que atuam sobre o segmento escolhido. Desenhar o diagrama de corpo livre de *todo o corpo* e aplicar então as equações de equilíbrio requeridas para obter as reações que agem no segmento escolhido.

Diagrama de Corpo Livre

- Manter todas as cargas externas distribuídas, momentos binários, torques e forças que atuam sobre o corpo em suas *localizações exatas*; traçar então uma seção imaginária através do corpo no ponto em que a resultante das cargas internas será determinada.
- Se o corpo representa o elemento de uma estrutura ou dispositivo mecânico, a seção é, em geral, *perpendicular* ao eixo longitudinal do elemento.
- Desenhar o diagrama de corpo livre de um dos segmentos 'cortados', indicando as resultantes desconhecidas **N**, **V**, **M** e **T** na seção. Essas resultantes normalmente são colocadas no ponto que representa o centro geométrico ou *centróide* da área secionada.
- Se o elemento está submetido a um sistema de forças *coplanares*, somente **N**, **V** e **M** atuam sobre o centróide.
- Definir os eixos de coordenadas *x*, *y*, *z* com origem no centróide e mostrar os componentes da resultante que atuam ao longo dos eixos.

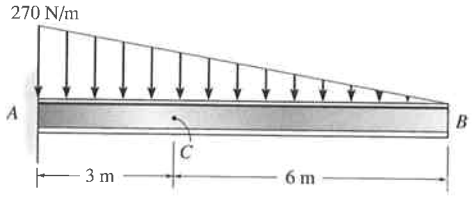
Equações de Equilíbrio

- Os momentos em torno de cada eixo de coordenadas, na seção em que as resultantes atuam, devem ser somados; assim, é possível eliminar as forças desconhecidas **N** e **V**, permitindo uma solução direta de **M** (e **T**).
- Se a solução das equações de equilíbrio resulta em valor negativo para uma resultante, o *sentido de direção* da resultante adotado no diagrama de corpo livre é *oposto* ao sentido mostrado no caso real.

Os exemplos a seguir ilustram esse procedimento numericamente, além de revisar alguns princípios importantes da estática.

EXEMPLO 1.1

Determinar a resultante das cargas internas que atuam na seção transversal em C da viga mostrada na Figura 1.4*a*.



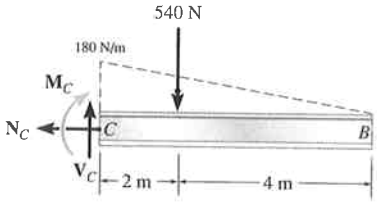
(a)

Figura 1.4

SOLUÇÃO

Reações dos Apoios. O problema pode ser resolvido de maneira mais direta, considerando-se o segmento CB da viga, uma vez que não é necessário calcular as reações do apoio A.

Diagrama de Corpo Livre. Traçando uma seção imaginária perpendicular ao eixo longitudinal da viga, obtém-se o diagrama de corpo livre do segmento CB mostrado na Figura 1.4*b*. É importante manter a carga distribuída exatamente onde se encontra no segmento, mesmo *após* o secionamento ser feito. Só então essa carga deve ser substituída por sua força concentrada equivalente. Observe que a intensidade da carga distribuída em C é determinada por proporção, isto é, a partir da Figura 1.4*a*, $w/6\text{ m} = (270\text{ N/m})/9\text{ m}$, $w = 180\text{ N/m}$. A intensidade da resultante da carga distribuída é igual à área sob a curva de carregamento (triângulo) e atua sobre o centróide dessa área. Assim, $F = \frac{1}{2}(180\text{ N/m})(6\text{ m}) = 540\text{ N}$, que atua a $1/3(6\text{ m}) = 2\text{ m}$ de C como mostrado na Figura 1.4*b*.



(b)

Equações de Equilíbrio. Aplicando as equações de equilíbrio, temos:

$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0;$ $\quad -N_C = 0$

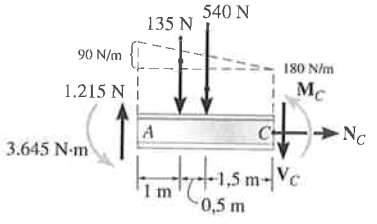
$N_C = 0$ ***Resposta***

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$ $\quad V_C - 540\text{ N} = 0$

$V_C = 540\text{ N}$ ***Resposta***

$\circlearrowleft^{+} \Sigma M_C = 0;$ $\quad -M_C - 540\text{ N}(2\text{ m}) = 0$

$M_C = -1.080\text{ N} \cdot \text{m}$ ***Resposta***



(c)

O sinal negativo indica que $\mathbf{M}_C$ atua em sentido oposto àquele mostrado no diagrama de corpo livre (que foi adotado). Tente resolver o problema usando o segmento AC, determinando primeiro as reações do apoio A, as quais são dadas na Figura 1.4*c*.

EXEMPLO 1.2

Determinar a resultante das cargas internas que atuam na seção transversal em C do eixo de máquina mostrado na Figura 1.5*a*. O eixo é apoiado por rolamentos em A e B, que exercem apenas forças verticais sobre ele.

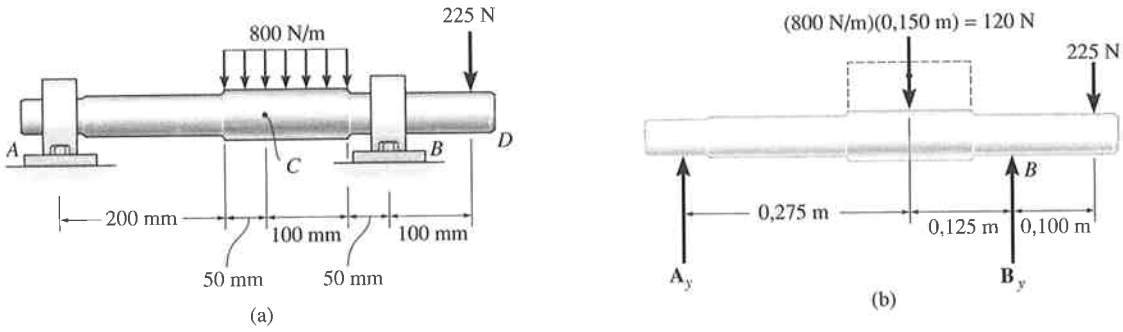


Figura 1.5

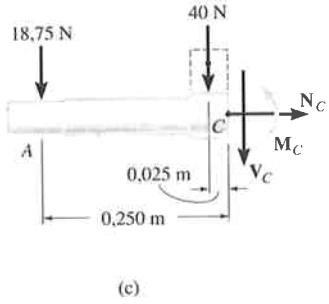
SOLUÇÃO

Resolveremos o problema usando o segmento AC do eixo.

Reações dos Apoios. A Figura 1.5*b* mostra o diagrama de corpo livre do eixo todo. Como devemos considerar só o segmento AC, apenas a reação em A precisa ser calculada. Por quê?

$$\circlearrowleft^{+} \Sigma M_B = 0; \quad -A_y(0{,}400\text{ m}) + 120\text{ N}(0{,}125\text{ m}) - 225\text{ N}(0{,}100\text{ m}) = 0$$

$$A_y = -18{,}75\text{ N}$$



O sinal negativo de A_y indica que $\mathbf{A}_y$ atua no *sentido contrário* ao adotado no diagrama de corpo livre.

Diagrama de Corpo Livre. Traçando-se uma seção imaginária perpendicular à linha de centro do eixo que passa por C, obtém-se o diagrama de corpo livre do segmento AC mostrado na Figura 1.5*c*.

Equações de Equilíbrio

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad N_C = 0 \qquad \textit{Resposta}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad -18{,}75\text{ N} - 40\text{ N} - V_C = 0$$

$$V_C = -58{,}8\text{ N} \qquad \textit{Resposta}$$

$$\circlearrowleft^{+} \Sigma M_C = 0; \quad M_C + 40\text{ N}(0{,}025\text{ m}) + 18{,}75\text{ N}(0{,}250\text{ m}) = 0$$

$$M_C = -5{,}69\text{ N}\cdot\text{m} \qquad \textit{Resposta}$$

O que indicam os sinais negativos de V_C e M_C? Como exercício, calcular a reação em B e tentar obter os mesmos resultados apresentados para o segmento CBD do eixo.

EXEMPLO 1.3

O guindaste da Figura 1.6*a* consiste na viga AB, das roldanas acopladas, do cabo e do motor. Determinar a resultante das cargas internas que atuam na seção transversal em C se o motor levanta a carga W de 500 lb com velocidade constante. Desprezar o peso das roldanas e da viga.

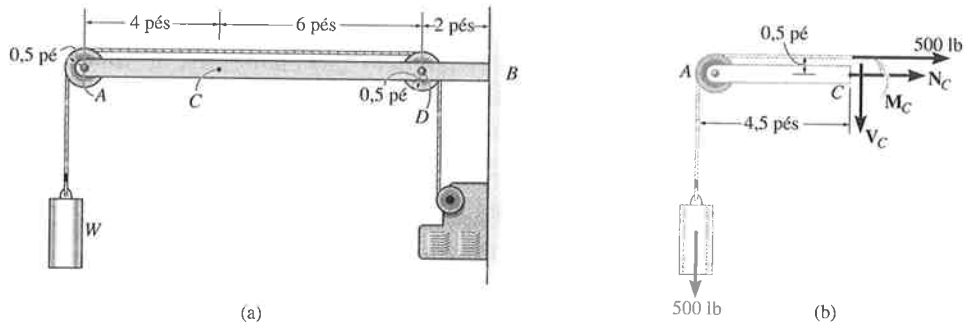


Figura 1.6

SOLUÇÃO

A maneira mais direta de resolver o problema é secionar o cabo e a viga em C e considerar então todo o segmento esquerdo.

Diagrama de Corpo Livre. Ver a Figura 1.6*b*.

Equações de Equilíbrio

$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0;$ $\quad 500 \text{ lb} + N_C = 0 \quad N_C = -500 \text{ lb}$ ***Resposta***

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$ $\quad -500 \text{ lb} - V_C = 0 \quad V_C = -500 \text{ lb}$ ***Resposta***

$\circlearrowleft^{+} \Sigma M_C = 0;$ $\quad 500 \text{ lb}(4{,}5 \text{ pés}) - 500 \text{ lb}(0{,}5 \text{ pé}) + M_C = 0$

$M_C = -2.000 \text{ lb} \cdot \text{pés}$ ***Resposta***

Como exercício, tentar obter esses mesmos resultados considerando apenas o segmento AC da viga, ou seja, retirar da viga a roldana A e mostrar os componentes da força de 500 lb da roldana que atuam sobre o segmento AC da viga. Esse problema também pode ser solucionado determinando-se primeiro as reações em B ($B_x = 0$, $B_y = 1.000$ lb, $M_B = 7.000$ lb · pés) e considerando-se então o segmento CB.

EXEMPLO 1.4

Determinar a resultante das cargas internas que atuam na seção transversal em G da viga de madeira mostrada na Figura 1.7*a*. Supor que as articulações A, B, C, D e E sejam acopladas por pinos.

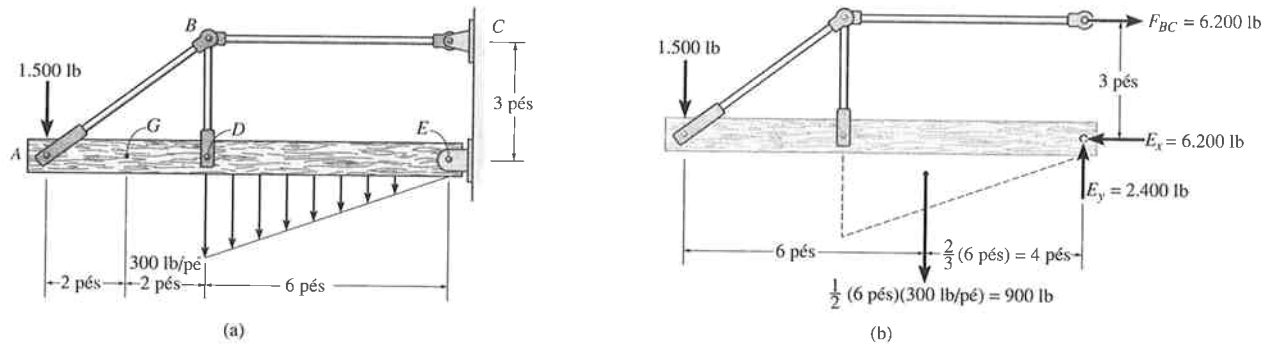
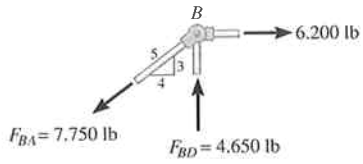


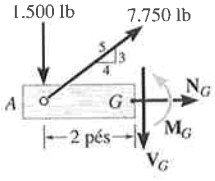
Figura 1.7

SOLUÇÃO

Reações dos Apoios. Consideraremos para a análise o segmento AG. O diagrama de corpo livre para *toda* a estrutura é mostrado na Figura 1.7*b*. Confirmar as reações calculadas em E e C. Observar, em particular, que BC é



(c)



(d)

Figura 1.7

um *elemento de duas forças*, visto que apenas duas forças (horizontais) atuam sobre ele. Por essa razão, a reação em C deve ser horizontal, como mostrado.

Como BA e BD também são elementos de duas forças, o diagrama de corpo livre da articulação B é o mostrado na Figura 1.7*c*. Confirmar as intensidades calculadas das forças $\mathbf{F}_{BA}$ e $\mathbf{F}_{BD}$.

Diagrama de Corpo Livre. Usando o resultado de $\mathbf{F}_{BA}$, a seção esquerda AG da viga é mostrada na Figura 1.7*d*.

Equações de Equilíbrio.

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \quad 7.750 \text{ lb}\left(\tfrac{4}{5}\right) + N_G = 0 \quad N_G = -6.200 \text{ lb}$$ ***Resposta***

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -1.500 \text{ lb} + 7.750 \text{ lb}\left(\tfrac{3}{5}\right) - V_G = 0$$

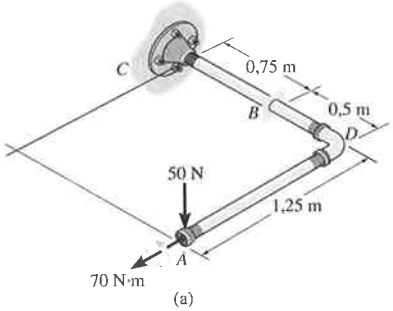
$$V_G = 3.150 \text{ lb}$$ ***Resposta***

$$\circlearrowleft + \Sigma M_G = 0; \; M_G - (7.750 \text{ pés})\left(\tfrac{3}{5}\right)(2 \text{ pés}) + 1.500 \text{ lb}(2 \text{ pés}) = 0$$

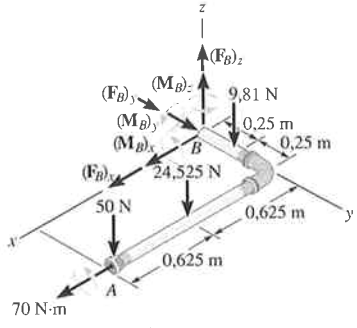
$$M_G = 6.300 \text{ lb} \cdot \text{pés}$$ ***Resposta***

Calcular, como exercício, os mesmos resultados usando o segmento GE.

EXEMPLO 1.5



(a)



(b)

Figura 1.8

Determinar a resultante das cargas internas que atuam na seção transversal em B do tubo mostrado na Figura 1.8*a*. O tubo tem massa de 2 kg/m e está submetido a uma força de 50 N e um conjugado de 70 N · m em sua extremidade A. O tubo está fixado à parede em C.

SOLUÇÃO

O problema pode ser resolvido considerando-se o segmento AB que *não* envolve as reações do apoio C.

Diagrama de Corpo Livre. Os eixos x, y, z são definidos em B, e o diagrama de corpo livre do segmento AB é mostrado na Figura 1.8*b*. Suponha que a força resultante e os componentes do momento na seção atuem nas direções positivas das coordenadas e passem pelo *centróide* da seção transversal da área em B. O peso de cada segmento do tubo é calculado como segue:

$$W_{BD} = (2 \text{ kg/m})(0{,}5 \text{ m})(9{,}81 \text{ N/kg}) = 9{,}81 \text{ N}$$

$$W_{AD} = (2 \text{ kg/m})(1{,}25 \text{ m})(9{,}81 \text{ N/kg}) = 24{,}525 \text{ N}$$

Essas forças atuam sobre o centro de gravidade de cada segmento.

Equações de Equilíbrio. Aplicando as seis equações escalares de equilíbrio,[2] temos:

$$\Sigma F_x = 0; \qquad (F_B)_x = 0$$ ***Resposta***

$$\Sigma F_y = 0; \qquad (F_B)_y = 0$$ ***Resposta***

$$\Sigma F_z = 0; \quad (F_B)_z - 9{,}81 \text{ N} - 24{,}525 \text{ N} - 50 \text{ N} = 0$$

$$(F_B)_z = 84{,}3 \text{ N}$$ ***Resposta***

$$\Sigma (M_B)_x = 0; \quad (M_B)_x + 70 \text{ N} \cdot \text{m} - 50 \text{ N}(0{,}5 \text{ m}) - 24{,}525 \text{ N}(0{,}5 \text{ m}) - 9{,}81 \text{ N}(0{,}25 \text{ m}) = 0$$

$$(M_B)_x = -30{,}3 \text{ N} \cdot \text{m}$$ ***Resposta***

[2] A *intensidade* do momento em torno de um eixo é igual à intensidade da força multiplicada pela distância perpendicular do eixo à linha de ação da força. A *direção* do momento é determinada usando-se a regra da mão direita, com momentos positivos (polegar) direcionados ao longo dos eixos de coordenadas positivos.

$\Sigma(M_B)_y = 0; \quad (M_B)_y + 24{,}525\ \text{N}(0{,}625\ \text{m}) + 50\ \text{N}(1{,}25\ \text{m}) = 0$

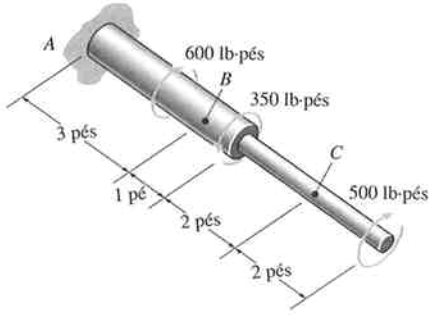
$(M_B)_y = -77{,}8\ \text{N} \cdot \text{m}$ ***Resposta***

$\Sigma(M_B)_z = 0; \quad (M_B)_z = 0$ ***Resposta***

O que indicam os sinais negativos de $(M_B)_x$ e $(M_B)_y$? Observe que a força normal é $N_B = (F_B)_y = 0$, enquanto a força de cisalhamento é $V_B = \sqrt{(0)^2 + (84{,}3)^2} = 84{,}3$ N. Além disso, o momento de torção é $T_B = (M_B)_y = 77{,}8\ \text{N} \cdot \text{m}$, e o momento fletor é $M_B = \sqrt{(30{,}3)^2 + (0)^2} = 30{,}3\ \text{N} \cdot \text{m}$.

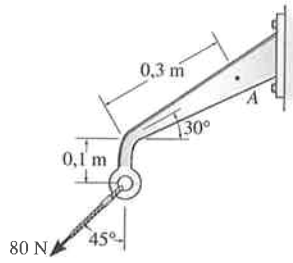
PROBLEMAS

1.1. Determinar o torque da resultante interna que atua nas seções transversais nos pontos B e C.



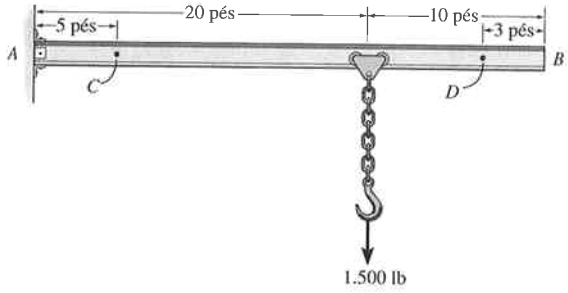
Problema 1.1

1.2. Uma força de 80 N é suportada pelo suporte como mostrado. Determinar a resultante das cargas internas que atuam na seção que passa pelo ponto A.



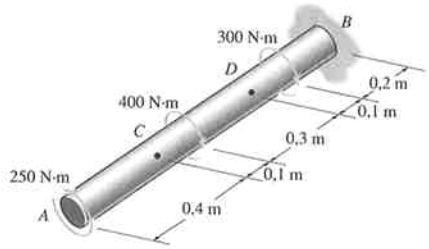
Problema 1.2

1.3. A viga AB está presa na parede e tem peso uniforme de 80 lb/pé. Se o carrinho suporta uma carga de 1.500 lb, determinar a resultante das cargas internas que atuam nas seções transversais dos pontos C e D.



Problema 1.3

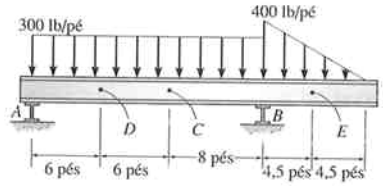
***1.4.** Determinar o torque da resultante interna que atua nas seções transversais dos pontos C e D do eixo. O eixo está fixado em B.



Problema 1.4

1.5. A viga suporta a carga distribuída mostrada. Determinar a carga interna resultante na seção transversal que passa pelo ponto C. Suponha que as reações nos apoios A e B sejam verticais.

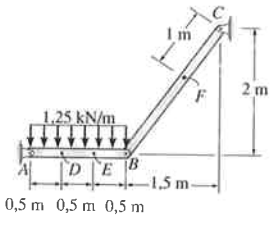
1.6. A viga suporta a carga distribuída mostrada. Determinar a carga interna resultante nas seções transversais que passam pelos pontos D e E. Assumir que as reações nos apoios A e B sejam verticais.



Problemas 1.5/1.6

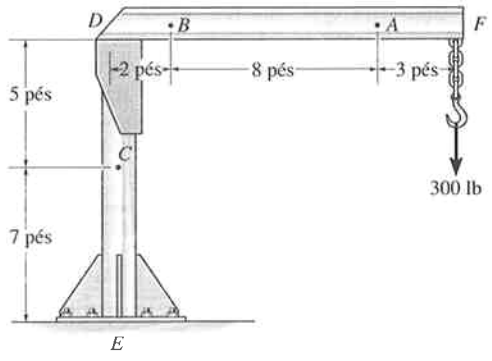
1.7. Determinar a carga interna resultante na seção transversal que passa pelo ponto D no elemento AB.

***1.8.** Determinar a carga interna resultante nas seções transversais que passam pelos pontos E e F do conjunto.



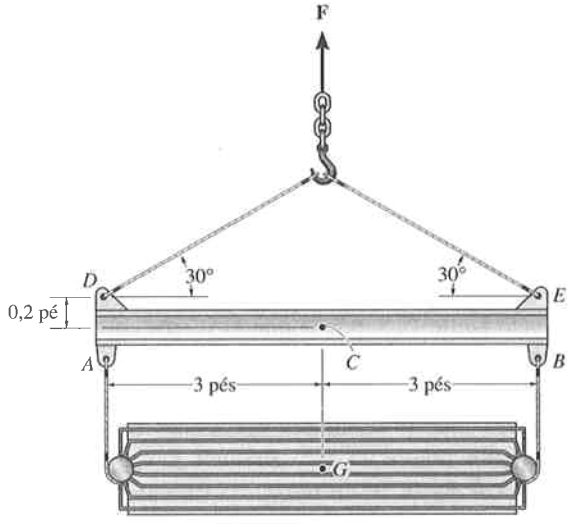
Problemas 1.7/1.8

1.9. A lança *DF* do guindaste giratório e a coluna *DE* têm peso uniforme de 50 lb/pé. Se o guindaste e a carga pesam 300 lb, determinar a carga interna resultante nas seções transversais que passam pelos pontos *A*, *B* e *C* do guindaste.



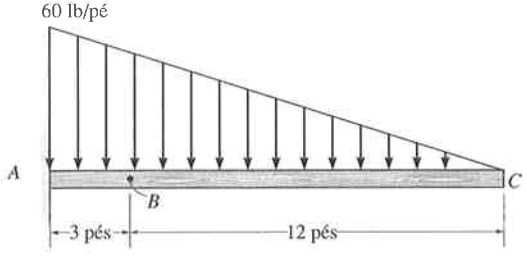
Problema 1.9

1.10. Determinar a carga interna resultante que atua na seção transversal no ponto *C*. A unidade de refrigeração tem peso total de 52 kip e centro de gravidade no ponto *G*.



Problema 1.10

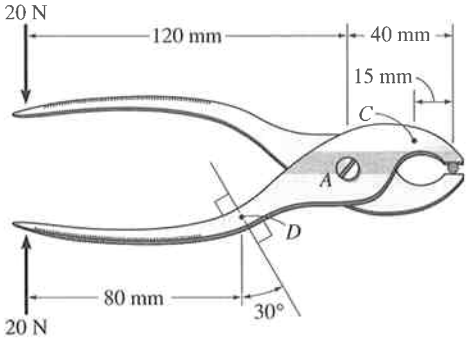
1.11. Determinar a carga interna resultante que atua na seção transversal no ponto *B*.



Problema 1.11

1.12. Determinar a carga interna resultante na seção transversal que passa pelo ponto *C* do alicate. Há um pino em *A*, e as garras em *B* são lisas.

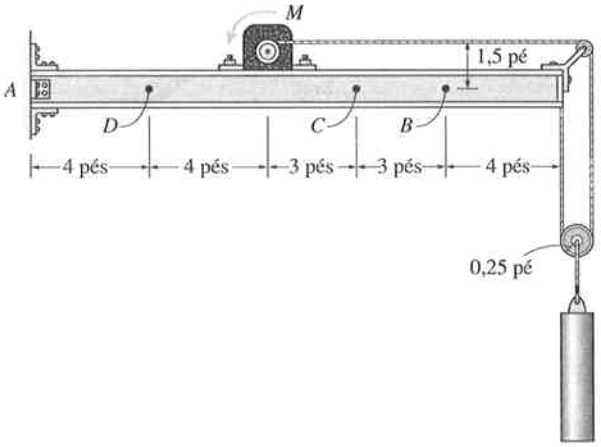
1.13. Determinar a carga interna resultante na seção transversal que passa pelo ponto *D* do alicate.



Problemas 1.12/1.13

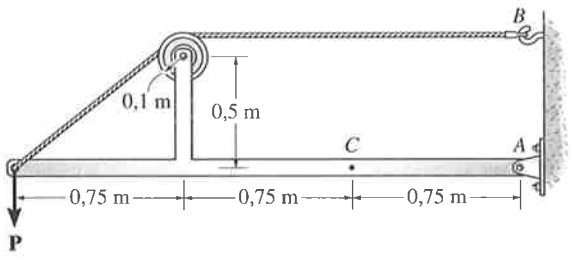
1.14. A carga de 800 lb é levantada com velocidade constante por meio do motor *M*, que tem peso de 90 lb. Determinar a carga interna resultante que atua na seção transversal que passa pelo ponto *B* da viga. A viga tem peso de 40 lb/pé e está presa à parede em *A*.

1.15. Determinar a resultante das cargas internas que atuam nas seções transversais que passam pelos pontos *C* e *D* da viga do Problema 1.14.



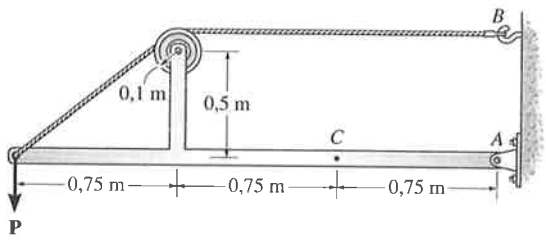
Problemas 1.14/1.15

***1.16.** Determinar a força normal, a força de cisalhamento e o momento na seção que passa pelo ponto *C*. Usar $P = 8$ kN.



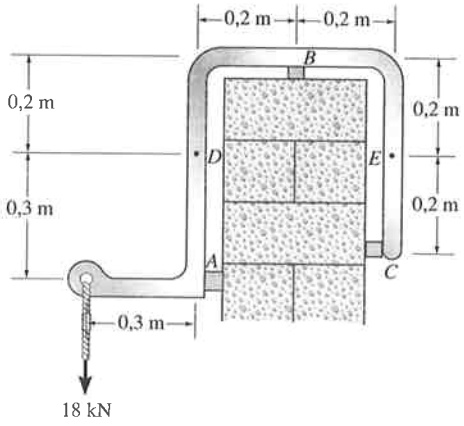
Problema 1.16

1.17. O cabo arrebenta quando submetido a uma força de 2 kN. Determinar a maior carga vertical *P* que a estrutura suporta e calcular a força normal interna, a força de cisalhamento e o momento na seção transversal que passa pelo ponto *C* para aquela carga.



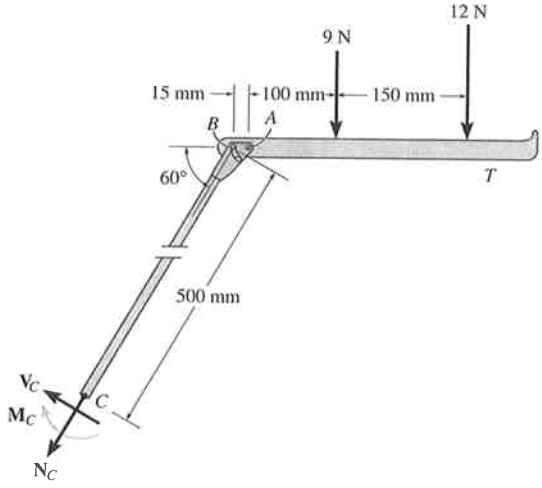
Problema 1.17

1.18. O gancho é usado para apoiar o cabo do andaime na lateral de um prédio. Supondo que ele consista em uma haste lisa que está em contato com o parapeito de uma parede nos pontos A, B e C, determinar a força normal, a força de cisalhamento e o momento nas seções transversais que passam pelos pontos D e E.



Problema 1.18

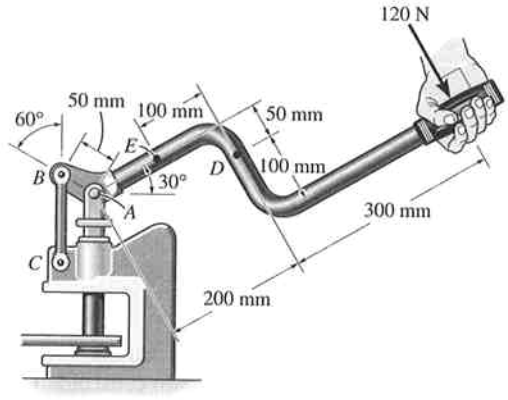
1.19. A mesinha T usada em um avião é apoiada em *cada lado* por um braço. A mesinha é acoplada ao braço em A por um pino e em B há um pino liso. (O pino move-se em um rasgo nos braços para permitir dobrar a mesinha na frente do passageiro quando não estiver em uso.) Determinar a resultante das cargas internas que atuam na seção transversal que passa pelo ponto C do braço quando este suporta as cargas mostradas.



Problema 1.19

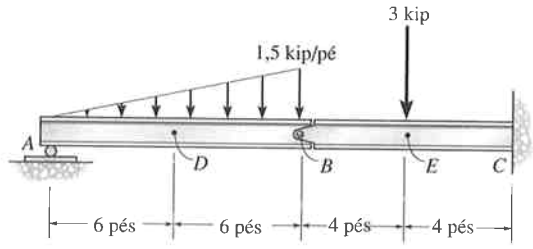
***1.20.** A prensa manual de metal está submetida a uma força de 120 N na extremidade do cabo. Determinar a intensidade da força de reação no pino A e no elo BC. Determinar também a resultante das cargas internas que atuam na seção transversal que passa pelo ponto D do cabo.

1.21. Resolver o Problema 1.20 para a seção transversal no ponto E do cabo e na seção transversal do elo BC.



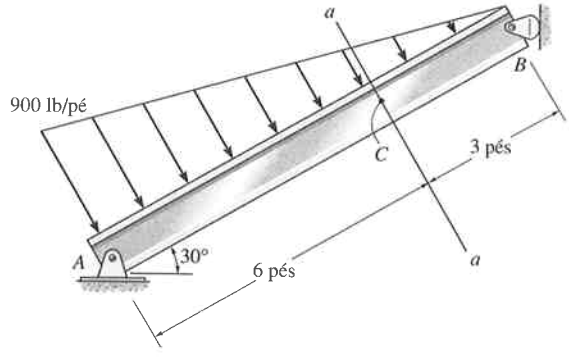
Problemas 1.20/1.21

1.22. Determinar a resultante das cargas internas nas seções transversais que passam pelos pontos D e E. O ponto E localiza-se à direita da carga de 3 kip.



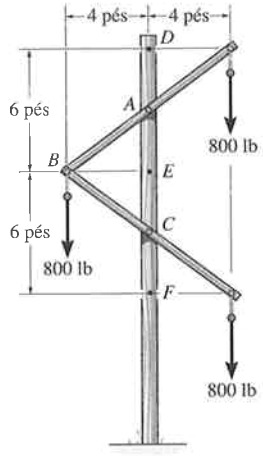
Problema 1.22

1.23. Determinar a resultante das cargas internas que atuam sobre a seção a–a que passa pelo centróide C da viga.



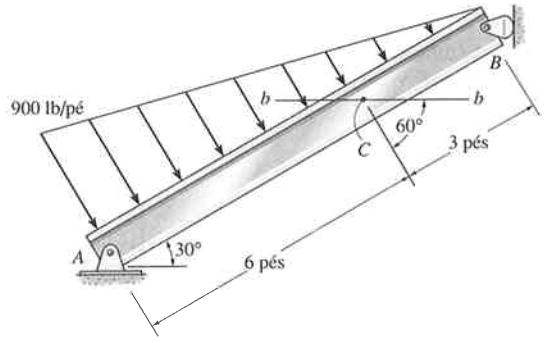
Problema 1.23

***1.24.** A estrutura do poste de energia suporta três linhas, cada uma exercendo uma força de 800 lb nas escoras. Supondo que as escoras estejam acopladas com pinos em A, B e C, determinar a resultante das cargas internas nas seções transversais que passam pelos pontos D, E e F.



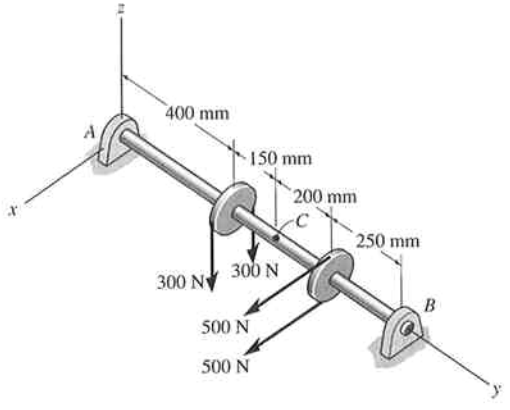
Problema 1.24

1.25. Determinar a resultante das cargas internas que atuam sobre a seção *b–b* que passa pelo centróide *C* da viga.



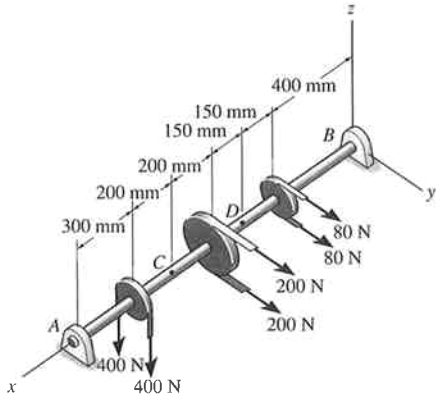
Problema 1.25

1.26. O eixo é apoiado em suas extremidades por dois mancais em *A* e *B* e está sujeito às forças aplicadas nas roldanas presas ao eixo. Determinar a resultante das cargas internas que atuam na seção transversal localizada no ponto *C*. As forças de 300 N atuam na direção –*z*, e as de 500 N atuam na direção +*x*. Os mancais *A* e *B* exercem somente os componentes *x* e *z* da força sobre o eixo.



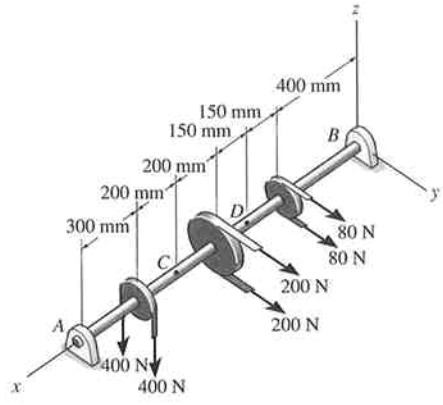
Problema 1.26

1.27. O eixo é apoiado em suas extremidades por dois mancais *A* e *B* e está sujeito às forças aplicadas nas roldanas presas a ele. Determinar a resultante das cargas internas que atuam na seção transversal do ponto *D*. Enquanto as forças de 400 N atuam na direção –*z*, as de 200 N e 80 N atuam na direção +*y*. Os mancais *A* e *B* exercem somente os componentes *y* e *z* da força sobre o eixo.



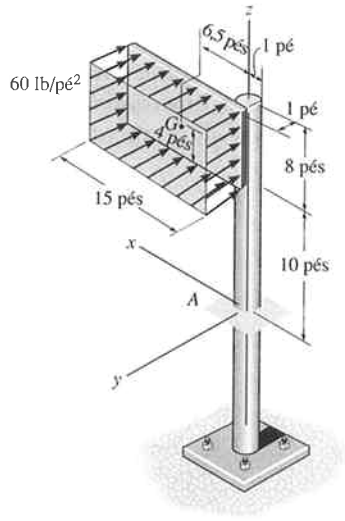
Problema 1.27

***1.28.** O eixo é apoiado em suas extremidades por dois mancais *A* e *B* e está sujeito às forças aplicadas nas roldanas presas a ele. Determinar a resultante das cargas internas que atuam na seção transversal do ponto *C*. Enquanto as forças de 400 N atuam na direção –*z*, as de 200 N e 80 N atuam na direção +*y*. Os mancais *A* e *B* exercem somente os componentes *y* e *z* da força sobre o eixo.



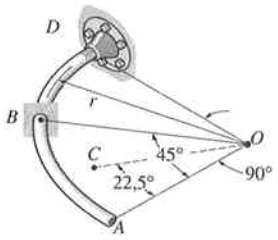
Problema 1.28

1.29. O sinalizador tem peso de 1.500 lb e centro de gravidade em *G*. Supondo que ele esteja sujeito a uma carga uniforme do vento de 60 lb/pé^2, determinar a resultante das forças internas que atuam na seção transversal do poste em *A*. O peso do poste é de 100 lb/pé.



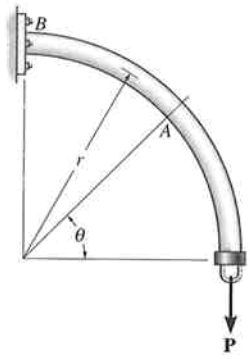
Problema 1.29

1.30. A haste curva AD de raio r tem peso por comprimento de w. Supondo que ela esteja localizada no plano horizontal, determinar a resultante das cargas internas que atuam na seção transversal que passa pelo ponto B. *Dica:* a distância do centróide C do segmento AB ao ponto O é $CO = 0{,}9745r$.



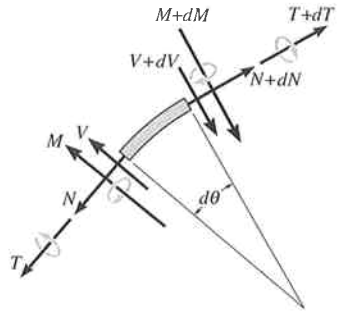
Problema 1.30

1.31. A haste curva tem raio r e está presa à parede em B. Determinar a resultante das cargas internas que atuam sobre a seção transversal que passa pelo ponto A, localizado em um ângulo θ com a horizontal.



Problema 1.31

***1.32.** Um elemento infinitesimal tirado de uma barra curva é mostrado na figura. Demonstrar que $dN/d\theta = V$, $dV/d\theta = -N$, $dM/d\theta = -T$, e $dT/d\theta = M$.



Problema 1.32

1.3 TENSÃO

Vimos na Seção 1.2 que a força e o momento que atuam em determinado ponto na área da seção de um corpo (Figura 1.9) representam os efeitos resultantes da *distribuição da força* que atua na área secionada (Figura 1.10*b*). Determinar a *distribuição* das cargas internas é de primordial importância na resistência dos materiais. Para resolver esse problema é necessário estabelecer o conceito de tensão.

Considere que a seção da área seja subdividida em áreas pequenas, tal como ΔA mostrada em sombreado escuro na Figura 1.10*a*. Quando se reduz ΔA a tamanhos cada vez menores, devem-se supor duas hipóteses em relação às propriedades do material. Devemos considerar que o material é ***contínuo***, isto é, possui *continuidade* ou distribuição uniforme de matéria, sem vazios, em vez de ser composto por um número finito de átomos ou moléculas distintos. Além disso, o material deve ser ***coeso***, o que significa que todas as suas partes estão muito bem unidas, em vez de ter trincas, separações ou outras falhas. Uma força típica finita $\Delta\mathbf{F}$, mas muito pequena, atuando sobre sua área associada ΔA é mostrada na Figura 1.10*a*. Essa força, como todas as demais, tem direção única, mas para as discussões que se seguem a substituiremos por seus *três componentes*, a saber, $\Delta\mathbf{F}_x$, $\Delta\mathbf{F}_y$ e $\Delta\mathbf{F}_z$, assumidos como tangentes e normal

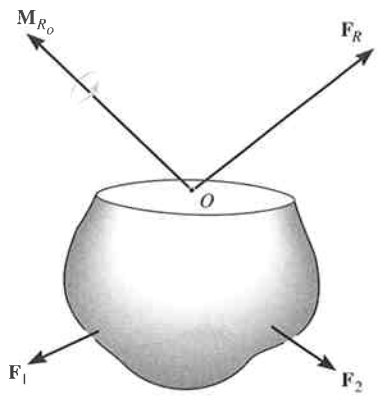


Figura 1.9

à área, respectivamente. Da mesma forma que a área ΔA tende a zero, a força $\Delta\mathbf{F}$ e seus componentes também tendem a zero; entretanto, a relação (divisão) entre a força e a área, em geral, tende para um limite finito. Essa relação é chamada *tensão* e, como observado, descreve a *intensidade da força interna* sobre um *plano específico* (área) que passa por determinado ponto.

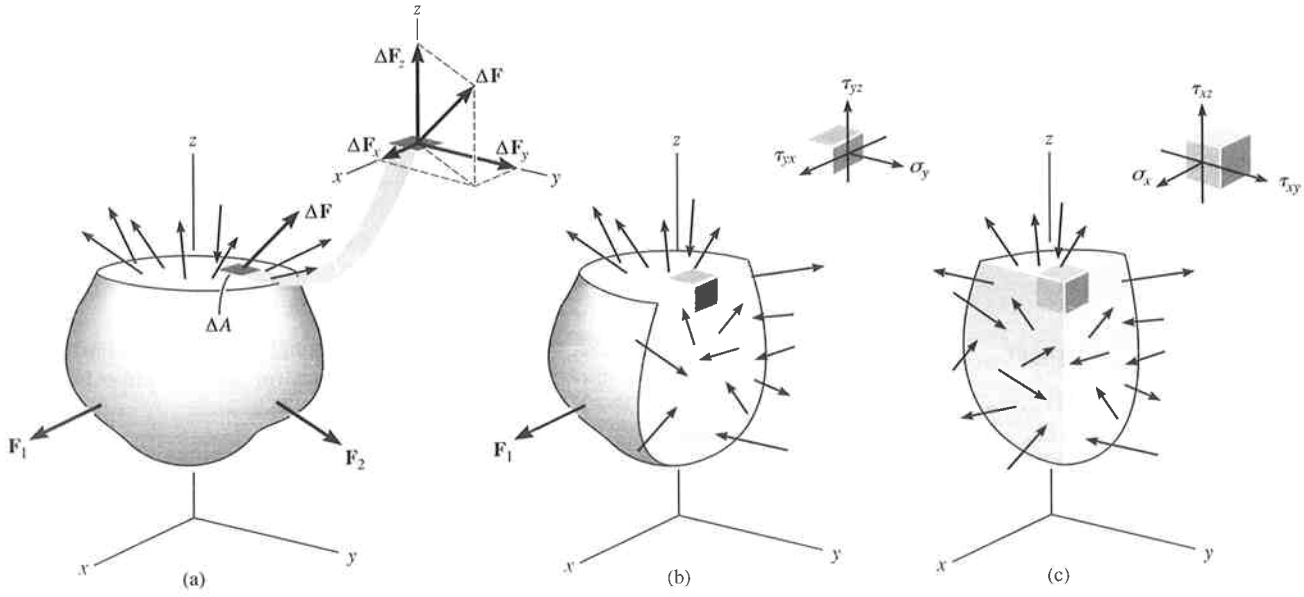


Figura 1.10

Tensão Normal. A *intensidade* da força, ou força por unidade de área, que atua no sentido perpendicular a ΔA, é definida como ***tensão normal***, σ (sigma). Visto que $\Delta\mathbf{F}_z$ é normal à área, então:

$$\sigma_z = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A} \tag{1.4}$$

Se a força normal ou tensão 'empurra' o elemento de área ΔA como mostrado na Figura 1.10*a*, é denominada *tensão de tração*, ao passo que se 'puxa' ΔA é chamada *tensão de compressão*.

Tensão de Cisalhamento. A intensidade da força, ou força por unidade de área, que atua tangente a ΔA, é chamada ***tensão de cisalhamento***, τ (tau). Os componentes da tensão de cisalhamento são:

$$\tau_{zx} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A}$$

$$\tau_{zy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A} \tag{1.5}$$

Observe que o índice z em σ_z é usado para indicar a *direção* que se afasta da reta normal, a qual especifica a orientação da área ΔA (Figura 1.11). São usados dois índices para os componentes τ_{zx} e τ_{zy}. O eixo de z especifica a orientação da área, enquanto x e y referem-se às retas de direção das tensões de cisalhamento.

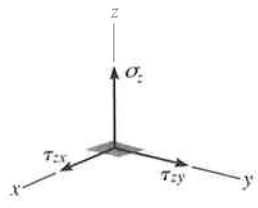
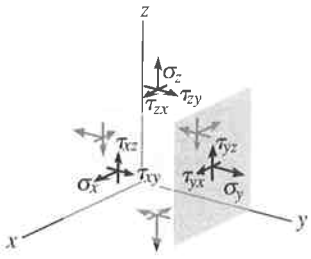


Figura 1.11

Estado Geral da Tensão. Se o corpo for também secionado por planos paralelos ao plano x–z (Figura 1.10*b*) e ao plano y–z (Figura 1.10*c*), podemos então 'cortar' um elemento cúbico do volume do material. Esse elemento cúbico representa o ***estado de tensão*** que atua em torno do ponto escolhido do corpo (Figura 1.12). Esse estado de tensão é então caracterizado pelos três componentes que atuam em cada face do elemento. Esses componentes da

tensão descrevem o estado de tensão no ponto apenas para o elemento orientado ao longo dos eixos x, y, z. Caso o corpo tivesse sido secionado em um cubo com outra orientação, então o estado de tensão seria definido por meio de um conjunto diferente de componentes da tensão.



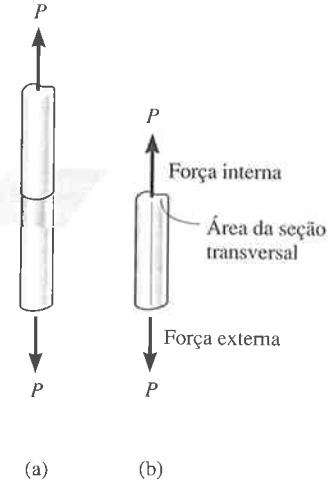
Estado geral da tensão

Figura 1.12

Unidades. No Sistema Internacional de Normas ou SI, a intensidade tanto da tensão normal quanto da tensão de cisalhamento é especificada na unidade básica de newtons por metro quadrado (N/m^2). Como essa unidade, denominada *pascal* (1 Pa = 1 N/m^2), é muito pequena, nos trabalhos de engenharia são usados prefixos, como quilo (10^3), simbolizado por k, mega (10^6), simbolizado por M, ou giga (10^9), simbolizado por G, para representar valores da tensão maiores e mais realistas.[3] De maneira semelhante, no sistema de unidades usual norte-americano, ou sistema Pés-Libras-Segundo, os engenheiros expressam a tensão em libras por polegada quadrada (psi) ou quilolibra por polegada quadrada (ksi), em que 1 quilolibra (kip) = 1.000 lb.

1.4 TENSÃO NORMAL MÉDIA EM UMA BARRA COM CARGA AXIAL

Freqüentemente os elementos estruturais ou mecânicos são compridos e finos. Além disso, são submetidos a cargas axiais geralmente aplicadas nas extremidades. Elementos de treliça, pendurais e parafusos são exemplos típicos. Nesta seção vamos determinar a distribuição média de tensão que atua na seção transversal de uma barra com carga axial, tal como a barra mostrada na Figura 1.13*a*. Esta seção define a ***área da seção transversal*** da barra e, caso todas as seções transversais sejam iguais, a barra será denominada ***prismática***. Se desprezarmos o peso da barra e a secionarmos como indicado, então, para o equilíbrio do segmento inferior (Figura 1.13*b*), a resultante da força interna que atua na seção transversal deverá ser igual em intensidade, oposta em direção e colinear à força externa que atua na extremidade inferior da barra.



Hipóteses. Antes de determinarmos a distribuição média de tensão que atua na área da seção transversal da barra, é necessário estabelecer duas hipóteses simplificadoras referentes à descrição do material e à aplicação específica da carga.

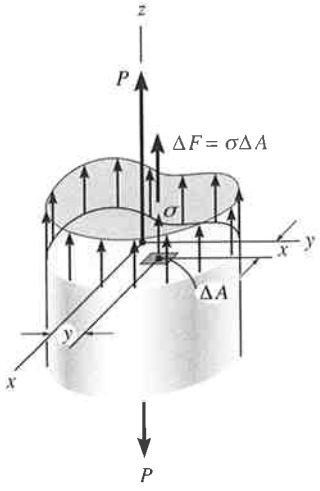
1. É necessário que a barra permaneça reta tanto antes como depois de a carga ser aplicada, e, além disso, a seção transversal deve permanecer plana durante a deformação, isto é, durante o tempo em que a barra muda seu volume e sua forma. Se essas duas hipóteses ocorrem, então as linhas horizontais e verticais da grade inscrita na barra *deformam-se uniformemente* quando a barra está submetida à carga (Figura 1.13*c*). Não consideraremos as regiões da barra próximas às suas extremidades, onde a aplicação de forças externas pode provocar *distorções localizadas*. Em vez disso, focalizaremos apenas a distribuição de tensão no interior da seção média da barra.

2. A fim de que *a barra possa sofrer deformação uniforme*, é necessário que **P** seja aplicada ao longo do *eixo centróide* da seção transversal e o material seja homogêneo e isotrópico. Um ***material homogêneo*** possui as mesmas propriedades físicas e mecânicas em todo o seu volume, e um ***material isotrópico*** possui essas mesmas propriedades em todas as direções. Muitos materiais da engenharia podem ser aproximados como sendo homogêneos e isotrópicos. O aço, por exemplo, contém milhares de cristais orientados aleatoriamente em cada milímetro cúbico de seu volume, mas, como a maioria dos problemas que

Figura 1.13

[3] Às vezes a tensão é expressa em unidades de N/mm^2, em que 1 mm = 10^{-3} m. Entretanto, no SI não são permitidos prefixos para o denominador da fração, sendo melhor usar o equivalente 1 N/mm^2 = 1 MN/m^2 = 1 MPa.

envolvem esse material tem um tamanho físico muito maior do que um simples cristal, a hipótese referente à composição de seu material é bastante realista. Ressalte-se, porém, que o aço pode tornar-se anisotrópico por laminação a frio, isto é, se for laminado ou forjado em temperaturas subcríticas. Os ***materiais anisotrópicos*** possuem propriedades diferentes em direções diferentes, mas, apesar disso, se a anisotropia for orientada ao longo do eixo da barra, então a barra também se deformará uniformemente quando submetida a uma carga axial. Por exemplo, a madeira de construção, devido aos seus grãos ou fibras, é um material de engenharia homogêneo e anisotrópico e, portanto, é adequado para a análise seguinte.



(d)

Figura 1.13

Distribuição da Tensão Normal Média. Visto que a barra está submetida a uma deformação uniforme constante, como observado, então a deformação é o resultado de uma tensão normal *constante* σ (Figura 1.13*d*). O resultado é que cada área ΔA da seção transversal está sujeita a uma força $\Delta F = \sigma \Delta A$, e o *somatório* das forças que atuam sobre toda a área da seção transversal deve ser equivalente à força interna resultante **P** na seção. Se $\Delta A \rightarrow dA$ e, portanto, $\Delta F \rightarrow dF$, então, admitindo que σ seja *constante*, temos:

$$+\uparrow F_{Rz} = \Sigma F_z; \qquad \int dF = \int_A \sigma \, dA$$

$$P = \sigma A$$

$$\boxed{\sigma = \frac{P}{A}} \tag{1.6}$$

Onde:

σ = tensão normal média em qualquer ponto da área da seção transversal

P = resultante da força normal interna, aplicada no *centróide* da área da seção transversal. P é determinada pelo método das seções e pelas equações de equilíbrio

A = área da seção transversal da barra

A carga interna P deve passar pelo centróide da seção transversal, visto que a distribuição da tensão uniforme produzirá momentos nulos em torno de quaisquer eixos x e y que passem por esse ponto (Figura 1.13*d*). Quando essa condição ocorre,

$$(M_R)_x = \Sigma M_x; \qquad 0 = \int_A y \, dF = \int_A y\sigma \, dA = \sigma \int_A y \, dA$$

$$(M_R)_y = \Sigma M_y; \qquad 0 = -\int_A x \, dF = -\int_A x\sigma \, dA = -\sigma \int_A x \, dA$$

Essas equações são na verdade satisfeitas, uma vez que, pela definição de centróide, $\int y \, dA = 0$ e $\int x \, dA = 0$. (Consultar o Apêndice A.)

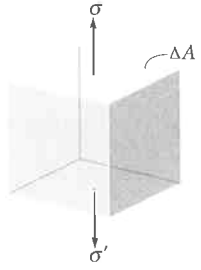


Figura 1.14

Equilíbrio. É evidente que existe apenas uma tensão normal em qualquer elemento de volume do material localizado em cada ponto da seção transversal de uma barra com carga axial. Se considerarmos o equilíbrio na vertical do elemento (Figura 1.14), aplicando então a equação de equilíbrio de força, teremos:

$$\Sigma F_z = 0; \qquad \sigma(\Delta A) - \sigma'(\Delta A) = 0$$

$$\sigma = \sigma'$$

Em outras palavras, os dois componentes da tensão normal no elemento devem ter intensidade igual, mas direções opostas. Essa condição é denominada *tensão uniaxial.*

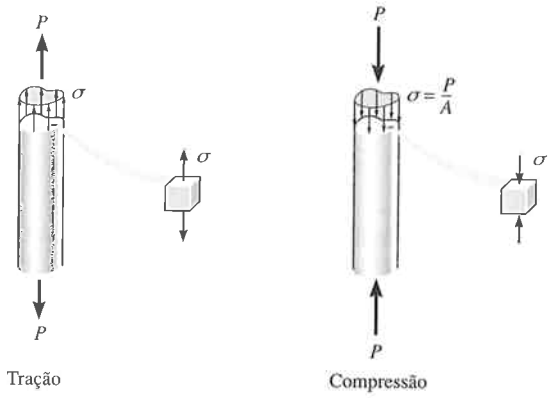


Figura 1.15

A análise anterior aplica-se a elementos submetidos tanto a tração como a compressão, como mostrado na Figura 1.15. Interpretação gráfica: a *intensidade* da força interna resultante **P** é ***equivalente*** ao ***volume*** sob o diagrama de tensão; ou seja, $P = \sigma A$ (volume = altura × base). Além disso, como conseqüência do equilíbrio dos momentos, ***a resultante passa pelo centróide do volume considerado***.

Apesar de termos desenvolvido a análise para barras *prismáticas*, a hipótese pode ser relaxada, de certa forma, para incluir barras *levemente cônicas*. Por exemplo, pode-se demonstrar, usando a análise mais exata da teoria da elasticidade, que em uma barra cônica de seção transversal retangular, com ângulo de 15° entre dois lados adjacentes, a tensão normal média calculada por $\sigma = P/A$ é apenas 2,2% *menor* que o valor calculado pela teoria da elasticidade.

Tensão Normal Média Máxima. Em nossa análise, tanto a força interna P como a área da seção transversal A eram *constantes* ao longo do eixo longitudinal da barra e, como resultado, a tensão normal $\sigma = P/A$ também era *constante* ao longo do comprimento da barra. Entretanto, ocasionalmente, a barra pode ser submetida a *várias* cargas externas ao longo de seu eixo, ou pode ocorrer uma mudança na área de sua seção transversal. Como resultado, a tensão normal no interior da barra pode ser diferente de uma seção para a outra e, se a tensão normal média *máxima* tiver de ser determinada, torna-se importante determinar o local em que a relação P/A chega ao *máximo*. Para tal, é necessário determinar a força interna P em várias seções ao longo da barra. Portanto, é conveniente mostrar essa variação por meio do ***diagrama de força axial ou normal***. O diagrama é um gráfico da força normal P contra sua posição x ao longo do comprimento da barra. Segundo a convenção de sinais, P é positivo se provoca tração no elemento e negativo se provoca compressão. Como a carga interna é conhecida ao longo de toda a barra, a relação máxima P/A pode então ser identificada.

Este tirante é usado para pendurar parte de uma escada e, como resultado, está submetido a esforço de tração.

PONTOS IMPORTANTES

- Quando um corpo que está submetido a uma carga externa é secionado, há distribuição da força que atua sobre a área secionada, a qual mantém cada segmento do corpo em equilíbrio. A intensidade dessa força interna em um ponto do corpo é denominada *tensão*.
- Tensão é o valor limite da força por unidade de área quando a área tende a zero. Nessa definição, o material no ponto é considerado contínuo e coesivo.
- Em geral, há seis componentes independentes da tensão em cada ponto do corpo, consistindo de *tensão normal*, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, e *tensão de cisalhamento*, $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$.
- A intensidade desses componentes depende do tipo de carga que atua sobre o corpo e da orientação do elemento no ponto.
- Quando uma barra prismática é feita de material homogêneo e isotrópico e está submetida a força axial que atua sobre o centróide da área da seção transversal, então o material do interior da barra é submetido *apenas à tensão normal*. Supõe-se que tal tensão seja uniforme ou *ponderada* na área da seção transversal.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

A equação $\sigma = P/A$ fornece a tensão normal *média* na área da seção transversal de um elemento quando a seção está submetida à resultante interna da força normal **P**. Em elementos com carga axial, a aplicação da equação requer os passos seguintes.

Carga Interna

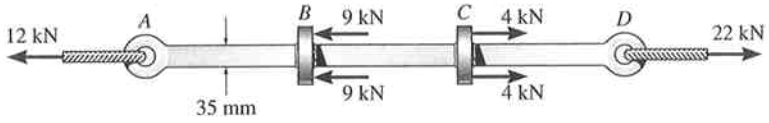
- Seccionar o elemento *perpendicular* ao seu eixo longitudinal no ponto em que a tensão normal será determinada e usar o diagrama de corpo livre necessário e a equação de equilíbrio de força para obter a força axial interna **P** na seção.

Tensão Normal Média

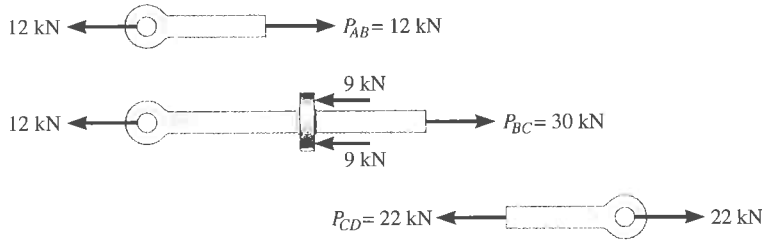
- Determinar a área da seção transversal do elemento e calcular a tensão normal média $\sigma = P/A$.
- Sugere-se que σ seja mostrado atuando sobre um elemento de volume pequeno do material localizado no ponto da seção em que a tensão será calculada. Para tal, primeiro desenhe σ na face do elemento que coincide com a área secionada A. Nesse caso, σ atua na *mesma direção* que a força interna **P**, uma vez que todas as tensões normais na seção transversal atuam nessa direção para criar a resultante. A tensão normal σ que atua na face oposta do elemento é desenhada na direção apropriada.

EXEMPLO 1.6

A barra da Figura 1.16*a* tem largura constante de 35 mm e espessura de 10 mm. Determinar a tensão normal média máxima da barra quando submetida ao carregamento mostrado.



(a)

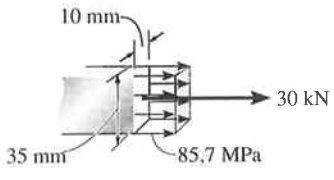


(b)

(c)

SOLUÇÃO

Carga Interna. O exame das figuras mostra que as forças axiais internas nas regiões *AB*, *BC* e *CD* são todas constantes, mas de intensidades diferentes. Os valores das cargas, determinados pelo método das seções, são mostrados na Figura 1.16*b*; o diagrama de força normal, que representa graficamente o resultado, é mostrado na Figura 1.16*c*. O exame das figuras mostra ainda que a maior carga está na região *BC*, onde $P_{BC} = 30$ kN. Como a área da seção transversal da barra é *constante*, a maior tensão normal média também ocorre nessa região.



(d)

Figura 1.16

Tensão Normal Média. Aplicando a Equação 1.6, temos:

$$\sigma_{BC} = \frac{P_{BC}}{A} = \frac{30(10^3)\text{ N}}{(0{,}035\text{ m}) \times 0{,}010\text{ m})} = 85{,}7\text{ MPa} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

A distribuição da tensão que atua em uma seção arbitrária da barra na região BC é mostrada na Figura 1.16*d*. Graficamente, o *volume* (ou 'bloco') representado por essa distribuição de tensão equivale à carga de 30 kN; isto é, 30 kN = (87,5 MPa)(35 mm)(10 mm).

EXEMPLO 1.7

A luminária de 80 kg é suportada por duas hastes AB e BC como mostra a Figura 1.17*a*. Se AB tem diâmetro de 10 mm, e BC tem diâmetro de 8 mm, determinar a tensão normal média em cada haste.

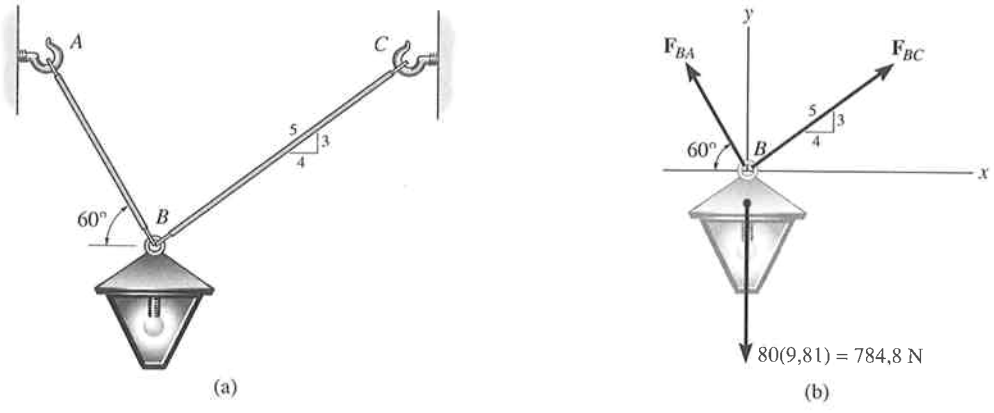


Figura 1.17

SOLUÇÃO

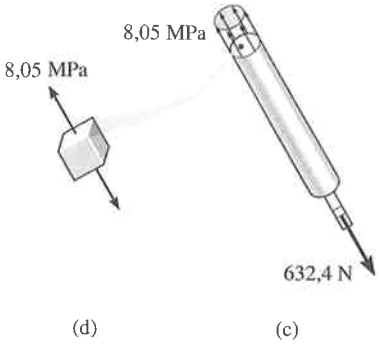
Carga Interna. Devemos determinar primeiro a força axial em cada haste. O diagrama de corpo livre da luminária é mostrado na Figura 1.17*b*. Aplicando as equações de equilíbrio das força, obtemos:

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad F_{BC}\left(\tfrac{4}{5}\right) - F_{BA}\cos 60° = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad F_{BC}\left(\tfrac{3}{5}\right) + F_{BA}\,\text{sen}\,60° - 784{,}8\text{ N} = 0$$

$$F_{BC} = 395{,}2\text{ N}, \qquad F_{BA} = 632{,}4\text{ N}$$

Pela terceira lei de Newton referente à ação, essas forças, iguais mas de reação oposta, submetem a haste à tração em todo seu comprimento.



Tensão Normal Média. Aplicando a Equação 1.6, temos:

$$\sigma_{BC} = \frac{F_{BC}}{A_{BC}} = \frac{395{,}2\text{ N}}{\pi(0{,}04\text{ m})^2} = 7{,}86\text{ MPa} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

$$\sigma_{BA} = \frac{F_{BA}}{A_{BA}} = \frac{632{,}4\text{ N}}{\pi(0{,}005\text{ m})^2} = 8{,}05\text{ MPa} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

A distribuição da tensão normal média que atua na seção transversal da haste AB é mostrada na Figura 1.17*c*; em um ponto qualquer dessa seção transversal, um elemento de material é tensionado como mostrado na Figura 1.17*d*.

EXEMPLO 1.8

O bloco fundido mostrado na Figura 1.18*a* é feito de aço com peso específico de $\gamma_{aço} = 490$ lb/pé^3. Determinar o esforço de compressão médio que atua nos pontos A e B.

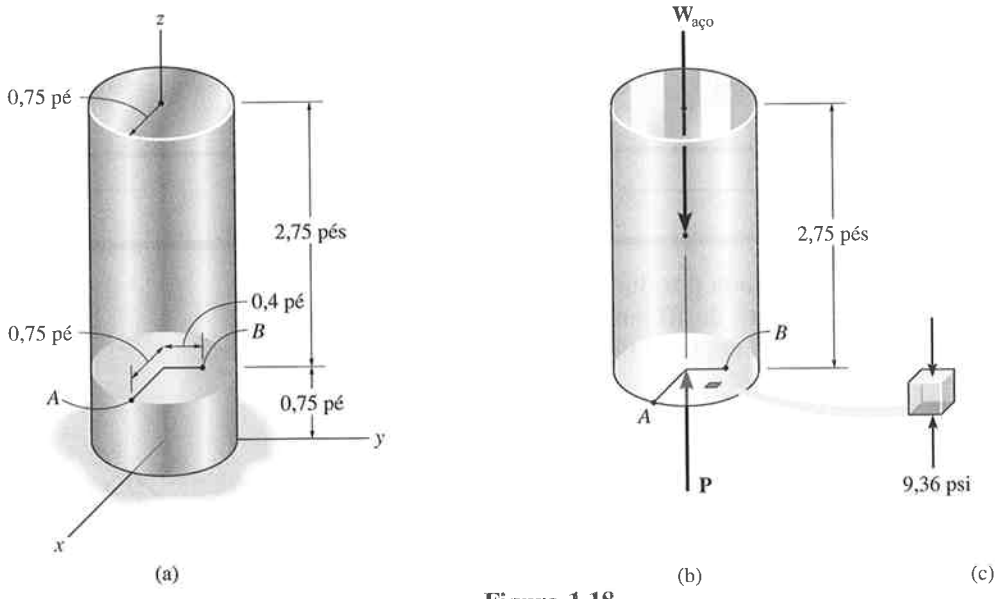


Figura 1.18

SOLUÇÃO

Carga Interna. Um diagrama de corpo livre do segmento superior do bloco fundido, no qual a seção passa pelos pontos A e B, é mostrado na Figura 1.18*b*. O peso desse segmento é determinado por $W_{aço} = \gamma_{aço} V_{aço}$. Assim, a força axial interna P na seção é:

$$+\uparrow \Sigma F_z = 0; \qquad P - W_{aço} = 0$$

$$P - (490 \text{ lb/pé}^3)(2{,}75 \text{ pés})\pi(0{,}75 \text{ pé})^2 = 0$$

$$P = 2.381 \text{ lb}$$

Esforço de Compressão Médio. A área da seção transversal é $A = \pi(0{,}75 \text{ pé})^2$; assim, o esforço de compressão médio torna-se:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{2.381}{\pi(0{,}75 \text{ pé})^2}$$

$$= 1.347{,}5 \text{ lb/pé}^2 = 1.347{,}5 \text{ lb/pé}^2(1 \text{ pé}^2/144 \text{ pol}^2)$$

$$= 9{,}36 \text{ psi} \qquad \textit{Resposta}$$

A tensão no elemento de volume do material mostrada na Figura 1.18*c* representa as condições tanto do ponto A como do ponto B. Observe que a tensão atua *para cima* na face inferior ou sombreada do elemento, uma vez que essa face é parte da área da superfície inferior do corte e, nessa superfície, a resultante da força interna **P** empurra para cima.

EXEMPLO 1.9

O elemento AC mostrado na Figura 1.19*a* está submetido a uma força vertical de 3 kN. Determinar a posição x de aplicação da força de modo que o esforço de compressão médio no apoio C seja igual ao esforço de tração no tirante AB. A haste tem uma área de seção transversal de 400 mm^2, e a área de contato em C é de 650 mm^2.

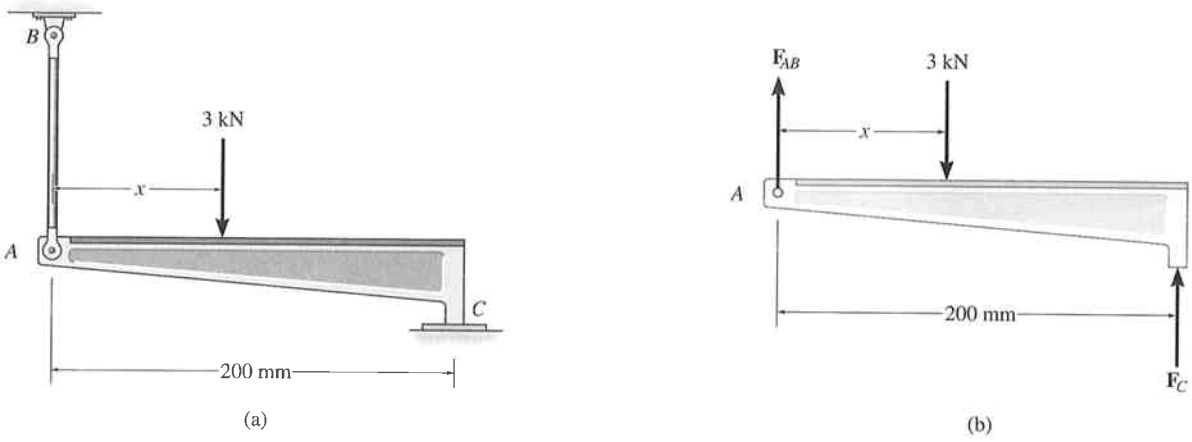


Figura 1.19

SOLUÇÃO

Carga Interna. As forças em A e C podem ser relacionadas considerando-se o diagrama de corpo livre do elemento AC (Figura 1.19*b*). Há três incógnitas, ou seja, F_{AB}, F_C e x. Na solução do problema, usaremos as unidades newton e milímetro.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad F_{AB} + F_C - 3.000\ \text{N} = 0 \qquad (1)$$

$$\circlearrowleft^{+} \Sigma M_A = 0; \qquad -3.000\ \text{N}(x) + F_C\ (200\ \text{mm}) = 0 \qquad (2)$$

Tensão Normal Média. Uma terceira equação necessária pode ser escrita, desde que a tensão de tração na barra AB e a tensão de compressão em C sejam equivalentes, ou seja:

$$\sigma = \frac{F_{AB}}{400\ \text{mm}^2} = \frac{F_C}{650\ \text{mm}^2}$$

$$F_C = 1{,}625 F_{AB}$$

Substituindo esse valor na Equação 1 e resolvendo para F_{AB} e depois para F_C, obtemos:

$$F_{AB} = 1.143\ \text{N}$$
$$F_C = 1.857\ \text{N}$$

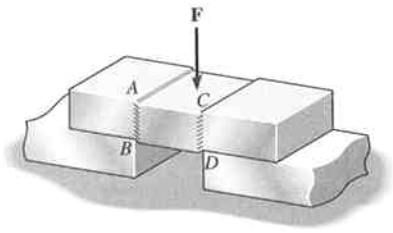
A posição da carga aplicada é determinada pela Equação 2:

$$x = 124\ \text{mm} \qquad \textit{Resposta}$$

Observe que $0 < x < 200$ mm, como requerido.

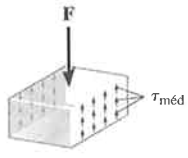
1.5 TENSÃO DE CISALHAMENTO MÉDIA

A tensão de cisalhamento foi definida na Seção 1.3 como o componente da tensão que atua *no plano* da área secionada. A fim de mostrar como essa tensão desenvolve-se, consideraremos o efeito da aplicação de uma força **F** à barra da Figura 1.20*a*. Se seus apoios forem considerados rígidos e **F** for suficientemente grande, ela provocará deformação e falha da barra ao longo dos planos identificados como AB e CD. O diagrama de corpo livre do segmento central não apoiado da barra (Figura 1.20*b*) indica que a força de cisalhamento $V = F/2$ deve ser aplicada em cada seção para manter o segmento em equilíbrio. A **tensão de cisalhamento média** distribuída sobre cada área secionada que desenvolve essa força de cisalhamento é definida por:



(a)

(b)



(c)

Figura 1.20

$$\tau_{méd} = \frac{V}{A} \tag{1.7}$$

Onde:

$\tau_{méd}$ = tensão de cisalhamento média na seção, que se supõe ser a *mesma* em cada ponto localizado na seção

V = resultante interna da força de cisalhamento na seção determinada pelas equações de equilíbrio

A = área da seção

A distribuição da tensão de cisalhamento média é mostrada atuando sobre as seções na Figura 1.20*c*. Observe que $\tau_{méd}$ tem a *mesma direção* que **V**, visto que a tensão de cisalhamento deve criar forças associadas, todas elas contribuindo para a força resultante interna **V** da seção.

O caso do carregamento discutido na Figura 1.20 é um exemplo de ***cisalhamento simples ou direto***, uma vez que o cisalhamento é provocado pela *ação direta* da carga aplicada **F**. Esse tipo de cisalhamento ocorre freqüentemente em vários tipos de acoplamentos simples que usam parafusos, pinos, material de solda etc. Em todos esses casos, no entanto, a aplicação da Equação 1.7 é *apenas aproximada*. Uma investigação mais precisa da distribuição cisalhamento-tensão sobre a seção crítica revela, em geral, que ocorrem tensões de cisalhamento muito maiores no material do que as previstas pela equação. Apesar disso, a aplicação da Equação 1.7 é aceitável para muitos problemas de projeto e análise da engenharia. As normas de engenharia permitem seu uso, por exemplo, quando se quer calcular as dimensões de elementos de fixação, tais como parafusos, ou para se obter a resistência de fixação de juntas sujeitas a cargas de cisalhamento. A propósito, na prática ocorrem dois tipos de cisalhamento, os quais merecem tratamento distinto.

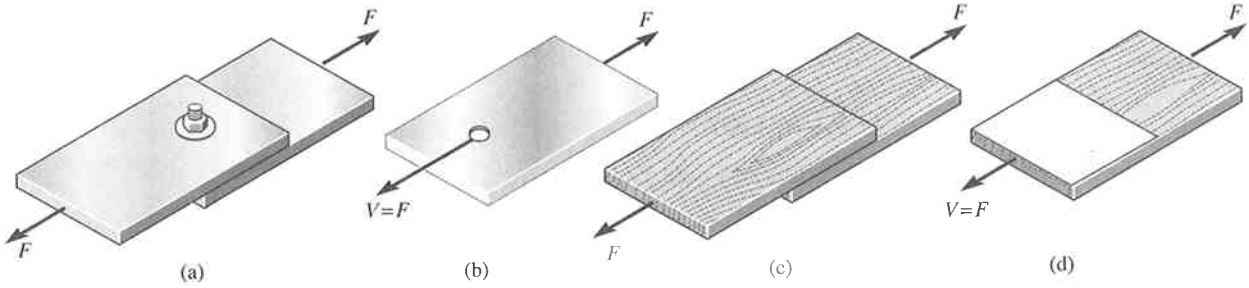
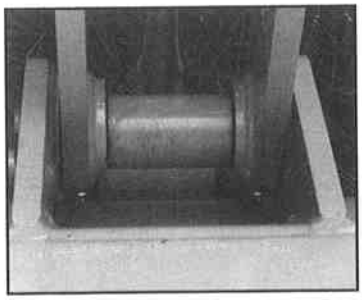


Figura 1.21



O pino deste trator está submetido a cisalhamento duplo.

Cisalhamento Simples. As juntas de aço e madeira mostradas, respectivamente, nas figuras 1.21*a* e 1.21*c* são exemplos de ***acoplamentos de cisalhamento simples*** e geralmente se denominam *juntas sobrepostas*. Vamos supor que os elementos sejam finos e que a porca da Figura 1.21*a* não esteja muito apertada, de modo que o atrito entre os elementos possa ser desprezado. Fazendo um corte entre os elementos, obtêm-se os diagramas de corpo livre mostrados nas figuras 1.21*b* e 1.21*d*. Como os elementos são finos, podemos desprezar o momento criado pela força F. Então, no equilíbrio, a área da seção transversal do parafuso da Figura 1.21*b* e a superfície de fixação entre os elementos da Figura 1.21*d* estão submetidas apenas a uma *força de cisalhamento simples* $V = F$. Essa força é usada na Equação 1.7 para determinar a tensão de cisalhamento média que atua na seção cinza-claro da Figura 1.21*d*.

Cisalhamento duplo. Quando a junta é construída como mostrado na Figura 1.22*a* ou na Figura 1.22*c*, devem ser consideradas duas superfícies de cisalhamento. Esses tipos de acoplamentos são geralmente chamados de *juntas de dupla sobreposição*. Se fizermos um corte entre cada um dos elementos, os diagramas de corpo livre do elemento central serão como os mostrados nas figuras 1.22*b* e 1.22*d*. Nesse caso, temos uma condição de **cisalhamento duplo**. Por conseqüência, $V = F/2$ atua em *cada* área secionada e o cisalhamento deve ser considerado quando se aplica $\tau_{méd} = V/A$.

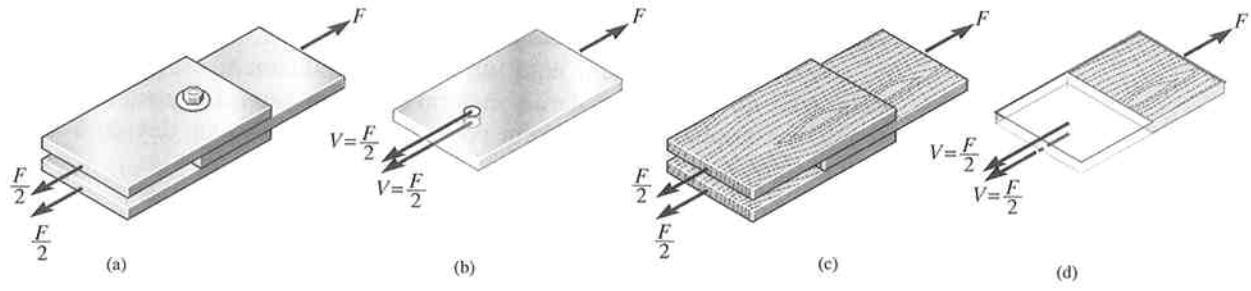


Figura 1.22

Equilíbrio. Consideremos um elemento de volume do material removido em um ponto localizado sobre a superfície de qualquer área secionada sobre a qual atue a tensão de cisalhamento média (Figura 1.23*a*). Se considerarmos a força de equilíbrio na direção de y, então:

$$\Sigma F_y = 0; \qquad \underbrace{\tau_{zy}}_{\text{tensão}}\underbrace{(\Delta x \Delta y)}_{\text{área}} - \underbrace{\tau'_{zy}}_{\text{força}}\Delta x \Delta y = 0$$

$$\tau_{zy} = \tau'_{zy}$$

De maneira similar, a força de equilíbrio na direção de z produz $\tau_{yz} = \tau'_{yz}$. Por fim, considerando o momento sobre o eixo x:

$$\Sigma M_x = 0; \qquad \underbrace{\underbrace{\underbrace{-\tau_{zy}}_{\text{tensão}}\underbrace{(\Delta x \Delta y)}_{\text{área}}}_{\text{força}}\Delta z}_{\text{momento}} + \underbrace{\underbrace{\tau_{yz}}_{\text{tensão}}\underbrace{(\Delta x \Delta z)}_{\text{área}}\Delta y}_{\text{momento}} = 0$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz}$$

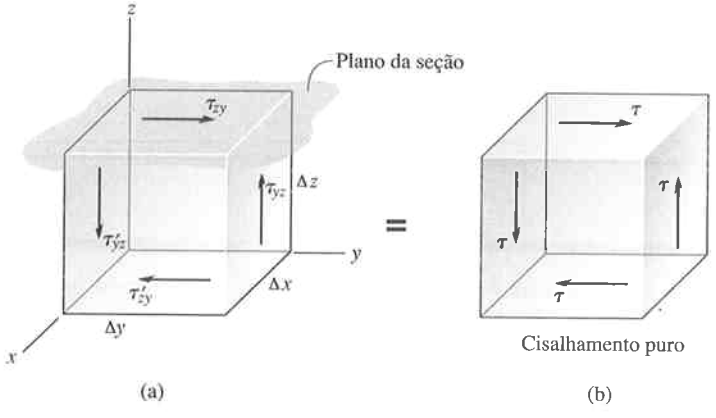


Figura 1.23

de modo que:

$$\tau_{zy} = \tau'_{zy} = \tau_{yz} = \tau'_{yz} = \tau$$

Em outras palavras, o equilíbrio de força e momento requer que a tensão de cisalhamento que atua na face superior do elemento seja acompanhada por uma tensão de cisalhamento que atue nas outras três faces (Figura 1.23*b*). Nesse caso, ***as quatro tensões de cisalhamento devem ter intensidades iguais e ser direcionadas no mesmo sentido ou em sentido contrário uma da outra nas bordas opostas do elemento***. Essa condição é chamada de *propriedade complementar do cisalhamento* e, nas condições mostradas na Figura 1.23, o material está submetido a *cisalhamento puro*.

Apesar de considerar aqui um caso de cisalhamento simples provocado pela ação *direta* de uma carga, mostraremos em capítulos posteriores que a tensão de cisalhamento também pode surgir *indiretamente* devido à ação de outros tipos de carga.

PONTOS IMPORTANTES

- Se duas peças *finas ou pequenas* forem acopladas, as cargas aplicadas podem provocar cisalhamento do material com flexão desprezível. Se esse for o caso, geralmente é aceitável para análise técnica supor que uma *tensão de cisalhamento média* atua na área da seção transversal.
- Muitas vezes os elementos de fixação, tais como pregos e parafusos, são submetidos a cargas de cisalhamento. A intensidade da força de cisalhamento sobre o elemento de fixação é maior ao longo do plano que passa pelas superfícies que estão sendo acopladas. Um diagrama de corpo livre de um segmento do elemento de fixação, desde que desenhado cuidadosamente, permitirá que se obtenham a intensidade e a direção dessa força.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

A equação $\tau_{méd} = V/A$ é usada para calcular somente a *tensão de cisalhamento média* sobre o material. Sua aplicação requer os passos seguintes.

Cisalhamento Interno.

- Secionar o elemento no ponto em que a tensão de cisalhamento deve ser determinada.
- Desenhar o diagrama de corpo livre da seção estudada e calcular a força de cisalhamento interna **V** que atua na seção, necessária para manter a peça em equilíbrio.

Tensão de Cisalhamento Média.

- Determinar a área secionada A e calcular a tensão de cisalhamento média $\tau_{méd} = V/A$.
- Sugere-se que $\tau_{méd}$ seja mostrada em um elemento de volume pequeno do material, no ponto da seção em que ela será determinada. Para isso, desenhar primeiro $\tau_{méd}$ na face do elemento coincidente com a área secionada A. Essa tensão de cisalhamento atua na mesma direção que **V**. A tensão de cisalhamento que atua sobre os três planos adjacentes pode então ser desenhada nas suas direções apropriadas seguindo o esquema mostrado na Figura 1.23.

EXEMPLO 1.10

A barra mostrada na Figura 1.24*a* tem seção transversal quadrada para a qual a profundidade e a largura são de 40 mm. Supondo que seja aplicada uma força axial de 800 N ao longo do eixo do centróide da área da seção transversal da barra, determinar a tensão normal média e a tensão de cisalhamento média que atuam sobre o material (*a*) no plano da seção *a–a* e (*b*) no plano da seção *b–b*.

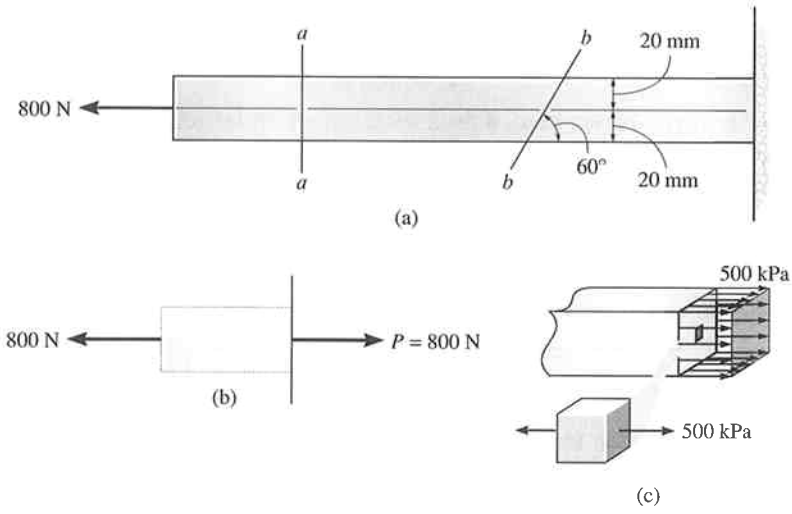


Figura 1.24

SOLUÇÃO

Parte (a)

Carga Interna. A barra está secionada (Figura 1.24*b*), e a carga resultante interna consiste apenas na força axial $P = 800$ N.

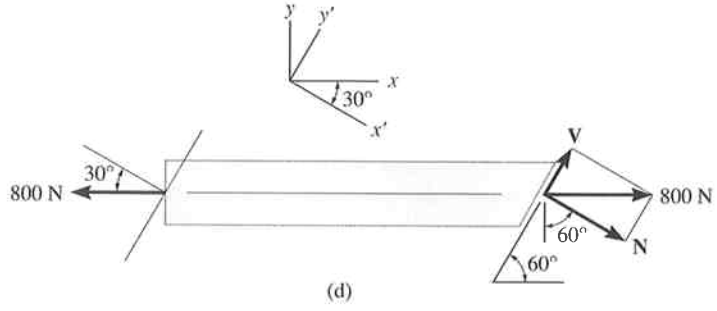
Tensão Média. A tensão normal média é determinada pela Equação 1.6.

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{800 \text{ N}}{(0{,}04 \text{ m})(0{,}04 \text{ m})} = 500 \text{ kPa} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Não há tensão de cisalhamento na seção, visto que a força de cisalhamento na seção é nula.

$$\tau_{méd} = 0 \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

A distribuição da tensão normal média na seção transversal é mostrada na Figura 1.24*c*.



Parte (b)

Carga Interna. Se a barra for secionada ao longo de *b*-*b*, o diagrama de corpo livre do segmento esquerdo será como o mostrado na Figura 1.24*d*. Nesse caso, tanto a força normal **N** como a força de cisalhamento **V** atuarão sobre a área secionada. Usando os eixos x e y, teremos:

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad -800 \text{ N} + N \operatorname{sen} 60° + V \cos 60° = 0$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad V \operatorname{sen} 60° - N \cos 60° = 0$$

ou, mais diretamente, usando os eixos x' e y':

$$+\searrow \Sigma F_{x'} = 0; \qquad N - 800 \text{ N} \cos 30° = 0$$
$$+\nearrow \Sigma F_{y'} = 0; \qquad V - 800 \text{ N} \operatorname{sen} 30° = 0$$

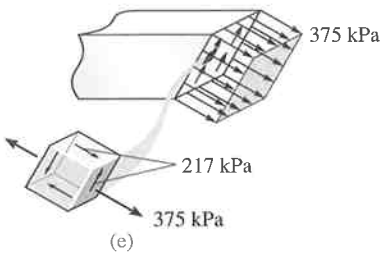


Figura 1.24

Resolvendo o sistema de equações:

$$N = 692{,}8 \text{ N}$$
$$V = 400 \text{ N}$$

Tensão Média. Nesse caso, a área secionada tem largura e comprimento de 40 mm e de 40 mm/sen 60° = 46,19 mm, respectivamente (Figura 1.24*a*). Assim, a tensão normal média é:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{692{,}8 \text{ N}}{(0{,}04 \text{ m})(0{,}04619 \text{ m})} = 375 \text{ kPa} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

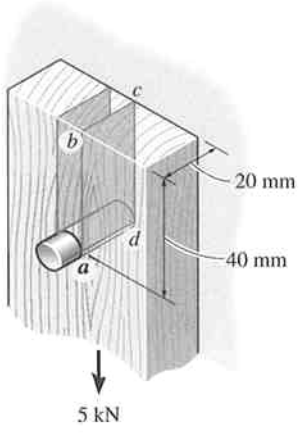
e a tensão de cisalhamento média é:

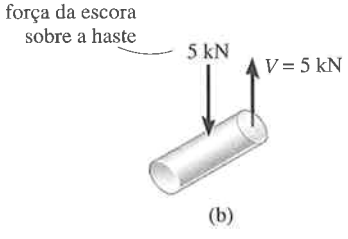
$$\tau_{méd} = \frac{V}{A} = \frac{400 \text{ N}}{(0{,}04 \text{ m})(0{,}04619 \text{ m})} = 217 \text{ kPa} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

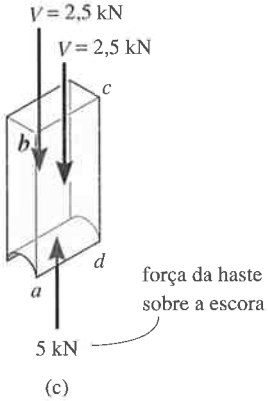
A distribuição da tensão é mostrada na Figura 1.24*e*.

EXEMPLO 1.11

A escora de madeira mostrada na Figura 1.25*a* está suportada por uma haste de aço de 10 mm de diâmetro presa na parede. Se a escora suporta uma carga vertical de 5 kN, calcular a tensão de cisalhamento média da haste na parede e ao longo das duas áreas sombreadas da escora, uma das quais está identificada como *abcd*.







SOLUÇÃO

Cisalhamento Interno. Como mostrado no diagrama de corpo livre da Figura 1.25*b*, a haste resiste a uma força de cisalhamento de 5 kN presa à parede. O diagrama de corpo livre do segmento secionado da escora é mostrado na Figura 1.25*c*. Nesse caso, a força de cisalhamento que atua sobre cada plano sombreado é de 2,5 kN.

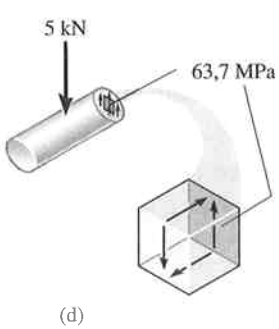
Tensão de Cisalhamento Média. Na haste,

$$\tau_{méd} = \frac{V}{A} = \frac{5.000 \text{ N}}{\pi(0{,}005 \text{ m})^2} = 63{,}7 \text{ MPa} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Na escora,

$$\tau_{méd} = \frac{V}{A} = \frac{2.500 \text{ N}}{(0{,}04 \text{ m})(0{,}02 \text{ m})} = 3{,}12 \text{ MPa} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

A distribuição da tensão de cisalhamento média na haste secionada e no segmento da escora é mostrada nas figuras 1.25*d* e 1.25*e*, respectivamente. Nessas figuras também é mostrado um elemento de volume típico do material de um ponto localizado na superfície de cada seção. Observe cuidadosamente como a tensão de cisalhamento deve atuar sobre cada face sombreada desses elementos e em suas faces adjacentes.



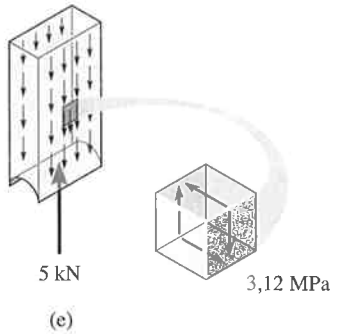
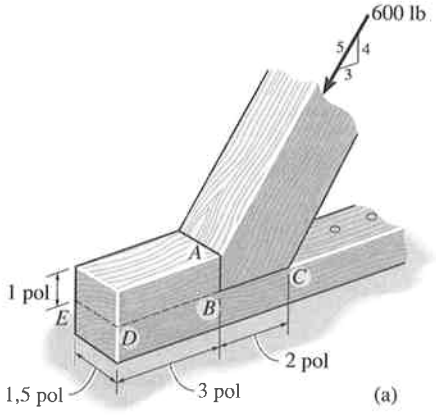


Figura 1.25

EXEMPLO 1.12

O elemento inclinado da Figura 1.26*a* está submetido a uma força de compressão de 600 lb. Determinar a tensão de compressão média ao longo das áreas de contato planas definidas por *AB* e *BC* e a tensão de cisalhamento média ao longo do plano definido por *EDB*.



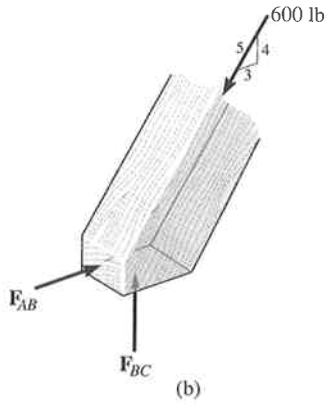
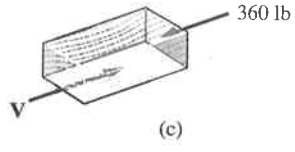


Figura 1.26

SOLUÇÃO

Cargas Internas. O diagrama de corpo livre do elemento inclinado é mostrado na Figura 1.26*b*. As forças de compressão que atuam sobre as áreas de contato são:



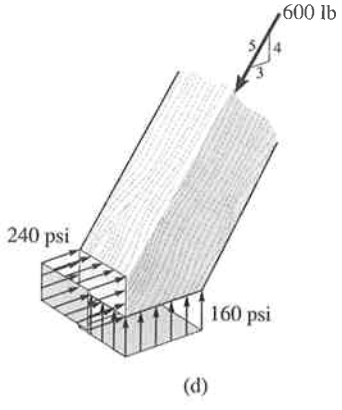
$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad F_{AB} - 600 \text{ lb}\left(\tfrac{3}{5}\right) = 0 \qquad F_{AB} = 360 \text{ lb}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \qquad F_{BC} - 600 \text{ lb}\left(\tfrac{4}{5}\right) = 0 \qquad F_{BC} = 480 \text{ lb}$$

Além disso, a partir do diagrama de corpo livre do segmento superior do elemento inferior (Figura 1.26*c*), a força de cisalhamento que atua sobre o plano horizontal secionado *EDB* é:

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad V = 360 \text{ lb}$$

Tensão Média. As tensões de compressão médias ao longo dos planos horizontal e vertical do elemento inclinado são:

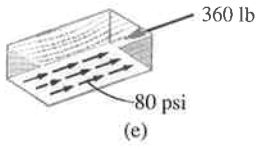


$$\sigma_{AB} = \frac{360 \text{ lb}}{(1 \text{ pol})(1{,}5 \text{ pol})} = 240 \text{ psi} \qquad \textit{Resposta}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{480 \text{ lb}}{(2 \text{ pol})(1{,}5 \text{ pol})} = 160 \text{ psi} \qquad \textit{Resposta}$$

As distribuições de tensão são mostradas na Figura 1.26*d*.

A tensão de cisalhamento média que atua no plano horizontal definido por *EDB* é:

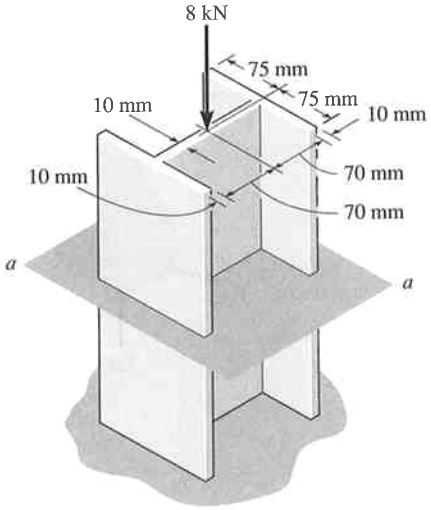


$$\tau_{\text{méd}} = \frac{360 \text{ lb}}{(3 \text{ pol})(1{,}5 \text{ pol})} = 80{,}0 \text{ psi} \qquad \textit{Resposta}$$

A tensão é mostrada distribuída sobre a área secionada na Figura 1.26*e*.

PROBLEMAS

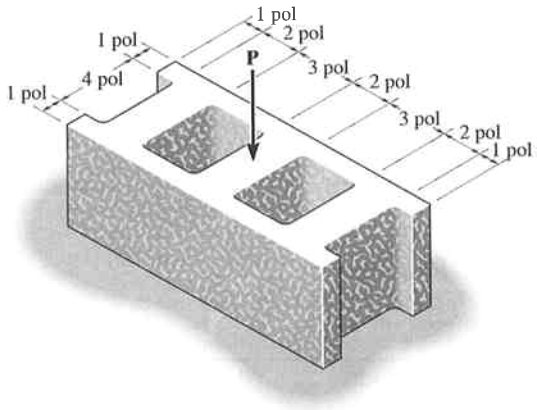
1.33. A coluna está submetida a uma força axial de 8 kN no seu topo. Supondo que a seção transversal tenha as dimensões mostradas na figura, determinar a tensão normal média que atua sobre a seção *a–a*. Mostrar essa distribuição de tensão atuando sobre a área da seção transversal.



Problema 1.33

1.34. O bloco de escória tem as dimensões mostradas. Supondo que o material falhe quando a tensão normal média atinge 120 psi, determinar a maior carga vertical **P** aplicada centralmente a que ele pode resistir.

1.35. O bloco de escória tem as dimensões mostradas. Supondo que ele seja submetido a uma força **P** = 800 lb, aplicada em seu ponto médio, determinar a tensão normal média sobre o material. Mostrar a resultante que atua sobre um elemento de volume infinitesimal do material.

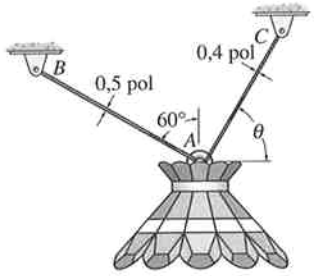


Problemas 1.34/1.35

***1.36.** A luminária de 50 lb é suportada por duas hastes de aço acopladas por um anel em *A*. Determinar qual das hastes está sujeita à maior tensão normal média e calcular seu valor. Suponha que $\theta = 60°$. O diâmetro de cada haste é dado na figura.

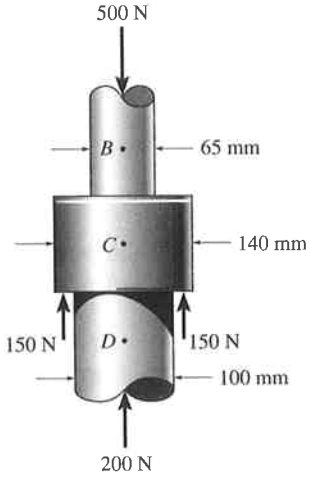
1.37. Resolver o Problema 1.36 para $\theta = 45°$.

1.38. A luminária de 50 lb é suportada por duas hastes de aço acopladas por um anel em *A*. Determinar o ângulo da orientação de θ de *AC*, de forma que a tensão normal média na haste *AC* seja o dobro da tensão normal média da haste *AB*. Qual é a intensidade dessa tensão em cada haste? O diâmetro de cada haste é indicado na figura.



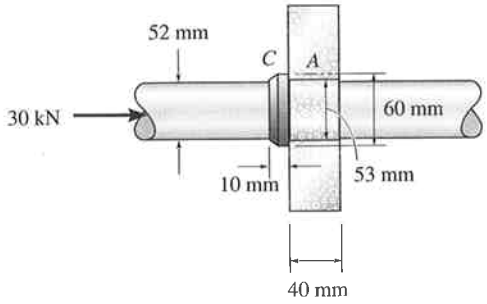
Problemas 1.36/1.37/1.38

1.39. O mancal de encosto está submetido às cargas mostradas. Determinar a tensão normal média desenvolvida nas seções transversais que passam pelos pontos *B*, *C* e *D*. Fazer o desenho esquemático dos resultados para um elemento de volume infinitesimal localizado em cada seção.



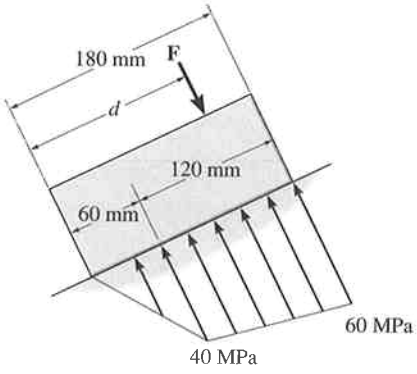
Problema 1.39

***1.40.** O eixo está submetido a uma força axial de 30 kN. Supondo que o eixo passe pelo furo de 53 mm de diâmetro no apoio fixo *A*, determinar a tensão do mancal que atua sobre o colar *C*. Qual é a tensão de cisalhamento média que atua ao longo da superfície interna do colar onde ele está acoplado ao eixo de 52 mm de diâmetro?



Problema 1.40

1.41. O bloco pequeno tem espessura de 5 mm. Supondo que a distribuição de tensão desenvolvida pela carga no apoio varie como mostrado, determinar a força **F** aplicada ao bloco e a distância d até o ponto em que ela se aplica.



Problema 1.41

1.42. A roda de apoio em um andaime é mantida em posição na perna por meio de um pino de 4 mm de diâmetro. Supondo que a roda esteja submetida a uma força normal de 3 kN, determinar a tensão de cisalhamento média desenvolvida sobre o pino. Desprezar o atrito entre a perna interna do andaime e o tubo usado na roda.

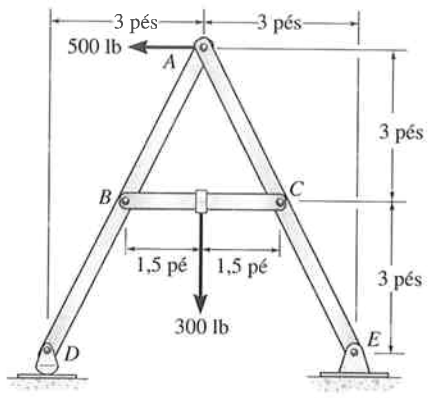
Problema 1.42

1.43. Os pinos em B e C da estrutura têm, cada um, um diâmetro de 0,25 pol. Supondo que os pinos estejam submetidos a *cisalhamento duplo*, determinar a tensão de cisalhamento média em cada pino.

***1.44.** Resolver o Problema 1.43 supondo que os pinos B e C sejam submetidos a *cisalhamento simples*.

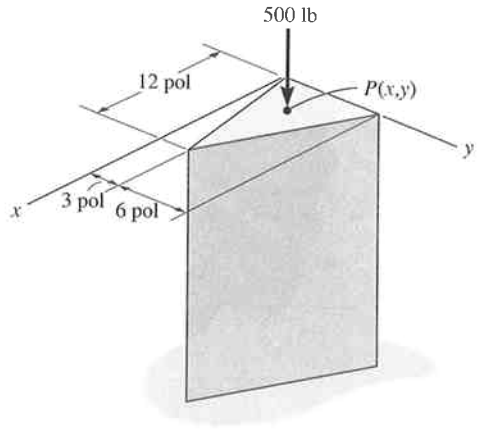
1.45. Os pinos em D e E da estrutura têm, cada um, um diâmetro de 0,25 pol. Supondo que os pinos estejam submetidos a *cisalhamento duplo*, determinar a tensão de cisalhamento média em cada pino.

1.46. Resolver o Problema 1.45 supondo que os pinos D e E sejam submetidos a *cisalhamento simples*.



Problemas 1.43/1.44/1.45/1.46

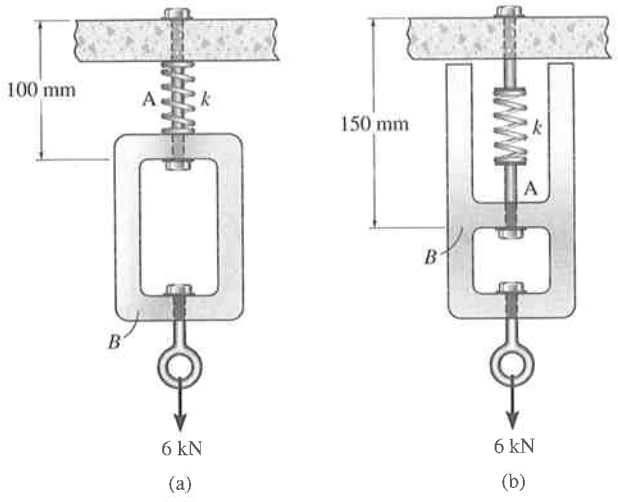
1.47. O pedestal tem seção transversal triangular como mostrado. Supondo que esteja submetido a uma força de compressão de 500 lb, especificar as coordenadas de localização do ponto P (x, y), em que a carga deve ser aplicada na seção transversal, de modo que a tensão normal média seja uniforme. Calcular a tensão e desenhar sua distribuição atuando em uma seção transversal fora do ponto de aplicação da carga.



Problema 1.47

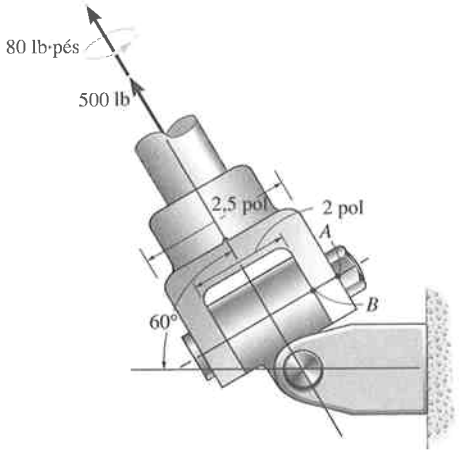
***1.48.** Na figura são mostrados dois projetos de amortecedor de choque. A mola tem coeficiente de rigidez k = 15 kN/m e em (a) está sem carga aplicada, ao passo que em (b) está originalmente esticada 0,2 m. Determinar a tensão normal média na rosca do parafuso de 5 mm de diâmetro em A quando for aplicada uma carga de 6 kN. Em (b) o suporte B não está acoplado ao apoio.

1.49. Na figura são mostrados dois projetos de amortecedor de choque. A mola tem coeficiente de rigidez k = 15 kN/m e em (a) está sem carga aplicada. Determinar o comprimento máximo em que a mola em (b) deve ser originalmente esticada, de modo que a tensão normal média na rosca do parafuso de 5 mm de A seja equivalente em ambos os projetos quando for aplicada uma carga de 6 kN. Em (b) o suporte B não está acoplado ao apoio. Qual é a tensão do parafuso nos dois casos?



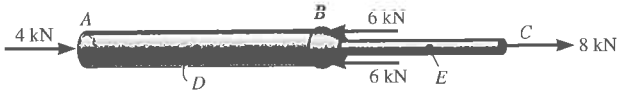
Problemas 1.48/1.49

1.50. O garfo está submetido a uma força e a um momento binário. Determinar a tensão de cisalhamento média nas seções transversais que passam pelos pontos *A* e *B*. O parafuso tem 0,25 pol de diâmetro. *Dica*: o momento binário recebe resistência do conjunto de forças do binário desenvolvido na rosca do parafuso.



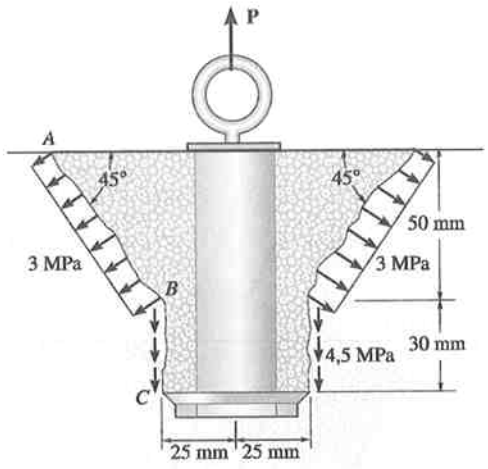
Problema 1.50

1.51. O conjunto de eixo consiste de um cano *AB* e uma haste maciça *BC*. O cano tem 20 mm de diâmetro interno e 28 mm de diâmetro externo. A haste tem 12 mm de diâmetro. Determinar a tensão normal média nos pontos *D* e *E* e representar a tensão em um elemento de volume localizado em cada um desses pontos.



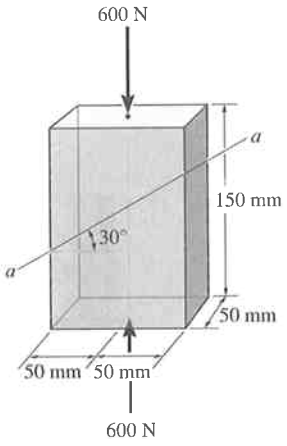
Problema 1.51

***1.52.** O parafuso de ancoragem foi puxado da parede de concreto e a superfície da falha formou parte de um tronco e um cilindro, indicando que ocorreu uma falha por cisalhamento ao longo do cilindro *BC* e uma falha por tensão de tração ao longo do tronco *AB*. Supondo que o cisalhamento e as tensões normais ao longo dessas superfícies tenham as grandezas mostradas, determinar a força **P** que deve ter sido aplicada ao parafuso.



Problema 1.52

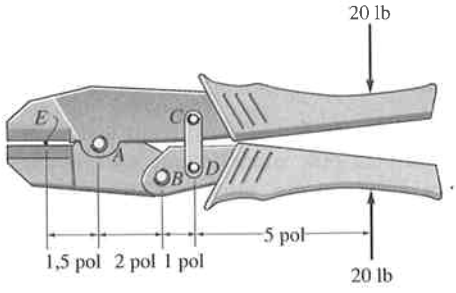
1.53. O bloco plástico está submetido a uma força de compressão axial de 600 N. Supondo que as tampas superior e inferior distribuam a carga uniformemente por todo o bloco, determinar as tensões normal e de cisalhamento médias ao longo da seção *a–a*.



Problema 1.53

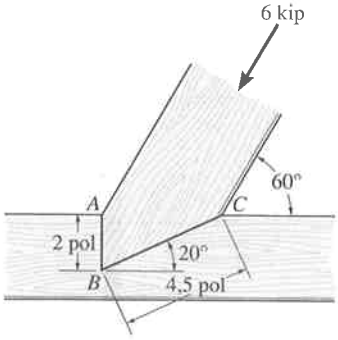
1.54. A ferramenta de dobra é usada para dobrar a extremidade do arame *E*. Se for aplicada uma força de 20 lb nos cabos, determinar a tensão de cisalhamento média no pino em *A*. O pino está sujeito a cisalhamento duplo e tem 0,2 pol de diâmetro. Apenas uma força vertical é exercida sobre o arame.

1.55. Resolver o Problema 1.54 para o pino *B*. O pino está sujeito a cisalhamento duplo e tem 0,2 pol de diâmetro.



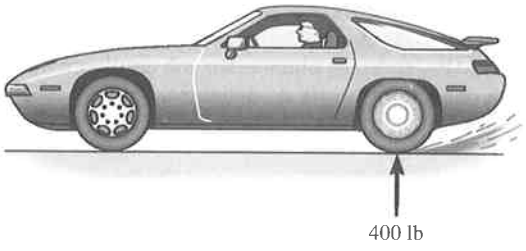
Problemas 1.54/1.55

*1.56. A junta está submetida à força de 6 kip do elemento axial. Determinar a tensão normal média que atua nas seções *AB* e *BC*. Supor que o elemento é plano e tem 1,5 polegada de espessura.



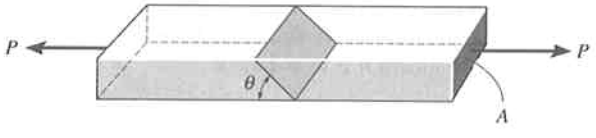
Problema 1.56

1.57. O motorista do carro esporte aplica os freios traseiros e faz os pneus derraparem. Supondo que a força normal em cada pneu traseiro seja de 400 lb e o coeficiente de atrito cinético entre os pneus e o pavimento seja $\mu_c = 0{,}5$, determinar a tensão de cisalhamento média desenvolvida pela força de atrito sobre os pneus. Supor, também, que a borracha dos pneus seja flexível e que cada pneu tenha 32 psi de pressão de ar.



Problema 1.57

1.58. A barra tem uma área da seção transversal *A* e está submetida a uma carga axial *P*. Determinar as tensões normal e de cisalhamento médias que atuam sobre a área sombreada, com ângulo θ em relação à horizontal. Construir o gráfico da variação dessas tensões em função de θ ($0 \leq \theta \leq 90°$).



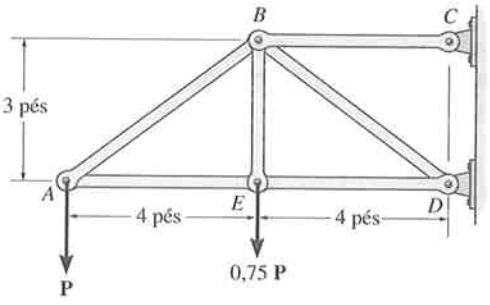
Problema 1.58

1.59. A embreagem de dentes é usada para transmitir um torque de 450 lb · pés em uma única direção. Supondo que cada eixo tenha apenas dois dentes em torno da circunferência, como mostrado, determinar a tensão de cisalhamento média ao longo da raiz *AB* de cada dente.

Problema 1.59

*1.60. As barras da treliça têm uma área da seção transversal de 1,25 pol^2. Determinar a tensão normal média em cada elemento devido à carga $P = 8$ kip. Indicar se a tensão é de tração ou de compressão.

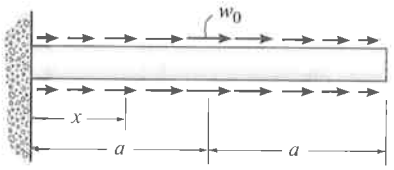
1.61. As barras da treliça têm uma área da seção transversal de 1,25 pol^2. Supondo que a tensão normal média máxima em cada barra não exceda 20 ksi, determinar a grandeza máxima *P* das cargas aplicadas à treliça.



Problemas 1.60/1.61

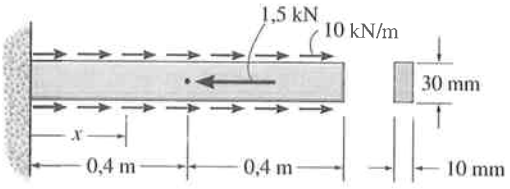
1.62. A barra prismática tem uma área da seção transversal *A*. Supondo que ela esteja submetida a uma carga axial distribuída que aumenta linearmente de $w = 0$ em $x = 0$ a $w = w_0$ em $x = a$ e depois decresce linearmente para $w = 0$ em $x = 2a$, determinar a tensão normal média na barra em função de *x* no intervalo $0 \leq x < a$.

1.63. A barra prismática tem uma área da seção transversal *A*. Supondo que ela esteja submetida a uma carga axial distribuída que aumenta linearmente de $w = 0$ em $x = 0$ a $w = w_0$ em $x = a$ e depois decresce linearmente para $w = 0$ em $x = 2a$, determinar a tensão normal média na barra em função de *x* no intervalo $a < x \leq 2a$.



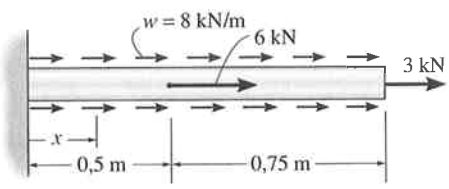
Problemas 1.62/1.63

*1.64. A barra está submetida a uma carga axial distribuída uniforme de 10 kN/m e a uma força concentrada de 1,5 kN em seu ponto médio. Determinar a tensão normal média máxima na barra e sua localização *x*.



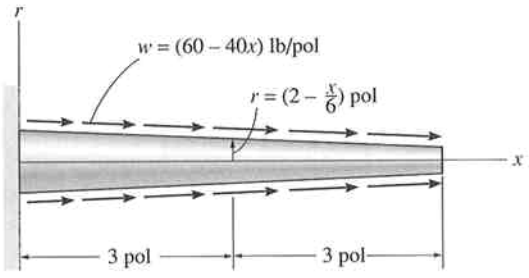
Problema 1.64

1.65. A barra tem uma área da seção transversal de 400 (10^{-6}) m^2. Supondo que esteja submetida a uma carga distribuída axial uniforme ao longo de seu comprimento e a duas cargas concentradas como mostrado, determinar a tensão normal média na barra em função da distância *x* no intervalo $0 < x \leq 0{,}5$ m.



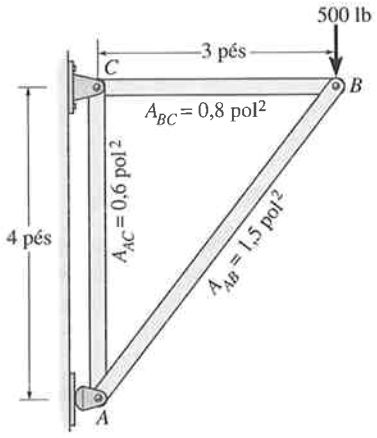
Problema 1.65

1.66. A haste cônica tem raio $r = (2 - x/6)$ pol e está submetida a uma carga distribuída $w = (60 + 40x)$ lb/pol. Determinar a tensão normal média no centro da haste.



Problema 1.66

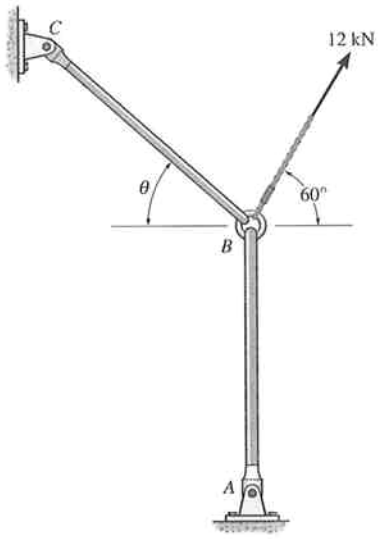
1.67. A treliça é feita de três elementos acoplados por pinos tendo as áreas da seção transversal mostradas na figura. Determinar a tensão normal média desenvolvida em cada elemento quando a treliça é submetida à carga mostrada. Indicar se a tensão é de tração ou de compressão.



Problema 1.67

***1.68.** As hastes AB e BC têm diâmetros de 25 mm e 18 mm, respectivamente. Supondo que seja aplicada uma carga de 6 kN no anel em B, determinar a tensão normal média em cada haste se $\theta = 60°$.

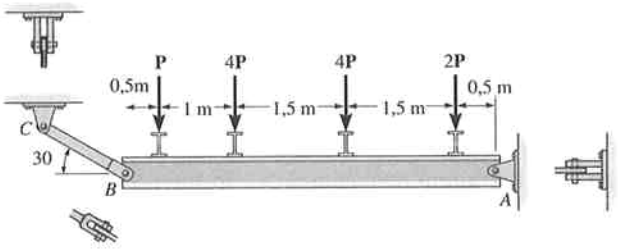
1.69. As hastes AB e BC têm 4 mm de diâmetro. Supondo que seja aplicada uma carga de 6 kN no anel em B, determinar o menor ângulo θ da haste BC de modo que a tensão normal média em cada haste seja a mesma.



Problemas 1.68/1.69

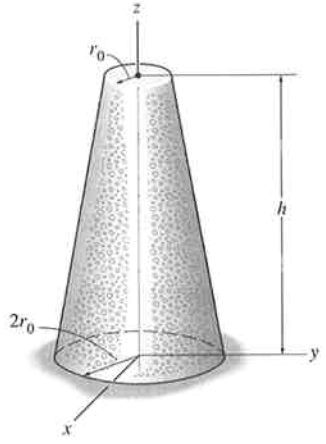
1.70. A viga é apoiada por um pino em A e um elo curto BC. Se $P = 15$ kN, determinar a tensão de cisalhamento média desenvolvida nos pinos A, B e C. Todos os pinos estão sob cisalhamento duplo e cada um deles tem 18 mm de diâmetro.

1.71. A viga é apoiada por um pino em A e um elo curto BC. Determinar a intensidade máxima P das cargas que a viga suportará se a tensão de cisalhamento média em cada pino não exceder 80 MPa. Todos os pinos estão sob cisalhamento duplo e cada um deles tem 18 mm de diâmetro.



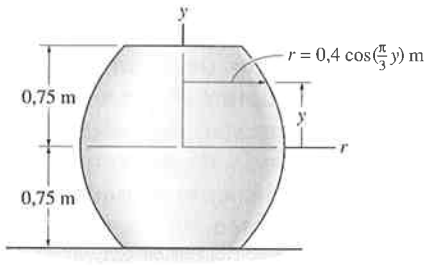
Problemas 1.70/1.71

***1.72.** O pedestal em forma de tronco de um cone é feito de concreto com peso específico γ. Determinar a tensão normal média que atua sobre sua base. *Dica*: o volume de um cone de raio r e altura h é $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.



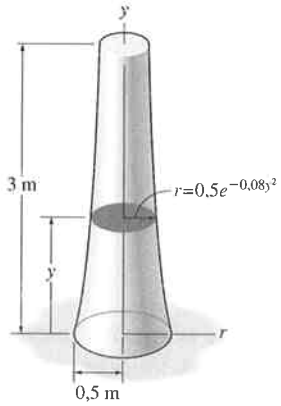
Problema 1.72

1.73. A forma tem um raio definido por $r = 0{,}4\cos(\pi y/3)$ m. Determinar a tensão normal média no apoio se o material tem peso específico de $\rho = 3\ \text{Mg/m}^3$.



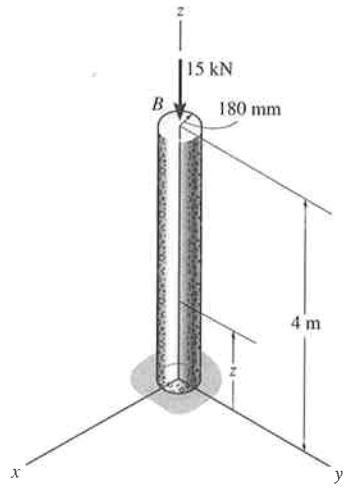
Problema 1.73

1.74. O raio do pedestal é definido por $r = (0{,}5e^{-0{,}08y^2})m$, onde y é dado em metros. Supondo que o material tenha densidade de 2,5 Mg/m^3, determinar a tensão normal média no apoio.



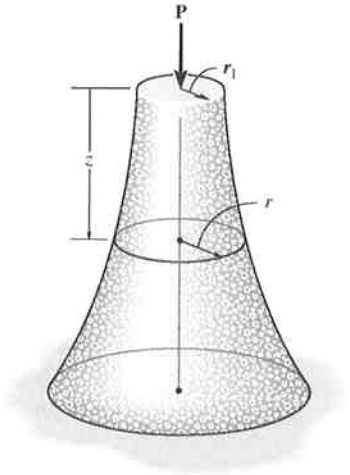
Problema 1.74

1.75. A coluna é feita de concreto com densidade de 2,30 Mg/m^3. Na parte superior B, está submetida a uma força de compressão axial de 15 kN. Determinar a tensão normal média na coluna em função da distância z medida a partir de sua base. *Observação*: o resultado é útil apenas para determinar a tensão normal média em uma seção removida das extremidades da coluna, devido à deformação localizada nas extremidades.



Problema 1.75

***1.76.** O pedestal suporta uma carga **P** em seu centro. Se o material tiver densidade de massa ρ, determinar o raio r em função de z de modo que a tensão normal média no pedestal permaneça constante. A seção transversal é circular.



Problema 1.76

1.6 TENSÃO ADMISSÍVEL

O engenheiro responsável pelo *projeto* de elementos estruturais ou mecânicos deve restringir a tensão do material a um nível seguro. Além disso, ele precisa *analisar* a estrutura ou máquina em uso, na ocasião, para verificar quais cargas adicionais seus elementos ou peças podem suportar. Então, deve refazer os cálculos usando uma tensão segura ou admissível.

Para garantir a segurança, é necessário escolher uma tensão admissível que restrinja a carga aplicada a um valor *menor* do que a carga que o elemento possa suportar integralmente. Há várias razões para adotar essa prática. Por exemplo, a carga para a qual o elemento foi projetado pode ser diferente do carregamento aplicado. As medições pretendidas de uma estrutura ou máquina podem não ser exatas devido a erros de fabricação ou na montagem de seus componentes. Vibrações desconhecidas, impacto ou cargas acidentais podem ocorrer, e eles não foram considerados no projeto. A corrosão atmosférica, a

Ao se projetar guindastes e cabos usados para movimentar cargas pesadas, fatores de segurança adequados devem ser considerados.

deterioração ou o desgaste provocado por agentes atmosféricos tendem a danificar os materiais durante o uso. Por fim, alguns materiais — como madeira, concreto ou compostos reforçados com fibras — podem apresentar grande variação em suas propriedades mecânicas.

Um dos métodos de especificar a carga para o projeto ou a análise de um elemento é usar um número denominado fator de segurança. O ***fator de segurança*** (F.S.) é a relação entre a carga de ruptura F_{rup} e a carga admissível F_{adm}. No caso, F_{rup} é obtida em testes experimentais do material e o fator de segurança é selecionado com base na experiência, de modo que as incertezas mencionadas sejam consideradas quando o elemento é usado em condições semelhantes de carga e geometria. Expresso matematicamente:

$$\text{F.S.} = \frac{F_{rup}}{F_{adm}} \tag{1.8}$$

Se a carga aplicada ao elemento for *relacionada linearmente* à tensão desenvolvida no interior do elemento, como no caso do uso de $\sigma = P/A$ e $\tau_{méd} = V/A$, então podemos expressar o fator de segurança como a relação entre a tensão de ruptura σ_{rup}(ou τ_{rup}) e a tensão admissível σ_{adm} (ou τ_{adm});[4] isto é,

$$\text{F.S.} = \frac{\sigma_{rup}}{\sigma_{adm}} \tag{1.9}$$

ou

$$\text{F.S.} = \frac{\tau_{rup}}{\tau_{adm}} \tag{1.10}$$

Em qualquer dessas equações, o fator de segurança escolhido é *maior* do que 1 a fim de evitar maior possibilidade de falha. Valores específicos dependem dos tipos de materiais a serem usados e da finalidade pretendida da estrutura ou máquina. Por exemplo, o F.S. usado no projeto de componentes de avião ou veículos espaciais pode ser próximo de 1 a fim de reduzir o peso do veículo. Por outro lado, no caso de uma usina de energia nuclear, o fator de segurança de alguns de seus componentes pode ser tão alto quanto 3, uma vez que há incertezas na carga e no comportamento do material. Em geral, no entanto, os fatores de segurança e, portanto, as cargas ou tensões admissíveis, para elementos tanto estruturais como mecânicos, são bem padronizados, visto que suas incertezas de projeto estão razoavelmente avaliadas. Seus valores, que podem ser encontrados em códigos de projeto e manuais de engenharia, pretendem manter um equilíbrio na garantia da segurança pública e ambiental e oferecer uma solução razoavelmente econômica para o projeto.

1.7 PROJETO DE ACOPLAMENTOS SIMPLES

Ao admitir hipóteses simplificadoras em relação ao comportamento do material, as equações $\sigma = P/A$ e $\tau_{méd} = V/A$ podem ser usadas, em geral, para analisar ou projetar acoplamentos ou elementos mecânicos simples. Em particular, se um elemento estiver sujeito a uma *força normal* em uma seção, a área requerida da seção será determinada por:

$$A = \frac{P}{\sigma_{adm}} \tag{1.11}$$

[4] Em alguns casos, tais como colunas, a carga aplicada *não* é relacionada linearmente com a tensão e, portanto, apenas a Equação 1.8 pode ser usada para determinar o fator de segurança. Consultar o Capítulo 13.

Por outro lado, se a seção estiver sujeita a uma *força de cisalhamento*, a área requerida da seção será:

$$A = \frac{V}{\tau_{adm}} \tag{1.12}$$

Como discutido na Seção 1.6, a tensão admissível usada em cada uma dessas equações é determinada aplicando-se um fator de segurança para uma tensão normal ou de cisalhamento especificada ou obtendo essas tensões diretamente de um código de projeto adequado.

Discutiremos a seguir quatro tipos comuns de problemas em cujo projeto as equações anteriores podem ser usadas.

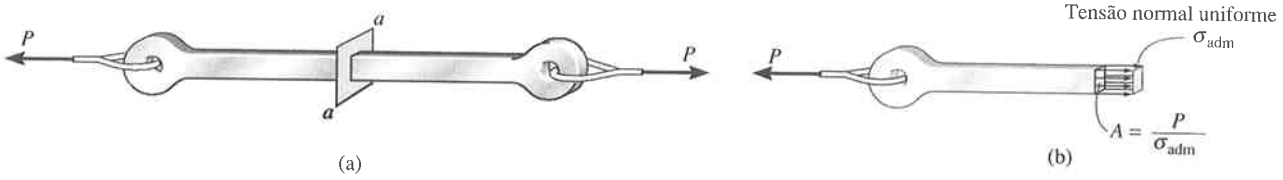


Figura 1.27

Área da Seção Transversal de um Elemento de Tração. A área da seção transversal de um elemento prismático submetido a uma força de tração pode ser determinada *desde que* a força tenha uma linha de ação que passe pelo centróide da seção transversal. Por exemplo, consideremos a barra com olhal mostrada na Figura 1.27*a*. Na seção intermediária *a-a*, a distribuição de tensão é uniforme sobre a seção transversal e a área requerida A é determinada como mostrado na Figura 1.27*b*.

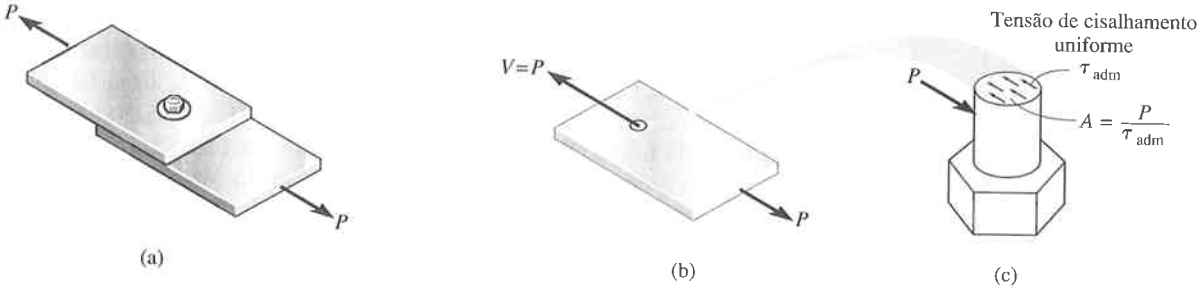


Figura 1.28

Área da Seção Transversal de um Acoplamento Submetido a Cisalhamento. Em geral, são usados parafusos ou pinos para acoplar chapas, tábuas ou vários elementos. Por exemplo, consideremos a junta sobreposta mostrada na Figura 1.28*a*. Se o parafuso estiver solto ou a força de acoplamento do parafuso for desconhecida, é seguro supor que qualquer força de atrito *entre* as chapas é desprezível. O diagrama de corpo livre do corte que passa *entre* as chapas e através do parafuso é mostrado na Figura 1.28*b*. O parafuso está submetido à resultante da força de cisalhamento interna $V = P$ na seção transversal. Supondo que a tensão de cisalhamento que provoca a força seja *distribuída uniformemente* na seção transversal, a área requerida A é determinada como mostrado na Figura 1.28*c*.

Área Requerida para Resistir ao Apoio. A tensão normal produzida pela compressão de uma superfície contra outra é denominada ***tensão de apoio***. Se essa tensão tornar-se suficientemente grande, poderá esmagar ou deformar localmente uma ou ambas as superfícies. Então, para evitar falha, é necessário determinar a área de apoio adequada para o material que esteja usando a tensão de apoio admissível. Por exemplo, a área A da chapa da base da coluna B mostrada na Figura 1.29 é determinada pela tensão admissível de apoio do concreto, usando-se $A = P/(\sigma_b)_{\text{adm}}$. Essa hipótese supõe, naturalmente, que a tensão admissível de apoio do concreto seja menor que a do material da chapa da base e, além disso, que a tensão de apoio seja distribuída uniformemente entre a chapa e o concreto, como mostrado na figura.

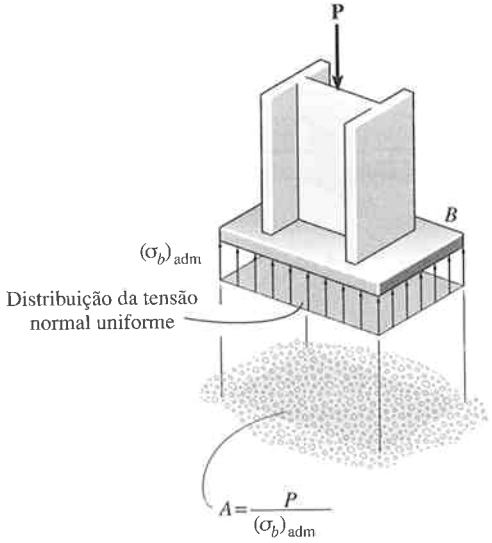
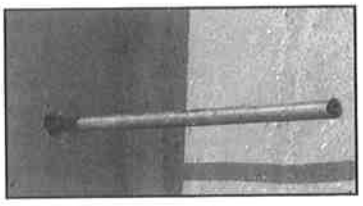
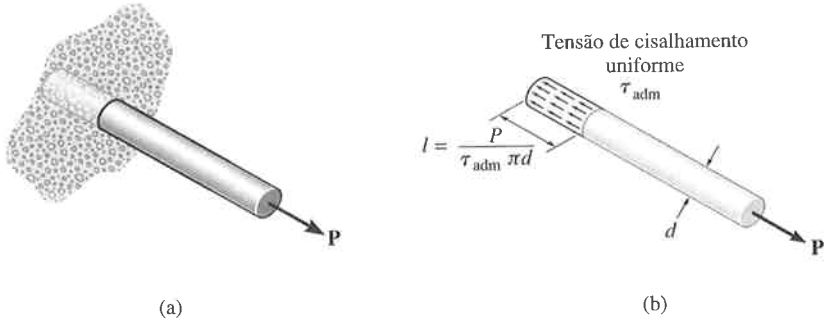


Figura 1.29



Área Requerida para Resistir ao Cisalhamento Provocado por Carga Axial. Ocasionalmente, hastes ou outros elementos estão apoiados de tal maneira que pode surgir uma tensão de cisalhamento, apesar de o elemento estar submetido a uma carga axial. Um exemplo dessa situação é o caso de uma haste de aço engastada em concreto e carregada como mostrado na Figura 1.30*a*. O diagrama de corpo livre da haste (Figura 1.30*b*) mostra que uma *tensão de cisalhamento* atua sobre a área de contato da haste com o concreto. A área é $(\pi d)l$, em que d é o diâmetro da haste e l é o comprimento do engaste. Apesar de a distribuição real da tensão de cisalhamento ao longo da haste ser difícil de determinar, se supusermos que ela seja *uniforme*, poderemos usar $A = V/\tau_{\text{adm}}$ para calcular l, desde que d e τ_{adm} sejam conhecidos (Figura 1.30*b*).



(a) (b)

Figura 1.30

PONTOS IMPORTANTES

- O projeto do elemento para resistência à ruptura baseia-se na escolha de tensão admissível que o habilite a suportar com segurança a carga pretendida. Há muitos fatores desconhecidos que podem influenciar a tensão real no elemento e assim, dependendo do uso pretendido para o elemento, é aplicado um *fator de segurança* para obter a carga admissível que esse elemento pode suportar.
- Os quatro casos ilustrados nesta seção representam apenas algumas das muitas aplicações das fórmulas das tensões normal e de cisalhamento médias, usadas para projeto e análise na engenharia. Quando as equações forem aplicadas, entretanto, é importante estar ciente de que se supõe que a distribuição de tensão está *distribuída uniformemente* ou 'ponderada' sobre o corte.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

Ao resolver problemas que usam as equações da tensão normal e de cisalhamento médias, primeiro deve ser feita uma avaliação cuidadosa da seção sobre a qual a tensão crítica atua. Uma vez feito o corte, o elemento deve ser projetado para ter área suficiente para resistir à tensão que atua sobre ela. A aplicação requer os seguintes passos para determinar a área.

Carga Interna.

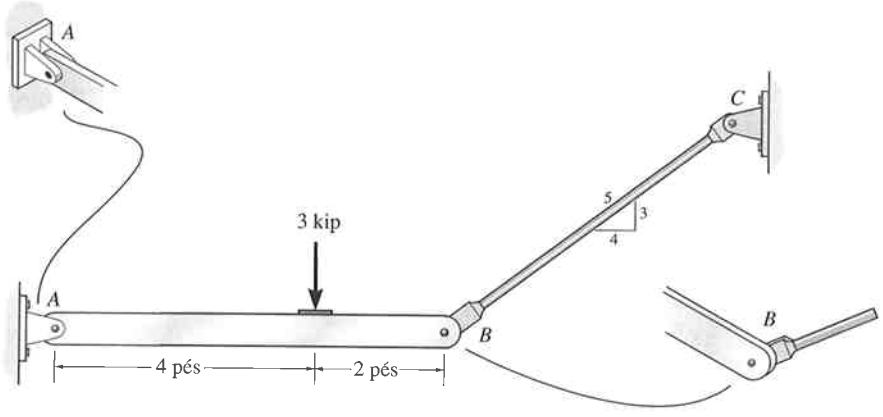
- Cortar o elemento através da área e desenhar o diagrama de corpo livre de um segmento do elemento. A força resultante interna dessa seção é então determinada por meio das equações de equilíbrio.

Área Requerida.

- Desde que a tensão admissível seja conhecida ou possa ser determinada, a área requerida necessária para suportar a carga da seção é então calculada por $A = P/\sigma_{adm}$ ou $A = V/\tau_{adm}$.

EXEMPLO 1.13

Os dois elementos estão acoplados por pinos em B como mostra a Figura 1.31*a*. A figura também mostra o topo dos acoplamentos em A e B. Supondo que os pinos tenham tensão de cisalhamento admissível de $\tau_{adm} = 12{,}5$ ksi e o esforço de tração admissível da haste CB seja $(\sigma_t)_{adm} = 16{,}2$ ksi, determinar o menor diâmetro dos pinos A e B, com aproximação de $\frac{1}{16}$ pol, e o diâmetro da haste CB necessário para suportar a carga.

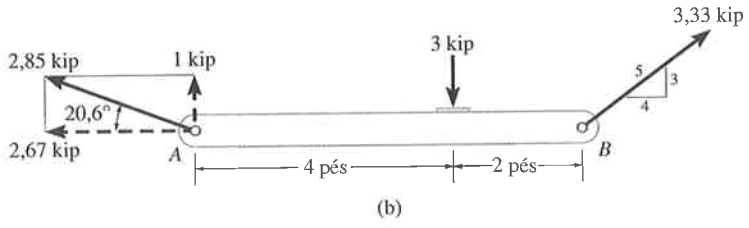


(a)

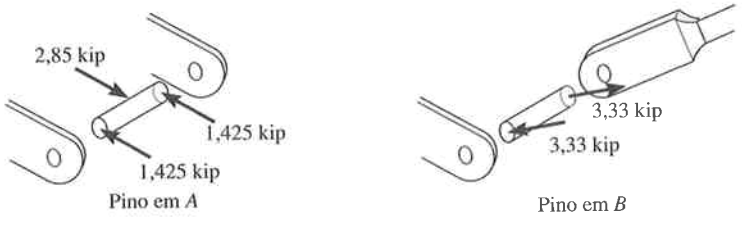
Figura 1.31

SOLUÇÃO

Reconhecendo ser *CB* um elemento de duas forças, o diagrama de corpo livre do elemento *AB* junto com as reações calculadas em *A* e *B* é mostrado na Figura 1.31*b*. Confirmar, como exercício, os cálculos e observar que a *força resultante* em *A* deve ser usada para o projeto do pino *A*, visto ser essa a força de cisalhamento a que o pino resiste.



(b)



(c)

Figura 1.31

Diâmetro dos Pinos. A partir da Figura 1.31*a* e dos diagramas de corpo livre da porção secionada de cada pino em contato com o elemento *AB* (Figura 1.31*c*), vê-se que o pino *A* está submetido a cisalhamento duplo, ao passo que o pino *B* está submetido a cisalhamento simples. Assim:

$$A_A = \frac{V_A}{\tau_{adm}} = \frac{1{,}425 \text{ kip}}{12{,}5 \text{ kip/pol}^2} = 0{,}1139 \text{ pol}^2 = \pi\left(\frac{{d_A}^2}{4}\right) \quad d_A = 0{,}381 \text{ pol}$$

$$A_B = \frac{V_B}{\tau_{adm}} = \frac{3{,}333 \text{ kip}}{12{,}5 \text{ kip/pol}^2} = 0{,}2667 \text{ pol}^2 = \pi\left(\frac{{d_B}^2}{4}\right) \quad d_B = 0{,}583 \text{ pol}$$

Apesar de esses valores representarem os *menores* diâmetros possíveis dos pinos, é preciso escolher o tamanho de pino *fabricado* ou disponível. Escolheremos o *maior* tamanho com aproximação de $\frac{1}{16}$ pol.

$$d_A = \tfrac{7}{16} \text{ pol} = 0{,}4375 \text{ pol} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

$$d_B = \tfrac{5}{8} \text{ pol} = 0{,}625 \text{ pol} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Diâmetro da Haste. O diâmetro requerido da haste ao longo de seu corte central é, portanto:

$$A_{BC} = \frac{P}{(\sigma_t)_{adm}} = \frac{3{,}333 \text{ kip}}{16{,}2 \text{ kip/pol}^2} = 0{,}2058 \text{ pol}^2 = \pi\left(\frac{{d_{BC}}^2}{4}\right)$$

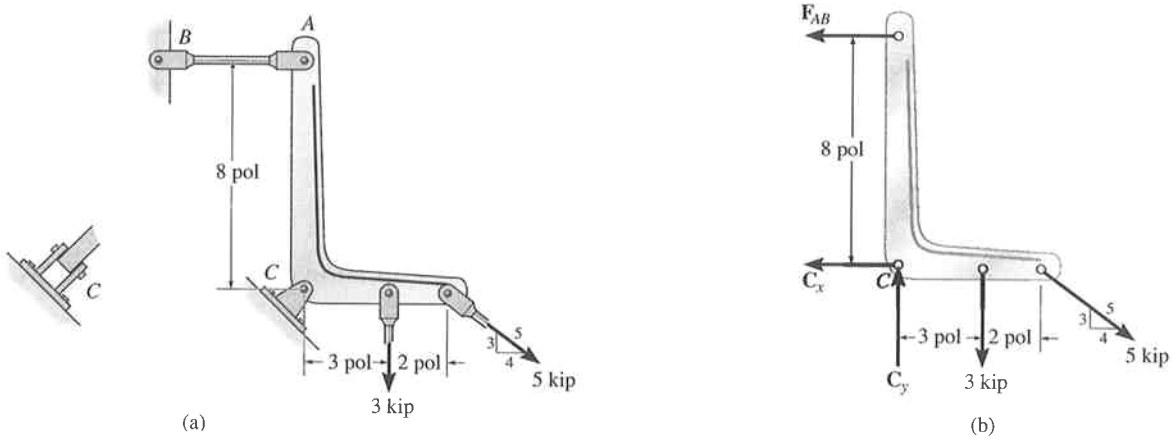
$$d_{BC} = 0{,}512 \text{ pol}$$

Escolheremos:

$$d_{BC} = \tfrac{9}{16} \text{ pol} = 0{,}5625 \text{ pol} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

EXEMPLO 1.14

O braço de controle está submetido ao carregamento mostrado na Figura 1.32*a*. Determinar, com aproximação de $\frac{1}{4}$ pol, o diâmetro requerido do pino de aço em C se a tensão de cisalhamento admissível do aço for $\tau_{adm} = 8$ ksi. Observe na figura que o pino está sujeito a cisalhamento duplo.



SOLUÇÃO

Força de Cisalhamento Interna. O diagrama de corpo livre do braço é mostrado na Figura 1.32*b*. Para o equilíbrio, temos:

$$\circlearrowleft^{+} \Sigma M_C = 0; \quad F_{AB}(8 \text{ pol}) - 3 \text{ kip}(3 \text{ pol}) - 5 \text{ kip}(\tfrac{3}{5})(5 \text{ pol}) = 0$$

$$F_{AB} = 3 \text{ kip}$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \quad -3 \text{ kip} - C_x + 5 \text{ kip}(\tfrac{4}{5}) = 0 \qquad C_x = 1 \text{ kip}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad C_y - 3 \text{ kip} - 5 \text{ kip}(\tfrac{3}{5}) = 0 \qquad C_y = 6 \text{ kip}$$

O pino em C resiste à força resultante em C. Portanto:

$$F_C = \sqrt{(1 \text{ kip})^2 + (6 \text{ kip})^2} = 6{,}082 \text{ kip}$$

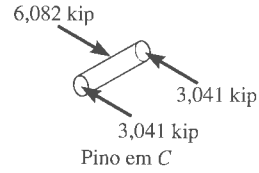


Figura 1.32

Como o pino está submetido a cisalhamento duplo, a força de cisalhamento de 3,041 kip atua sobre a área da seção transversal *entre* o braço e cada orelha de apoio do pino (Figura 1.32*c*).

Área Requerida. Temos:

$$A = \frac{V}{\tau_{adm}} = \frac{3{,}041 \text{ kip}}{8 \text{ kip/pol}^2} = 0{,}3802 \text{ pol}^2$$

$$\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = 0{,}3802 \text{ pol}^2$$

$$d = 0{,}696 \text{ pol}$$

Usar um pino com diâmetro de:

$$d = \tfrac{3}{4} \text{ pol} = 0{,}750 \text{ pol} \qquad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 1.15

O tirante está apoiado em sua extremidade por um disco circular fixo como mostrado na Figura 1.33*a*. Se a haste passa por um furo de 40 mm de diâmetro, determinar o diâmetro mínimo requerido da haste e a espessura mínima do disco necessários para suportar uma carga de 20 kN. A tensão normal admissível da haste é $\sigma_{adm} = 60$ MPa, e a tensão de cisalhamento admissível do disco é $\tau_{adm} = 35$ MPa.

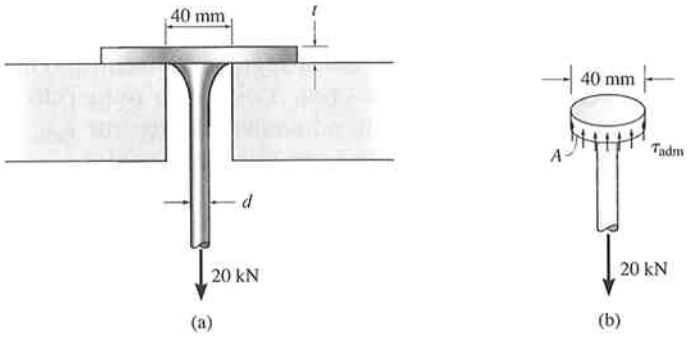


Figura 1.33

SOLUÇÃO

Diâmetro da Haste. Por verificação, a força axial na haste é 20 kN. Assim, a área da seção transversal da haste é:

$$A = \frac{P}{\sigma_{adm}} = \frac{20(10^3)\ \text{N}}{60(10^6)\ \text{N/m}^2} = 0{,}3333(10^{-3})\ \text{m}^2$$

De modo que:

$$A = \pi\left(\frac{d^2}{4}\right) = 0{,}3333(10^{-3})\ \text{m}^2$$

$$d = 0{,}0206\ \text{m} = 20{,}6\ \text{mm} \qquad \textit{Resposta}$$

Espessura do Disco. Como mostrado no diagrama de corpo livre da seção central do disco (Figura 1.33*b*), o material da área secionada deve resistir a uma tensão de cisalhamento para evitar a passagem do disco através do furo. Caso se suponha que a tensão de cisalhamento seja distribuída uniformemente sobre a área secionada, então, como V = 20 kN, temos:

$$A = \frac{V}{\tau_{adm}} = \frac{20(10^3)\ \text{N}}{35(10^6)\ \text{N/m}^2} = 0{,}5714(10^{-3})\ \text{m}^2$$

Como a área secionada é $A = 2\pi(0{,}02\ \text{m})(t)$, a espessura requerida do disco é:

$$t = \frac{0{,}5714(10^{-3})\ \text{m}^2}{2\pi(0{,}02\ \text{m})} = 4{,}55(10^{-3})\ \text{m} = 4{,}55\ \text{mm} \qquad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 1.16

Uma carga axial no eixo mostrado na Figura 1.34*a* é resistida pelo colar em *C*, que está preso ao eixo e localizado à direita do mancal em *B*. Determinar o maior valor de *P* para as duas forças axiais em *E* e *F* de modo que a tensão no colar não exceda uma tensão de apoio admissível em *C* de $(\sigma_b)_{adm} = 75$ MPa e que a tensão normal média no eixo não exceda um esforço de tração admissível de $(\sigma_t)_{adm} = 55$ MPa.

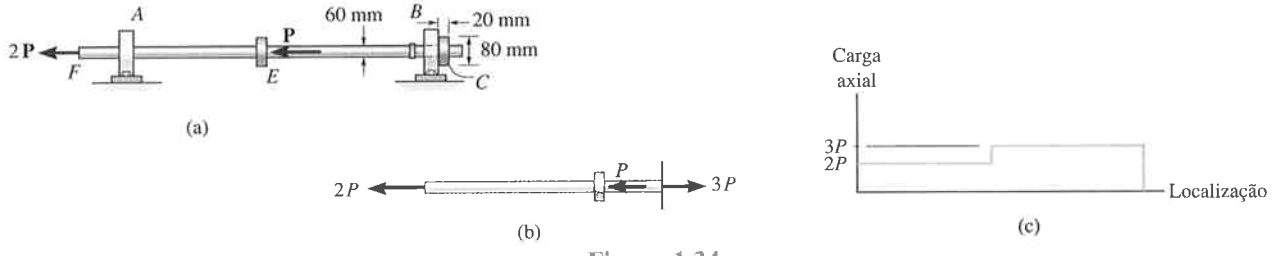


Figura 1.34

SOLUÇÃO

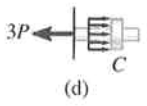
Para resolver o problema, vamos determinar P para cada condição de falha possível. Então escolheremos o *menor* valor. Por quê?

Tensão Normal. Pelo método das seções, a carga axial no interior da região FE do eixo é $2P$, enquanto a *maior* carga axial, $3P$, ocorre no interior da região EC (Figura 1.34*b*). A variação da carga interna é mostrada claramente no diagrama de força normal (Figura 1.34*c*). Como a área da seção transversal de todo o eixo é constante, a região EC será submetida à tensão normal média máxima. Aplicando a Equação 1.11, temos:

$$\sigma_{adm} = \frac{P}{A}; \qquad 55(10^6)\ \text{N/m}^2 = \frac{3P}{\pi(0{,}03\ \text{m})^2}$$

$$P = 51{,}8\ \text{kN}$$

Tensão de Apoio. Como mostrado no diagrama de corpo livre da Figura 1.34*d*, o colar deve resistir a uma carga de $3P$ em C, que atua sobre uma área de apoio de $A_b = [\pi(0{,}04\text{m})^2 - \pi(0{,}03\text{m})^2] = 2{,}199(10^{-3})\ \text{m}^2$. Assim,



(d)

Figura 1.34

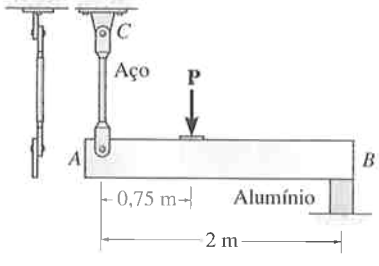
$$A = \frac{P}{\sigma_{adm}}; \qquad 75(10^6)\ \text{N/m}^2 = \frac{3P}{2{,}199(10^{-3})\ \text{m}^2}$$

$$P = 55{,}0\ \text{kN}$$

Por comparação, a maior carga que pode ser aplicada ao eixo é $P = 51{,}8$ kN, visto que qualquer carga maior do que essa fará com que a tensão normal admissível no eixo seja excedida.

EXEMPLO 1.17

A barra rígida AB mostrada na Figura 1.35*a* é suportada por uma haste de aço AC que tem diâmetro de 20 mm e um bloco de alumínio que tem área da seção transversal de 1.800 mm^2. Os pinos de 18 mm de diâmetro em A e C estão submetidos a *cisalhamento simples*. Se a tensão de ruptura do aço e do alumínio forem $(\sigma_{aço})_{rup} = 680$ MPa e $(\sigma_{al})_{rup} = 70$ MPa, respectivamente, e a tensão de cisalhamento de ruptura de cada pino for $\tau_{rup} = 900$ MPA, determinar a maior carga P que pode ser aplicada à barra. Aplicar F.S. = 2.



(a)

SOLUÇÃO

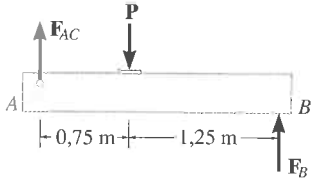
Usando as equações 1.9 e 1.10, as tensões admissíveis são:

$$(\sigma_{aço})_{adm} = \frac{(\sigma_{aço})_{rup}}{\text{F.S.}} = \frac{680\ \text{MPa}}{2} = 340\ \text{MPa}$$

$$(\sigma_{al})_{adm} = \frac{(\sigma_{al})_{rup}}{\text{F.S.}} = \frac{70\ \text{MPa}}{2} = 35\ \text{MPa}$$

$$\tau_{adm} = \frac{\tau_{rup}}{\text{F.S.}} = \frac{900\ \text{MPa}}{2} = 450\ \text{MPa}$$

O diagrama de corpo livre da barra é mostrado na Figura 1.35*b*. Há três incógnitas. Nesse caso, aplicaremos as equações de equilíbrio para exprimir F_{AC} e F_B em termos da carga aplicada P. Temos:



(b)

Figura 1.35

$$\circlearrowleft^{+} \Sigma M_B = 0; \qquad P(1{,}25\ \text{m}) - F_{AC}(2\ \text{m}) = 0 \qquad (1)$$

$$\circlearrowleft^{+} \Sigma M_A = 0; \qquad F_B(2\ \text{m}) - P(0{,}75\ \text{m}) = 0 \qquad (2)$$

Determinaremos agora cada valor de P que gera tensão admissível na haste, no bloco e nos pinos, respectivamente.

Haste AC. Esta requer:

$$F_{AC} = (\sigma_{aço})_{adm}(A_{AC}) = 340(10^6)\ \text{N/m}^2[\pi(0{,}01\ \text{m})^2] = 106{,}8\ \text{kN}$$

Usando a equação 1:

$$P = \frac{(106{,}8\ \text{kN})(2\ \text{m})}{1{,}25\ \text{m}} = 171\ \text{kN}$$

Bloco B. Nesse caso:

$$F_B = (\sigma_{al})_{adm}\, A_B = 35(10^6)\ \text{N/m}^2[1.800\ \text{mm}^2(10^{-6})\ \text{m}^2/\text{mm}^2] = 63{,}0\ \text{kN}$$

Usando a equação 2:

$$P = \frac{(63{,}0\ \text{kN})(2\ \text{m})}{0{,}75\ \text{m}} = 168\ \text{kN}$$

Pino A ou C. Aqui temos:

$$V = F_{AC} = \tau_{adm}\, A = 450(10^6)\ \text{N/m}^2[\pi(0{,}009\ \text{m})^2] = 114{,}5\ \text{kN}$$

Pela equação 1:

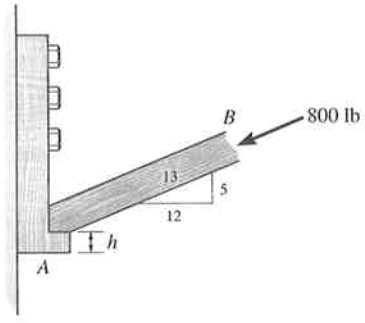
$$P = \frac{114{,}5\ \text{kN}(2\ \text{m})}{1{,}25\ \text{m}} = 183\ \text{kN}$$

Por comparação, quando P atinge seu *menor valor* (168 kN), o pino desenvolve a tensão normal admissível no bloco de alumínio. Portanto:

$$P = 168\ \text{kN}$$ ***Resposta***

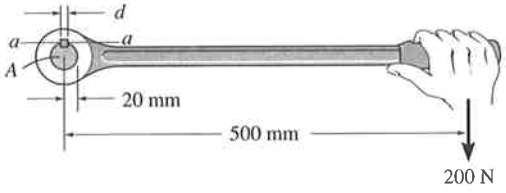
PROBLEMAS

1.77. O elemento B está submetido a uma força de compressão de 800 lb. Supondo que A e B sejam ambos de madeira e tenham $\frac{3}{8}$ pol de espessura, determinar, com aproximação de $\frac{1}{4}$ pol, a menor dimensão h do apoio de modo que a tensão de cisalhamento média não exceda $\tau_{adm} = 300$ psi.



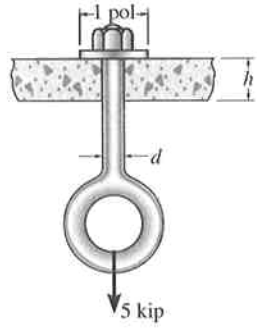
Problema 1.77

1.78. A alavanca é presa ao eixo A por meio de uma chaveta que tem largura d e comprimento de 25 mm. Supondo que o eixo esteja fixo e seja aplicada uma força vertical de 200 N perpendicular ao cabo, determinar a dimensão d se a tensão de cisalhamento admissível para a chaveta for $\tau_{adm} = 35$ MPa.



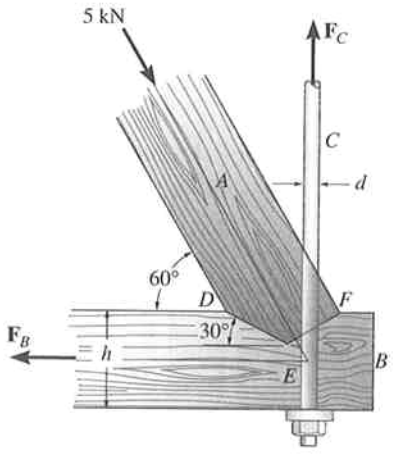
Problema 1.78

1.79. O olhal é usado para suportar uma carga de 5 kip. Determinar seu diâmetro d, com aproximação de $\frac{1}{8}$ pol, e a espessura h necessária, de modo que a arruela não penetre ou cisalhe o apoio. A tensão normal admissível do parafuso é $\sigma_{adm} = 21$ ksi, e a tensão de cisalhamento admissível do material do apoio é $\tau_{adm} = 5$ ksi.



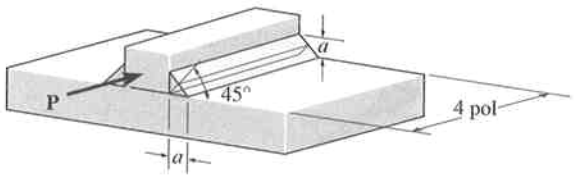
Problema 1.79

***1.80.** A junta sobreposta do elemento de madeira A de uma treliça está submetida a uma força de compressão de 5 kN. Determinar o diâmetro requerido d da haste de aço C e a altura h do elemento B se a tensão normal admissível do aço é $(\sigma_{adm})_{aço} = 157$ MPa e a tensão normal admissível da madeira é $(\sigma_{adm})_{mad} = 2$ MPa. O elemento B tem 50 mm de espessura.



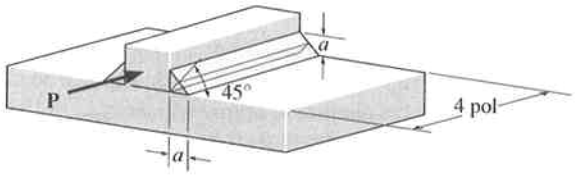
Problema 1.80

1.81. O tamanho a do cordão de solda é determinado calculando-se a tensão de cisalhamento média ao longo do plano sombreado que tem a menor seção transversal. Determinar o menor tamanho a das duas soldas se a força aplicada à chapa for $P = 20$ kip. A tensão de cisalhamento admissível para o material de solda é $\tau_{adm} = 14$ ksi.



Problema 1.81

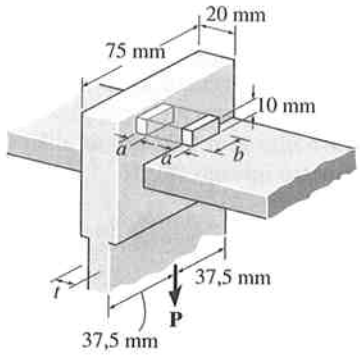
1.82. Tamanho do cordão de solda $a = 0{,}25$ pol. Supondo que a junta falhe por cisalhamento em ambos os lados do bloco ao longo do plano sombreado, que é a menor seção transversal, determinar a maior força P que pode ser aplicada à chapa. A tensão de cisalhamento admissível para o material de solda é $\tau_{adm} = 14$ ksi.



Problema 1.82

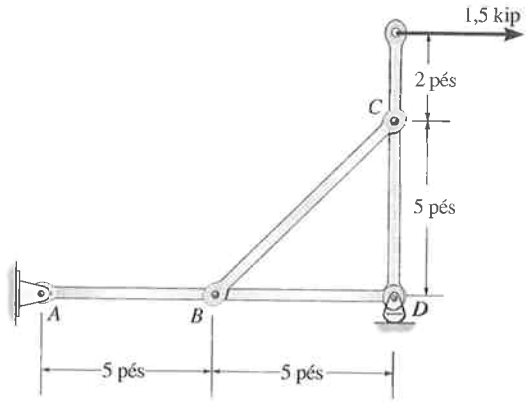
1.83. O suporte é apoiado por um pino retangular. Determinar a grandeza da carga suspensa admissível **P** se a tensão de apoio admissível for $(\sigma_b)_{adm} = 220$ MPa, o esforço de tração admissível $(\sigma_t)_{adm} = 150$ MPa e a tensão de cisalhamento admissível $\tau_{adm} = 130$ MPa. Suponha que $t = 6$ mm, $a = 5$ mm e $b = 25$ mm.

***1.84.** O suporte é apoiado por um pino retangular. Determinar a espessura necessária t do suporte e as dimensões a e b se a carga suspensa for $P = 60$ kN. O esforço de tração admissível é $(\sigma_t)_{adm} = 150$ MPa, a tensão de apoio admissível é $(\sigma_b)_{adm} = 290$ MPa e a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 125$ MPa.



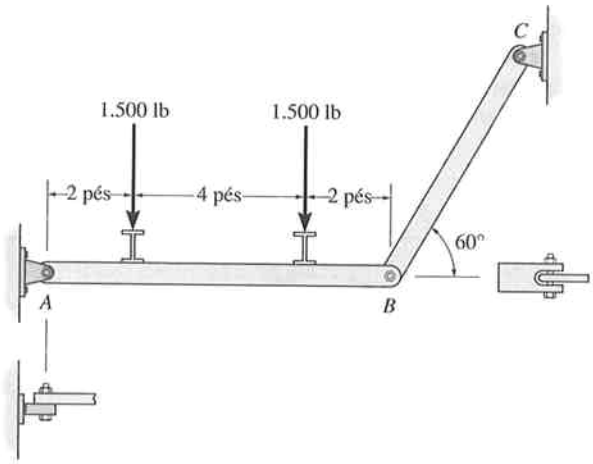
Problemas 1.83/1.84

1.85. A estrutura está submetida a uma carga de 1,5 kip. Determinar o diâmetro necessário dos pinos em A e B se a tensão de cisalhamento admissível para o material for $\tau_{adm} = 6$ ksi. O pino A está submetido a cisalhamento duplo, enquanto o pino B está submetido a cisalhamento simples.



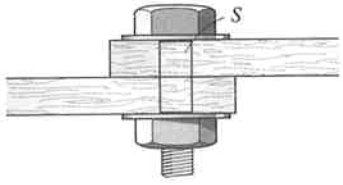
Problema 1.85

1.86. Determinar a área necessária da seção transversal do elemento BC e o diâmetro dos pinos A e B se a tensão normal admissível for $\sigma_{adm} = 3$ ksi e a tensão de cisalhamento admissível for $\tau_{adm} = 4$ ksi.



Problema 1.86

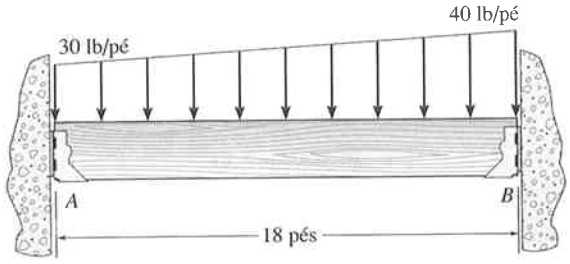
1.87. O acoplamento é feito usando parafuso e porca e duas arruelas. Supondo que a tensão de apoio admissível para as tábuas seja $(\sigma_b)_{adm} = 2$ ksi e o esforço de tração admissível seja $(\sigma_t)_{adm} = 18$ ksi, determinar a tensão admissível máxima na rosca do parafuso. A rosca do parafuso tem 0,31 pol de diâmetro e as arruelas têm 0,75 pol de diâmetro externo e 0,50 pol de diâmetro interno (furo).



Problema 1.87

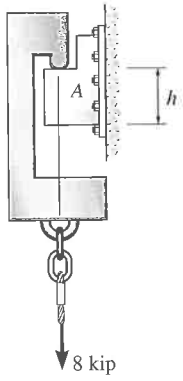
***1.88.** Os suportes apóiam a vigota uniformemente; supõe-se então que os quatro pregos em cada suporte transmitem uma intensidade igual da carga. Supondo que a vigota esteja submetida ao carregamento mostrado, determinar a tensão de cisalhamento média em cada prego do suporte nas extremidades A e B. Cada prego tem 0,25 pol de diâmetro. Os suportes resistem apenas a cargas verticais.

1.89. Os suportes apóiam a vigota uniformemente; supõe-se então que os quatro pregos em cada suporte transmitem uma intensidade igual da carga. Determinar o menor diâmetro dos pregos em A e B se a tensão de cisalhamento admissível para os pregos for de $\tau_{adm} = 4$ ksi. Os suportes resistem apenas a cargas verticais.



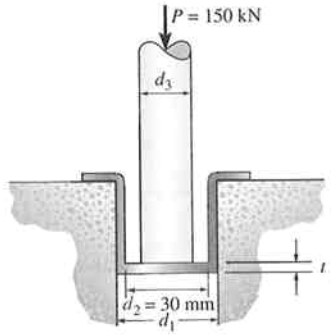
Problemas 1.88/1.89

1.90. O suporte de alumínio A é usado para resistir à carga de 8 kip aplicada na linha de centro. Se ele tiver uma espessura constante de 0,5 pol, determinar a menor altura h a fim de evitar ruptura por cisalhamento. A tensão de ruptura por cisalhamento é $\tau_{rup} = 23$ ksi. Usar um fator de segurança para cisalhamento de F.S. = 2,5.



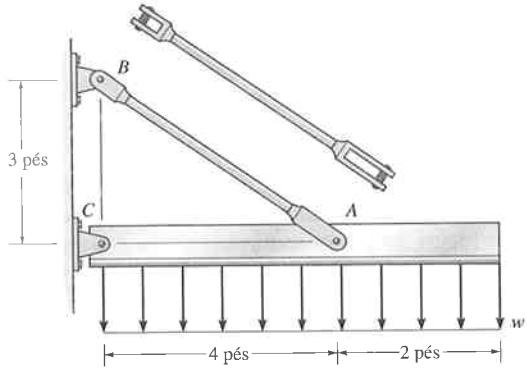
Problema 1.90

1.91. Determinar as menores dimensões do eixo e da tampa circulares se a carga que devem suportar for $P = 150$ kN. O esforço de tração, a tensão de apoio e a tensão de cisalhamento admissíveis são $(\sigma_t)_{adm} = 175$ MPa, $(\sigma_b)_{adm} = 275$ MPa e $\tau_{adm} = 115$ MPa.



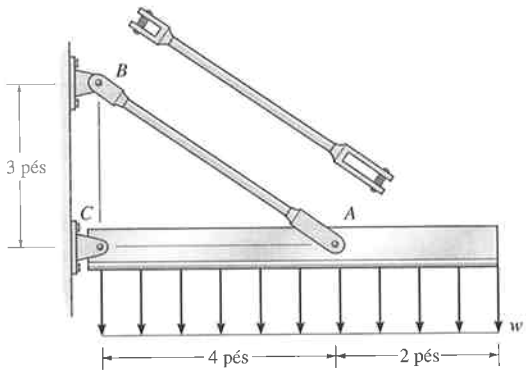
Problema 1.91

***1.92.** O conjunto do suporte é usado para apoiar uma carga distribuída $w = 0{,}8$ kip/pé. Determinar o esforço de cisalhamento médio no parafuso de 0,40 pol de diâmetro em A e o esforço de tração médio na haste AB, que tem 0,5 pol de diâmetro. Supondo que o limite de elasticidade da tensão de cisalhamento do parafuso seja $\tau_p = 25$ ksi e o limite de elasticidade do esforço de tração seja $\sigma_p = 38$ ksi, determinar o fator de segurança em relação ao limite de elasticidade para cada caso.



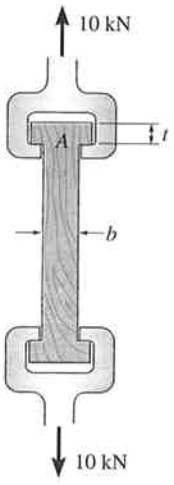
Problema 1.92

1.93. Determinar a intensidade w da carga distribuída máxima que pode ser suportada pelo conjunto do suporte de modo que uma tensão de cisalhamento admissível de $\tau_{adm} = 13{,}5$ ksi não seja excedida nos parafusos de 0,40 pol de diâmetro em A e B, tampouco o esforço de tração admissível de $\sigma_{adm} = 22$ ksi seja excedido na haste AB de 0, 5 pol de diâmetro.



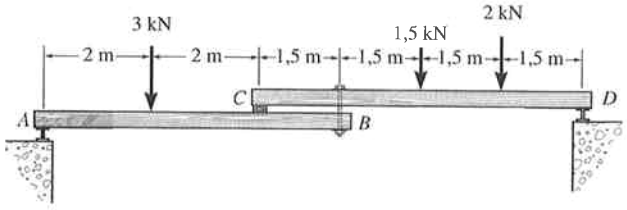
Problema 1.93

1.94. A amostra de madeira está submetida a uma tração de 10 kN em uma máquina de teste de tração. Supondo que a tensão normal admissível da madeira seja $(\sigma_t)_{adm} = 12$ MPa e a tensão de cisalhamento admissível seja $\tau_{adm} = 1{,}2$ MPa, determinar as dimensões b e t necessárias de modo que a amostra atinja essas tensões simultaneamente. A amostra tem largura de 25 mm.



Problema 1.94

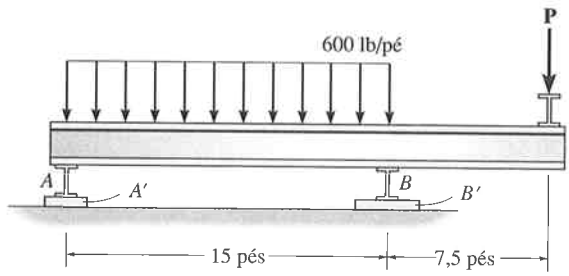
1.95. A viga composta de madeira está unida por um parafuso em B. Supondo que as conexões em A, B, C e D exercem apenas forças verticais sobre a viga, determinar o diâmetro necessário do parafuso em B e o diâmetro externo necessário de suas arruelas se o esforço de tração admissível do parafuso for $(\sigma_t)_{adm} = 150$ MPa e a tensão de apoio para a madeira for $(\sigma_b)_{adm} = 28$ MPa. Suponha que o furo das arruelas possui o mesmo diâmetro do parafuso.



Problema 1.95

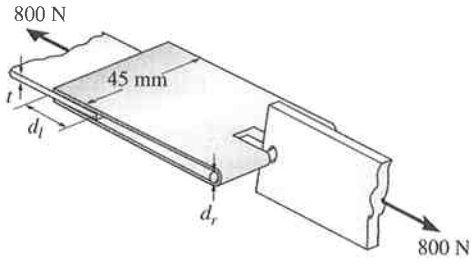
***1.96.** Supondo que a tensão de apoio admissível para o material sob o apoio em A e B seja $(\sigma_b)_{adm} = 400$ psi, determinar a carga máxima **P** que pode ser aplicada à viga. As placas de apoio A' e B' têm seção transversal quadrada de 2 pol × 2 pol e 4 pol × 4 pol, respectivamente.

1.97. Supondo que a tensão de apoio admissível para o material sob os apoios em A e B seja $(\sigma_b)_{adm} = 400$ psi, determinar o tamanho das placas de apoio *quadradas* A' e B' necessário para suportar a carga. Dimensionar as placas com aproximação de $\frac{1}{2}$ pol. As reações nos apoios são verticais. Suponha que $P = 1.500$ lb.



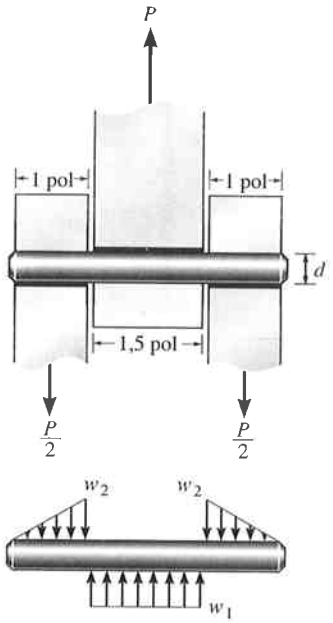
Problemas 1.96/1.97

1.98. O conjunto da correia sobreposta será submetido a uma força de 800 N. Determinar (a) a espessura t necessária para a correia se o esforço de tração admissível para o material for $(\sigma_t)_{adm} = 10$ MPa, (b) o comprimento d_l necessário para a sobreposição se a cola pode resistir a um esforço de cisalhamento admissível de $(\tau_{adm})_c = 0{,}75$ MPa e (c) o diâmetro d_r do pino se a tensão de cisalhamento admissível para o pino for $(\tau_{adm})_p = 30$ MPa.



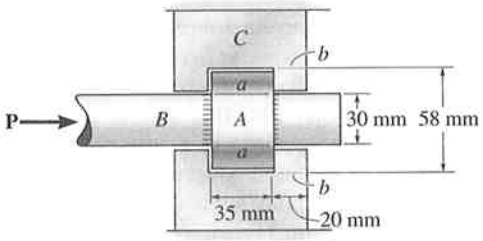
Problema 1.98

1.99. O pino está submetido a cisalhamento duplo, visto que é usado para acoplar os três elos. Devido ao desgaste, a carga é distribuída sobre as partes superior e inferior do pino como mostrado no diagrama de corpo livre. Determinar o diâmetro d do pino se a tensão de cisalhamento admissível for $\tau_{adm} = 10$ ksi e a carga $P = 8$ kip. Determinar também as intensidades das cargas w_1 e w_2.



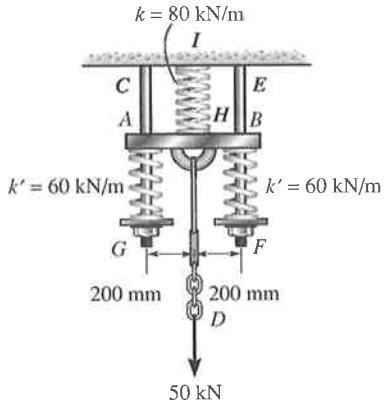
Problema 1.99

***1.100.** O mancal de encosto consiste de um colar circular A preso ao eixo B. Determinar a força axial máxima P que pode ser aplicada ao eixo de modo que não provoque tensão de cisalhamento ao longo das superfícies cilíndricas a ou b que exceda uma tensão de cisalhamento admissível de τ_{adm} = 170 MPa.



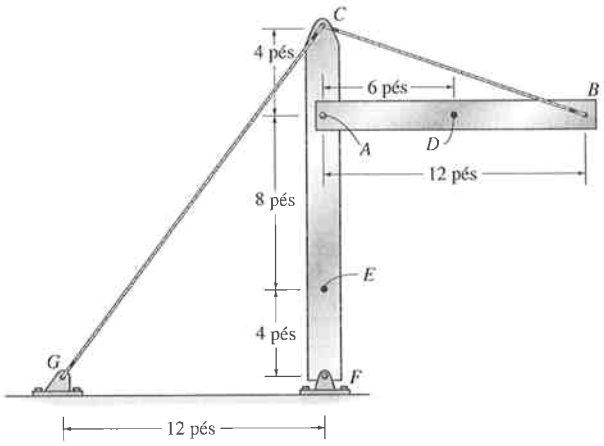
Problema 1.100

1.101. O mecanismo de mola é usado como amortecedor para uma carga aplicada na barra de tração AB. Determinar a força em cada mola quando é aplicada uma força de 50 kN. Originalmente, cada mola está descomprimida e a barra de tração desliza ao longo dos guias lisos CG e EF. As extremidades de todas as molas estão presas aos seus respectivos elementos. Além disso, qual é o diâmetro necessário para as roscas dos parafusos CG e EF se a tensão admissível para os parafusos for σ_{adm} = 150 MPa?



Problema 1.101

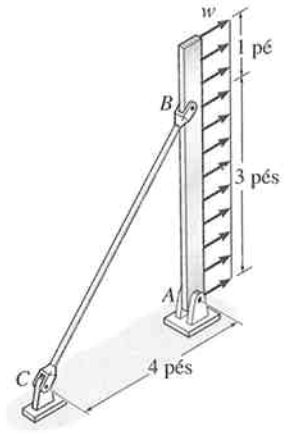
1.102. A viga AB é suportada por pino em A e apoiada por um cabo BC. Um cabo CG *separado* é usado para prender a estrutura. Supondo que AB pese 120 lb/pé e a coluna FC tenha um peso de 180 lb/pé, determinar a resultante das cargas internas que atua sobre as seções transversais localizadas nos pontos D e E. Desprezar a espessura tanto da viga como da coluna nos cálculos.



Problema 1.102

1.103. O conjunto é usado para suportar a carga distribuída w = 500 lb/pé. Determinar o fator de segurança em relação ao limite de elasticidade para a haste de aço BC e os pinos em B e C se o limite de elasticidade do aço na tração é σ_p = 36 ksi e no cisalhamento τ_p = 18 ksi. A haste tem 0,4 pol de diâmetro e cada pino tem 0,30 pol de diâmetro.

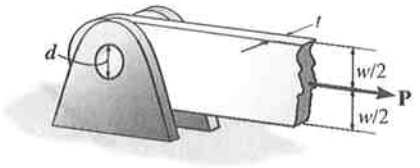
***1.104.** Supondo que a tensão de cisalhamento admissível para cada um dos pinos de aço de 0,3 pol de diâmetro em A, B e C seja τ_{adm} = 12,5 ksi e a tensão normal admissível para a haste BC de 0,40 pol de diâmetro seja σ_{adm} = 22 ksi, determinar a maior intensidade w da carga distribuída uniforme que pode ser suportada pela viga.



Problemas 1.103/1.104

1.105. A barra é apoiada pelo pino. Supondo que o esforço de tração admissível da barra seja $(\sigma_t)_{adm}$ = 21 ksi e a tensão de cisalhamento admissível do pino seja τ_{adm} = 12 ksi, determinar o diâmetro do pino para o qual a carga P seja máxima. Qual é essa carga máxima? Suponha que o furo da barra tenha o mesmo diâmetro d do pino. Use $t = \frac{1}{4}$ pol e w = 2 pol.

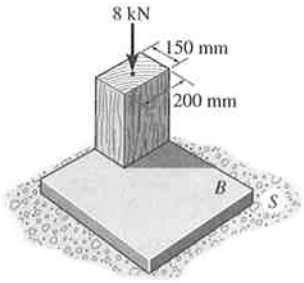
1.106. A barra está acoplada ao suporte por um pino com diâmetro $d = 1$ pol. Supondo que o esforço de tração admissível para a barra seja $(\sigma_t)_{adm} = 20$ ksi e a tensão de apoio admissível entre o pino e a barra seja $(\sigma_b)_{adm} = 30$ ksi, determinar as dimensões w e t de modo que a área bruta da seção transversal seja $wt = 2$ pol^2 e a carga P seja máxima. Qual é a carga máxima? Suponha que o furo da barra tenha o mesmo diâmetro do pino.



Problemas 1.105/1.106

PROBLEMAS DE REVISÃO

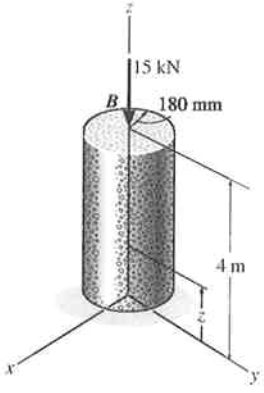
1.107. Uma força de 8 kN é aplicada no *centro* de um poste de madeira. Se o poste for colocado no canto de sua placa base B, a tensão de apoio que a placa base exercerá sobre a laje S pode ser considerada como uniformemente distribuída? Por que sim ou por que não? Qual é o esforço de compressão médio no poste de madeira?



Problema 1.107

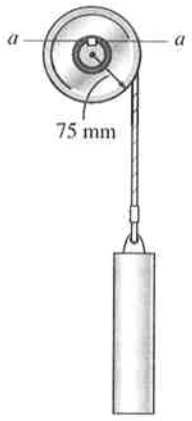
***1.108.** A coluna é feita de concreto com densidade de 2,30 Mg/m^3. Em seu topo B está submetida a uma força de compressão axial de 15 kN. Determinar a tensão de compressão na coluna em função da distância z medida a partir de sua base.

1.109. A coluna é feita de concreto com densidade de 2,30 Mg/m^3. Em seu topo B está submetida a uma força de compressão axial de 15 kN. Determinar a tensão de compressão na coluna em $z = 1$ m, 2 m e 3 m.



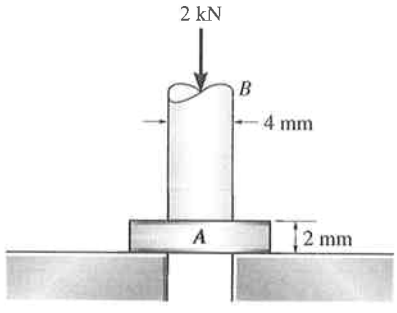
Problemas 1.108/1.109

1.110. A roldana é presa ao eixo de 20 mm de diâmetro por uma chaveta instalada em uma ranhura usinada na roldana e no eixo. Supondo que a carga suspensa tenha massa de 50 kg, determinar a tensão de cisalhamento média na chaveta ao longo da seção a–a. A chaveta é quadrada, com 5 mm de lado e comprimento de 12 mm.



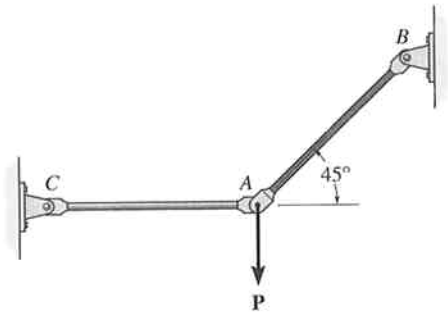
Problema 1.110

1.111. O punção circular B exerce uma força de 2 kN no topo da chapa A. Determinar a tensão de cisalhamento média na chapa devida a esse carregamento.



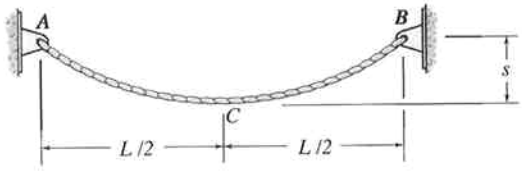
Problema 1.111

***1.112.** As duas hastes de alumínio suportam a carga vertical $P = 20$ kN. Determinar seus diâmetros requeridos se o esforço de tração admissível para o alumínio for $\sigma_{adm} = 150$ MPa.



Problema 1.112

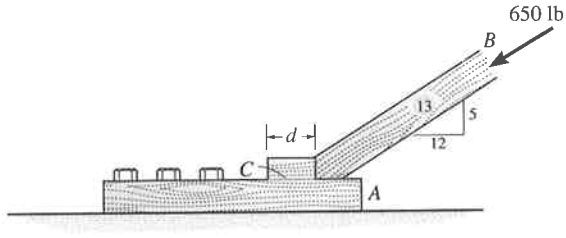
1.113. O cabo tem peso específico γ (peso/volume) e área da seção transversal A. Supondo que a flecha seja pequena, de modo que seu comprimento seja aproximadamente L e seu peso possa ser distribuído uniformemente ao longo do eixo horizontal, determinar a tensão normal média do cabo em seu ponto mais baixo C.



Problema 1.113

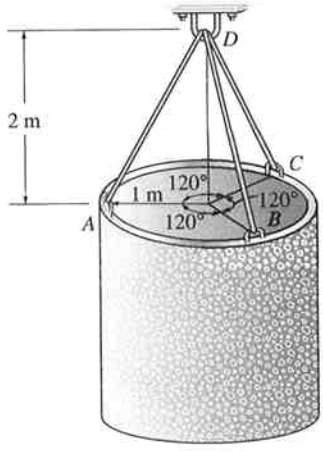
1.114. O elemento B está submetido a uma força de compressão de 650 lb. Supondo que A e B sejam feitos de madeira e tenham espessura de $\frac{3}{8}$ pol, determinar, com aproximação de $\frac{1}{4}$ pol, a menor dimensão d do apoio de modo que a tensão de cisalhamento média ao longo da seção C não exceda τ_{adm} = 300 psi.

1.115. O elemento B está submetido a uma força de compressão de 650 lb. Supondo que A e B sejam feitos de madeira e tenham espessura de $\frac{3}{8}$ pol e d = 6 pol, determinar a tensão de cisalhamento média ao longo da seção C.



Problemas 1.114/1.115

***1.116.** O tubo de concreto de 3 Mg está suspenso por três arames. Supondo que BD e CD tenham 10 mm de diâmetro e AD tenha 7 mm de diâmetro, determinar a tensão normal média em cada arame.



Problema 1.116

2 DEFORMAÇÃO

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

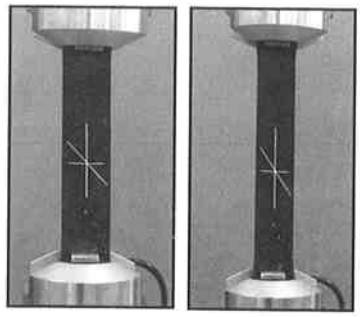
Nos problemas de engenharia, a deformação de um corpo é especificada pelo conceito de deformação normal e de cisalhamento. Neste capítulo definiremos essas grandezas e mostraremos como são determinadas em diversos tipos de problemas.

A tensão excessiva em materiais frágeis como este encontro de ponte de concreto pode provocar sua deformação até a ruptura. Pela medição da deformação, os engenheiros podem prever a tensão no material.

2.1 DEFORMAÇÃO

Quando uma força é aplicada a um corpo, tende a mudar a forma e o tamanho dele. Tais mudanças são denominadas ***deformação*** e podem ser perfeitamente visíveis ou praticamente imperceptíveis sem o uso de equipamento para fazer medições precisas. Por exemplo, uma tira de borracha sofre deformação muito grande quando esticada. Por outro lado, ocorrem apenas pequenas deformações de membros estruturais quando um edifício é ocupado por pessoas movimentando-se. O corpo também pode sofrer deformação quando sua temperatura muda. Um exemplo típico é a expansão ou a contração de um telhado provocadas pelas condições atmosféricas.

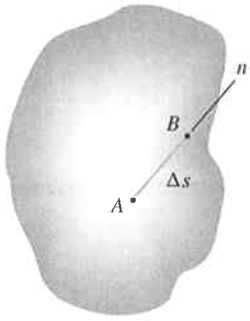
De maneira geral, a deformação do corpo não é uniforme em todo o seu volume e, assim, a mudança na geometria de qualquer segmento de reta do corpo pode variar ao longo do comprimento. Por exemplo, uma parte da reta pode alongar-se, enquanto outra pode contrair-se. Entretanto, à medida que se consideram segmentos de reta cada vez menores, eles permanecem retos após a deformação e, assim, para estudar mudanças de deformação de maneira mais uniforme, consideraremos as retas como muito pequenas e localizadas na vizinhança de um ponto. Desse modo, imagina-se que qualquer segmento de reta localizado em um ponto do corpo muda com valor diferente do segmento localizado em algum outro ponto. Além disso, essas mudanças também dependem da orientação do segmento de reta no ponto. Por exemplo, um segmento de reta pode alongar-se quando orientado em uma direção e contrair-se quando orientado em outra.



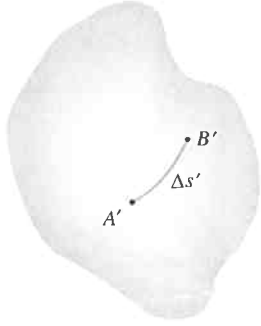
Observe as posições dos três segmentos de reta nesta membrana de borracha antes e depois de ela ser submetida a tração. A reta vertical alonga-se, a reta horizontal diminui e a reta inclinada muda seu comprimento e gira.

2.2 CONCEITO DE DEFORMAÇÃO

A fim de descrever a deformação por meio de mudanças no comprimento dos segmentos de reta e mudanças dos ângulos entre eles, desenvolveremos seu conceito. As medições de deformação são feitas, na prática, por meio de



Corpo sem deformação
(a)



Corpo deformado
(b)

Figura 2.1

experimentos e, uma vez obtidos seus valores, é possível relacioná-los às cargas aplicadas ou às tensões que atuam no interior do corpo, como mostraremos na próxima seção.

Deformação Normal. O alongamento ou a contração de um segmento de reta por unidade de comprimento é denominado ***deformação normal***. Para desenvolver uma definição formal de deformação normal, consideremos a reta AB, contida no interior do corpo sem deformação mostrado na Figura 2.1*a*. A reta localiza-se ao longo do eixo n e tem comprimento original de Δs. Após a deformação, os pontos A e B são deslocados para as posições A' e B', e a reta torna-se curva, tendo comprimento de $\Delta s'$ (Figura 2.1*b*). A mudança de comprimento da reta é, portanto, $\Delta s' - \Delta s$. Se definirmos a *deformação normal média* usando o símbolo $\epsilon_{\text{méd}}$ (epsílon), então:

$$\epsilon_{\text{méd}} = \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s} \tag{2.1}$$

Como o ponto B é escolhido cada vez mais próximo do ponto A, o comprimento da reta torna-se cada vez menor, de modo que $\Delta s \to 0$. Além disso, isso faz com que B' aproxime-se de A', tal que $\Delta s' \to 0$. Como conseqüência, no limite, a deformação normal no *ponto* A e na direção de n é:

$$\epsilon = \lim_{\substack{B \to A \\ \text{eixo } n}} \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s} \tag{2.2}$$

Se a deformação normal for conhecida, podemos usar a equação anterior para obter o comprimento final aproximado de um segmento de reta *menor* na direção de n depois da deformação. Temos:

$$\Delta s' \approx (1 + \epsilon)\, \Delta s \tag{2.3}$$

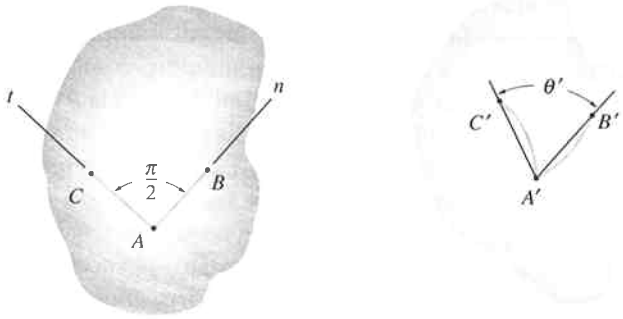
Portanto, quando ϵ é positivo, a reta inicial alonga-se; se ϵ é negativo, a reta contrai-se.

Unidades. Observe que a deformação normal é uma *grandeza adimensional*, visto ser a relação entre dois comprimentos. Apesar disso, é prática comum expressá-la em termos de razão de unidades de comprimento. Se for usado o SI, as unidades básicas serão metros/metro (m/m). Na maioria das aplicações da engenharia, ϵ é muito pequeno, de modo que as medidas da deformação são dadas em micrometros por metro [μm/m], em que $\mu\text{m} = 10^{-6}$ m. No sistema Pés-Libras-Segundo, a deformação é expressa em polegadas/polegada (pol/pol). Às vezes, em trabalho experimental, a deformação é expressa em porcentagem, tal como 0,001 m/m = 0,1%. Por exemplo, a deformação normal $480(10^{-6})$ é indicada como $480(10^{-6})$ pol/pol, 480 μm/m, ou 0,0480%. Pode-se também expressar essa resposta simplesmente como 480 μ (480 micros).

Deformação por Cisalhamento. A mudança de ângulo ocorrida entre dois segmentos de reta originalmente *perpendiculares* entre si é denominada ***deformação por cisalhamento***. O ângulo é designado por γ (gama) e medido em radianos (rad). Para mostrar como essa deformação ocorre, consideremos os segmentos de reta AB e AC com origem no mesmo ponto A de um corpo e direcionados ao longo dos eixos perpendiculares n e t (Figura 2.2*a*). Após a deformação, as extremidades das retas são deslocadas e as próprias retas transformam-se em curvas, de modo que o ângulo entre elas em A é θ' (Figura 2.2*b*). Portanto, definimos a deformação por cisalhamento no ponto A associada aos eixos n e t como:

$$\gamma_{nt} = \frac{\pi}{2} - \lim_{\substack{B \to A \text{ eixo } n \\ C \to A \text{ eixo } t}} \theta' \tag{2.4}$$

Observe que, se θ' é menor do que $\pi/2$, a deformação por cisalhamento é positiva; entretanto, se θ' é maior do que $\pi/2$, a deformação por cisalhamento é negativa.



Corpo sem deformação (a) Corpo deformado (b)

Figura 2.2

Componentes Cartesianos da Deformação. Usando as definições anteriores de deformação normal e por cisalhamento, vamos mostrar como elas são usadas para descrever a deformação do corpo (Figura 2.3*a*). Imaginemos o corpo subdividido em pequenos elementos tais como o mostrado na Figura 2.3*b*. O elemento é retangular, tem dimensões não deformadas Δx, Δy e Δz e está localizado nas vizinhanças de um ponto do corpo (Figura 2.3*a*). Supondo que suas dimensões sejam muito pequenas, seu formato deformado será um paralelepípedo (Figura 2.3*c*), uma vez que segmentos de reta muito pequenos permanecem aproximadamente retos após a deformação do corpo. Para atingir o formato deformado, devemos considerar antes como a deformação normal muda os comprimentos dos lados do elemento retangular e, depois, como a deformação por cisalhamento muda os ângulos de cada lado. Portanto, usando a Equação 2.3, $(\Delta s' \approx (1 + \epsilon)\Delta s)$, em relação às retas Δx, Δy e Δz, temos que os comprimentos aproximados dos lados do paralelepípedo são:

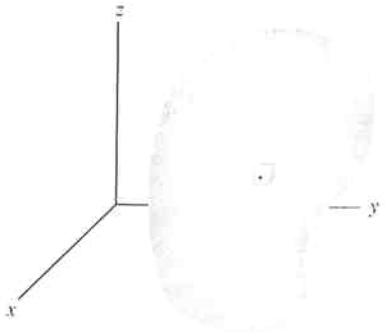
$$(1 + \epsilon_x)\,\Delta x \qquad (1 + \epsilon_y)\,\Delta y \qquad (1 + \epsilon_z)\,\Delta z$$

Os ângulos aproximados entre os lados, originalmente definidos pelos lados Δx, Δy e Δz, são:

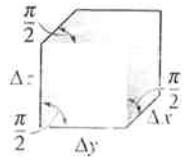
$$\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy} \qquad \frac{\pi}{2} - \gamma_{yz} \qquad \frac{\pi}{2} - \gamma_{xz}$$

Observe que, em particular, ***deformações normais provocam mudança de volume*** do elemento retangular, enquanto ***deformações por cisalhamento provocam mudança no seu formato***. Naturalmente, ambos os efeitos ocorrem simultaneamente durante a deformação.

Resumindo, então, o *estado de deformação* em um ponto do corpo requer a especificação de três deformações normais ϵ_x, ϵ_y, ϵ_z e três deformações por cisalhamento γ_{xy}, γ_{yz} e γ_{xz}. Tais deformações descrevem completamente a deformação de um elemento de volume retangular do material localizado em

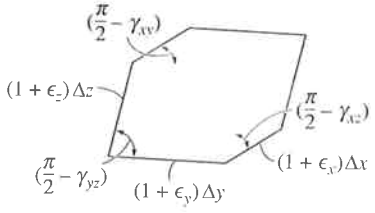


(a)



Elemento sem deformação

(b)

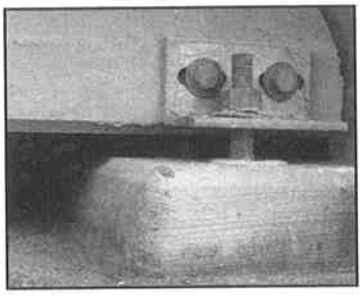


Elemento deformado

(c)

Figura 2.3

um ponto e orientado de modo que seus lados são originalmente paralelos aos eixos x, y, z. Uma vez que as deformações sejam definidas em todos os pontos do corpo, o formato deformado do corpo pode então ser descrito. Acrescente-se que, conhecendo-se o estado de deformação em um ponto, definido pelos seus seis componentes, é possível determinar os componentes da deformação em um elemento orientado em qualquer outra direção. Esse assunto será discutido no Capítulo 10.



O apoio de borracha da longarina desta ponte de concreto está submetido tanto à deformação normal como à de cisalhamento. A deformação normal é provocada pelo próprio peso da longarina e pelas cargas sobre ela, enquanto a deformação por cisalhamento é provocada pelo movimento horizontal da longarina devido a mudanças de temperatura.

Análise de Pequenas Deformações. A maioria dos projetos de engenharia envolve aplicações para as quais são permitidas apenas *pequenas deformações*. Por exemplo, quase todas as estruturas e máquinas têm aparência rígida e as deformações que ocorrem durante o uso dificilmente são percebidas.

Além disso, mesmo que a deflexão de um membro como uma chapa fina ou haste delgada possa parecer grande, o material de que ele é feito pode estar sujeito apenas a deformações muito pequenas. Neste livro, vamos supor que as deformações ocorridas no interior de um corpo sejam quase infinitesimais, de modo que as *deformações normais* ocorridas no interior do material sejam *muito pequenas* em comparação com a unidade, ou seja, $\epsilon << 1$. Essa hipótese, baseada na intensidade da deformação, tem larga aplicação prática na engenharia e, em geral, é denominada *análise de pequenas deformações*. Ela permite aproximarmos, por exemplo, sen $\theta \approx \theta$, cos $\theta \approx 1$ e tg $\theta \approx \theta$, desde que θ seja muito pequeno.

PONTOS IMPORTANTES

- As cargas provocam deformação no material de todos os corpos e, como resultado, os pontos do corpo sofrem *deslocamentos* ou *mudanças de posição*.
- *Deformação normal* é a medida do alongamento ou da contração de um pequeno segmento de reta do corpo, enquanto *deformação por cisalhamento* é a medida da mudança de ângulo ocorrida entre dois segmentos de reta pequenos, originalmente perpendiculares entre si.
- O estado de deformação em um ponto é caracterizado por seis componentes da deformação: três deformações normais ϵ_x, ϵ_y, ϵ_z e três deformações por cisalhamento γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{xz}. Esses componentes dependem da orientação dos segmentos de reta e de sua localização no corpo.
- Deformação é a grandeza geométrica medida por meio de técnicas experimentais. Uma vez obtido seu valor, a tensão no corpo pode então ser determinada pelas relações das propriedades do material.
- A maioria dos materiais da engenharia sofre pequenas deformações e, desse modo, a deformação normal $\epsilon << 1$. Essa hipótese da 'análise de pequenas deformações' permite que os cálculos da deformação normal sejam simplificados, uma vez que podem ser feitas aproximações de primeira ordem em relação às suas dimensões.

EXEMPLO 2.1

A haste delgada mostrada na Figura 2.4 está submetida a um aumento de temperatura ao longo de seu eixo, o que cria uma deformação normal na haste de $\epsilon_z = 40(10^{-3})z^{1/2}$, em que z é dado em metros. Determinar (*a*) o deslocamento da extremidade B da haste devido ao aumento de temperatura e (*b*) a deformação normal média da haste.

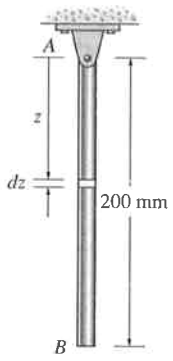


Figura 2.4

SOLUÇÃO

Parte (a). Como a deformação normal é dada para cada ponto ao longo da haste, um segmento diferencial dz, localizado na posição z (Figura 2.4), tem comprimento deformado determinado pela Equação 2.3, ou seja:

$$dz' = [1 + 40(10^{-3})z^{1/2}]\, dz$$

O somatório desses segmentos ao longo do eixo produz o *comprimento deformado* da haste, isto é:

$$\begin{aligned} z' &= \int_0^{0,2\text{ m}} [1 + 40(10^{-3})z^{1/2}]\, dz \\ &= z + 40(10^{-3})(\tfrac{2}{3}\, z^{3/2}) \Big|_0^{0,2\text{ m}} \\ &= 0,20239\text{ m} \end{aligned}$$

O deslocamento na extremidade da haste é, portanto:

$$\Delta_B = 0,20239\text{ m} - 0,2\text{ m} = 0,00239\text{ m} = 2,39\text{ mm} \downarrow \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Parte (b). A deformação normal média da haste é determinada pela Equação 2.1, que supõe que a haste ou 'segmento de reta' tem comprimento original de 200 mm e uma mudança de comprimento de 2,39 mm. Portanto:

$$\epsilon_{\text{méd}} = \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s} = \frac{2,39\text{ mm}}{200\text{ mm}} = 0,0119\text{ mm/mm} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

EXEMPLO 2.2

Uma força que atua no cabo da alavanca mostrada na Figura 2.5*a* provoca rotação de $\theta = 0,002$ rad na alavanca no sentido horário. Determinar a deformação normal média desenvolvida no arame BC.

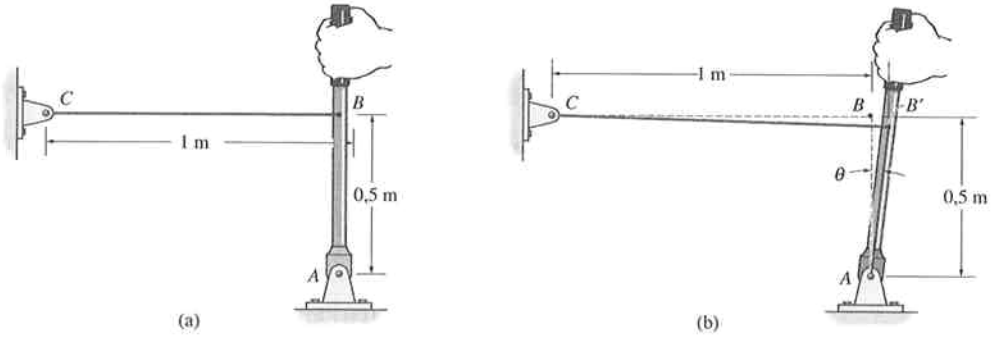


Figura 2.5

SOLUÇÃO

Como $\theta = 0{,}002$ rad é pequeno, o alongamento do arame CB (Figura 2.5*b*) é $BB' = \theta\,(0{,}5\text{ m}) = (0{,}002\text{ rad})\,(0{,}5\text{ m}) = 0{,}001$ m. A deformação normal média no arame é, portanto:

$$\epsilon_{méd} = \frac{BB'}{CB} = \frac{0{,}001}{1\text{ m}} = 0{,}001\text{ m/m} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

EXEMPLO 2.3

A chapa é deformada, ficando com o formato tracejado da Figura 2.6*a*. Se nesse formato deformado as linhas horizontais da chapa permanecerem horizontais e não mudarem seu comprimento, determinar (*a*) a deformação normal média ao longo do lado AB e (*b*) a deformação por cisalhamento média da chapa em relação aos eixos x e y.

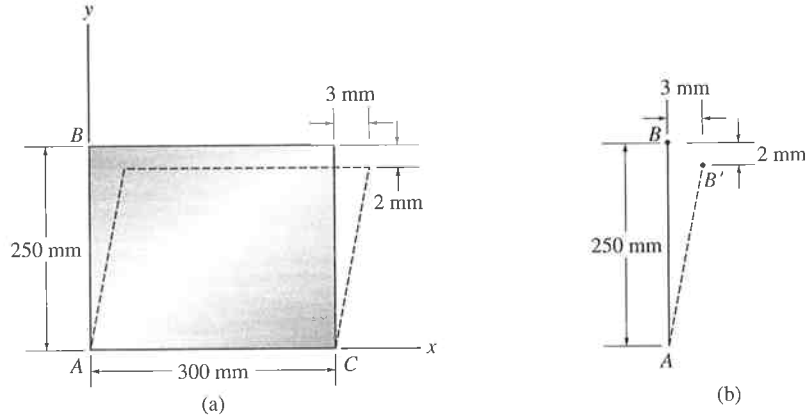
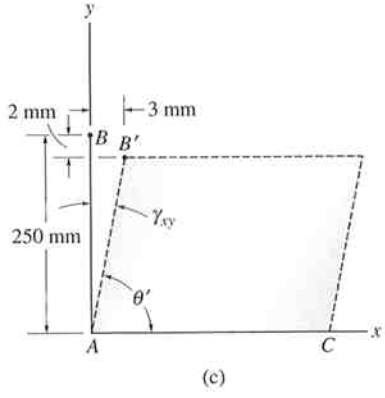


Figura 2.6

SOLUÇÃO

Parte (a). A reta AB, coincidente com o eixo y, torna-se a reta AB' após a deformação, como mostrado na Figura 2.6*b*. O comprimento dessa reta é:

$$AB' = \sqrt{(250 - 2)^2 + (3)^2} = 248{,}018\text{ mm}$$



Portanto, a deformação normal média é:

$$(\epsilon_{AB})_{méd} = \frac{AB' - AB}{AB} = \frac{248{,}018\text{ mm} - 250\text{ mm}}{250\text{ mm}}$$

$$= -7{,}93(10^{-3})\text{ mm/mm} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

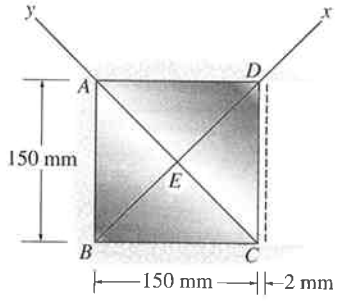
O sinal negativo indica que a deformação provoca contração (ou seja, diminuição no comprimento) de AB.

Parte (b). Como se observa na Figura 2.6*c*, o ângulo BAC de 90° entre os lados da chapa, em relação aos eixos x, y, muda para θ' devido ao deslocamento de B para B'. Como $\gamma_{xy} = (\pi/2) - \theta'$, então γ_{xy} é o ângulo mostrado na figura. Assim:

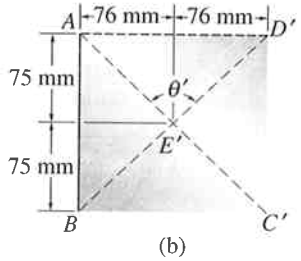
$$\gamma_{xy} = \text{tg}^{-1}\left(\frac{3\text{ mm}}{250\text{ mm} - 2\text{ mm}}\right) = 0{,}0121\text{ rad} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

EXEMPLO 2.4

A chapa mostrada na Figura 2.7*a* está presa por guias horizontais rígidos na parte superior e na inferior (*AD* e *BC*). Se houver um deslocamento horizontal uniforme de 2 mm em seu lado direito *CD*, determinar (*a*) a deformação normal média ao longo da diagonal *AC* e (*b*) a deformação por cisalhamento em *E* relativa aos eixos *x* e *y*.



(a)



(b)

Figura 2.7

SOLUÇÃO

Parte (a). Quando a chapa é deformada, a diagonal *AC* torna-se *AC'* (Figura 2.7*b*). O comprimento das diagonais *AC* e *AC'* pode ser obtido pelo teorema de Pitágoras. Temos:

$$AC = \sqrt{(0{,}150)^2 + (0{,}150)^2} = 0{,}21213 \text{ m}$$
$$AC' = \sqrt{(0{,}150)^2 + (0{,}152)^2} = 0{,}21355 \text{ m}$$

Portanto, a deformação normal média ao longo da diagonal é:

$$(\epsilon_{AC})_{méd} = \frac{AC' - AC}{AC} = \frac{0{,}21355 \text{ m} - 0{,}21213 \text{ m}}{0{,}21213 \text{ m}}$$
$$= 0{,}00669 \text{ mm/mm} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Parte (b). Para calcular a deformação por cisalhamento em *E* relativa aos eixos *x* e *y*, primeiro é necessário determinar o ângulo θ', que especifica o ângulo entre esses eixos após a deformação (Figura 2.7*b*). Temos:

$$\text{tg}\left(\frac{\theta'}{2}\right) = \frac{76 \text{ mm}}{75 \text{ mm}}$$
$$\theta' = 90{,}759° = \frac{\pi}{180°}(90{,}759°) = 1{,}58404 \text{ rad}$$

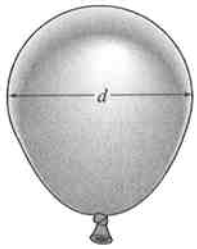
Aplicando a Equação 2.4, temos que a deformação por cisalhamento em *E* é:

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - 1{,}58404 \text{ rad} = -0{,}0132 \text{ rad} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

De acordo com a convenção de sinais, o *sinal negativo* indica que o ângulo θ' é *maior do que* 90°. Observe que, se os eixos *x* e *y* fossem horizontal e vertical, então devido à deformação $\gamma_{xy} = 0$ no ponto *E*.

PROBLEMAS

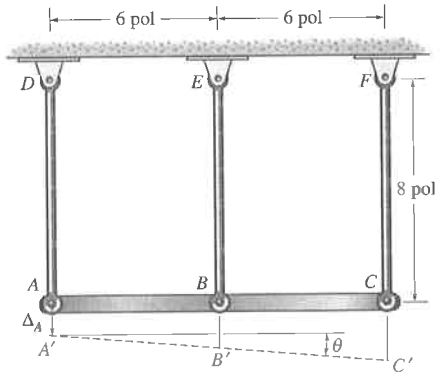
2.1. A parte central do balão de borracha tem diâmetro $d = 4$ pol. Se a pressão do ar em seu interior fizer com que o diâmetro do balão torne-se $d = 5$ pol, qual será a deformação normal média da borracha?



Problema 2.1

2.2. Um elástico tem comprimento não esticado de 10 pol. Se ele for esticado ao redor de um poste com diâmetro externo de 6 pol, qual será sua deformação normal média?

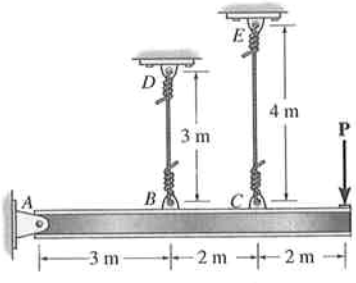
2.3. A barra rígida ABC está inicialmente na posição horizontal. Se cargas provocarem o deslocamento $\Delta_A = 0{,}002$ pol para baixo da extremidade A e a barra girar $\theta = 0{,}2°$, qual será a deformação normal média das hastes AD, BE e CF?



Problema 2.3

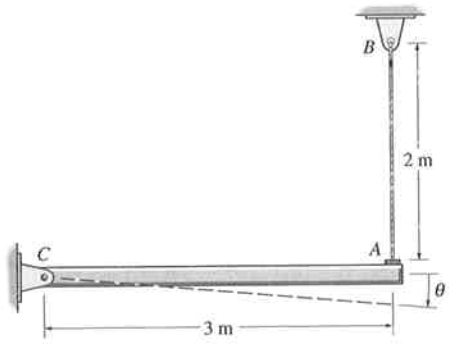
***2.4.** A viga rígida está apoiada por um pino em A e pelos arames BD e CE. Se a carga **P** na viga for deslocada 10 mm para baixo, qual será a deformação normal desenvolvida nos arames CE e BD?

2.5. A viga rígida está apoiada por um pino em A e pelos arames BD e CE. Se a deformação normal admissível máxima em cada arame for $\epsilon_{máx} = 0{,}002$ mm/mm, qual será o deslocamento vertical máximo provocado pela carga **P** nos arames?



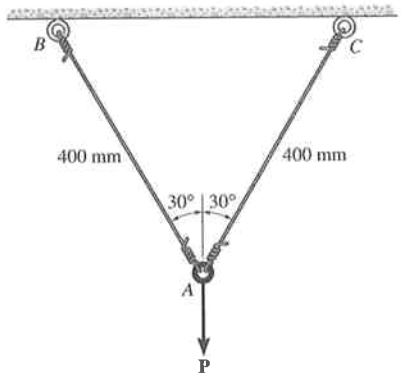
Problemas 2.4/2.5

2.6. Determinar a deformação normal média aproximada no arame AB em decorrência da rotação θ da barra rígida CA, supondo que θ seja pequeno. Qual é esse valor (da deformação) se $\theta = 2°$?



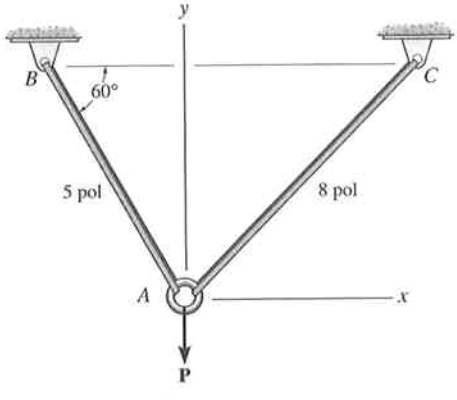
Problema 2.6

2.7. Os dois arames estão interligados em A. Se a carga **P** provocar o deslocamento vertical de 3 mm ao ponto A, qual será a deformação normal provocada em cada arame?



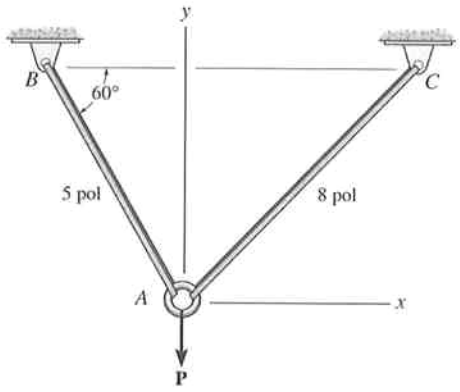
Problema 2.7

***2.8.** Duas barras são usadas para suportar uma carga. Sem ela, o comprimento de AB é 5 pol, o de AC é 8 pol, e o anel em A tem coordenadas (0, 0). Se a carga **P** atua sobre o anel em A, a deformação normal em AB torna-se $\epsilon_{AB} = 0{,}02$ pol/pol e a deformação normal em AC torna-se $\epsilon_{AC} = 0{,}035$ pol/pol. Determinar as coordenadas de posição do anel devido à carga.



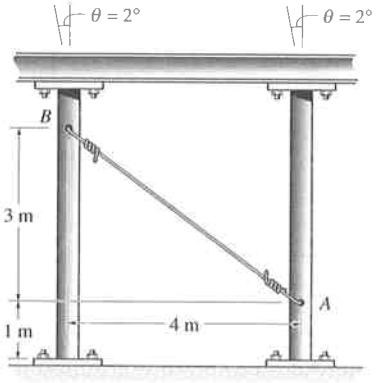
Problema 2.8

2.9. Duas barras são usadas para suportar uma carga **P**. Sem ela, o comprimento de AB é 5 pol, o de AC é 8 pol, e o anel em A tem coordenadas (0, 0). Se for aplicada uma carga **P** ao anel em A, de modo que ele se mova para a posição de coordenadas (0,25 pol, −0,73 pol), qual será a deformação normal em cada barra?



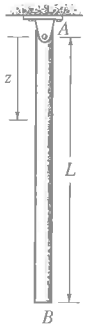
Problema 2.9

2.10. O arame de ancoragem AB da estrutura de um prédio está inicialmente sem deformação. Devido a um terremoto, as duas colunas da estrutura inclinam-se $\theta = 2°$. Determinar a deformação normal aproximada do arame quando a estrutura está nessa posição. Supor que as colunas são rígidas e giram em torno de seus apoios inferiores.



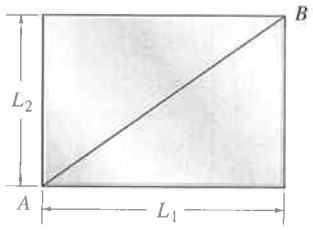
Problema 2.10

2.11. Devido ao peso, a haste está sujeita a uma deformação normal que varia ao longo de seu comprimento tal que $\epsilon = kz$, onde k é uma constante. Determinar o deslocamento ΔL de sua extremidade B quando está suspensa como mostrado.



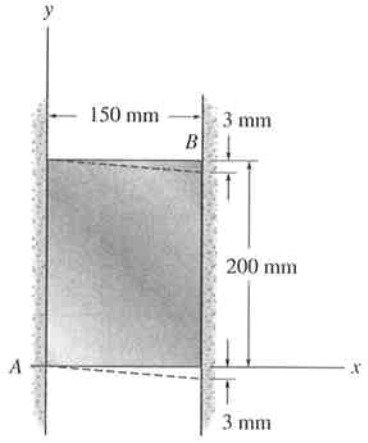
Problema 2.11

***2.12.** A membrana retangular tem comprimento sem deformação L_1 e largura L_2. Se os lados forem aumentados em quantidades pequenas ΔL_1 e ΔL_2, qual será a deformação normal ao longo da diagonal AB?



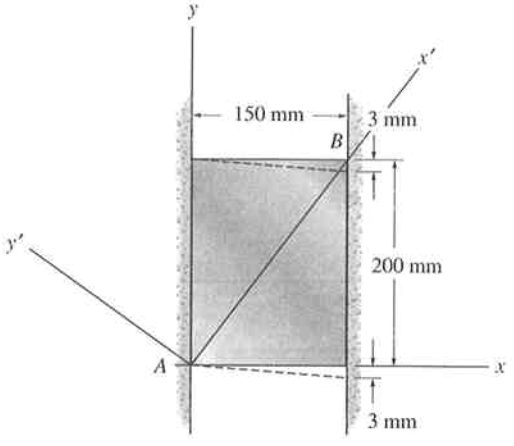
Problema 2.12

2.13. A chapa retangular está submetida à deformação mostrada pela linha tracejada. Determinar a deformação por cisalhamento média γ_{xy} da chapa.



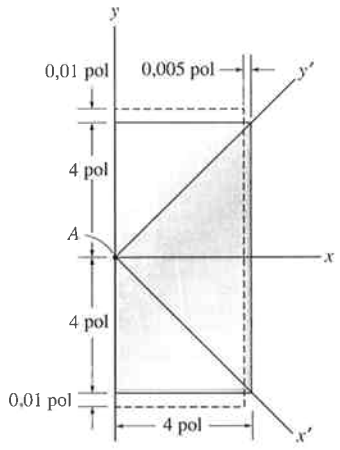
Problema 2.13

2.14. A chapa retangular está submetida à deformação mostrada pela linha tracejada. Determinar a deformação por cisalhamento $\gamma_{x'y'}$ da chapa. O eixo x' está orientado de A para B.



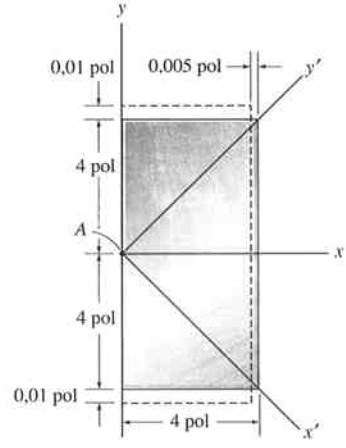
Problema 2.14

2.15. A chapa retangular está submetida à deformação mostrada pela linha tracejada. Determinar as deformações normais ϵ_x, ϵ_y, $\epsilon_{x'}$, $\epsilon_{y'}$.



Problema 2.15

***2.16.** A chapa retangular está submetida à deformação mostrada pela linha tracejada. Determinar as deformações por cisalhamento γ_{xy} e $\gamma_{x'y'}$ desenvolvidas no ponto A.

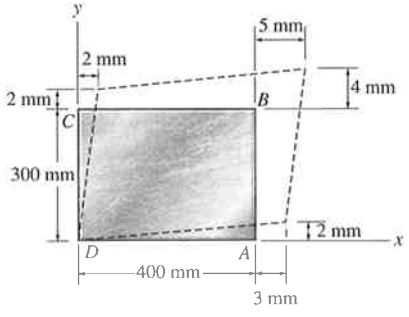


Problema 2.16

2.17. A peça de plástico originalmente é retangular. Determinar a deformação por cisalhamento γ_{xy} nos cantos A e B se o plástico se distorce como mostrado pelas linhas tracejadas.

2.18. A peça de plástico originalmente é retangular. Determinar a deformação por cisalhamento γ_{xy} nos cantos D e C se o plástico se distorce como mostrado pelas linhas tracejadas.

2.19. A peça de plástico originalmente é retangular. Determinar a deformação normal média que ocorre ao longo das diagonais AC e DB.

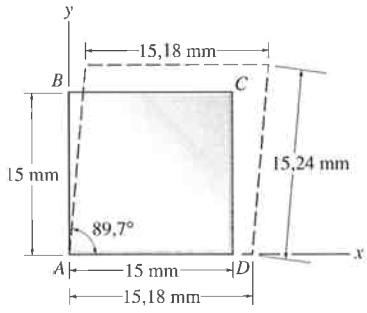


Problemas 2.17/2.18/2.19

***2.20.** Uma peça quadrada do material é deformada, indo para a posição tracejada. Determinar a deformação por cisalhamento γ_{xy} em A.

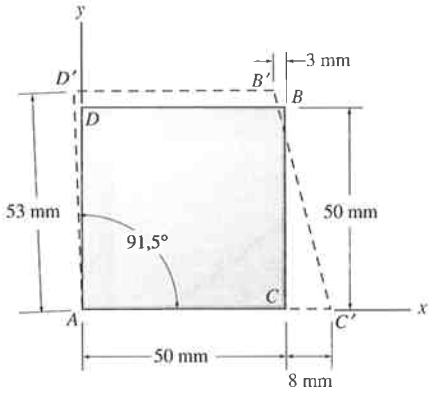
2.21. Uma peça quadrada do material é deformada, indo para a posição tracejada. Determinar a deformação normal média que ocorre ao longo das diagonais AC e BD.

2.22. Uma peça quadrada do material é deformada, indo para a posição tracejada. Determinar a deformação por cisalhamento γ_{xy} em C.



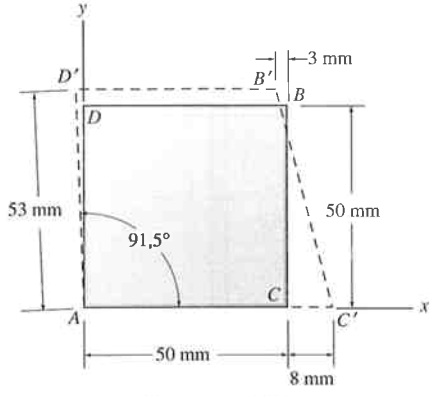
Problemas 2.20/2.21/2.22

2.23. O quadrado deforma-se, indo para a posição mostrada pelas linhas tracejadas. Determinar a deformação normal média ao longo de cada diagonal AB e CD. O lado DB permanece horizontal.



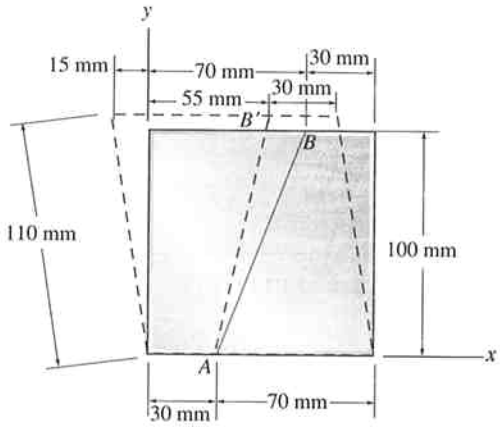
Problema 2.23

***2.24.** O quadrado deforma-se, indo para a posição mostrada pelas linhas tracejadas. Determinar a deformação por cisalhamento em cada um dos cantos A e C. O lado DB permanece horizontal.



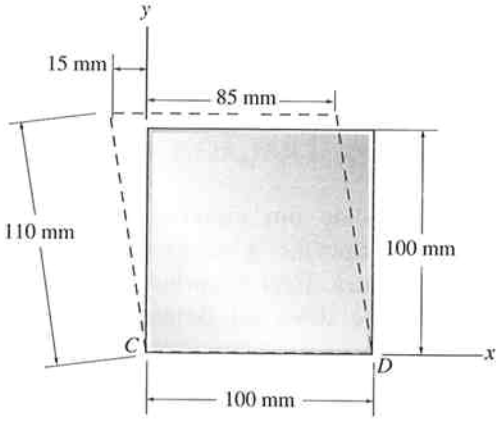
Problema 2.24

2.25. O bloco é deformado, indo para a posição mostrada pelas linhas tracejadas. Determinar a deformação normal média ao longo da reta AB.



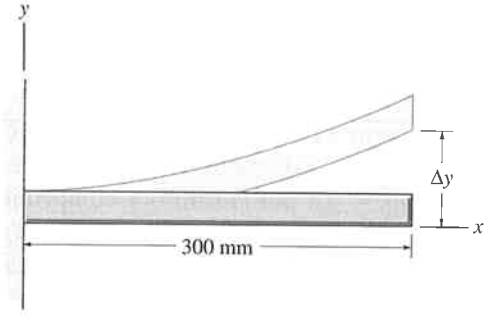
Problema 2.25

2.26. O bloco é deformado, indo para a posição mostrada pelas linhas tracejadas. Determinar a deformação por cisalhamento no canto C.



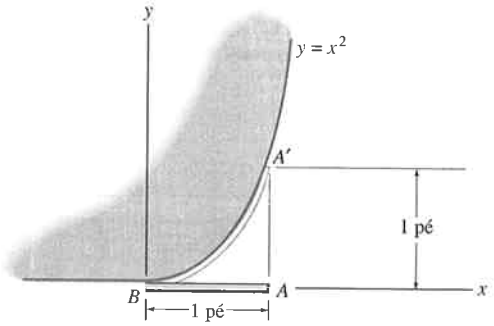
Problema 2.26

2.27. A barra tem 300 mm de comprimento quando está reta. Se for submetida a uma deformação por cisalhamento definida por $\gamma_{xy} = 0{,}02x$, onde x é dado em milímetros, determinar o deslocamento Δy na extremidade de sua borda inferior. Ela foi distorcida para o formato mostrado, não ocorrendo alongamento da barra na direção de x.



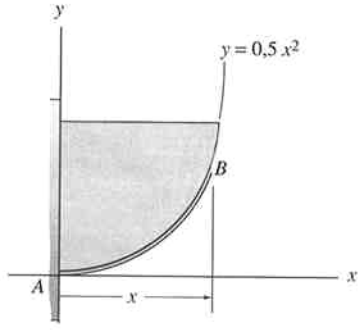
Problema 2.27

***2.28.** O elástico AB tem comprimento sem esticar de 1 pé. Se estiver preso em B e acoplado à superfície no ponto A', determinar a deformação normal média do elástico. A superfície é definida pela função $y = (x^2)$ pé, onde x é dado em pé.



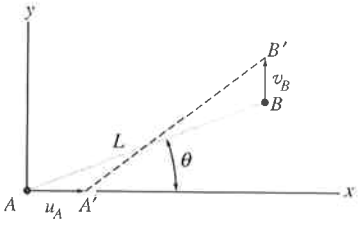
Problema 2.28

2.29. Um arame fino está preso ao longo de uma superfície que tem o formato $y = 0{,}5x^2$, onde x e y são dados em polegadas. Inicialmente a extremidade B está em $x = 10$ pol. Se o arame sofrer deformação normal de $\epsilon = 0{,}005x$ ao longo de seu comprimento, qual será a mudança no comprimento do arame? *Dica*: para a curva $y = f(x)$, $ds = \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\,dx$.



Problema 2.29

2.30. A fibra AB tem comprimento L e orientação θ. Se suas extremidades A e B sofrerem deslocamentos muito pequenos u_A e v_B, respectivamente, qual será a deformação normal da fibra quando estiver na posição $A'B'$?



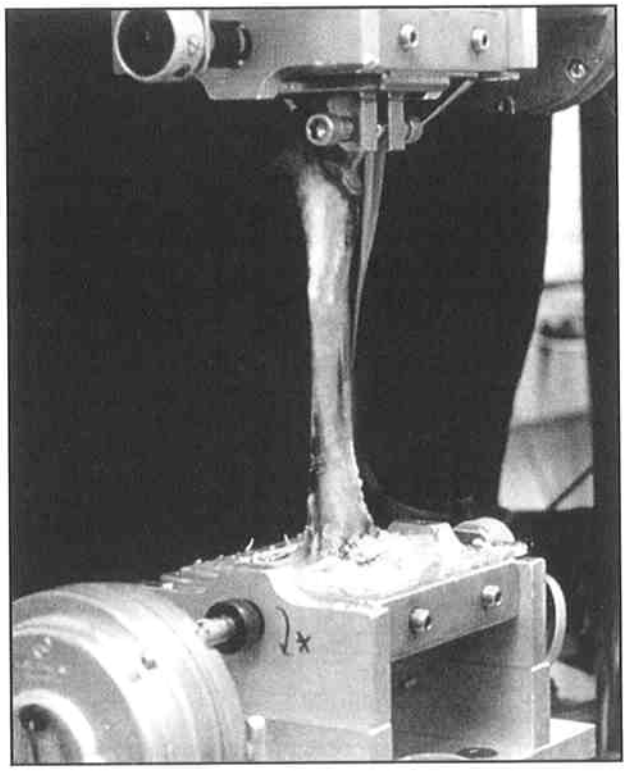
Problema 2.30

2.31. Supondo que a deformação normal seja definida em relação ao comprimento final, isto é,

$$\epsilon'_n = \lim_{P \to P'} \left(\frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s'} \right)$$

em vez de em relação ao comprimento inicial (Equação 2.2), mostrar que a diferença entre essas deformações é representada como um termo de segunda ordem, ou seja, $\epsilon_n - \epsilon'_n = \epsilon_n \epsilon'_n$.

3 Propriedades Mecânicas dos Materiais



As propriedades mecânicas de um material devem ser conhecidas para que os engenheiros possam relacionar a deformação medida no material com a tensão associada a ela. Aqui as propriedades mecânicas do osso são determinadas em um teste de compressão.

Objetivos do Capítulo

Após discutir os conceitos básicos de tensão e deformação, neste capítulo vamos mostrar como a tensão pode ser relacionada à deformação por meio de métodos experimentais, a fim de se determinar o diagrama tensão-deformação para um material específico. O comportamento descrito pelo diagrama será então discutido para os materiais usados comumente na engenharia. Além disso, serão discutidos propriedades mecânicas e outros testes relacionados à resistência dos materiais.

3.1 Teste de Tração e Compressão

A resistência de um material depende de sua capacidade de suportar a carga sem deformação excessiva ou ruptura. Essa propriedade é inerente ao próprio material e deve ser determinada por *experimento*. Um dos testes mais importantes a realizar nesse sentido é o ***teste de tração ou compressão***. Embora muitas propriedades mecânicas importantes de um material possam ser determinadas por meio desse teste, ele é usado principalmente para determinar a relação entre a tensão normal média e a deformação normal média em muitos materiais da engenharia, tais como metais, cerâmicas, polímeros e materiais compostos.

Para realizar o teste de tração ou compressão é feito um corpo-de-prova do material, com formato e tamanho 'padronizados'. Antes do teste, são feitas duas pequenas marcas de punção ao longo do comprimento do corpo-de-prova, distantes de ambas as extremidades, porque a distribuição de tensão nas extremidades é complexa devido à fixação nos acoplamentos em que a carga é aplicada. Medem-se, então, a área da seção transversal inicial do corpo-de-prova A_0 e o ***comprimento de referência*** L_0 entre as marcas de punção. Por exemplo, quando é usado um corpo-de-prova de metal em um teste de tração, geralmente ele tem diâmetro inicial $d_0 = 0{,}5$ pol (13 mm) e comprimento de referência $L_0 = 2$ pol (50 mm) (Figura 3.1). A fim de aplicar uma carga axial sem flexão do corpo-de-prova, as extremidades são, em geral, assentadas em juntas universais. Uma máquina de teste, como a mostrada na Figura 3.2, é então usada para estirar o corpo-de-prova com taxa muito lenta e constante até que ele atinja o ponto de ruptura. A máquina é projetada para ler a carga necessária para manter o estiramento uniforme.

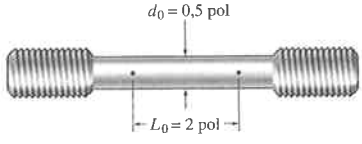
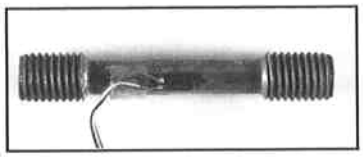


Figura 3.1



Corpo-de-prova de aço típico com extensômetro instalado.

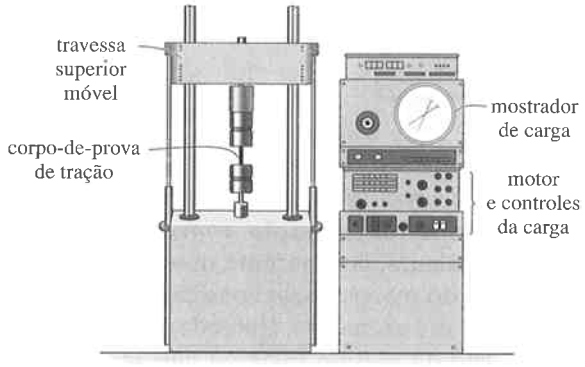
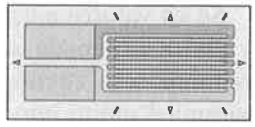


Figura 3.2



Extensômetro por
resistência elétrica

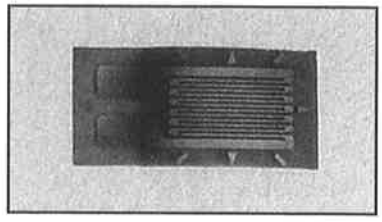


Figura 3.3

Os dados da carga aplicada são registrados a intervalos freqüentes à medida que são lidos no mostrador da máquina ou em um mostrador digital. Além disso, mede-se o alongamento $\delta = L - L_0$ entre as marcas de punção no corpo-de-prova por meio de um calibre ou um dispositivo ótico denominado ***extensômetro***. O valor δ (delta) é então usado para calcular a deformação normal média do corpo-de-prova. Algumas vezes, entretanto, essa medida não é feita, visto também ser possível obter a deformação *diretamente*, a partir de um ***extensômetro por resistência elétrica*** como o mostrado na Figura 3.3. A operação de tal extensômetro baseia-se na mudança da resistência elétrica de um arame muito fino ou pedaço de folha de metal submetido à deformação. Essencialmente, o extensômetro é colado ao corpo-de-prova em uma direção especificada. Se a cola for muito forte em comparação com o extensômetro, então o extensômetro será na verdade parte integrante do corpo-de-prova, de modo que, quando o corpo-de-prova for estirado na direção do extensômetro, o arame e o corpo-de-prova sofrerão a mesma deformação. Medindo-se a resistência elétrica do arame, o extensômetro pode ser calibrado para ler valores da deformação normal diretamente.

3.2 DIAGRAMA TENSÃO-DEFORMAÇÃO

Com os dados do teste de tração ou compressão, podem-se calcular diversos valores de tensão e a deformação correspondente no corpo-de-prova e, depois, construir um gráfico com os resultados. A curva resultante, denominada ***diagrama tensão-deformação***, pode ser descrita de duas maneiras.

Diagrama Tensão-Deformação Convencional. Com os dados registrados, determinamos a ***tensão nominal ou de engenharia*** dividindo a carga aplicada P pela área da seção transversal *inicial* do corpo-de-prova A_0. Esse cálculo pressupõe que a tensão seja *constante* na seção transversal e em toda a região entre os pontos de calibragem. Temos:

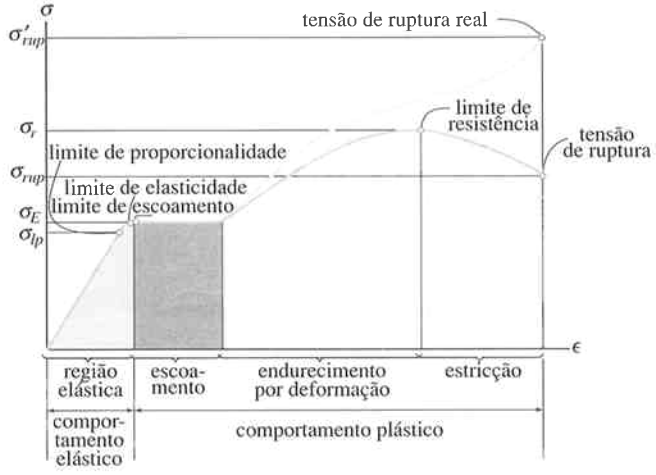
$$\sigma = \frac{P}{A_0} \tag{3.1}$$

Da mesma forma, a ***deformação nominal ou de engenharia*** é encontrada diretamente pela leitura do extensômetro, ou dividindo-se a variação no comprimento de referência, δ, pelo comprimento de referência inicial L_0. Suponhamos que a deformação seja constante em toda a região entre os pontos de calibragem. Assim,

$$\epsilon = \frac{\delta}{L_0} \tag{3.2}$$

Se os valores correspondentes de σ e ϵ forem colocados em um gráfico, no qual a ordenada seja a tensão e a abscissa seja a deformação, a curva resultante será chamada ***diagrama tensão-deformação convencional***. Esse diagrama é muito importante em engenharia, pois permite obter dados sobre a resistência à tração (ou compressão) do material *sem* considerar o tamanho ou formato físico desse material, isto é, sua geometria. Entenda-se, no entanto, que dois diagramas tensão-deformação do mesmo material não serão *exatamente* iguais, uma vez que os resultados dependem de variáveis tais como composição do material, imperfeições microscópicas, a maneira como ele foi fabricado, a taxa da carga e a temperatura durante o período do teste.

Discutiremos a seguir as características da curva tensão-deformação pertencente ao *aço*, material usado comumente para fabricar tanto membros estruturais como elementos mecânicos. Usando o método descrito anteriormente, o diagrama tensão-deformação característico de um corpo-de-prova de aço é mostrado na Figura 3.4. Pela curva podemos identificar quatro maneiras diferentes pelas quais o material se comporta, dependendo da grandeza da deformação nele provocada.



Diagramas tensão-deformação convencional e real para material dúctil (aço) (sem escala)

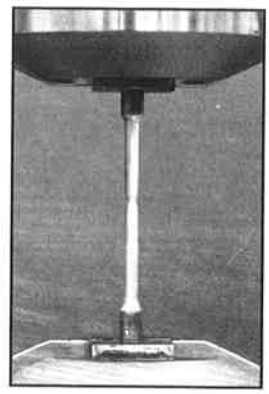
Figura 3.4

Comportamento Elástico. O comportamento elástico do material ocorre quando as deformações no corpo-de-prova estão na região sombreada clara da Figura 3.4. Pode-se observar que a curva é de fato uma *reta* na maior parte dessa região, de modo que a tensão é *proporcional* à deformação. Em outras palavras, o material é *linearmente elástico*. O limite superior dessa relação linear é chamado ***limite de proporcionalidade*** (σ_{lp}). Se a tensão excede ligeiramente o limite de proporcionalidade, o material pode ainda responder elasticamente; entretanto, a curva tende a se fletir e achatar como mostrado. Essa condição continua até que a tensão alcança o ***limite de elasticidade***. Ao atingir esse ponto, se a carga for removida, o corpo-de-prova ainda volta à sua forma original. Entretanto, para o aço o limite de elasticidade é muito próximo ao limite de proporcionalidade e, portanto, difícil de ser determinado.

Escoamento. Um pequeno aumento de tensão acima do limite de elasticidade resulta em colapso do material e faz com que ele se *deforme permanentemente*. Esse comportamento é denominado ***escoamento*** e é indicado pela região sombreada escura da curva. A tensão que provoca escoamento é chamada ***limite de escoamento*** ou ***ponto de escoamento***, σ_E, e a deformação ocorrida é denominada ***deformação plástica***. Apesar de não estar mostrado na Figura 3.4, nos aços com baixo teor de carbono ou nos laminados a quente, o limite de escoamento é freqüentemente diferenciado por dois valores. O ***limite de escoamento superior*** ocorre primeiro, seguido por um decréscimo súbito da capacidade de carga no ***limite de escoamento inferior***. Uma vez atingido o limite de escoamento, no entanto, como mostrado na Figura 3.4, o corpo-de-prova continuará a alongar-se (deformar-se) *sem qualquer aumento da carga*. Observe que essa figura não foi desenhada em escala. Se fosse, as deformações provocadas pelo escoamento seriam de 10 a 40 vezes maiores do que as produzidas até o limite de elasticidade. Quando o material está nesse estado, em geral é classificado como ***perfeitamente plástico***.

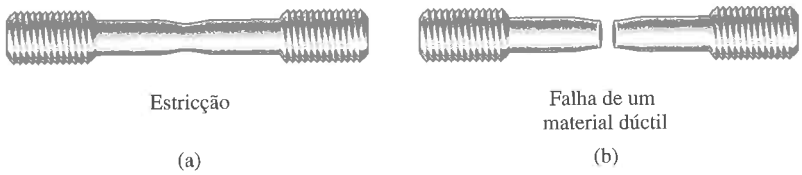
Endurecimento por deformação. Quando o escoamento termina, pode-se aplicar uma carga adicional ao corpo-de-prova, o que resultará em uma curva que cresce continuamente, mas que se torna mais plana até que alcança a tensão máxima denominada ***limite de resistência*** (σ_r). O aumento da curva é chamado ***endurecimento por deformação*** e está identificado na Figura 3.4 como a região sombreada com cor clara. Durante o teste, enquanto o corpo-de-prova sofre alongamento, a área de sua seção transversal decresce. O decréscimo de área é bastante *uniforme* ao longo de todo o comprimento de referência do corpo-de-prova, inclusive até a deformação correspondente ao limite de resistência.

Estricção. Ao atingir o limite de resistência, a área da seção transversal começa a diminuir em uma região *localizada* do corpo-de-prova, em vez de em todo o seu comprimento. Esse fenômeno é provocado por planos de deslizamento formados no interior do material, e as deformações produzidas são provocadas por tensão de cisalhamento (ver a Seção 10.7). Como resultado, tende a formar-se gradualmente uma estricção ou contração nessa região à medida que o corpo-de-prova alonga-se (Figura 3.5*a*). Como a área da seção transversal nessa região está decrescendo continuamente, a área menor pode suportar apenas carga decrescente. Portanto, o diagrama tensão-deformação tende a curvar-se para baixo até que o corpo-de-prova quebre com a ***tensão de ruptura***, σ_{rup} (Figura 3.5*b*). A região da curva que representa a estricção está indicada em cor escura na Figura 3.4.



Padrão de estricção típica ocorrido neste corpo-de-prova de aço antes da ruptura.

Diagrama Tensão-Deformação Real. Em vez de usar a área da seção transversal *inicial* e o comprimento do corpo-de-prova para calcular a tensão e a deformação, poderíamos ter usado a área *real* da seção transversal e o comprimento do corpo-de-prova no *instante* em que a carga é medida. Os valores da tensão e da deformação calculados com essas medidas são chamados *tensão real* e *deformação real*, e a construção gráfica de seus valores é chamada ***diagrama tensão-deformação real***. Quando esse diagrama é construído, adquire o formato mostrado pela curva de coloração clara na Figura 3.4. Observe que os diagramas convencional e verdadeiro $\sigma-\epsilon$ são praticamente coincidentes quando a deformação é pequena. As diferenças entre os diagramas começam a aparecer na faixa de endurecimento por deformação, em que a intensidade da deformação torna-se mais significativa. Em particular, há uma grande divergência na região de estricção. Pode-se notar pelo diagrama $\sigma-\epsilon$ convencional que o corpo-de-prova suporta *realmente* uma *carga decrescente*, ao calcular a tensão de engenharia $\sigma = P/A_0$, visto que A_0 é constante. Entretanto, pelo diagrama $\sigma-\epsilon$ real, a área real A na região de estricção é sempre decrescente até a ruptura, σ_{rup}, e, desse modo, o material suporta realmente *tensão crescente*, visto que $\sigma = P/A$.



Estricção (a)

Falha de um material dúctil (b)

Figura 3.5

Apesar de os diagramas tensão-deformação real e convencional serem diferentes, a maioria dos projetos de engenharia é feita na faixa de elasticidade, já que a distorção do material geralmente não é severa dentro dessa faixa. Uma vez que o material é 'rígido', como a maioria dos metais, a deformação até o limite de elasticidade permanecerá pequena e o erro do uso dos valores de engenharia de σ e ϵ será muito pequeno (cerca de 0,1%) quando comparado com os valores reais. Essa é uma das razões principais para usar os diagramas tensão-deformação convencionais.

Esses conceitos são resumidos na Figura 3.6, que mostra um diagrama tensão-deformação convencional para um corpo-de-prova de aço doce. A fim de melhorar os detalhes, a região de elasticidade da curva é mostrada em cor clara e em uma escala de deformação exagerada, também em cor clara. Acompanhando o comportamento, o limite de proporcionalidade é atingido em $\sigma_{lp} = 35$ ksi (241 MPa), onde $\epsilon_{lp} = 0{,}0012$ pol/pol. Ele é seguido por um limite superior de escoamento de $(\sigma_E)_s = 38$ ksi (262 MPa) e subitamente pelo limite inferior de escoamento $(\sigma_E)_i = 36$ ksi (248 MPa). O fim do escoamento ocorre com a deformação de $\epsilon_E = 0{,}030$ pol/pol, 25 vezes maior que a deformação no limite de proporcionalidade! Prosseguindo, o corpo-de-prova sofre endurecimento por deformação até atingir o limite de resistência de $\sigma_r = 63$ ksi (435 MPa), então começa a sofrer estricção até que ocorra a falha com $\sigma_{rup} = 47$ ksi (324 MPa). Por comparação, a deformação na ruptura, $\epsilon_{rup} = 0{,}380$ pol/pol, é 317 vezes maior do que ϵ_{lp}.

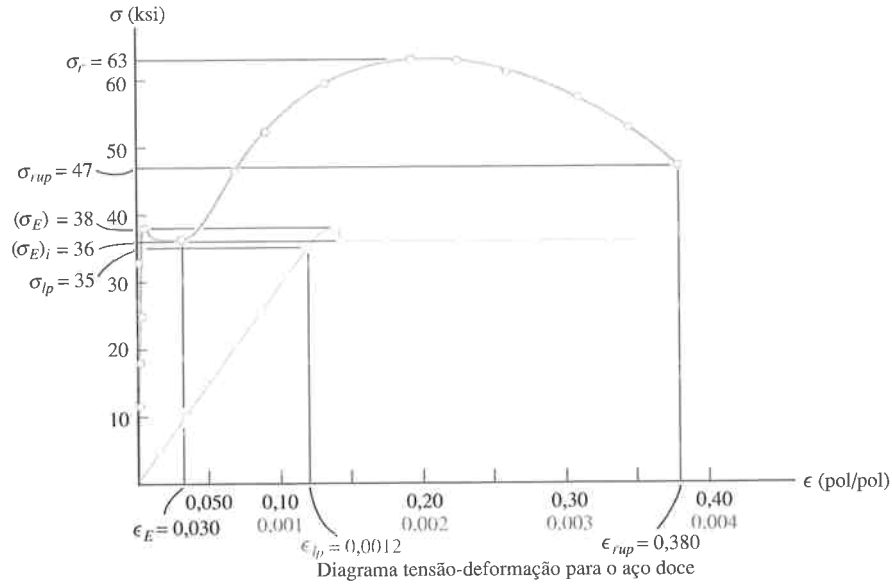


Diagrama tensão-deformação para o aço doce

Figura 3.6

3.3 COMPORTAMENTO DA TENSÃO-DEFORMAÇÃO DE MATERIAIS DÚCTEIS E FRÁGEIS

Os materiais são classificados como dúcteis ou frágeis, dependendo de suas características de tensão-deformação. A partir de agora, daremos tratamento distinto para cada um deles.

Materiais Dúcteis. Qualquer material que possa ser submetido a grandes deformações antes da ruptura é chamado de ***material dúctil***. O aço doce, como discutido anteriormente, é um exemplo típico. Freqüentemente, os engenheiros escolhem materiais dúcteis para o projeto porque estes são capazes de absorver choque ou energia e, quando sobrecarregados, exibem, em geral, grande deformação antes de falhar.

Uma das maneiras de especificar a ductilidade do material é informar a porcentagem de alongamento ou a porcentagem de redução de área no instante da quebra. A ***porcentagem de alongamento*** é a deformação de ruptura do corpo-de-prova expressa como porcentagem. Assim, se o comprimento de referência inicial do corpo-de-prova for L_0 e seu comprimento na ruptura for L_{rup}, então:

$$\text{Porcentagem de alongamento} = \frac{L_{rup} - L_0}{L_0} (100\%) \tag{3.3}$$

Conforme visto na Figura 3.6, como $\epsilon_{rup} = 0{,}380$, esse valor deveria ser 38% para um corpo-de-prova de aço doce.

A ***porcentagem de redução de área*** é outra maneira de especificar a ductilidade. Ela é definida na região de estricção como segue:

$$\text{Porcentagem de redução de área} = \frac{A_0 - A_{rup}}{A_0} (100\%) \tag{3.4}$$

Aqui, A_0 é a área inicial da seção transversal do corpo-de-prova e A_{rup}, a área na ruptura. O aço doce tem valor típico de 60%.

Outros metais, como latão, molibdênio e zinco, também possuem características de tensão-deformação dúctil similar à do aço, segundo as quais apresentam comportamento de tensão-deformação elástica, escoamento sob tensão constante, endurecimento por deformação e, finalmente, estricção até a ruptura. Na maioria dos metais, entretanto, *não ocorre* escoamento constante além da faixa de elasticidade. Exemplo disso é o alumínio. Na verdade, esse metal não tem, em geral, um *ponto de escoamento* bem definido e, assim, é prática padrão definir uma ***resistência ao escoamento*** para o alumínio usando um procedimento gráfico chamado ***método de deformação residual***. Escolhe-se normalmente uma deformação de 0,2% (0,002 pol/pol) e, desse ponto no eixo ϵ, é desenhada uma reta paralela até a parte inicial reta do diagrama tensão-deformação. O ponto em que essa reta intercepta a curva define a resistência ao escoamento. Um exemplo da construção para determinar a resistência ao escoamento de uma liga de alumínio é mostrado na Figura 3.7. Pelo gráfico, a resistência ao escoamento é $\sigma_{ES} = 51$ ksi (352 MPa).

A resistência ao escoamento não é uma propriedade física do material, visto ser uma tensão que provocou uma deformação permanente *especificada* no material. Neste texto, entretanto, admitiremos que a resistência ao escoamento, o ponto de escoamento, o limite de elasticidade e o limite de proporcionalidade *coincidem*, a menos que seja declarado o contrário. Uma exceção seria a borracha natural, que de fato nem tem limite de proporcionalidade, uma vez que sua tensão e deformação *não* são relacionadas linearmente (Figura 3.8). Ao contrário, esse material, conhecido como um polímero, apresenta *comportamento elástico não-linear*.

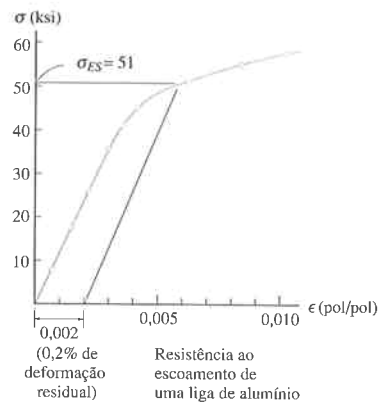


Figura 3.7

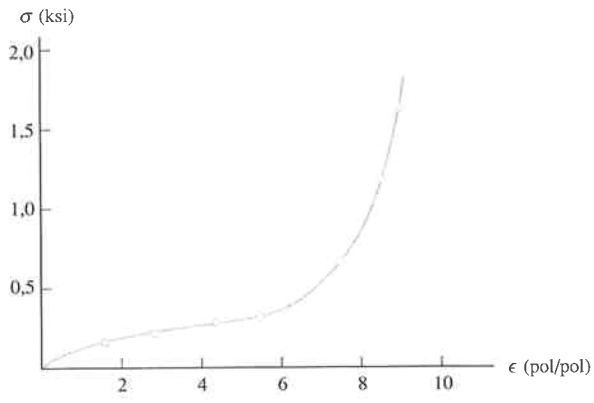


Diagrama $\sigma-\epsilon$ para borracha natural

Figura 3.8

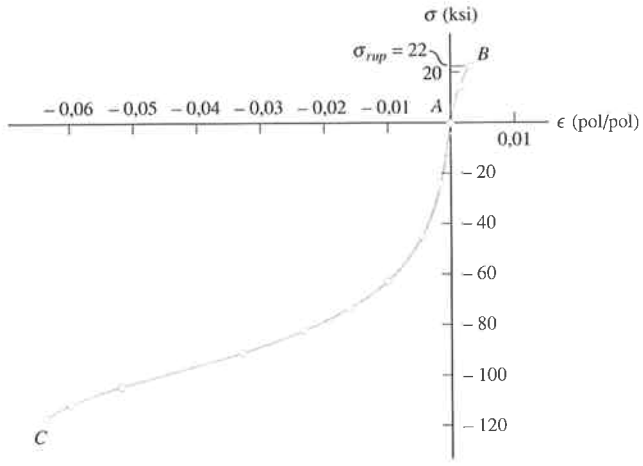


Diagrama $\sigma-\epsilon$ para ferro fundido

Figura 3.9

A madeira é um material em geral moderadamente dúctil e, como resultado, é projetada para responder apenas a carregamentos elásticos. As características de resistência da madeira variam enormemente de uma espécie para outra e, dentro de cada espécie, dependem do teor de umidade, idade, tamanho e arranjo dos nós. Como a madeira é um material fibroso, suas características de tração e de compressão diferem muito quando ela está com carga paralela ou perpendicular a seu grão. Especificamente, a madeira racha com facilidade quando é tracionada na tensão perpendicular a seu grão e, como conseqüência, quase sempre as cargas de tração são aplicadas na paralela ao grão dos elementos da madeira.

Materiais Frágeis. Os materiais que apresentam pouco ou nenhum escoamento são denominados ***materiais frágeis***. O ferro fundido é um exemplo, possuindo um diagrama tensão-deformação como o mostrado na porção *AB* da curva da Figura 3.9. Nesse caso, a ruptura ocorreu em $\sigma_{rup} = 22$ ksi (152 MPa), em uma imperfeição ou microtrinca, e depois espalhou-se rapidamente por todo o corpo-de-prova, provocando falha total. Os materiais frágeis não possuem tensão de ruptura à tração bem definida, como resultado desse tipo de falha, uma vez que a aparência das trincas iniciais em um corpo-de-prova é bastante aleatória. Em vez disso, geralmente se registra a tensão de ruptura *média* observada em um conjunto de testes. Um corpo-de-prova com falha típica é mostrado na Figura 3.10*a*.

Falha de material frágil por tração

(a)

A compressão provoca abaulamento do material

(b)

Figura 3.10

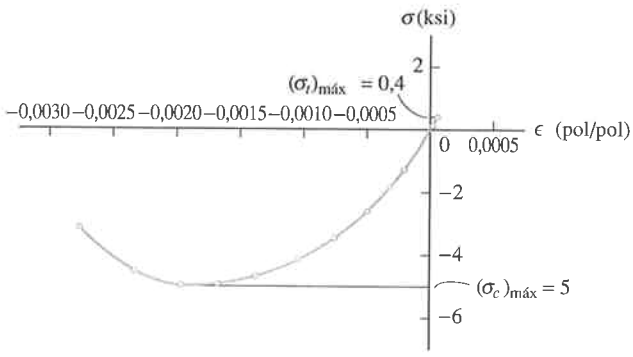


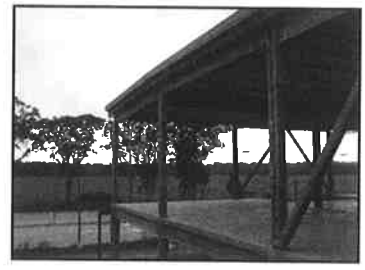
Diagrama $\sigma - \epsilon$ de mistura de concreto típica

Figura 3.11

Os materiais frágeis, tais como o ferro fundido cinzento, em comparação com seu comportamento sob tração, apresentam resistência axial à compressão muito maior, como evidenciado pela porção *AC* da curva da Figura 3.9. Nesse caso, quaisquer trincas ou imperfeições no corpo-de-prova tendem a fechar-se e, à medida que a carga aumenta, geralmente o material abaula-se ou toma a forma de barril (Figura 3.10*b*).

O concreto, como o ferro fundido cinzento, é classificado como material frágil e também possui baixa resistência à tração. As características de seu diagrama tensão-deformação dependem principalmente da mistura do concreto (água, areia, brita e cimento) e da duração e temperatura da cura. Um exemplo típico de um diagrama tensão-deformação 'completo' do concreto é oferecido na Figura 3.11. Como se observa, sua resistência máxima à compressão é quase 12,5 vezes maior do que sua resistência à tração: $(\sigma_c)_{máx}$ = 5 ksi (34,5 MPa) em comparação com $(\sigma_t)_{máx}$ = 0,40 ksi (2,76 MPa). Por essa razão, o concreto é sempre reforçado com barras de aço quando projetado para suportar cargas de tração.

Pode-se dizer que a maioria dos materiais exibe comportamento tanto dúctil como frágil. Por exemplo, o aço tem comportamento frágil quando contém alto teor de carbono e dúctil quando o teor de carbono é reduzido. Além disso, torna-se mais mole e dúctil quando a temperatura aumenta. Esse efeito é mostrado na Figura 3.12 para o metacrilato plástico.



O aço perde rapidamente sua resistência quando aquecido. Por essa razão, os engenheiros requerem, freqüentemente, que os membros principais da estrutura possuam isolamento térmico contra incêndio.

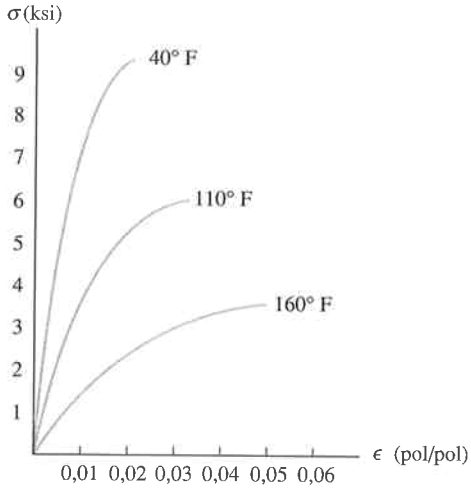


Diagrama $\sigma - \epsilon$ para metacrilato plástico

Figura 3.12

3.4 LEI DE HOOKE

Como observamos na seção anterior, os diagramas tensão-deformação para a maioria dos materiais da engenharia apresentam *relação linear* entre tensão e deformação na região de elasticidade. Conseqüentemente, um aumento na tensão provoca um aumento proporcional na deformação. Esse fato, descoberto por Robert Hooke, em 1676, com o auxílio de molas, é conhecido como *lei de Hooke*. Matematicamente, tal lei é expressa por:

$$\sigma = E\epsilon \tag{3.5}$$

Nela, E representa a constante de proporcionalidade, chamada ***módulo de elasticidade*** ou ***módulo de Young***, nome derivado de Thomas Young, que publicou uma explicação da lei em 1807.

A Equação 3.5 na verdade representa a *porção inicial reta* do diagrama tensão-deformação até o limite de proporcionalidade. Por sua vez, o módulo de elasticidade representa o *declive* dessa reta. Como a tensão é adimensional, pela Equação 3.5, E usa as mesmas unidades da tensão, tais como psi, ksi ou pascal. Para exemplo do cálculo, consideremos o diagrama tensão-deformação do aço mostrado na Figura 3.6. Nele, $\sigma_{lp} = 35$ ksi e $\epsilon_{lp} = 0{,}0012$ pol/pol, de modo que:

$$E = \frac{\sigma_{lp}}{\epsilon_{lp}} = \frac{35 \text{ ksi}}{0{,}0012 \text{ pol/pol}} = 29(10^3) \text{ ksi}$$

Como mostrado na Figura 3.13, o limite de proporcionalidade para um tipo particular de aço depende dos componentes de sua liga; entretanto, a maioria dos tipos de aço, desde o aço laminado mais mole até o aço para ferramentas mais duro, tem aproximadamente o mesmo módulo de elasticidade, em geral aceito como $E_{aço} = 29(10^3)$ ksi ou 200 GPa. Valores comuns de E para outros materiais podem ser encontrados em manuais de engenharia e livros de referência. Valores representativos também estão relacionados nas tabelas no final do livro. Observe que o módulo de elasticidade é uma propriedade mecânica que indica a *rigidez* de um material. Materiais muito rígidos, como o aço, têm valores altos de E [$E_{aço} = 29(10^3)$ ksi ou 200 GPa], enquanto materiais esponjosos, como a borracha vulcanizada, têm valores baixos [$E_{borr} = 0{,}10(10^3)$ ksi ou 0,70 MPa].

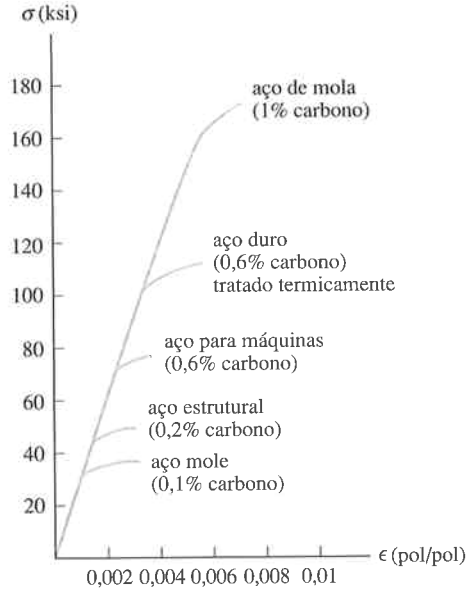


Figura 3.13

O módulo de elasticidade é uma das propriedades mecânicas mais importantes no desenvolvimento das equações apresentadas neste texto. Deve ser sempre lembrado, porém, que E só pode ser usado se o material tem comportamento *linear-elástico*. Além disso, se a tensão no material for *maior* que o limite de proporcionalidade, o diagrama tensão-deformação deixará de ser uma reta e a Equação 3.5 não será mais válida.

Endurecimento por Deformação. Se um corpo-de-prova de material dúctil, tal como o aço, sofrer carregamento na *região plástica* e, em seguida, descarregamento, a *deformação elástica é recuperada* à medida que o material volta ao seu estado de equilíbrio. A *deformação plástica permanece*, entretanto, e, como resultado, o material fica sujeito a uma ***deformação permanente***. Por exemplo, um arame, quando entortado (plasticamente), retorna parcialmente às dimensões originais (elasticamente) quando a carga é removida; entretanto, não volta completamente à sua condição anterior. Esse comportamento é ilustrado no diagrama tensão-deformação da Figura 3.14*a*. O corpo-de-prova é submetido à carga até o ponto A', além do seu ponto de escoamento A. Como as forças interatômicas têm de vencer o alongamento *elasticamente*, então essas mesmas forças unem de volta os átomos quando a carga é removida (Figura 3.14*a*). Conseqüentemente, o módulo de elasticidade, E, é o mesmo e, portanto, o declive da reta $O'A'$ é o mesmo da reta OA.

Se a carga for reaplicada, os átomos do material serão novamente deslocados até que ocorra o escoamento próximo à tensão A' e o diagrama tensão-deformação continue ao longo do mesmo trajeto anterior (Figura 3.14*b*). Deve ser observado, entretanto, que esse novo diagrama tensão-deformação, definido por $O'A'B$, tem um ponto de escoamento *maior* (A'), como conseqüência do endurecimento por deformação. Em outras palavras, o material agora tem uma *região de elasticidade maior*; entretanto, tem *menos ductilidade* e uma região plástica menor do que quando estava em seu estado original.

Na verdade, algum calor ou *energia* pode ser *perdido* quando o corpo-de-prova é descarregado de A' e novamente carregado com a mesma tensão. O resultado é que ocorrem curvas leves nos trajetos de A' para O' e de O' para A' durante um ciclo de carregamento medido cuidadosamente. Essa situação é mostrada pelas curvas tracejadas da Figura 3.14*b*. A área colorida entre essas curvas representa energia perdida e é chamada de ***histerese mecânica***. Embora seus efeitos não sejam considerados neste texto, a histerese deve ser levada em conta quando se selecionam materiais para servirem como amortecedores de vibração em equipamentos estruturais ou mecânicos.

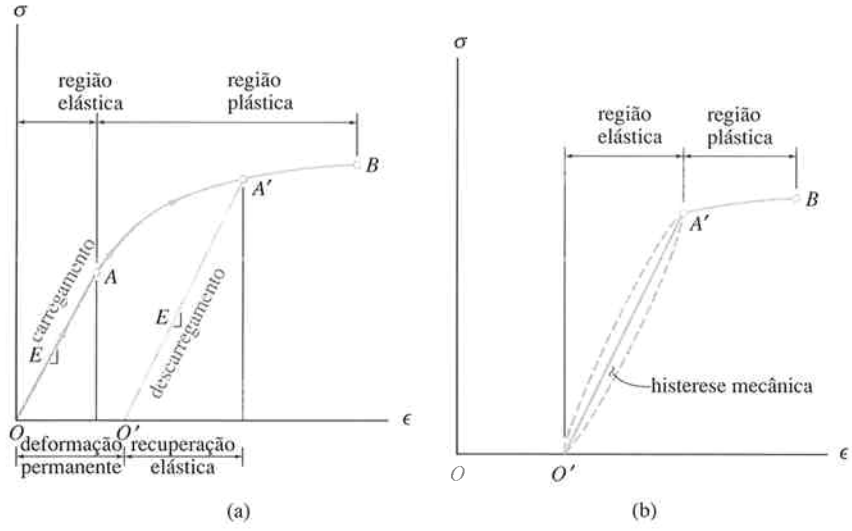


Figura 3.14

3.5 ENERGIA DE DEFORMAÇÃO

À medida que um material é deformado por uma carga externa, tende a armazenar energia *internamente* ao longo de todo o seu volume. Como essa energia relaciona-se à deformação do material, é chamada ***energia de deformação***. Por exemplo, quando um corpo-de-prova de tensão é submetido a uma carga axial, um elemento do material é submetido a uma tensão uniaxial como mostrado na Figura 3.15. Essa tensão desenvolve uma força $\Delta F = \sigma\,\Delta A = \sigma(\Delta x\,\Delta y)$ nas faces superior e inferior do elemento *depois* que este sofre um deslocamento vertical $\epsilon\,\Delta z$. Por definição, o *trabalho* é determinado pelo produto da força pelo deslocamento na direção dessa força. Como a força aumenta uniformemente de zero até seu valor final ΔF quando o deslocamento $\epsilon\,\Delta z$ é atingido, o trabalho realizado pela força é igual ao *valor médio* da força $\Delta F/2$ multiplicado pelo deslocamento $\epsilon\,\Delta z$. Esse 'trabalho externo' é equivalente ao 'trabalho interno' ou energia de deformação armazenada no elemento — admitindo que a energia não seja perdida sob a forma de calor. Portanto, a energia de deformação ΔU é $\Delta U = (1/2\ \Delta F)\ \epsilon\,\Delta z = (1/2\ \sigma\,\Delta x\,\Delta y)\ \epsilon\,\Delta z$. Visto que o volume do elemento é $\Delta V = \Delta x\,\Delta y\,\Delta z$, então $\Delta U = 1/2\ \sigma\epsilon\,\Delta V$.

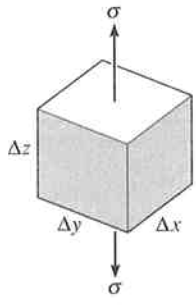


Figura 3.15

Às vezes é conveniente expressar a energia de deformação por unidade de volume do material. Isso é denominado ***densidade da energia de deformação***, que pode ser expressa por:

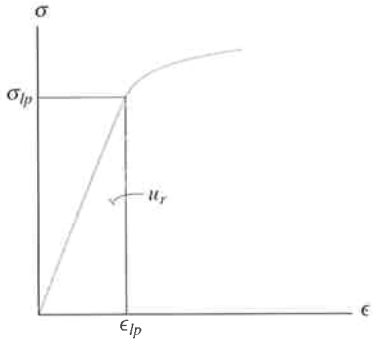
$$u = \frac{\Delta U}{\Delta V} = \frac{1}{2}\sigma\epsilon \tag{3.6}$$

Se o comportamento do material for *linear-elástico*, então a lei de Hooke se aplica, $\sigma = E\epsilon$, e, portanto, podemos expressar a densidade da energia de deformação em termos da tensão uniaxial como:

$$u = \frac{1\sigma^2}{2E} \tag{3.7}$$

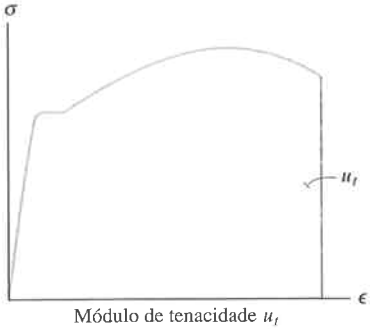
Módulo de Resiliência. Em particular, quando a tensão σ atinge o limite de proporcionalidade, a densidade da energia de deformação, como calculada pelas equações 3.6 ou 3.7, é denominada ***módulo de resiliência***, isto é:

$$u_r = \frac{1}{2}\sigma_{lp}\epsilon_{lp} = \frac{1}{2}\ \frac{\sigma_{lp}^2}{E} \tag{3.8}$$



Módulo de resiliência u_r

(a)



Módulo de tenacidade u_t

(b)

Figura 3.16

Pela região elástica do diagrama tensão-deformação (Figura 3.16*a*), observe que u_r é equivalente à *área triangular* sombreada sob o diagrama. Fisicamente, a resiliência de um material representa sua habilidade para absorver energia sem sofrer qualquer dano permanente.

Módulo de Tenacidade. Outra propriedade importante de um material é o ***módulo de tenacidade***, u_t. Essa grandeza representa *toda a área* sob o diagrama tensão-deformação (Figura 3.16*b*) e, portanto, indica a densidade da energia de deformação do material imediatamente antes da ruptura. Essa propriedade torna-se importante quando se projetam elementos que possam ser sobrecarregados acidentalmente. Materiais com módulo de tenacidade alto distorcem muito devido à sobrecarga; entretanto, são preferíveis aos de baixo valor, uma vez que os materiais que têm u_t baixo podem romper-se subitamente sem dar sinais da ruptura iminente. Ligas de metais também mudam sua resiliência e tenacidade. Os diagramas tensão-deformação da Figura 3.17, por exemplo, mostram como os graus de resiliência e tenacidade podem mudar, conforme muda a porcentagem de carbono no aço.

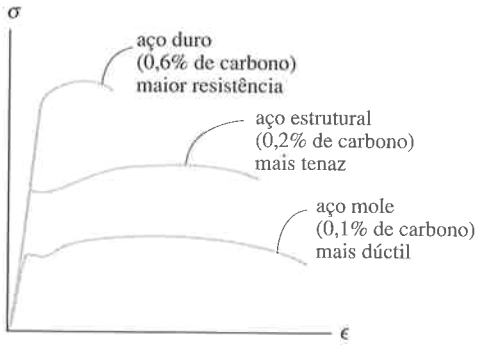


Figura 3.17

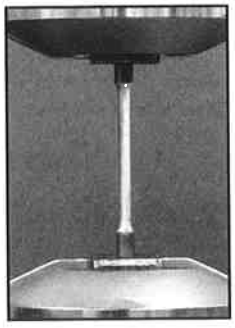
Este corpo-de-prova de náilon exibe alto grau de tenacidade, como se nota pela grande estricção ocorrida antes da ruptura.

PONTOS IMPORTANTES

- Um *diagrama tensão-deformação convencional* é importante na engenharia porque permite obter dados sobre a resistência à tração ou a compressão do material sem considerar o tamanho ou a forma física desse material.
- A *tensão e a deformação de engenharia* são calculadas por meio da área de seção transversal *original* e do comprimento de referência do corpo-de-prova.
- Um *material dúctil*, como o aço doce, apresenta quatro comportamentos distintos quando está carregado. São eles: *comportamento elástico*, *escoamento*, *endurecimento por deformação* e *estricção*.
- Um material é *linear-elástico* se a tensão for proporcional à deformação dentro da região elástica. Essa condição é denominada *lei de Hooke* e o declive da curva é chamado *módulo de elasticidade E*.
- Pontos importantes do diagrama tensão-deformação são: *limite de proporcionalidade*, *limite de elasticidade*, *limite de escoamento*, *limite de resistência* e *tensão de ruptura*.
- A *ductilidade* do material é especificada pela *porcentagem de alongamento* ou pela *redução de área* do corpo-de-prova.
- Se o material não possuir um ponto de escoamento distinto, a *resistência ao escoamento* é especificada por um método gráfico como o método de deformação residual.
- *Materiais frágeis*, tais como o ferro fundido, têm muito pouco ou nenhum escoamento e rompem-se subitamente.
- O *endurecimento por deformação* é usado para estabelecer um ponto de escoamento maior para o material, o que é feito deformando-se o material além do limite elástico e, em seguida, aliviando a carga. O módulo de elasticidade permanece o mesmo; entretanto, a ductilidade do material *decresce*.
- *Energia de deformação* é a energia armazenada no material devido à sua deformação. Essa energia por unidade de volume é chamada *densidade da energia de deformação*. Se medida no limite de proporcionalidade, é denominada *módulo de resiliência*; se medida no ponto de ruptura, é chamada *módulo de tenacidade*.

EXEMPLO 3.1

O teste de tração para uma liga de aço resulta no diagrama tensão-deformação da Figura 3.18. Calcular o módulo de elasticidade e a resistência ao escoamento com base em uma deformação residual de 0,2%. Identificar no gráfico o limite de resistência e a tensão de ruptura.



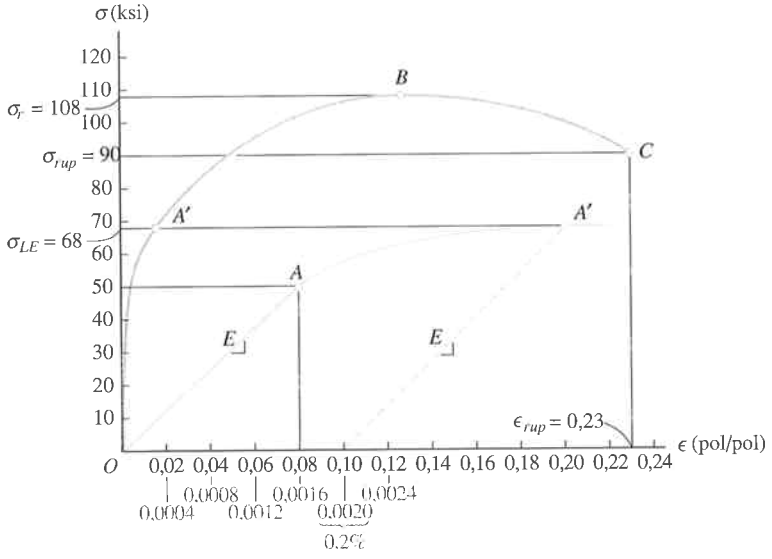


Figura 3.18

SOLUÇÃO

Módulo de Elasticidade. Devemos calcular o *declive* da porção inicial reta do gráfico. Usando uma curva e uma escala ampliadas, mostradas em cores, vemos que essa reta estende-se do ponto O a um ponto A estimado, que tem coordenadas aproximadas (0,0016 pol/pol, 50 ksi).

Portanto:

$$E = \frac{50 \text{ ksi}}{0{,}0016 \text{ pol/pol}} = 31{,}2(10^3) \text{ ksi} \qquad \textit{Resposta}$$

Observe que a equação da reta OA é, desse modo, $\sigma = 31{,}2(10^3)\epsilon$.

Limite de Escoamento. Para uma deformação residual de 0,2%, começamos na deformação de 0,2% ou 0,0020 pol/pol e, graficamente, traçamos uma reta paralela (tracejada) à reta OA até que ela intercepte a curva σ–ϵ em A′. O limite de escoamento é aproximadamente:

$$\sigma_{LE} = 68 \text{ ksi} \qquad \textit{Resposta}$$

Limite de Resistência. É definido pelo pico (maior valor de tensão) do gráfico σ–ϵ, ponto B na Figura 3.18.

$$\sigma_r = 108 \text{ ksi} \qquad \textit{Resposta}$$

Tensão de Ruptura. Quando o corpo-de-prova está tracionado com o máximo de ϵ_{rup}, rompe-se no ponto C. Assim,

$$\sigma_{rup} = 90 \text{ ksi} \qquad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 3.2

O diagrama tensão-deformação de uma liga de alumínio usada para fabricar peças de aeronaves é mostrado na Figura 3.19. Supondo que um corpo-de-prova desse material seja tracionado com 600 MPa, determinar a deformação permanente que ficará no corpo-de-prova quando a carga for removida. Calcular também o módulo de resiliência tanto antes como depois da aplicação da carga.

SOLUÇÃO

Deformação Permanente. Quando o corpo-de-prova é submetido à carga, endurece por deformação até atingir o ponto B do diagrama $\sigma-\epsilon$ (Figura 3.19). A deformação nesse ponto é aproximadamente 0,023 mm/mm. Quando a carga é retirada, o material comporta-se seguindo a reta BC, paralela à reta OA. Como ambas as retas têm o mesmo declive, a deformação no ponto C é determinada analiticamente. O declive da reta OA é o módulo de elasticidade, isto é:

$$E = \frac{450 \text{ MPa}}{0{,}006 \text{ mm/mm}} = 75{,}0 \text{ GPa}$$

Pelo triângulo CBD, requer-se:

$$E = \frac{BD}{CD} = \frac{600(10^6) \text{ Pa}}{CD} = 75{,}0(10^9) \text{ Pa}$$

$$CD = 0{,}008 \text{ mm/mm}$$

Essa deformação representa a quantidade de *deformação elástica recuperada*. A deformação permanente, ϵ_{oc}, é, pois:

$$\epsilon_{oc} = 0{,}023 \text{ mm/mm} - 0{,}008 \text{ mm/mm}$$
$$= 0{,}0150 \text{ mm/mm} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Observação: se as marcas de referência estivessem a 50 mm de distância uma da outra antes da aplicação da carga, depois que a carga fosse *removida* essas marcas teriam 50 mm + (0,0150) (50 mm) = 50,75 mm de distância entre si.

Módulo de Resiliência. Aplicando a Equação 3.8, temos:[1]

$$(u_r)_{\text{inicial}} = \frac{1}{2}\sigma_{lp}\epsilon_{lp} = \frac{1}{2}(450 \text{ MPa})(0{,}006 \text{ mm/mm})$$
$$= 1{,}35 \text{ MJ/m}^3 \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

$$(u_r)_{\text{final}} = \frac{1}{2}\sigma_{lp}\epsilon_{lp} = \frac{1}{2}(600 \text{ MPa})(0{,}008 \text{ mm/mm})$$
$$= 2{,}40 \text{ MJ/m}^3 \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Por comparação, o efeito do endurecimento por deformação no material provocou um aumento no módulo de resiliência; observe, no entanto, que o módulo de tenacidade do material decresceu, uma vez que a área sob a curva original ($OABF$) é maior do que a área sob a curva CBF.

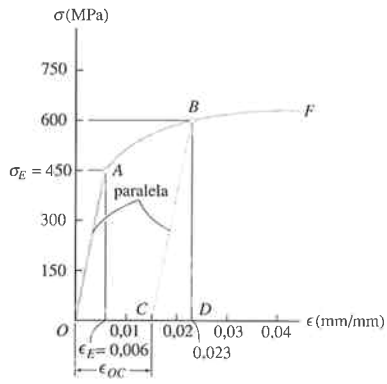
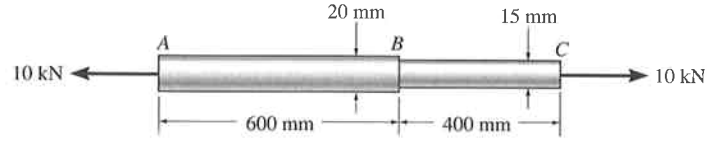


Figura 3.19

EXEMPLO 3.3

A haste de alumínio mostrada na Figura 3.20*a* tem seção transversal circular e está submetida a uma carga axial de 10 kN. Se uma parte do diagrama tensão-deformação do material é mostrada na Figura 3.20*b*, determinar o alongamento aproximado da haste quando a carga é aplicada. Se a carga for removida, qual será o alongamento permanente da haste? Suponha que E_{al} = 70 GPa.



(a)

[1] No SI, o trabalho é medido em joules, sendo 1 J = 1 N · m.

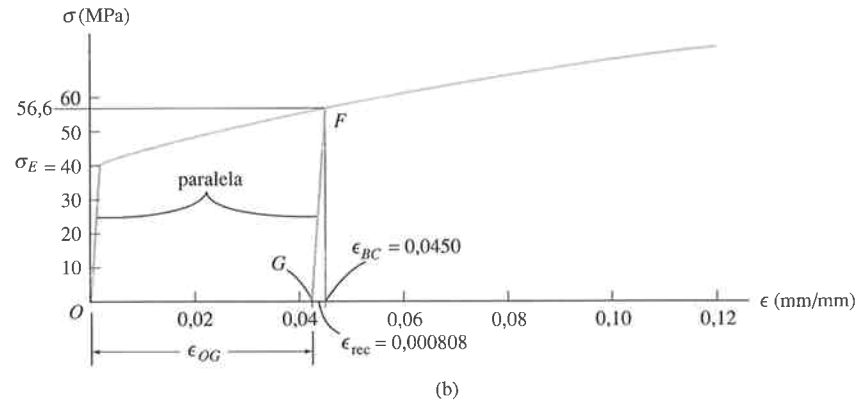


Figura 3.20

SOLUÇÃO

Para a análise, desprezaremos as *deformações localizadas* no ponto de aplicação da carga e onde a área da seção transversal da haste muda subitamente. (Esses efeitos serão discutidos nas seções 4.1 e 4.7.) Ao longo de toda a seção central de cada segmento, a tensão normal e a deformação são uniformes.

A fim de estudar a deformação da haste, devemos obter a deformação específica (ϵ). Isso é feito primeiro calculando-se a tensão e depois usando o diagrama tensão-deformação para obter a deformação. A tensão normal em cada segmento é:

$$\sigma_{AB} = \frac{P}{A} = \frac{10(10^3)\text{ N}}{\pi\,(0,01\text{ m})^2} = 31,83\text{ MPa}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{P}{A} = \frac{10(10^3)\text{ N}}{\pi\,(0,0075\text{ m})^2} = 56,59\text{ MPa}$$

Pelo diagrama tensão-deformação, vemos que o material na região AB é deformado *elasticamente* visto que $\sigma_e = 40\text{ MPa} > 31,83\text{ MPa}$. Usando a lei de Hooke:

$$\epsilon_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{E_{al}} = \frac{31,83(10^6)\text{ Pa}}{70(10^9)\text{ Pa}} = 0,0004547\text{ mm/mm}$$

O material da região BC está deformado plasticamente, visto que $\sigma_E = 40\text{ MPa} < 56,59\text{ MPa}$. Pelo gráfico, para $\sigma_{BC} = 56,59\text{ MPa}$:

$$\epsilon_{BC} \approx 0,045\text{ mm/mm}$$

O alongamento aproximado da haste é, portanto:

$$\delta = \Sigma\epsilon L = 0,0004547(600\text{ mm}) + 0,045(400\text{ mm})$$
$$= 18,3\text{ mm}$$ ***Resposta***

Quando a carga de 10 kN é retirada, o segmento AB da haste volta a seu comprimento original. Por quê? Por outro lado, o material do segmento BC recupera-se elasticamente ao longo da reta FG (Figura 3.20*b*). Como o declive de FG é E_{al}, a recuperação da deformação elástica é:

$$\epsilon_{\text{rec}} = \frac{\sigma_{BC}}{E_{al}} = \frac{56,59(10^6)\text{ Pa}}{70(10^9)\text{ Pa}} = 0,000808\text{ mm/mm}$$

Portanto, o restante da deformação plástica do segmento BC é:

$$\epsilon_{OG} = 0,0450 - 0,000808 = 0,0442\text{ mm/mm}$$

Portanto, quando a carga é removida, a haste permanece alongada de:

$$\delta' = \epsilon_{OG} L_{BC} = 0,0442(400\text{ mm}) = 17,7\text{ mm}$$ ***Resposta***

PROBLEMAS

3.1. Um cilindro de concreto com diâmetro de 6,00 pol e comprimento de referência de 12 pol é testado sob compressão. Os resultados do teste estão informados na tabela como carga *versus* contração. Desenhar o diagrama tensão-deformação usando escalas de 1 pol = 0,5 ksi e 1 pol = $0{,}2(10^{-3})$ pol/pol. Com base no diagrama, determinar o módulo de elasticidade aproximado.

Carga (kip)	Contração (pol)
0	0
5,0	0,0006
9,5	0,0012
16,5	0,0020
20,5	0,0026
25,5	0,0034
30,0	0,0040
34,5	0,0045
38,5	0,0050
46,5	0,0062
50,0	0,0070
53,0	0,0075

Problema 3.1

3.2. Os dados de um teste tensão-deformação de uma cerâmica são fornecidos na tabela. A curva é linear entre a origem e o primeiro ponto. Construir o diagrama e determinar o módulo de elasticidade e o módulo de resiliência.

3.3. Os dados de um teste tensão-deformação de uma cerâmica são fornecidos na tabela. A curva é linear entre a origem e o primeiro ponto. Construir o diagrama e determinar o módulo de tenacidade aproximado. A tensão de ruptura é σ_{rup} = 53,4 ksi.

σ (ksi)	ϵ (pol/pol)
0	0
33,2	0,0006
45,5	0,0010
49,4	0,0014
51,5	0,0018
53,4	0,0022

Problemas 3.2/3.3

***3.4.** Os dados de um teste tensão-deformação são fornecidos na tabela. A curva é linear entre a origem e o primeiro ponto. Construir o diagrama e determinar o módulo de elasticidade e o módulo de resiliência.

σ (ksi)	ϵ (pol/pol)
0	0
32,0	0,0016
33,5	0,0018
40,0	0,0030
41,2	0,0050

Problema 3.4

3.5. Foi realizado um teste de tensão em um corpo-de-prova com diâmetro original de 12,5 mm e comprimento de referência de 50 mm. Os dados estão relacionados na tabela. Construir o diagrama tensão-deformação e determinar aproximadamente o módulo de elasticidade, o limite de resistência e a tensão de ruptura. Usar as escalas de 20 mm = 50 MPa e 20 mm = 0,05 mm/mm. Detalhar a região linear-elástica usando a mesma escala de tensão, porém com escala de 20 mm = 0,001 mm/mm para a deformação.

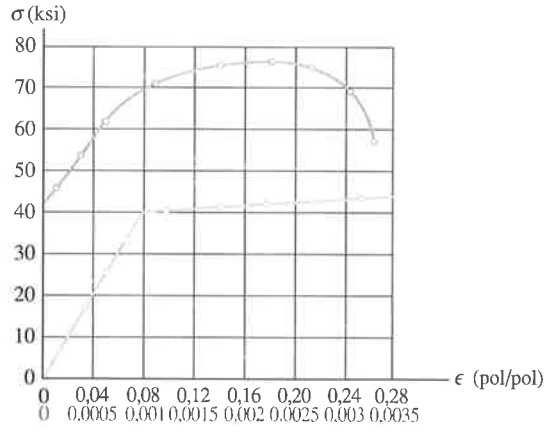
3.6. Foi realizado um teste de tensão em um corpo-de-prova de aço com diâmetro original de 12,5 mm e comprimento de referência de 50 mm. Usando os dados relacionados na tabela, construir o diagrama tensão-deformação e determinar o módulo de tenacidade aproximado. Usar as escalas de 20 mm = 50 MPa e 20 mm = 0,05 mm/mm.

Carga (kN)	Alongamento (mm)
0	0
11,1	0,0175
31,9	0,0600
37,8	0,1020
40,9	0,1650
43,6	0,2490
53,4	1,0160
62,3	3,0480
64,5	6,3500
62,3	8,8900
58,8	11,9380

Problemas 3.5/3.6

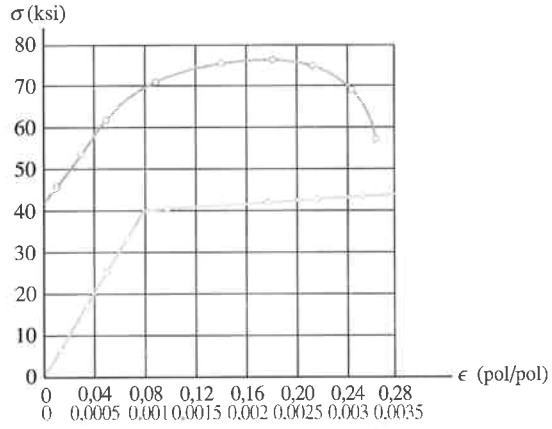
3.7. O diagrama tensão-deformação de uma liga de aço com diâmetro original de 0,5 pol e comprimento de referência de 2 pol é mostrado na figura. Se o corpo-de-prova for carregado até chegar em 70 ksi, determinar a quantidade aproximada de recuperação elástica e o aumento permanente do comprimento de referência após a carga ser retirada.

***3.8.** O diagrama tensão-deformação de uma liga de aço com diâmetro original de 0,5 pol e comprimento de referência de 2 pol é mostrado na figura. Determinar aproximadamente o módulo de elasticidade do material, a carga sobre o corpo-de-prova que provoca escoamento e a máxima tensão que o corpo-de-prova suportará.



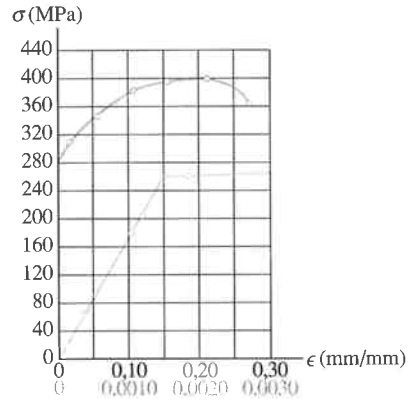
Problemas 3.7/3.8

3.9. O diagrama tensão-deformação de uma liga de aço com diâmetro original de 0,5 pol e comprimento de referência de 2 pol é mostrado na figura. Determinar o módulo de resiliência e o módulo de tenacidade aproximados do material.



Problema 3.9

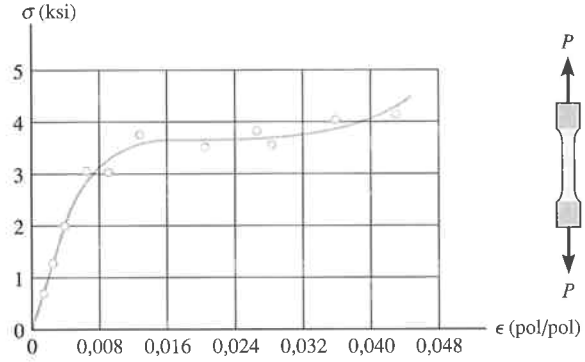
3.10. O diagrama tensão-deformação de uma barra de liga de aço é mostrado na figura. Determinar aproximadamente o módulo de elasticidade, o limite de proporcionalidade, o limite de resistência e o módulo de resiliência. Se for aplicada carga à barra até uma tensão de 360 MPa, determinar a deformação elástica recuperada e a deformação permanente da barra quando for retirada a carga.



Problema 3.10

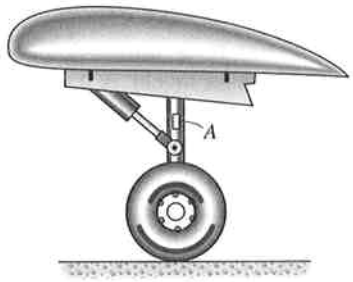
3.11. Uma barra de aço A-36 (suas propriedades são dadas nas tabelas no final do livro) tem comprimento de 50 pol e área da seção transversal de 0,7 pol^2. Determinar o comprimento da barra se estiver submetida a uma força de tração de 5.000 lb. O material tem comportamento linear-elástico.

***3.12.** O diagrama tensão-deformação do polietileno, usado para revestir cabos coaxiais, é determinado pelo teste de um corpo-de-prova que tem comprimento de referência de 10 pol. Supondo que uma carga P desenvolva uma deformação de $\epsilon = 0{,}024$ pol/pol no corpo-de-prova, determinar o comprimento aproximado do corpo-de-prova, medido entre os pontos de referência, quando a carga for retirada. Suponha que o corpo-de-prova recupere-se elasticamente.



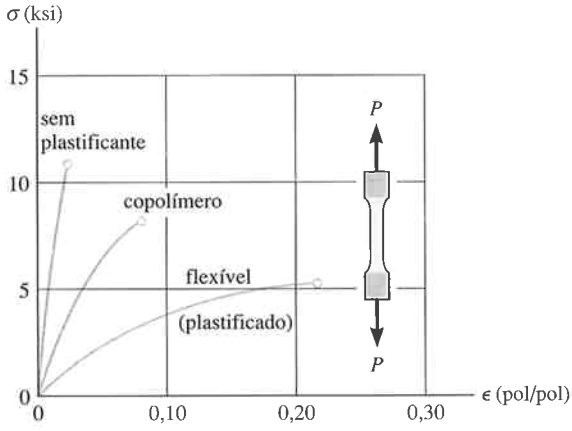
Problema 3.12

3.13. A mudança de peso de uma aeronave é determinada pela leitura do extensômetro A instalado no suporte de alumínio da roda da aeronave. *Antes* que a aeronave seja carregada, a leitura do extensômetro no suporte é $\epsilon_1 = 0{,}00100$ pol/pol e após o carregamento é $\epsilon_2 = 0{,}00243$ pol/pol. Determinar a mudança da força no suporte se a área da seção transversal desse suporte é de 3,5 pol^2. $E_{al} = 10(10^3)$ ksi.



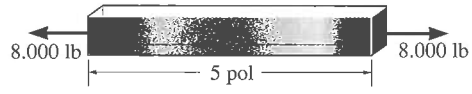
Problema 3.13

3.14. Adicionando plasticantes ao cloreto de polivinil, é possível reduzir sua rigidez. Os diagramas tensão-deformação para três tipos desse material, indicando tal efeito, são mostrados a seguir. Especificar o tipo que deve ser usado na fabricação de uma haste com 5 pol de comprimento e 2 pol de diâmetro, exigida para suportar uma carga axial de pelo menos 20 kip e que também deve ser esticada no máximo $\frac{1}{4}$ pol.



Problema 3.14

3.15. Uma barra com comprimento de 5 pol e área da seção transversal de 0,07 pol^2 está submetida a uma força axial de 8.000 lb. Se a barra estica 0,002 pol, determinar o módulo de elasticidade do material. O material tem comportamento linear-elástico.

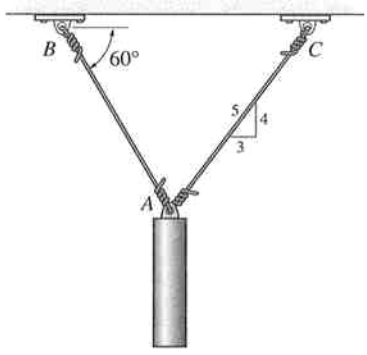


Problema 3.15

***3.16.** Um corpo-de-prova com comprimento original de 1 pé tem diâmetro de 0,5 pol e está submetido a uma força de 500 lb. Quando a força é aumentada de 500 para 1.800 lb, o corpo-de-prova alonga-se 0,009 pol. Determinar o módulo de elasticidade do material se este permanecer com comportamento linear-elástico.

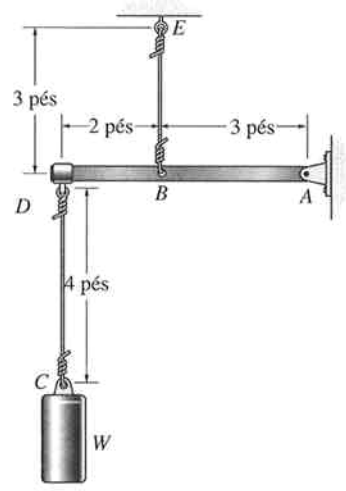
3.17. Um elemento estrutural em um reator nuclear é feito de liga de zircônia. Se ele tiver de suportar uma carga axial de 4 kip, qual área sua seção transversal precisará ter? Usar um fator de segurança F.S.= 3 em relação ao escoamento. Qual será a carga no elemento se ele tiver 3 pés de comprimento e seu alongamento for de 0,02 pol? $E_{zr} = 14(10^3)$ ksi, $\sigma_E = 57{,}5$ ksi. O material tem comportamento elástico.

3.18. Os arames de aço AB e AC suportam a massa de 200 kg. Supondo que a tensão normal admissível para eles seja $\sigma_{adm} = 130$ MPa, determinar o diâmetro requerido para cada arame. Além disso, qual será o novo comprimento do arame AB depois que a carga for aplicada? Supor o comprimento sem deformação de AB como sendo 750 mm. $E_{aço} = 200$ GPa.



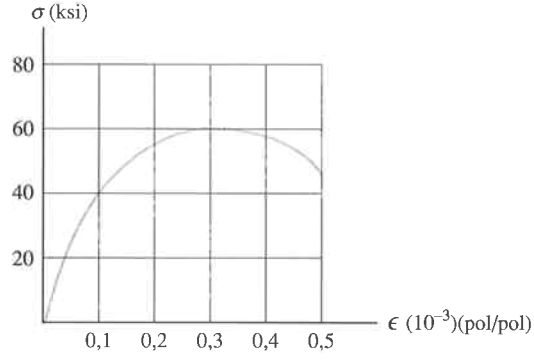
Problema 3.18

3.19. A barra DBA é rígida e, originalmente, está na posição horizontal. Quando o peso W está pendurado em D, faz a extremidade de D deslocar-se 0,025 pol para baixo. Determinar a deformação dos arames CD e BE. Além disso, supondo que os arames sejam fabricados com aço A-36 e tenham área da seção transversal de 0,002 pol^2, determinar o peso W.



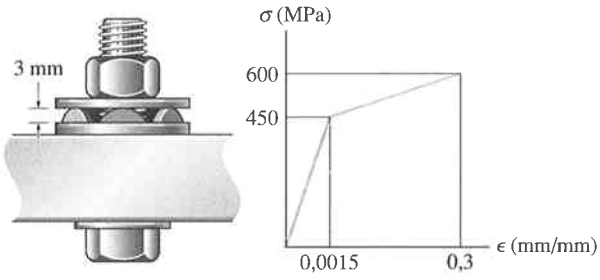
Problema 3.19

***3.20.** O diagrama tensão-deformação para muitas ligas metálicas pode ser descrito analiticamente pela equação de três parâmetros de Ramberg-Osgood $\epsilon = (\sigma/E) + K\sigma^n$), em que E, k e n são determinados por meio de medições feitas no diagrama. Usando o diagrama tensão-deformação mostrado na figura, supor que $E = 30(10^3)$ ksi e determinar os outros dois parâmetros k e n; depois, por meio deles, obter uma expressão analítica para a curva.



Problema 3.20

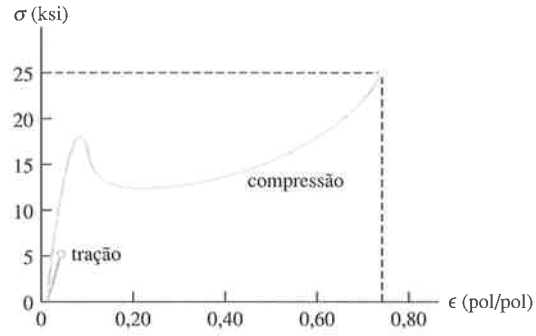
3.21. Algumas vezes, indicadores diretos de tensão são usados, em vez de torquímetros, para assegurar que o parafuso tenha a tensão especificada quando usado em conexões. Se a porca de um parafuso está apertada de modo que as seis cabeças do indicador — que originalmente tinham 3 mm de altura — estão esmagadas 0,3 mm, deixando uma área de contato de 1,5 mm^2 em cada cabeça, determinar a tensão na rosca do parafuso. O material tem o diagrama tensão-deformação mostrado.

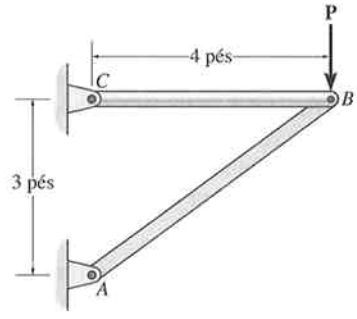


Problema 3.21

3.22. As duas barras são feitas de poliestireno, que tem o diagrama tensão-deformação mostrado. Se a área da seção transversal da barra AB for de 1,5 pol^2 e BC for de 4 pol^2, determinar a maior força P que pode ser suportada antes que qualquer membro se rompa. Suponha que não ocorra flambagem.

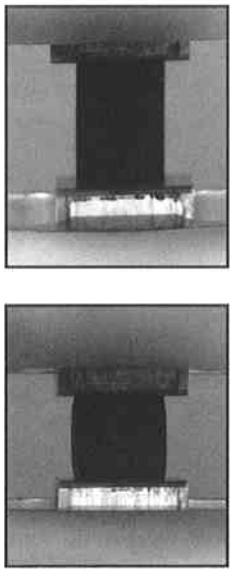
3.23. As duas barras são feitas de poliestireno, que tem o diagrama tensão-deformação mostrado. Determinar a área da seção transversal de cada barra de modo que as barras rompam-se simultaneamente quando a carga for P = 3 kip. Suponha que não ocorra flambagem.





Problemas 3.22/3.23

3.6 COEFICIENTE DE POISSON



Quando o bloco de borracha está comprimido (deformação negativa), seus lados expandem-se (deformação positiva). A relação entre essas deformações é constante.

Quando um corpo deformável é submetido a uma força axial de tração, não só se alonga como também se contrai lateralmente. Por exemplo, se um elástico é esticado, observa-se que tanto a espessura como a largura diminuem. Da mesma forma, uma força de compressão que atua sobre um corpo faz com que ele se contraia na direção da força e seus lados expandam-se lateralmente. Esses dois casos estão ilustrados na Figura 3.21 para uma barra com raio r e comprimento L.

Quando a carga **P** é aplicada à barra, muda o comprimento da barra na quantidade δ e seu raio na quantidade δ'. As deformações na direção longitudinal ou axial e na direção lateral ou radial são, respectivamente:

$$\epsilon_{long} = \frac{\delta}{L} \quad \text{e} \quad \epsilon_{lat} = \frac{\delta'}{r}$$

No início do século XIX, o cientista francês S. D. Poisson percebeu que na *faixa de elasticidade* a *razão* entre essas deformações é uma *constante*, visto que as deformações δ e δ' são proporcionais. Essa constante é denominada ***coeficiente de Poisson***, ν (nu), e tem valor numérico exclusivo para um material em particular que seja tanto *homogêneo* como *isotrópico*. Matematicamente, o coeficiente é expresso por:

$$\nu = -\frac{\epsilon_{lat}}{\epsilon_{long}} \tag{3.9}$$

O sinal negativo é usado porque o *alongamento longitudinal* (deformação positiva) provoca *contração lateral* (deformação negativa) e vice-versa. Observe

que essa deformação lateral é a *mesma* em todas as direções laterais (ou radiais). Além disso, ela é provocada somente pela força axial ou longitudinal; ou seja, nenhuma força ou tensão atua em uma direção lateral para deformar o material nessa direção.

O coeficiente de Poisson é *adimensional* e, para a maioria dos sólidos não porosos, tem valor entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$. Valores típicos de ν para materiais estão relacionados nas tabelas no final do livro. Em particular, um material ideal que não tenha movimento lateral quando esticado ou comprimido terá $\nu = 0$. Além disso, será mostrado na Seção 10.6 que o valor *máximo* possível do coeficiente de Poisson é 0,5. Portanto, $0 \leq \nu \leq 0{,}5$.

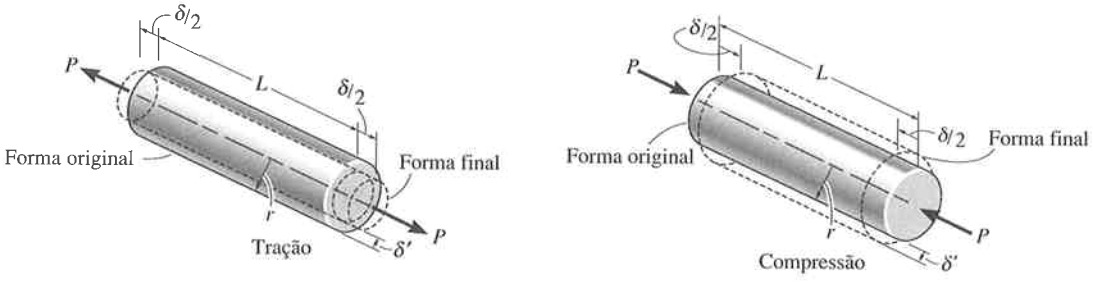


Figura 3.21

EXEMPLO 3.4

Uma barra feita de aço A-36 tem as dimensões mostradas na Figura 3.22. Supondo que uma força axial de $P = 80$ kN seja aplicada a ela, determinar as mudanças em seu comprimento e nas dimensões de sua seção transversal depois de aplicada a carga. O material comporta-se elasticamente.

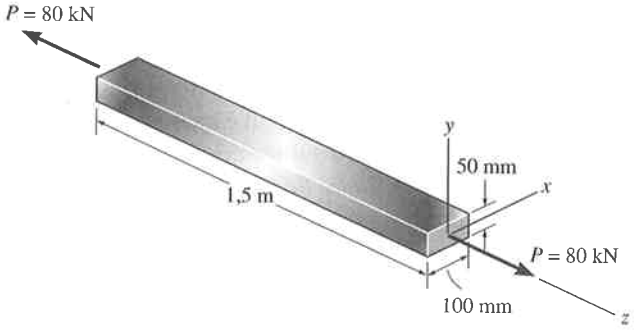


Figura 3.22

SOLUÇÃO

A tensão normal na barra é:

$$\sigma_z = \frac{P}{A} = \frac{80(10^3)\,\text{N}}{(0{,}1\,\text{m})(0{,}05\,\text{m})} = 16{,}0(10^6)\,\text{Pa}$$

Pelas tabelas no final do livro, $E_{aço} = 200$ GPa para aço A-36; assim, a deformação na direção de z é:

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E_{aço}} = \frac{16{,}0(10^6)\,\text{Pa}}{200(10^9)\,\text{Pa}} = 80(10^{-6})\,\text{mm/mm}$$

O alongamento axial da barra é, pois:

$$\delta_z = \epsilon_z L_z = [80(10^{-6})](1{,}5\text{ m}) = 120\ \mu\text{m} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Pela Equação 3.9, em que $\nu_{aço} = 0{,}32$, conforme obtido na tabela no final do livro, as deformações de contração em *ambas* as direções x e y são:

$$\epsilon_x = \epsilon_y = -\nu_{aço}\epsilon_z = -0{,}32[80(10^{-6})] = -25{,}6\ \mu\text{m/m}$$

Assim, as mudanças nas dimensões da seção transversal são:

$$\delta_x = \epsilon_x L_x = -[25{,}6(10^{-6})](0{,}1\text{ m}) = -2{,}56\ \mu\text{m} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

$$\delta_y = \epsilon_y L_y = -[25{,}6(10^{-6})]\ (0{,}05\text{ m}) = -1{,}28\ \mu\text{m} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

3.7 DIAGRAMA TENSÃO-DEFORMAÇÃO DE CISALHAMENTO

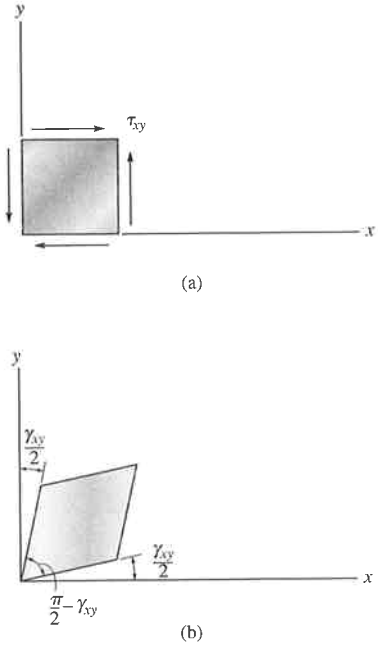


Figura 3.23

Mostramos na Seção 1.5 que, quando um elemento do material está submetido a *cisalhamento puro*, o equilíbrio requer que sejam desenvolvidos esforços de cisalhamento iguais nas quatro faces do elemento. Esses esforços devem tanto aproximar-se como afastar-se dos cantos diagonalmente opostos do elemento (Figura 3.23*a*). Além disso, se o material for *homogêneo* e *isotrópico*, o esforço de cisalhamento distorcerá o elemento uniformemente (Figura 3.23*b*). Como mencionado na Seção 2.2, a deformação por cisalhamento γ_{xy} mede a distorção angular do elemento em relação aos lados inicialmente localizados ao longo dos eixos x e y.

O comportamento de um material submetido a cisalhamento puro é estudado em laboratório por meio de corpos-de-prova com formato de tubos circulares finos, submetidos a uma carga de torção. Se forem medidos o torque aplicado e o ângulo de torção resultante, os dados podem ser usados, com os métodos a serem explicados no Capítulo 5, para determinar o esforço e a deformação de cisalhamento e, assim, construir o diagrama tensão-deformação. Um exemplo do diagrama para material dúctil é mostrado na Figura 3.24. Como no teste de tração, o material, quando submetido a cisalhamento, exibirá comportamento linear-elástico e terá *limite de proporcionalidade* τ_{lp} bem definido. Ocorrerá também endurecimento por deformação até que seja atingido o *limite de resistência ao cisalhamento* τ_r. Finalmente, o material começará a perder sua resistência de cisalhamento até alcançar o ponto em que ocorre a ruína do material (fratura, falha), τ_{ru}.

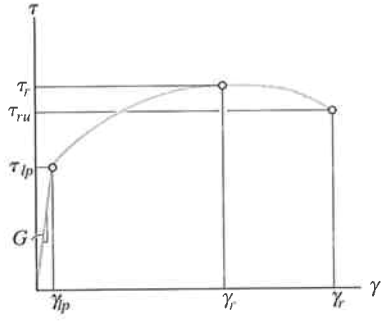


Figura 3.24

Para a maioria dos materiais de engenharia, como o que acabamos de descrever, o comportamento elástico é *linear* e, desse modo, a lei de Hooke para cisalhamento é expressa por:

$$\boxed{\tau = G\gamma} \qquad (3.10)$$

Nesse caso, G é denominado ***módulo de elasticidade ao cisalhamento*** ou ***módulo de rigidez***. Seu valor é medido pelo declive da reta do diagrama $\tau-\gamma$, ou seja, $G = \tau_{lp}/\gamma_{lp}$. Valores típicos para materiais de engenharia estão relacionados nas tabelas no final do livro. Observe que as unidades de medida de G são as *mesmas* que as de E (Pa ou psi), visto que γ é medido em radianos, uma grandeza adimensional.

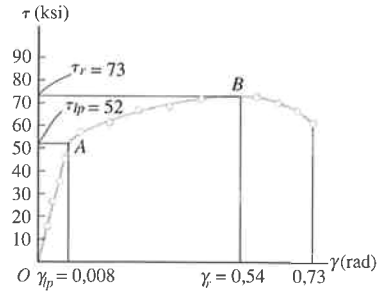
Na Seção 10.6 será mostrado que as três constantes do material (E, ν e G) são, na verdade, relacionadas pela equação:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \tag{3.11}$$

Como E e G são conhecidos, o valor de ν pode ser determinado por essa equação em vez de por medição experimental. Por exemplo, no caso do aço A-36, $E_{aço} = 29(10^3)$ ksi e $G_{aço} = 11{,}0(10^3)$, de modo que, pela Equação 3.11, $\nu_{aço} = 0{,}32$.

EXEMPLO 3.5

Um corpo-de-prova de liga de titânio é testado em torção, e o diagrama tensão-deformação de cisalhamento é mostrado na Figura 3.25*a*. Determinar o módulo de cisalhamento G, o limite de proporcionalidade e o limite de resistência ao cisalhamento. Determinar também a distância máxima d que o topo de um bloco desse material, mostrado na Figura 3.25*b*, pode ser deslocado horizontalmente se o material comporta-se elasticamente quando submetido à força de cisalhamento **V**. Qual é a intensidade de **V** (força cortante ou de cisalhamento) necessária para provocar o deslocamento?



(a)

SOLUÇÃO

Módulo de Cisalhamento. Esse valor representa o declive da porção reta de OA do diagrama $\tau-\gamma$. As coordenadas do ponto A são (0,008 rad, 52 ksi). Então:

$$G = \frac{52 \text{ ksi}}{0{,}008 \text{ rad}} = 6.500 \text{ ksi} \qquad \textit{Resposta}$$

A equação da reta OA é, portanto, $\tau = 6.500\gamma$, que é a lei de Hooke para cisalhamento.

Limite de Proporcionalidade. Por inspeção, o gráfico deixa de ser linear no ponto A. Assim,

$$\tau_{lp} = 52 \text{ ksi} \qquad \textit{Resposta}$$

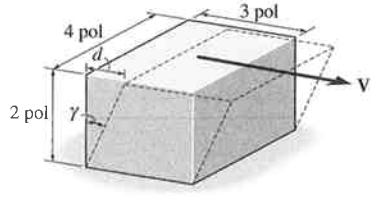
Limite de Resistência ao Cisalhamento. Esse valor representa o esforço de cisalhamento máximo, ponto B. Pelo gráfico,

$$\tau_r = 73 \text{ ksi} \qquad \textit{Resposta}$$

Deslocamento Elástico Máximo e Força de Cisalhamento. Como a deformação de cisalhamento máxima é 0,008 rad, um ângulo muito pequeno, o topo do bloco da Figura 3.25*b* será deslocado horizontalmente:

$$\text{tg}(0{,}008 \text{ rad}) \approx 0{,}008 \text{ rad} = \frac{d}{2 \text{ pol}}$$

$$d = 0{,}016 \text{ pol} \qquad \textit{Resposta}$$



(b)

Figura 3.25

A tensão de cisalhamento *média* correspondente no bloco é $\tau_{lp} = 52$ ksi. Assim, a força de cisalhamento V requerida para provocar o deslocamento é:

$$\tau_{méd} = \frac{V}{A}; \qquad 52 \text{ ksi} = \frac{V}{(3 \text{ pol})(4 \text{ pol})}$$

$$V = 624 \text{ kip} \qquad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 3.6

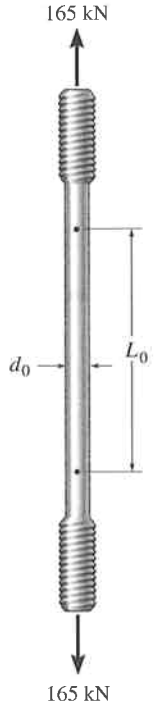


Figura 3.26

O corpo-de-prova de alumínio mostrado na Figura 3.26 tem diâmetro $d_0 = 25$ mm e comprimento de referência $L_0 = 250$ mm. Supondo que uma força de 165 kN alongue o comprimento de referência em 1,20 mm, determinar o módulo de elasticidade. Determinar também quanto o diâmetro do corpo-de-prova contrai-se. Supor $G_{al} = 26$ GPa e $\sigma_e = 440$ MPa.

SOLUÇÃO

Módulo de Elasticidade. A tensão normal média no corpo-de-prova é:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{165(10^3)\,\text{N}}{(\pi/4)(0{,}025\,\text{m})^2} = 336{,}1\ \text{MPa}$$

e a deformação normal média é:

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{1{,}20\,\text{mm}}{250\,\text{mm}} = 0{,}00480\ \text{mm/mm}$$

Como $\sigma < \sigma_E = 440$ MPa, o material comporta-se elasticamente. O módulo de elasticidade é:

$$E_{al} = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{336{,}1(10^6)\ \text{Pa}}{0{,}00480} = 70{,}0\ \text{GPa}$$ ***Resposta***

Contração do Diâmetro. Primeiro vamos determinar o coeficiente de Poisson para o material usando a Equação 3.11.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$26\ \text{GPa} = \frac{70{,}0\ \text{GPa}}{2(1+\nu)}$$

$$\nu = 0{,}346$$

Como $\epsilon_{\text{long}} = 0{,}00480$ mm/mm, então, pela Equação 3.9,

$$\nu = -\frac{\epsilon_{\text{lat}}}{\epsilon_{\text{long}}}$$

$$0{,}346 = -\frac{\epsilon_{\text{lat}}}{0{,}00480\ \text{mm/mm}}$$

$$\epsilon_{\text{lat}} = -0{,}00166\ \text{mm/mm}$$

A contração do diâmetro é, portanto:

$$\delta' = (0{,}00166)(25\ \text{mm})$$
$$= 0{,}0415\ \text{mm}$$ ***Resposta***

*3.8 FALHA DE MATERIAIS DEVIDO À FLUÊNCIA E À FADIGA

As propriedades mecânicas de um material foram discutidas até este ponto apenas quanto a cargas estáticas ou aplicadas vagarosamente e a temperatura constante. Em alguns casos, porém, o elemento é usado em um ambiente em que as cargas têm de ser suportadas durante longos períodos e a temperaturas elevadas ou, em outros casos, o carregamento é repetido ou aplicado em ciclos. Não consideraremos tais efeitos neste livro, apesar de mencionarmos brevemente como se determina a resistência de um material em tais condições, visto elas terem tratamento especial em projetos.

Fluência. Quando um material tem de suportar uma carga por um período muito longo, continua a deformar-se até que ocorre ruptura súbita ou sua utilidade fica prejudicada. Essa deformação permanente que depende do tempo é conhecida como ***fluência***. Em geral, a fluência é considerada quando metais e cerâmicas são usados para membros estruturais ou peças mecânicas sujeitas a temperaturas altas. Entretanto, para alguns materiais, tais como polímeros e materiais compostos — inclusive madeira ou concreto —, a temperatura *não* é um fator importante, mas ainda assim a fluência ocorre estritamente devido ao longo tempo de aplicação da carga. Como exemplo típico, consideremos o fato de que um elástico não volta à sua forma original depois que é solto de uma posição esticada, na qual foi mantido por um período muito longo. Portanto, de modo geral, tanto *tensão* quanto *temperatura* desempenham um papel importante na *taxa* de fluência.

A aplicação de carga por prazo longo no cabo deste poste fez com que ele entortasse devido à fluência (aplicação de cargas por longos períodos ou em temperaturas extremas).

Para finalidades práticas, quando a deformação lenta torna-se importante, um material é projetado, em geral, para resistir a uma deformação por fluência durante certo período. A esse respeito, uma propriedade mecânica importante usada no projeto de elementos submetidos à fluência é o *limite de fluência*. Esse valor representa a maior tensão inicial que o material suporta durante um tempo especificado sem sofrer certa quantidade de deformação por fluência. A resistência à fluência varia com a temperatura e, no projeto, devem ser especificadas uma dada temperatura, a duração da carga e a fluência admissível. Por exemplo, foi sugerido para o aço de parafusos e tubulações uma deformação por fluência de 0,1% ao ano e de 0,25% para revestimento de chumbo de cabos.

Existem vários métodos para determinar o limite de fluência admissível de um material em particular. Um dos mais simples consiste em testar diversos corpos-de-prova simultaneamente sob temperatura constante, mas cada um submetido a uma *tensão axial diferente*. Medindo-se o tempo necessário para produzir tanto a deformação admissível como a deformação de ruptura para cada corpo-de-prova, monta-se a curva de tensão *versus* tempo. Normalmente, tais testes são conduzidos para um máximo de 1.000 horas. Um exemplo dos resultados para aço inoxidável a uma temperatura de 1.200° F e a uma fluência de 1% é mostrado na Figura 3.27. Como observado, o material tem limite de escoamento de 40 ksi (276 MPa) em temperatura ambiente (0,2% de deformação residual) e sua resistência à fluência em 1.000 horas é de aproximadamente $\sigma_{flu} = 20$ ksi (138 MPa).

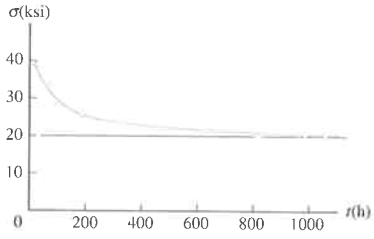


Diagrama $\sigma - t$ para aço inoxidável a 1.200° F e fluência de 1%

Figura 3.27

Em geral, a resistência à fluência *decresce* com *temperaturas mais altas* ou com *maiores tensões aplicadas*. Devem ser feitas extrapolações nas curvas para períodos mais longos. É importante possuir certa experiência com o comportamento à fluência e algum conhecimento suplementar em relação às propriedades de fluência do material a ser usado para se processar a extrapolação das curvas. Uma vez determinada a resistência à fluência, deve-se, porém, aplicar um fator de segurança para obter a tensão admissível apropriada para o projeto.

Fadiga. Quando um metal é submetido a *ciclos* repetidos de tensão ou deformação, há uma quebra de sua estrutura, o que leva à ruptura. Tal comportamento é chamado ***fadiga*** e, geralmente, é responsável por uma grande porcentagem de falhas em bielas e virabrequins de motores; pás de turbinas a vapor e a gás; encontros ou apoios de pontes; rodas e eixos de vagões; e outras peças sujeitas a carregamento cíclico. Em todos esses casos, ocorre ruptura com um esforço *menor* que o limite de escoamento do material.

Aparentemente, essa falha deve-se ao fato de que existem regiões microscópicas, em geral na superfície do membro, onde a tensão localizada torna-se *muito maior* do que a tensão média que atua sobre a seção transversal. Como a tensão maior é cíclica, leva à formação de fissuras. A ocorrência dessas trincas provoca aumento de tensão em suas extremidades ou fronteiras, o que, por sua vez, provoca aumento do tamanho das trincas no material à medida que a tensão continua a ser aplicada ciclicamente. Por fim, a área da seção transversal

O projeto de rodas gigantes de parques de diversão requer consideração cuidadosa das cargas que provocam fadiga.

do elemento é reduzida a um ponto em que a carga não pode mais ser suportada e, como resultado, ocorre a ruptura súbita. O material, apesar de dúctil, comporta-se como se fosse *frágil*.

A fim de especificar a resistência segura para um material metálico sob carregamento cíclico, é necessário determinar um limite abaixo do qual não seja detectada evidência de falha após se aplicar a carga especificada durante determinado número de ciclos. Essa tensão limitante é denominada *limite de fadiga*. Corpos-de-prova são, cada um, submetidos a uma tensão máxima especificada e levados à ruptura em uma máquina de teste para essa finalidade. Os resultados são montados em um gráfico no qual as ordenadas representam a tensão S (ou σ), e a abscissa é o número de ciclos até a ruptura N. Esse gráfico é denominado *diagrama S–N* ou *diagrama tensão-ciclo*; em geral, os valores de N são construídos em escala logarítmica porque, em geral, são bastante altos.

A Figura 3.28 mostra exemplos de diagramas S–N de dois metais comuns na engenharia. O limite de fadiga é a tensão para a qual o gráfico S–N torna-se horizontal ou assintótico. Como se pode observar, o aço tem um valor bem definido de $(S_{lf})_{aço} = 27$ ksi (186 MPa). Para o alumínio, porém, o limite de fadiga não é tão bem definido e, desse modo, é normalmente especificado como 500 milhões de ciclos, $(S_{lf})_{al} = 19$ ksi (131 MPa). Os valores típicos dos limites de fadiga para vários materiais de engenharia são informados em manuais. Uma vez obtido um valor particular, supõe-se que para qualquer tensão abaixo desse valor a vida útil é infinita e, portanto, não se leva mais em consideração o número de ciclos até a falha.

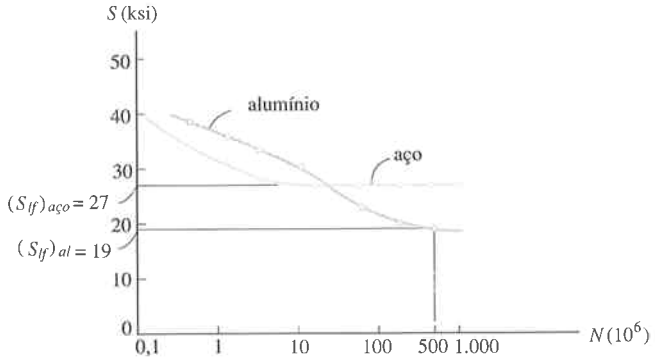


Diagrama S–N para aço e ligas de alumínio
(o eixo N tem escala logarítmica)

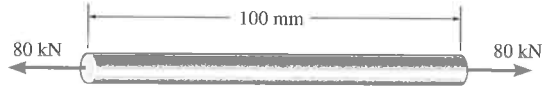
Figura 3.28

PONTOS IMPORTANTES

- O *coeficiente de Poisson*, ν, mede a deformação lateral de um material homogêneo e isotrópico em relação à sua deformação longitudinal. Geralmente, essas deformações têm sinais contrários, isto é, se uma for alongamento, a outra será contração.
- O *diagrama tensão-deformação de cisalhamento* é um gráfico da tensão de cisalhamento *versus* deformação de cisalhamento. Se o material for homogêneo e isotrópico e também linear-elástico, o declive da curva na região elástica é chamado módulo de rigidez ou módulo de cisalhamento, G.
- Há uma relação matemática entre G, E e ν.
- *Fluência* é a deformação de um material relacionada com o tempo para a qual a tensão e/ou a temperatura desempenham papel importante. Os elementos são projetados para resistir aos efeitos da fluência com base em seu limite de fluência, isto é, a maior tensão inicial a que o material pode resistir durante um período de tempo especificado sem provocar uma deformação por fluência especificada.
- Ocorre *fadiga* nos metais quando a tensão ou a deformação é cíclica. Isso provoca a ocorrência de fratura frágil. Os elementos são projetados para resistir à fadiga, assegurando que a tensão no elemento não excede seu *limite de fadiga*. Esse valor é determinado no diagrama S–N como a tensão máxima a que o elemento pode resistir quando submetido a uma quantidade de ciclos de carregamento especificada.

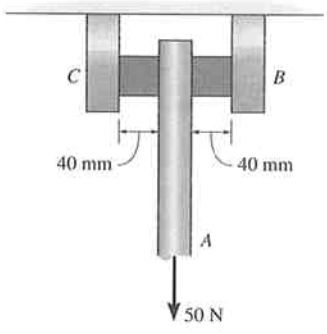
PROBLEMAS

***3.24.** A haste plástica é feita de Kevlar 49 e tem diâmetro de 10 mm. Supondo que lhe seja aplicada uma carga axial de 80 kN, determinar as mudanças em seu comprimento e em seu diâmetro.



Problema 3.24

3.25. O apoio consiste de três chapas rígidas acopladas por meio de dois calços de borracha posicionados simetricamente. Supondo que seja aplicada uma força vertical de 50 N à chapa A, determinar o deslocamento vertical aproximado dessa chapa causado por deformações de cisalhamento na borracha. Cada calço tem dimensões de 30 mm e 20 mm na seção transversal. $G_{borr} = 0{,}20$ MPa.

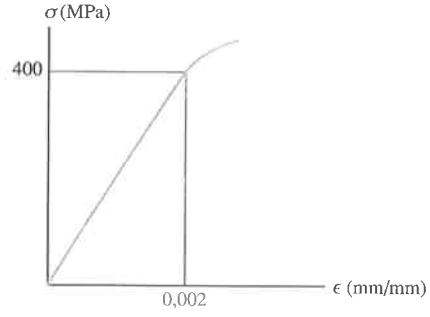


Problema 3.25

3.26. Um pequeno bloco cilíndrico de bronze C86100, com diâmetro original de 1,5 pol e comprimento de 3 pol, é colocado em uma máquina de compressão e comprimido até que seu comprimento se torna 2,98 pol. Determinar o novo diâmetro do bloco.

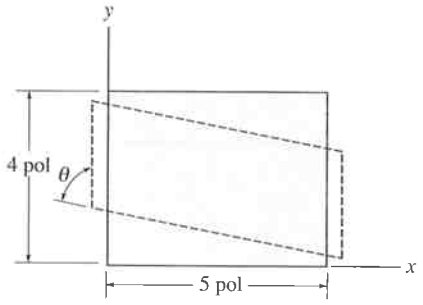
3.27. Um pequeno bloco cilíndrico de alumínio 6061-T6, com diâmetro original de 20 mm e comprimento de 75 mm, é colocado em uma máquina de compressão e comprimido até que a carga axial aplicada seja de 5 kN. Determinar (*a*) o decréscimo de seu comprimento e (*b*) seu novo diâmetro.

***3.28.** A região elástica do diagrama tensão-deformação de uma liga de aço é mostrada na figura. O corpo-de-prova do qual foi obtido tinha 13 mm de diâmetro inicial e 50 mm de comprimento de referência. Quando a carga aplicada ao corpo-de-prova é 50 kN, o diâmetro é 12,99265 mm. Determinar o coeficiente de Poisson para o material.



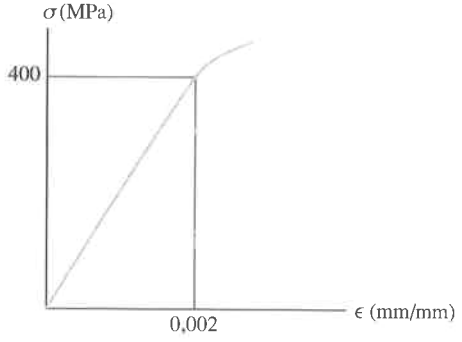
Problema 3.28

3.29. O bloco é feito de titânio Ti-6A1-4V, está submetido a uma compressão de 0,006 pol ao longo do eixo y e sua forma sofre torção de $\theta = 89{,}7°$. Determinar ϵ_x, ϵ_y e γ_{xy}.



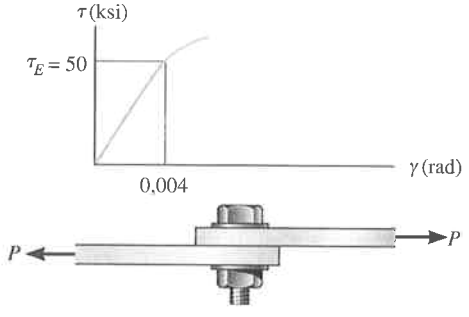
Problema 3.29

3.30. A região elástica do diagrama tensão-deformação de uma liga de aço é mostrada na figura. O corpo-de-prova do qual foi obtido tinha 13 mm de diâmetro inicial e 50 mm de comprimento de referência. Supondo que seja aplicada uma carga $P = 20$ kN ao corpo-de-prova, determinar seu diâmetro e comprimento de referência. Supor também que $\nu = 0{,}4$.



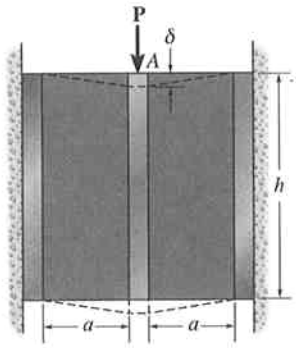
Problema 3.30

3.31. O diagrama tensão-deformação de cisalhamento de uma liga de aço é mostrado na figura. Supondo que um parafuso com 0,25 pol de diâmetro seja feito desse material e usado na junta de sobreposição, determinar o módulo de elasticidade E e a força P necessária para provocar escoamento do material. Suponha que $\nu = 0{,}3$.



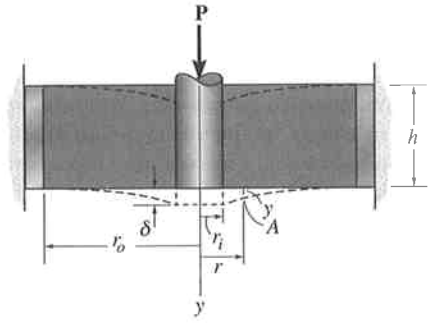
Problema 3.31

***3.32.** Uma mola de cisalhamento é feita de dois blocos de borracha, cada um com altura h, largura b e espessura a. Os blocos estão presos a três chapas como mostrado. Supondo que as chapas sejam rígidas e o módulo de cisalhamento da borracha seja G, determinar o deslocamento da chapa A caso lhe seja aplicada uma carga vertical $\boldsymbol{P}$. Supor, também, que o deslocamento seja pequeno, de modo que $\delta = a \text{ tg } \gamma \approx a\gamma$.



Problema 3.32

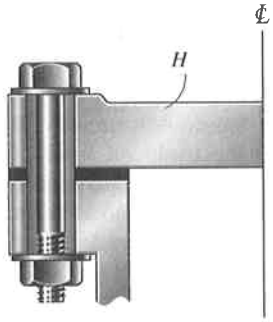
3.33. Uma mola de cisalhamento é feita prendendo-se a coroa anular de borracha a um anel fixo e a um bujão. Quando é aplicada uma carga **P** ao bujão, demonstrar que o declive no ponto A da borracha é $d_y/d_r = -\text{tg } \gamma = -\text{tg}[P/(2\pi hGr)]$. Para ângulos pequenos podemos escrever $d_y/d_r = -[P/(2\pi hGr)]$. Integrar a expressão e calcular a constante de integração usando a condição $y = 0$ para $r = r_o$. Com o resultado, calcular a deflexão $y = \delta$ do bujão.



Problema 3.33

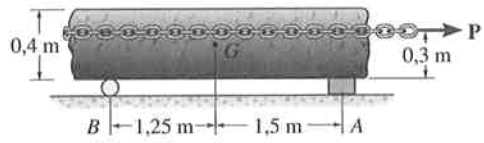
PROBLEMAS DE REVISÃO

3.34. O cabeçote H está acoplado ao cilindro de um compressor por seis parafusos de aço. Supondo que a força de aperto em cada parafuso seja de 800 lb, determinar a deformação normal nos parafusos. Cada parafuso tem $\frac{3}{16}$ pol de diâmetro. Se $\sigma_E = 40$ ksi e $E_{aço} = 29(10^3)$ ksi, qual será a deformação de cada parafuso quando a porca for desatarraxada de modo que a força seja retirada?



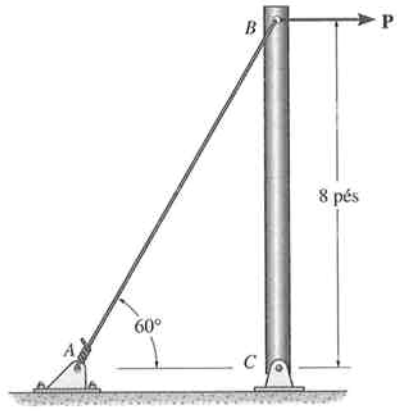
Problema 3.34

3.35. A pedra tem massa de 800 kg e centro de gravidade em G. Ela repousa sobre um calço em A e sobre um rolete em B. O calço é fixo no chão e tem altura comprimida de 30 mm, largura de 140 mm e comprimento de 150 mm. Supondo que o coeficiente de atrito estático entre o calço e a pedra seja $\mu_e = 0{,}8$, determinar o deslocamento horizontal aproximado da pedra provocado por deformações de cisalhamento no calço, antes que a pedra comece a deslizar. Supor, ainda, que a força em A atue a 1,5 m de G como mostrado. O calço é feito de um material que tem $E = 4$ MPa e $\nu = 0{,}35$.



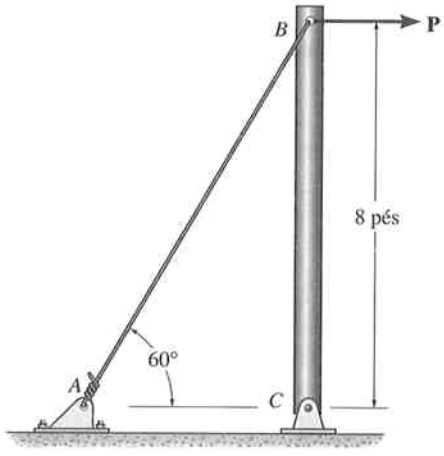
Problema 3.35

***3.36.** O tubo rígido é apoiado por um pino em A e um cabo de aço A-36 AB. Supondo que o cabo possua 0,2 pol de diâmetro, determinar quanto estica quando uma força $P = 300$ lb atua sobre o tubo. O material permanece elástico.



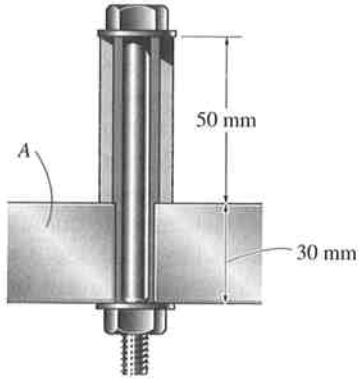
Problema 3.36

3.37. O tubo rígido é apoiado por um pino em A e um cabo de aço A-36 AB. Supondo que o cabo possua 0,2 pol de diâmetro, determinar a força P se a extremidade B for deslocada 0,10 pol para a direita. $E_{aço} = 29(10^3)$ ksi.



Problema 3.37

3.38. O parafuso de 8 mm de diâmetro é feito de uma liga de alumínio. Está instalado em uma luva de magnésio que possui diâmetro interno de 12 mm e diâmetro externo de 20 mm. Supondo que os comprimentos originais do parafuso e da luva sejam, respectivamente, 80 mm e 50 mm, determinar as deformações da luva e do parafuso se a porca for apertada de modo que a força no parafuso seja de 8 kN. Suponha que o material de A é rígido. $E_{al} = 70$ GPa, $E_{mg} = 45$ GPa.



Problema 3.38

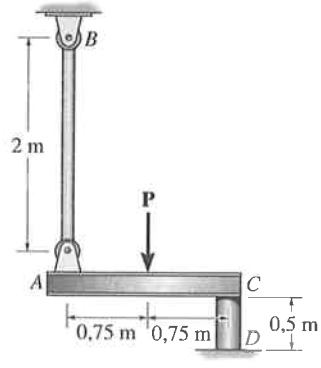
3.39. Foi realizado um teste de tração em um corpo-de-prova de aço com diâmetro de 0,503 pol e comprimento de referência de 2,00 pol. Os dados estão relacionados na tabela a seguir. Construir o diagrama tensão-deformação e determinar aproximadamente o módulo de elasticidade, o limite de escoamento, o limite de resistência e a tensão de ruptura. Usar escala de 1 pol = 20 ksi e 1 pol = 0,05 pol/pol. Depois, refazer a região elástica com a mesma escala de tensão, porém com escala de deformação de 1 pol = 0,001 pol/pol.

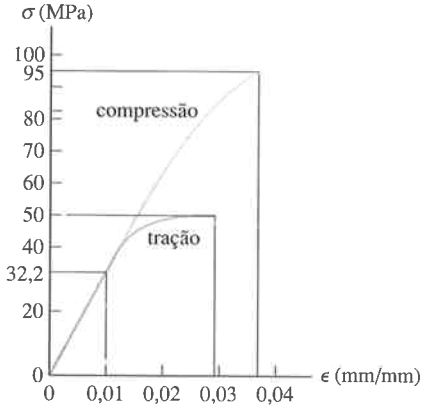
Carga (kip)	Alongamento (pol)
0	0
1,50	0,0005
4,60	0,0015
8,00	0,0025
11,00	0,0035
11,80	0,0050
11,80	0,0080
12,00	0,0200
16,60	0,0400
20,00	0,1000
21,50	0,2800
19,50	0,4000
18,50	0,4600

Problema 3.39

***3.40.** O diagrama tensão-deformação de uma resina de poliéster é dado na figura. Supondo que a viga rígida esteja apoiada por um elo AB e um poste CD, ambos feitos do mesmo material e submetidos a uma carga $P = 80$ kN, determinar o ângulo de inclinação da viga quando a carga é aplicada. O diâmetro do elo é de 40 mm e o do poste é de 80 mm.

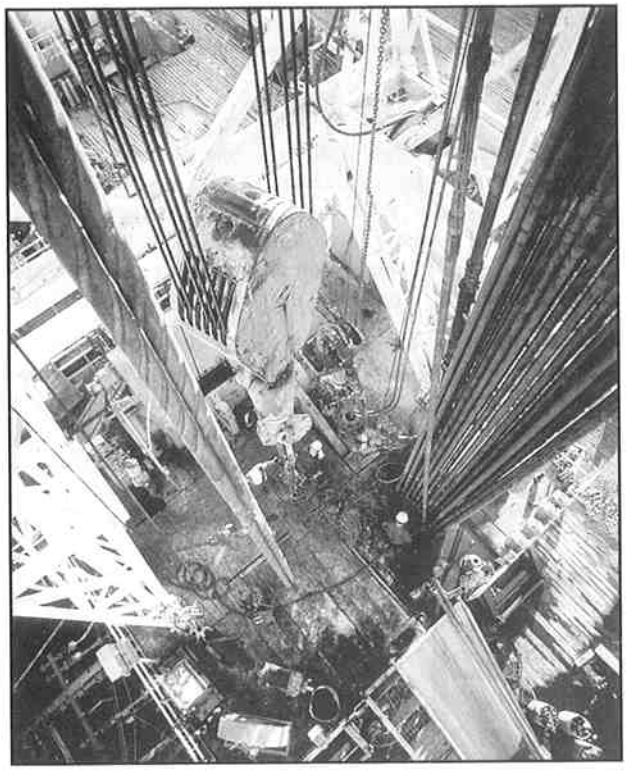
3.41. O diagrama tensão-deformação de uma resina de poliéster é dado na figura. Supondo que a viga rígida esteja apoiada por um elo AB e um poste CD, ambos feitos do mesmo material, determinar a maior carga P que pode ser aplicada à viga antes que tanto AB como CD rompam. O diâmetro do elo é de 12 mm e o do poste é de 40 mm.





Problemas 3.40/3.41

4 Carga Axial



A tubulação de perfuração de petróleo suspensa no guindaste da perfuratriz está submetida a cargas e a deformações axiais extremamente grandes.

Objetivos do Capítulo

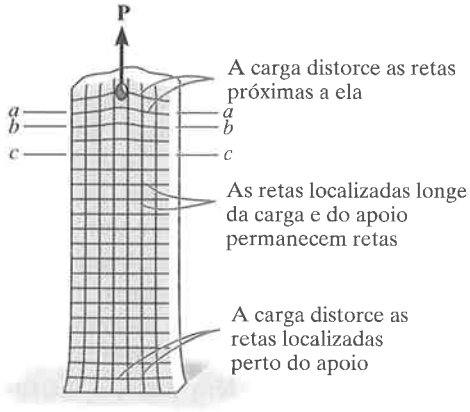
No Capítulo 1 desenvolvemos o método para encontrar a tensão normal em elementos carregados axialmente. Neste capítulo, discutiremos como determinar a deformação desses elementos; além disso, desenvolveremos um método para encontrar as reações dos apoios quando elas não puderem ser determinadas apenas com a utilização das equações de equilíbrio. Analisaremos também os efeitos da tensão térmica, das concentrações de tensão, das deformações inelásticas e da tensão residual.

4.1 Princípio de Saint-Venant

Nos capítulos anteriores conceituamos *tensão* como um meio para medir a distribuição de força no interior de um corpo e *deformação* como a maneira de medir a modificação na geometria do corpo. Mostramos também que a relação matemática entre tensão e deformação depende do tipo de material do qual o corpo é feito. Em particular, se o material comporta-se de maneira linear-elástica, então se aplica a lei de Hooke e há uma relação proporcional entre tensão e deformação.

Partindo dessa idéia, consideremos como uma barra retangular deforma-se elasticamente quando submetida a uma força **P** aplicada ao longo de seu eixo geométrico (Figura 4.1*a*). Nesse caso, a barra está fixada rigidamente em uma das extremidades, e a força é aplicada por meio de um furo na outra extremidade. Devido ao carregamento, a barra deforma-se como indicado pelas distorções das retas, antes horizontais e verticais, da grelha nela desenhada. Observe a *deformação localizada* que ocorre em cada extremidade. Tal efeito tende a *diminuir* nas medições feitas cada vez mais longe das extremidades. Além disso, as deformações igualam-se e tornam-se uniformes em toda a parte central da barra.

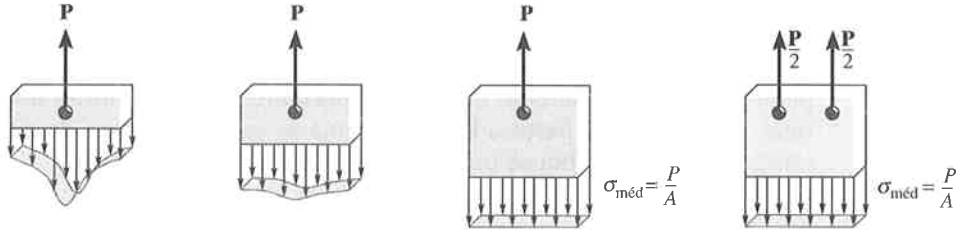
Como a deformação está relacionada à tensão no interior da barra, podemos dizer que a tensão distribui-se mais uniformemente ao longo da área da seção transversal se o corte for feito longe do ponto em que a carga externa está aplicada. Como exemplo, consideremos o perfil da variação da distribuição de tensão que atua nas seções *a–a*, *b–b* e *c–c*, cada uma das quais mostrada na Figura 4.1*b*. Por comparação, a tensão *quase* atinge um valor uniforme na seção *c–c*, suficientemente distante da extremidade. Em outras palavras, a seção *c–c* está suficientemente distante do ponto de aplicação de **P**, de modo que a deformação provocada por **P** *anula-se*. A distância mínima da extremidade da barra em que essa condição ocorre é determinada por uma análise matemática baseada na teoria da elasticidade.



(a)

Figura 4.1

Entretanto, como *regra geral*, que se aplica também a muitos outros casos de carregamento e geometria do elemento, consideramos que essa distância seja pelo menos igual à *maior dimensão* da seção transversal sob carga. Então, no caso da barra da Figura 4.1*b*, a seção *c–c* deve estar localizada a uma distância pelo menos igual à largura (não à espessura) da barra.[1] Essa regra baseia-se na *observação experimental do comportamento do material* e somente em casos especiais, como o discutido aqui, foi confirmada matematicamente. Deve ser observado, porém, que a regra não se aplica a todo tipo de elemento ou caso de carregamento. Por exemplo: membros feitos de elementos com paredes finas, quando submetidos a cargas que provocam deflexões grandes, podem criar tensões e deformações localizadas que exercem influência a distâncias consideráveis do ponto de aplicação da carga.

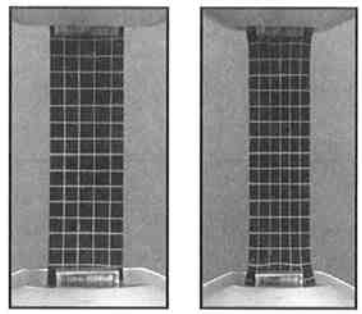


seção *a–a* seção *b–b* seção *c–c* seção *c–c*

(b) (c)

No apoio mostrado na Figura 4.1*a*, observe como a barra é impedida de reduzir sua largura, provavelmente devido ao alongamento lateral — conseqüência do 'efeito Poisson' discutido na Seção 3.6. Pelos mesmos argumentos expostos anteriormente, podemos demonstrar, todavia, que a distribuição de tensão no apoio também se equilibra e se torna uniforme na seção transversal a uma distância pequena do apoio; além disso, a intensidade da força resultante criada pela distribuição de tensão é igual a *P*.

O fato de a tensão e a deformação comportarem-se dessa maneira é denominado *princípio de Saint-Venant*, porque foi observado primeiro pelo cientista francês Barré de Saint-Venant em 1855. Essencialmente, o princípio diz que a tensão e a deformação produzidas em pontos do corpo suficientemente distantes da região de aplicação da carga serão *as mesmas*



Observe como as retas nesta membrana de borracha se distorcem quando ela é esticada. As distorções localizadas dos engastes alisam-se, como esperado, devido ao princípio de Saint-Venant.

[1] Quando a seção *c–c* tem essa localização, a teoria da elasticidade prediz que a tensão máxima é $\sigma_{máx} = 1{,}02\sigma_{méd}$.

produzidas por *quaisquer cargas aplicadas* que tenham a mesma resultante estaticamente equivalente e que sejam aplicadas na mesma região do corpo. Por exemplo: se duas forças $P/2$ aplicadas simetricamente atuam sobre uma barra (Figura 4.1*c*), a distribuição de tensão na seção *c–c,* suficientemente afastada dos efeitos localizados dessas cargas, será uniforme e, portanto, equivalente a $\sigma_{méd} = P/A$ como antes.

Em resumo, não precisamos considerar as distribuições de tensão complexas que possam realmente desenvolver-se nos pontos de aplicação da carga ou nos apoios quando estudamos a distribuição de tensão em um corpo em seções *suficientemente distantes* dos pontos de aplicação da carga. O princípio de Saint-Venant afirma que efeitos localizados provocados por qualquer carga que atua sobre o corpo dissipam-se ou ajustam-se nas regiões suficientemente distantes da carga. Além disso, a distribuição de tensão resultante nessas regiões será a *mesma* provocada por qualquer outra carga estaticamente equivalente aplicada ao corpo na mesma área.

4.2 DEFORMAÇÃO ELÁSTICA DE UM ELEMENTO COM CARREGAMENTO AXIAL

Usando a lei de Hooke e as definições de tensão e deformação, desenvolveremos uma equação para determinar a deformação elástica de um elemento submetido a cargas axiais. Para generalizar a demonstração, consideremos a barra mostrada na Figura 4.2*a*, barra essa cuja área varia *gradualmente* ao longo do comprimento L. A barra está submetida a cargas concentradas em suas extremidades e a uma carga externa variável distribuída ao longo de seu comprimento. Essa carga distribuída representa, por exemplo, o peso de uma barra vertical ou as forças de atrito que atuam na superfície da barra. Queremos calcular o ***deslocamento relativo*** δ (delta) de uma extremidade da barra em relação à outra extremidade provocado pelo carregamento. Na análise que se segue, desprezaremos as deformações localizadas que ocorrem nos pontos de carga concentrada e onde a seção transversal muda subitamente. Como observado na Seção 4.1, os efeitos ocorrem em regiões pequenas do comprimento da barra e, portanto, pouco influirão no resultado final. Em sua maior parte, a barra deforma-se uniformemente, de modo que a tensão normal distribui-se uniformemente pela seção transversal.

Usando o método das seções, um elemento infinitesimal de comprimento dx e área da seção transversal $A(x)$ é isolado da barra em uma posição arbitrária x. O diagrama de corpo livre desse elemento é mostrado na Figura 4.2*b*. A força axial interna resultante é representada por $P(x)$, uma vez que o carregamento externo faz com que ela varie ao longo do comprimento da barra. A carga $P(x)$ deformará o elemento para a forma indicada pelo contorno tracejado e, portanto, o deslocamento de uma extremidade do elemento em relação à outra será $d\delta$. A tensão e a deformação do elemento são:

$$\sigma = \frac{P(x)}{A(x)} \qquad \text{e} \qquad \epsilon = \frac{d\delta}{dx}$$

Desde que essas quantidades não excedam o limite de proporcionalidade, podemos relacioná-las usando a lei de Hooke. Ou seja:

$$\sigma = E\epsilon$$

$$\frac{P(x)}{A(x)} = E\left(\frac{d\delta}{dx}\right)$$

$$d\delta = \frac{P(x)\,dx}{A(x)\,E}$$

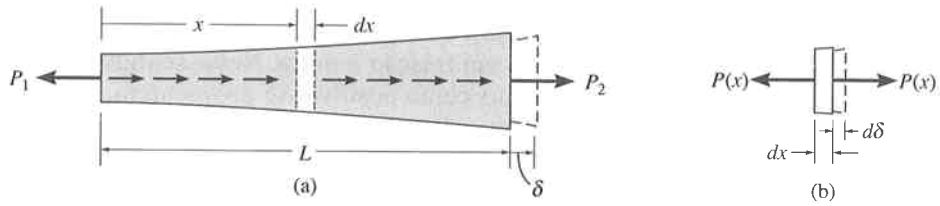


Figura 4.2

Devemos integrar essa expressão em todo o comprimento L da barra para encontrar o deslocamento requerido da extremidade, o que produz:

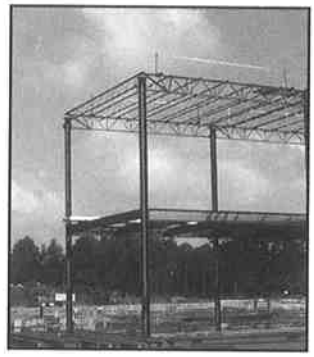
$$\delta = \int_0^L \frac{P(x)\,dx}{A(x)\,E} \tag{4.1}$$

onde:

δ = deslocamento de um ponto da barra em relação a outro
L = distância entre os pontos
$P(x)$ = força axial interna da seção, localizada a uma distância x de uma extremidade
$A(x)$ = área da seção transversal da barra expressa em função de x
E = módulo de elasticidade do material

Carga Constante e Área da Seção Transversal. Em muitos casos, a barra tem área da seção transversal constante A; o material será homogêneo, logo E é constante. Além disso, se uma força externa constante for aplicada em cada extremidade (Figura 4.3), então a força interna P ao longo de todo o comprimento da barra também será constante. Integrando-se a Equação 4.1, obtém-se:

$$\delta = \frac{PL}{AE} \tag{4.2}$$



O deslocamento vertical no topo dessas colunas depende da carga aplicada na cobertura e da laje acoplada ao seu ponto central.

Se a barra for submetida a diversas forças axiais diferentes ou, ainda, a área da seção transversal ou o módulo de elasticidade mudarem abruptamente de uma região para outra da barra, a equação anterior poderá ser aplicada a cada *segmento* da barra em que essas quantidades sejam todas *constantes*. O deslocamento de uma extremidade da barra em relação à outra é então determinado pela *adição algébrica* dos deslocamentos de cada segmento. Nesse caso:

$$\delta = \sum \frac{PL}{AE} \tag{4.3}$$

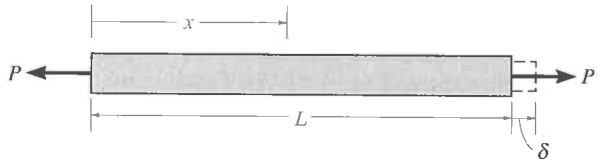
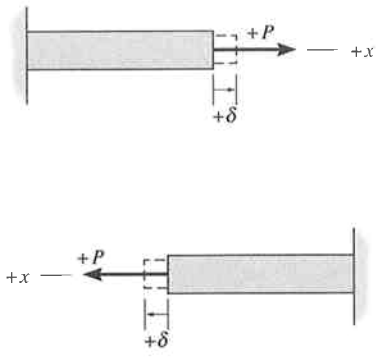


Figura 4.3



Convenção de sinal positivo para P e δ

Figura 4.4

Convenção de Sinais. A fim de aplicar a Equação 4.3, devemos estabelecer uma convenção de sinais para a força axial interna e para o deslocamento de uma extremidade da barra em relação à outra. Nesse sentido, consideraremos ambos, força e deslocamento, como positivos se provocarem, respectivamente, tração e alongamento (Figura 4.4); ao passo que força e deslocamento serão negativos se provocarem compressão e contração, respectivamente.

Como exemplo, consideremos a barra mostrada na Figura 4.5*a*. As *forças axiais internas* P são determinadas pelo método das seções para cada segmento (Figura 4.5*b*). Elas são $P_{AB} = +5$ kN, $P_{BC} = -3$ kN, $P_{CD} = -7$ kN. A variação da carga axial é mostrada no diagrama de força axial (ou normal) da barra (Figura 4.5*c*). Aplicando a Equação 4.3 para obter o deslocamento da extremidade A em relação à extremidade D, temos:

$$\delta_{A/D} = \sum \frac{PL}{AE} = \frac{(5\text{ kN})\,L_{AB}}{AE} + \frac{(-3\text{ kN})\,L_{BC}}{AE} + \frac{(-7\text{ kN})\,L_{CD}}{AE}$$

Se os outros dados forem substituídos e obtivermos uma resposta positiva, isso significará que a extremidade A afasta-se da extremidade D (a barra alonga), enquanto o resultado negativo indicará que a extremidade A move-se na direção da extremidade D (a barra encurta). A notação com duplo subscrito é usada para indicar tal deslocamento relativo ($\delta_{A/D}$); entretanto, se o deslocamento tiver de ser determinado em relação a um *ponto fixo*, então será usado apenas um subscrito simples. Por exemplo, se D estiver localizado em um apoio *fixo*, então o deslocamento calculado será denotado simplesmente por δ_A.

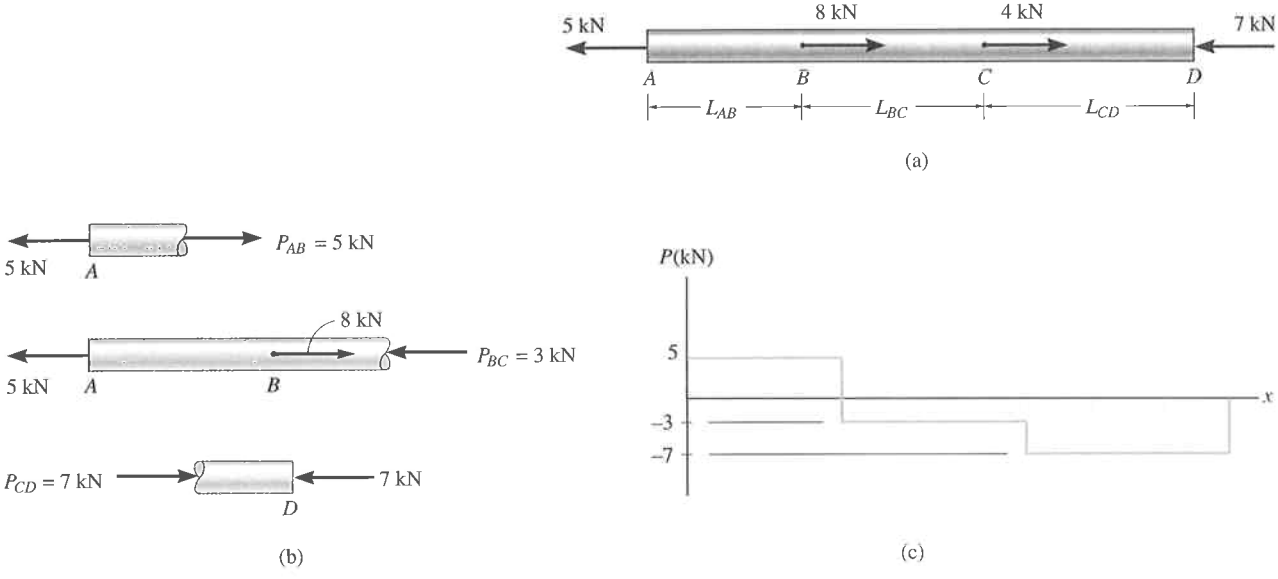


Figura 4.5

PONTOS IMPORTANTES

- O *princípio de Saint-Venant* estabelece que tanto a deformação como a tensão, que ocorrem nas regiões de aplicação de carga ou nos apoios, tendem a ajustar-se a uma distância suficientemente grande dessas regiões.
- O deslocamento de um elemento com carga axial é determinado relacionando-se a carga aplicada com a tensão por meio da expressão $\sigma = P/A$, e a deformação pela expressão $\epsilon = d\delta/dx$. Finalmente, as duas equações são combinadas pela lei de Hooke, $\sigma = E\epsilon$, o que resulta na Equação 4.1.
- Como a lei de Hooke é usada no desenvolvimento da equação de deslocamento, é importante que a carga não provoque escoamento do material e que esse material seja homogêneo e comporte-se de maneira linear-elástica.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

- O deslocamento relativo entre dois pontos A e B em um elemento com carga axial é determinado aplicando-se a Equação 4.1 (ou 4.2). A aplicação requer os passos seguintes.

Força Interna.

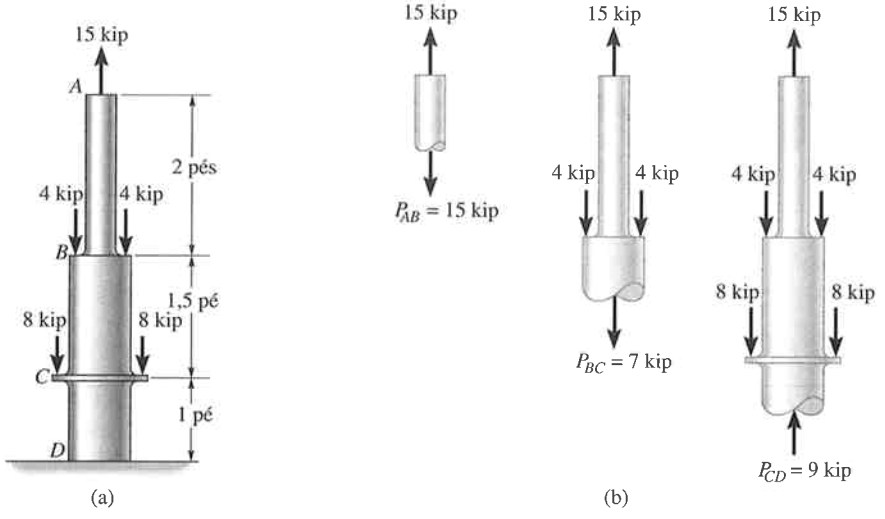
- Usar o método das seções para determinar a força axial interna P no elemento.
- Se a força variar ao longo do comprimento do elemento, o corte será feito em uma localização arbitrária, distante x de uma das extremidades do elemento, e a força expressa em função de x, ou seja, $P(x)$.
- Se várias *forças externas constantes* atuam sobre o elemento, a força interna em cada *segmento* do elemento, entre quaisquer duas forças externas, deve então ser determinada.
- Em qualquer segmento, uma *força de tração* interna é *positiva* e uma *força de compressão* interna é *negativa*. Por conveniência, os resultados do carregamento interno são mostrados graficamente construindo-se o diagrama de força normal.

Deslocamento.

- Quando a área da seção transversal do elemento *varia* ao longo de seu eixo, deve ser expressa em função de sua localização x, isto é, $A(x)$.
- Se a área da seção transversal, o módulo de elasticidade ou a carga interna *mudam subitamente*, a Equação 4.2 deve ser aplicada a cada segmento nos quais essas grandezas sejam constantes.
- Ao substituir os dados nas equações 4.1 a 4.3, certifique-se de usar o sinal adequado de P; cargas de tração são positivas, e cargas de compressão são negativas. Use também um conjunto de unidades consistente. Em qualquer segmento, se o resultado calculado for uma quantidade numérica *positiva*, isso indica *alongamento*; se for negativa, indica *contração*.

EXEMPLO 4.1

A barra composta de aço A-36 mostrada na Figura 4.6*a* está composta por dois segmentos, AB e BD, com áreas da seção transversal $A_{AB} = 1$ pol^2 e $A_{BD} = 2$ pol^2. Determinar o deslocamento vertical da extremidade A e o deslocamento de B em relação a C.



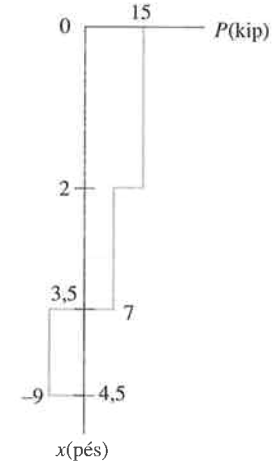


Figura 4.6

SOLUÇÃO

Força Interna. Devido à aplicação das cargas externas, as *forças axiais internas* nas regiões AB, BC e CD serão *diferentes*. As forças são obtidas aplicando-se o método das seções e a equação de equilíbrio da força vertical, como mostrado na Figura 4.6*b*. Essa variação é mostrada graficamente na Figura 4.6*c*.

Deslocamento. Pela tabela de propriedades no final do livro, $E_{aço} = 29(10^3)$ ksi. Pela convenção de sinais — isto é, as forças de tração internas são positivas e as de compressão negativas —, o deslocamento vertical de A em relação ao apoio *fixo* D é:

$$\delta_A = \sum \frac{PL}{AE} = \frac{[+15 \text{ kip}](2 \text{ pés})(12 \text{ pol/pé})}{(1 \text{ pol}^2)[29(10^3) \text{ kip/pol}^2]} + \frac{[+7 \text{ kip}](1{,}5 \text{ pé})(12 \text{ pol/pé})}{(2 \text{ pol}^2)[29(10^3) \text{ kip/pol}^2]}$$

$$+ \frac{[-9 \text{ kip}](1 \text{ pé})(12 \text{ pol/pé})}{(2 \text{ pol}^2)[29(10^3) \text{ kip/pol}^2]}$$

$$= +0{,}0127 \text{ pol} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Sendo o resultado *positivo*, a barra *alonga-se* e, assim, o deslocamento de A é para cima.

Aplicando-se a Equação 4.2 entre B e C, obtemos:

$$\delta_{B/C} = \frac{P_{BC}L_{BC}}{A_{BC}E} = \frac{[+7 \text{ kip}](1{,}5 \text{ pé})(12 \text{ pol/pé})}{(2 \text{ pol}^2)[29(10^3) \text{ kip/pol}^2]} = +0{,}00217 \text{ pol} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Nesse caso, B afasta-se de C, uma vez que o segmento alonga-se.

EXEMPLO 4.2

O conjunto mostrado na Figura 4.7*a* consiste de um tubo de alumínio AB com área da seção transversal de 400 mm^2. Uma haste de aço de 10 mm de diâmetro está acoplada a um colar rígido que passa através do tubo. Se for aplicada uma carga de tração de 80 kN à haste, qual será o deslocamento da extremidade C? Supor que $E_{aço} = 200$ GPa, $E_{al} = 70$ GPa.

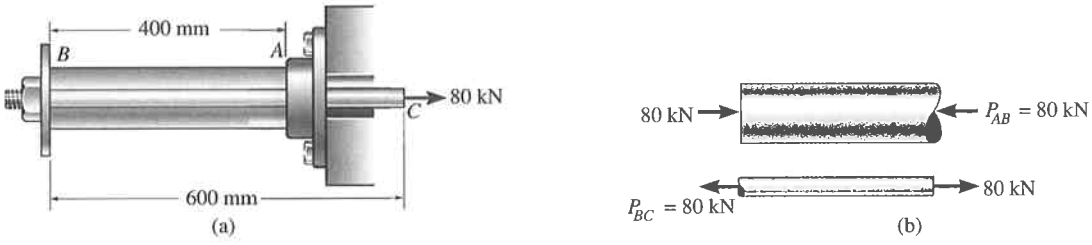


Figura 4.7

SOLUÇÃO

Força Interna. O diagrama de corpo livre do tubo e da haste (Figura 4.7*b*) mostra que a haste está sujeita a uma tração de 80 kN e o tubo está sujeito a uma compressão de 80 kN.

Deslocamento. Vamos primeiro determinar o deslocamento da extremidade C em relação à extremidade B. Trabalhando com unidades em newtons e metros, temos:

$$\delta_{C/B} = \frac{PL}{AE} = \frac{[+80(10^3) \text{ N}](0{,}6 \text{ m})}{\pi(0{,}005 \text{ m})^2[200(10^9) \text{ N/m}^2]} = +0{,}003056 \text{ m} \rightarrow$$

O sinal positivo indica que a extremidade C move-se *para a direita* em relação à extremidade B, visto que a barra se alonga.

O deslocamento da extremidade B em relação à extremidade *fixa* A é:

$$\delta_B = \frac{PL}{AE} = \frac{[-80(10^3)\text{ N}](0{,}4\text{ m})}{[400\text{ mm}^2(10^{-6})\text{ m}^2/\text{mm}^2][70(10^9)\text{ N/m}^2]}$$

$$= -0{,}001143\text{ m} = 0{,}001143\text{ m} \rightarrow$$

Nesse caso, o sinal negativo indica que o tubo se encurta e, assim, B move-se para a *direita* em relação a A.

Como ambos os deslocamentos são para a direita, o deslocamento resultante de C em relação à extremidade *fixa* A é, pois,

$$(\stackrel{+}{\rightarrow}) \qquad \delta_C = \delta_B + \delta_{C/B} = 0{,}001143\text{ m} + 0{,}003056\text{ m}$$

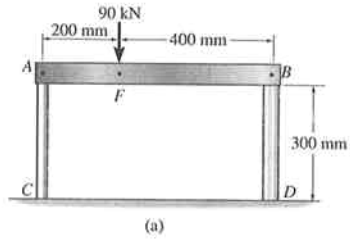
$$= 0{,}00420\text{ m} = 4{,}20\text{ mm} \rightarrow \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

EXEMPLO 4.3

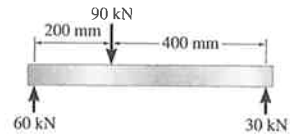
Uma *viga rígida* AB apóia-se sobre dois postes curtos como mostrado na Figura 4.8*a*. AC é feito de aço e tem diâmetro de 20 mm; BD é feito de alumínio e tem diâmetro de 40 mm. Determinar o deslocamento do ponto F em AB se for aplicada uma carga vertical de 90 kN nesse ponto. Admitir $E_{aço} = 200$ GPa, $E_{al} = 70$ GPa.

SOLUÇÃO

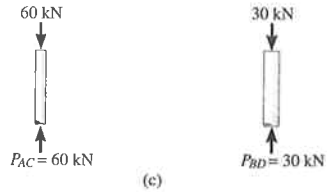
Força Interna. As forças de compressão que atuam sobre o topo de cada poste são determinadas pelo equilíbrio do elemento AB (Figura 4.8*b*). Essas forças são iguais às forças internas em cada poste (Figura 4.8*c*).



(a)



(b)



(c)

Deslocamento. O deslocamento no topo de cada poste é:

Poste AC:

$$\delta_A = \frac{P_{AC}L_{AC}}{A_{AC}E_{aço}} = \frac{[-60(10^3)\text{ N}](0{,}300\text{ m})}{\pi(0{,}010\text{ m})^2[200(10^9)\text{ N/m}^2]} = -286(10^{-6})\text{ m}$$

$$= 0{,}286\text{ mm} \downarrow$$

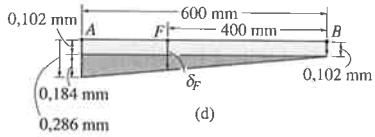
Poste BD:

$$\delta_B = \frac{P_{BD}L_{BD}}{A_{BD}E_{al}} = \frac{[-30(10^3)\text{ N}](0{,}300\text{ m})}{\pi(0{,}020\text{ m})^2[70(10^9)\text{ N/m}^2]} = -102(10^{-6})\text{ m}$$

$$= 0{,}102\text{ mm} \downarrow$$

O diagrama que indica os deslocamentos da linha de centro nos pontos A, B e F é mostrado na Figura 4.8*d*. Pela proporção do triângulo sombreado, o deslocamento do ponto F é, portanto:

$$\delta_F = 0{,}102\text{ mm} + (0{,}184\text{ mm})\left(\frac{400\text{ mm}}{600\text{ mm}}\right) = 0{,}225\text{ mm} \downarrow \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

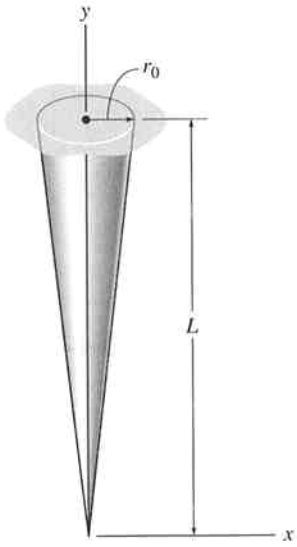


(d)

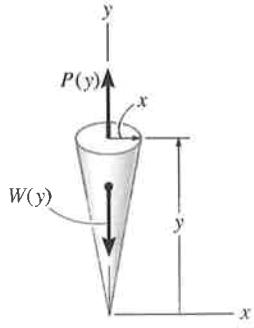
Figura 4.8

EXEMPLO 4.4

Um elemento é feito de um material com peso específico γ e módulo de elasticidade E. Supondo que ele tenha formato de *cone* e as dimensões mostradas na Figura 4.9*a*, determinar a distância que sua extremidade é deslocada devido à gravidade quando ele está suspenso na posição vertical.



(a)



(b)

Figura 4.9

SOLUÇÃO

Força Interna. A força axial interna varia ao longo do elemento, visto que depende do peso $W(y)$ de um segmento do elemento abaixo de qualquer seção (Figura 4.9*b*). Então, para calcular o deslocamento devemos usar a Equação 4.1. Na seção localizada a uma distância y da extremidade inferior, o raio x, em função de y, é determinado por proporção. Isto é:

$$\frac{x}{y} = \frac{r_0}{L}; \qquad x = \frac{r_0}{L}y$$

O volume de um cone com raio da base x e altura y é:

$$V = \frac{\pi}{3}yx^2 = \frac{\pi r_0^2}{3L^2}y^3$$

Como $W = \gamma V$, a força interna na seção torna-se:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad P(y) = \frac{\gamma \pi r_0^2}{3L^2}y^3$$

Deslocamento. A área da seção transversal também é função de y (Figura 4.9*b*). Logo,

$$A(y) = \pi x^2 = \frac{\pi r_0^2}{L^2}y^2$$

Aplicando a Equação 4.1 entre os limites $y = 0$ e $y = L$, temos:

$$\delta = \int_0^L \frac{P(y)\,dy}{A(y)\,E} = \int_0^L \frac{[(\gamma \pi r_0^2/3L^2)\,y^3]\,dy}{[(\pi r_0^2/L^2)\,y^2]\,E}$$

$$= \frac{\gamma}{3E}\int_0^L y\,dy$$

$$= \frac{\gamma L^2}{6E}$$ ***Resposta***

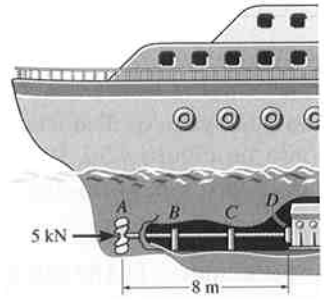
Como verificação parcial desse resultado, observar de que maneira as unidades dos termos, quando canceladas, produzem o deslocamento em unidades de comprimento conforme esperado.

PROBLEMAS

As informações sobre propriedades mecânicas dos materiais estão no final do livro.

Lembrando: 1 kip = 1.000 lb e 1 ksi = 1.000 lb/pol².

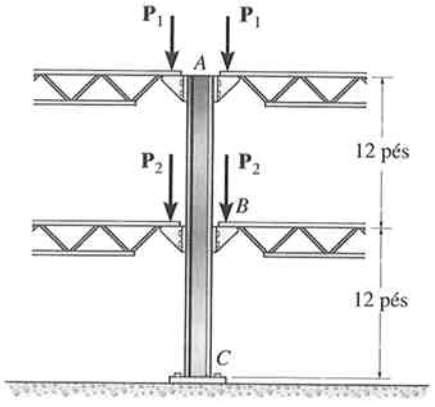
4.1. O navio é impulsionado pelo eixo da hélice, feito de aço A-36 e com 8 m de comprimento, medidos da hélice ao mancal de encosto D do motor. Se esse eixo tiver diâmetro externo de 400 mm e espessura da parede de 50 mm, qual será sua contração axial quando a hélice exercer uma força de 5 kN sobre ele? Os apoios B e C são mancais.



Problema 4.1

4.2. Uma coluna de aço A-36 é usada para apoiar as cargas simétricas de dois pisos de um edifício. Determinar o deslocamento vertical de seu topo A se $P_1 = 40$ kip, $P_2 = 62$ kip e a coluna tem área da seção transversal de 23,4 pol^2.

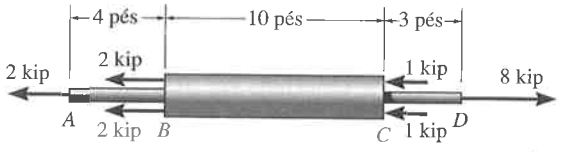
4.3. Uma coluna de aço A-36 é usada para apoiar as cargas simétricas de dois pisos de um edifício. Determinar as cargas P_1 e P_2 se A move-se 0,12 pol para baixo e B move-se 0,09 pol para baixo quando as cargas são aplicadas. A coluna tem área da seção transversal de 23,4 pol^2.



Problemas 4.2/4.3

***4.4.** O eixo de bronze C86100 está submetido às cargas axiais mostradas. Determinar o deslocamento da extremidade A em relação à extremidade D se os diâmetros de cada segmento são $d_{AB} = 0{,}75$ pol, $d_{BC} = 2$ pol e $d_{CD} = 0{,}5$ pol.

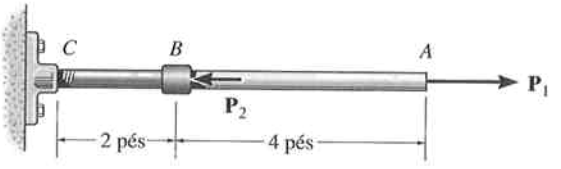
4.5. Determinar o deslocamento da extremidade A em relação à extremidade C do eixo no Problema 4.4.



Problemas 4.4/4.5

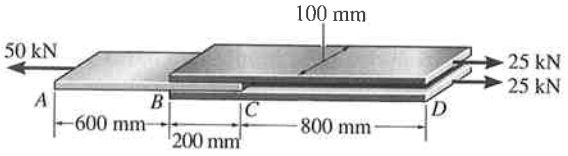
4.6. O conjunto consiste de uma haste CB de aço A-36 e de uma haste BA de alumínio 6061-T6, cada uma com diâmetro de 1 pol. Se a haste está sujeita a uma carga axial $P_1 = 12$ kip em A e $P_2 = 18$ kip na conexão B, determinar o deslocamento da conexão B e da extremidade A. O comprimento de cada segmento sem alongamento é mostrado na figura. Desprezar o tamanho das conexões em B e C e supor que sejam rígidas.

4.7. O conjunto consiste de uma haste CB de aço A-36 e de uma haste BA de alumínio 6061-T6, cada uma com diâmetro de 1 pol. Determinar as cargas aplicadas P_1 e P_2 se A desloca-se 0,08 pol para a direita e B desloca-se 0,02 pol para a esquerda quando as cargas são aplicadas. O comprimento de cada segmento sem alongamento é mostrado na figura. Desprezar o tamanho das conexões em B e C e supor que sejam rígidas.



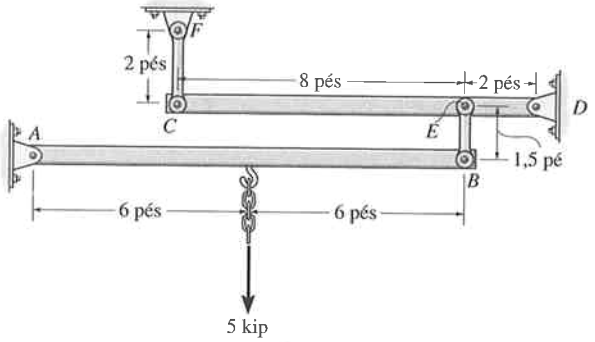
Problemas 4.6/4.7

***4.8.** A junta é feita de três chapas de aço A-36 ligadas pelas suas costuras. Determinar o deslocamento da extremidade A em relação à extremidade D quando a junta é submetida às cargas axiais mostradas. Cada chapa tem espessura de 6 mm.



Problema 4.8

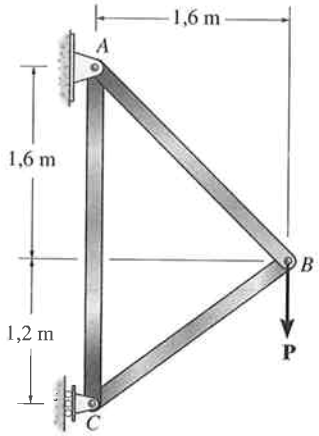
4.9. O conjunto consiste de duas barras rígidas inicialmente horizontais. Elas são apoiadas por pinos e pelas hastes de aço A-36 FC e EB, cada uma com 0,25 pol de diâmetro. Se for aplicada uma carga vertical de 5 kip na barra inferior AB, determinar o deslocamento em C, B e E.



Problema 4.9

4.10. A treliça é feita de três elementos de aço A-36 com 400 mm^2 de área da seção transversal. Determinar o deslocamento vertical do rolete em C quando a treliça é submetida à carga $P = 10$ kN.

4.11. A treliça é feita de três elementos de aço A-36 com 400 mm^2 de área da seção transversal. Determinar a carga P requerida para deslocar o rolete 0,2 mm para baixo.

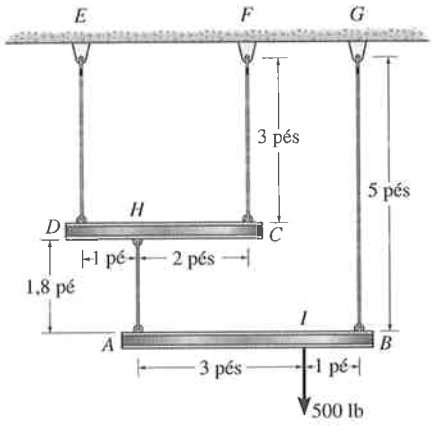


Problemas 4.10/4.11

***4.12.** A carga é suportada pelos quatro arames de aço inoxidável 304 acoplados aos elementos rígidos AB e DC. Determinar o deslocamento vertical provocado pela aplicação da carga de 500 lb se os elementos estavam inicialmente

na horizontal. A área da seção transversal de cada arame tem 0,025 pol^2.

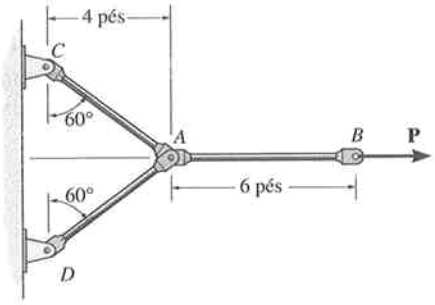
4.13. A carga é suportada pelos quatro arames de aço inoxidável 304 acoplados aos elementos rígidos AB e DC. Determinar o ângulo de inclinação de cada elemento depois de aplicada a carga de 500 lb. Inicialmente os elementos estavam na horizontal, e cada arame tem 0,025 pol^2 de área na seção transversal.



Problemas 4.12/4.13

4.14. O sistema articulado é feito com três elementos de aço inoxidável 304, com 0,75 pol^2 de área na seção transversal, acoplados por pinos. Supondo que seja aplicada uma força horizontal $P = 6$ kip na extremidade B do membro AB, determinar o deslocamento horizontal do ponto B.

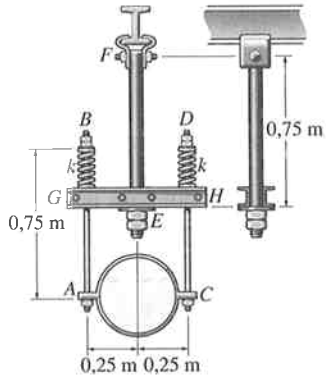
4.15. O sistema articulado é feito com três elementos de aço inoxidável 304, com 0,75 pol^2 de área na seção transversal, acoplados por pinos. Determinar a grandeza da força **P** necessária para deslocar o ponto B 0,08 pol para a direita.



Problemas 4.14/4.15

***4.16.** O suporte de tubo, apoiado por molas, consiste em duas molas, inicialmente sem estiramento e com rigidez k = 60 kN/m; três hastes de aço inoxidável 304, AB e CD, com diâmetro de 5 mm, e EF, com diâmetro de 12 mm; e uma viga rígida GH. Supondo que o tubo e o fluido que transporta tenham peso total de 4 kN, determinar o deslocamento do tubo quando acoplado ao suporte.

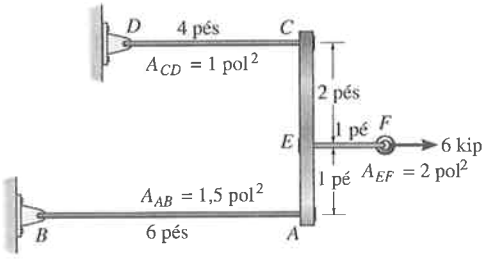
4.17. O suporte de tubo, apoiado por molas, consiste em duas molas, inicialmente sem estiramento e com rigidez k = 60 kN/m; três hastes de aço inoxidável 304, AB e CD, com diâmetro de 5 mm, e EF, com diâmetro de 12 mm; e uma viga rígida GH. Supondo que o tubo se desloque 82 mm quando cheio de fluido, determinar o peso do fluido.



Problemas 4.16/4.17

4.18. O conjunto consiste em três hastes de titânio (Ti-6A1-4V) e uma barra rígida AC. A área da seção transversal de cada haste é dada na figura. Se for aplicada uma força de 6 kip no anel, qual será o deslocamento horizontal do ponto F?

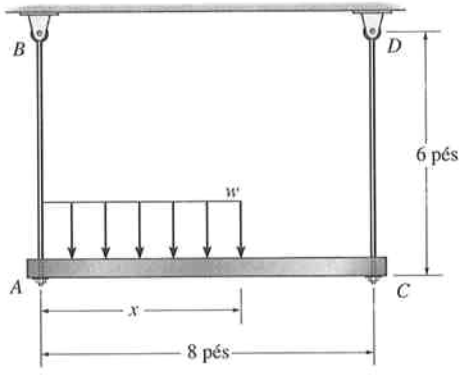
4.19. O conjunto consiste de três hastes de titânio (Ti-6A1-4V) e uma barra rígida AC. A área da seção transversal de cada haste é dada na figura. Se for aplicada uma força de 6 kip no anel F, qual será o ângulo de inclinação da barra AC, em radianos?



Problemas 4.18/4.19

***4.20.** A viga rígida é suportada em suas extremidades por dois tirantes de aço A-36. Supondo que a tensão admissível para o aço seja σ_{adm} = 16,2 ksi, a carga $w = 3$ kip/pé e $x = 4$ pés, determinar o diâmetro de cada tirante de modo que a viga permaneça na posição horizontal quando estiver com carga.

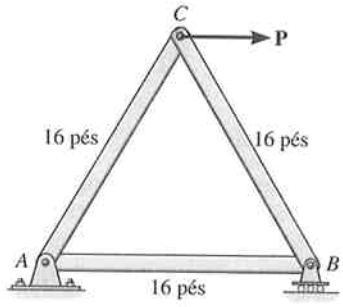
4.21. A viga rígida é suportada em suas extremidades por dois tirantes de aço A-36. Os tirantes têm diâmetros d_{AB} = 0,5 pol e d_{CD} = 0,3 pol. Supondo que a tensão admissível para o aço seja σ_{adm} = 16,2 ksi, determinar a intensidade da carga distribuída w e seu comprimento x na viga, de modo que a viga permaneça na posição horizontal quando estiver com carga.



Problemas 4.20/4.21

4.22. A treliça consiste de três elementos feitos de aço A-36 com área da seção transversal de 0,75 pol^2. Determinar a maior carga P que pode ser aplicada de modo que o apoio de rolete B não se desloque mais do que 0,03 pol.

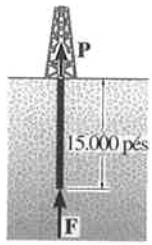
4.23. Resolver o Problema 4.22 quando a carga **P** atua em C verticalmente para baixo.



Problemas 4.22/4.23

***4.24.** Os segmentos de tubos e conexões usados na perfuração de um poço de petróleo com 15.000 pés de profundidade são feitos de aço A-36, que pesa 20 lb/pé. Têm diâmetro externo de 5,50 pol e diâmetro interno de 4,75 pol. A fim de evitar que o tubo sofra flambagem devido ao próprio peso, ele é parcialmente apoiado em seu topo pelo guindaste da perfuratriz. Supondo que a força seja P = 299 kip, determinar a força **F** do solo sobre o tubo e o alongamento do tubo para essa condição.

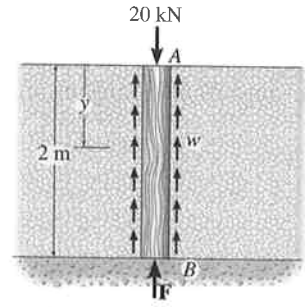
4.25. Os segmentos de tubos e conexões usados na perfuração de um poço de petróleo com 15.000 pés de profundidade são feitos de aço A-36, que pesa 20 lb/pé. Têm diâmetro externo de 5,50 pol e diâmetro interno de 4,75 pol. Determinar a força **P** necessária para retirar o tubo, excluindo o atrito ao longo de seus lados e requerendo $F = 0$. Qual é o alongamento do tubo quando ele começa a ser levantado?



Problemas 4.24/4.25

4.26. O poste é feito de abeto Douglas e tem diâmetro de 60 mm. Supondo que seja submetido a uma carga de 20 kN e o solo ofereça resistência ao atrito de w = 4 kN/m, uniformemente distribuída ao longo de seus lados, determinar a força **F** em sua parte inferior necessária ao equilíbrio. Qual é o deslocamento do topo do poste A em relação à sua parte inferior B? Desprezar o peso do poste.

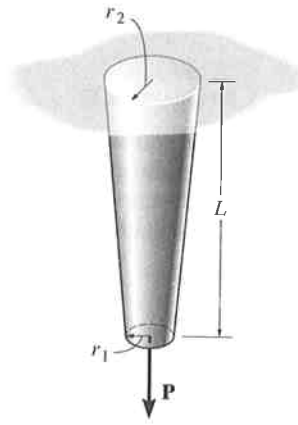
4.27. O poste é feito de abeto Douglas e tem diâmetro de 60 mm. Supondo que seja submetido a uma carga de 20 kN e o solo ofereça resistência ao atrito distribuída ao longo de seu comprimento, a qual varie linearmente de w = 0 em $y = 0$ a w = 3 kN/m em y = 2 m, determinar a força **F** em sua parte inferior necessária para o equilíbrio. Qual é o deslocamento do topo do poste A em relação à sua parte inferior B? Desprezar o peso do poste.



Problemas 4.26/4.27

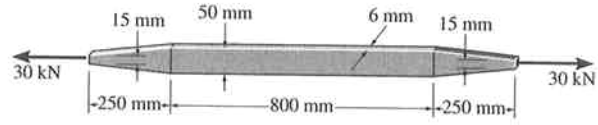
***4.28.** A haste é ligeiramente cônica e tem comprimento L. Está suspensa do teto e suporta uma carga **P** em sua extremidade. Mostrar que o deslocamento de sua extremidade devido a essa carga é $\delta = PL/(\pi E r_2 r_1)$. Desprezar o peso do material. O módulo de elasticidade é E.

4.29. Resolver o Problema 4.28 incluindo o peso do material, considerando que seu peso específico seja γ (peso/volume).



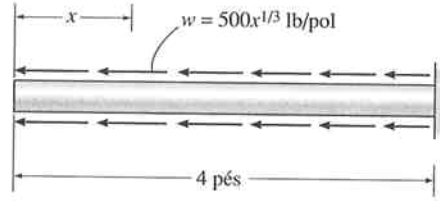
Problemas 4.28/4.29

4.30. Determinar o alongamento da tira de alumínio quando submetida a uma força axial de 30 kN. E_{al} = 70 GPa.



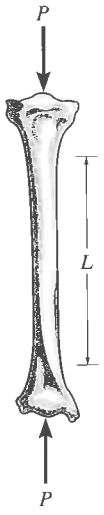
Problema 4.30

4.31. A barra tem área da seção transversal A = 3 pol^2 e E = 35(10^3) ksi. Determinar o deslocamento da extremidade quando a barra está submetida a uma carga distribuída.



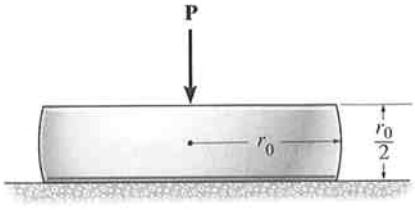
Problema 4.31

***4.32.** O material do osso tem um diagrama tensão-deformação definido pela relação $\sigma = kE[\epsilon/(1 + E\epsilon)]$, onde k e E são constantes. Determinar a compressão do comprimento L do osso, supondo que a área da seção transversal A seja constante.



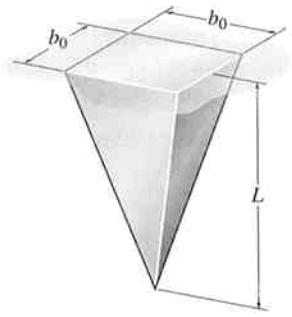
Problema 4.32

4.33. O apoio é feito cortando-se os dois lados opostos de uma esfera com raio r_0. Supondo que a altura inicial do apoio seja $r_0/2$, determinar quanto ele encurta quando suporta a carga **P**. O módulo de elasticidade é E.



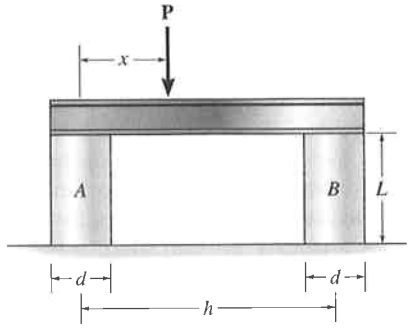
Problema 4.33

4.34. O fundido é feito de um material com peso específico γ e módulo de elasticidade E. Supondo que tenha a forma de pirâmide com as dimensões mostradas, determinar quanto sua extremidade é deslocada devido à gravidade quando a peça é suspensa na posição vertical.



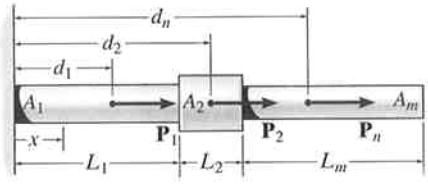
Problema 4.34

4.35. Dois postes apóiam a viga rígida, cada um tendo largura d, espessura d e comprimento L. Supondo que o módulo de elasticidade do material A seja E_A e do material B seja E_B, determinar a distância x para aplicar a força **P** de modo que a viga permaneça horizontal.



Problema 4.35

***4.36.** Consideremos o problema geral de uma barra feita de m segmentos, cada um com área da seção transversal A_m e comprimento L_m. Supondo que haja n cargas na barra como mostrado, escrever um programa de computador que possa ser usado para determinar o deslocamento da barra em qualquer localização específica x. Mostrar uma aplicação do programa usando os valores $L_1 = 4$ pés, $d_1 = 2$ pés, $P_1 = 400$ lb, $A_1 = 3$ pol^2, $L_2 = 2$ pés, $d_2 = 6$ pés, $P_2 = -300$ lb, $A_2 = 1$ pol^2.



Problema 4.36

4.3 PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO

O princípio da superposição é geralmente usado para determinar a tensão ou o deslocamento em determinado ponto do elemento quando este está sujeito a carregamento complexo. Ao subdividir a carga em componentes, o ***princípio da superposição*** afirma que, para se determinar a tensão ou o deslocamento resultante no ponto, é preciso encontrar primeiro a tensão ou o deslocamento pro-

vocados pela carga do componente individual que atua *separadamente* sobre o elemento. A tensão ou o deslocamento resultante são, então, determinados somando-se algebricamente as contribuições provocadas pelos componentes individuais.

As duas condições seguintes devem ser válidas para que o princípio da superposição seja aplicado.

1. ***A carga deve ser linearmente relacionada à tensão ou ao deslocamento a determinar.*** Por exemplo, as equações $\sigma = P/A$ e $\delta = PL/AE$ envolvem relações lineares entre P e σ ou δ.

2. ***A carga não deve mudar significativamente a geometria ou a configuração original do elemento.*** Se ocorrerem mudanças significativas, a direção e a localização das forças aplicadas e seus braços de momento mudarão e, conseqüentemente, a aplicação das equações de equilíbrio terá resultados diferentes. Como exemplo, consideremos a barra fina mostrada na Figura 4.10*a*, sujeita à carga P. Na Figura 4.10*b*, $\mathbf{P}$ é substituída por dois de seus componentes: $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$. Se $\mathbf{P}$ provocar deflexão muito grande na haste, como mostrado, o momento da carga, Pd, em torno de seu apoio *não* será igual à soma dos momentos de suas cargas componentes: $Pd \neq P_1d_1 + P_2d_2$, porque $d_1 \neq d_2 \neq d$.

A maioria das equações que envolvem carga, tensão e deslocamento neste texto consiste em relações lineares entre essas grandezas. Além disso, os elementos ou corpos a serem considerados são tais que a carga produz deformações muito pequenas, a ponto de a mudança na posição e na direção da carga ser insignificante e poder ser desprezada. Uma exceção a essa regra será, no entanto, discutida no Capítulo 13. Consiste em uma coluna que suporta uma carga axial equivalente à carga crítica ou de flambagem. Será mostrado que, quando tal carga aumenta apenas levemente, provoca grandes deflexões laterais na coluna, mesmo que o material permaneça linear-elástico. Essas deflexões, associadas a componentes de qualquer carga axial, *não podem* se sobrepor.

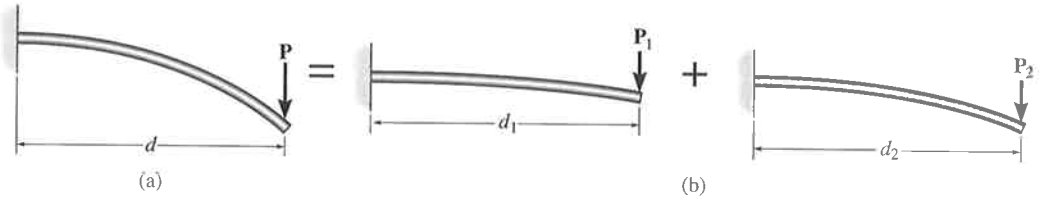


Figura 4.10

4.4 MEMBRO COM CARGA AXIAL ESTATICAMENTE INDETERMINADO

Quando uma barra fixada em uma só extremidade é submetida a uma carga axial, a equação de equilíbrio da força aplicada ao longo do eixo da barra é *suficiente* para encontrar a reação do apoio fixo. Um problema como esse, em que as reações podem ser determinadas estritamente pela equação de equilíbrio, é denominado *estaticamente determinado*. Se a barra, porém, estiver fixa em *ambas as extremidades*, como na Figura 4.11*a*, então ocorrem duas reações axiais desconhecidas (Figura 4.11*b*) e a equação de equilíbrio da força torna-se:

$$+\uparrow \Sigma F = 0; \qquad F_B + F_A - P = 0$$

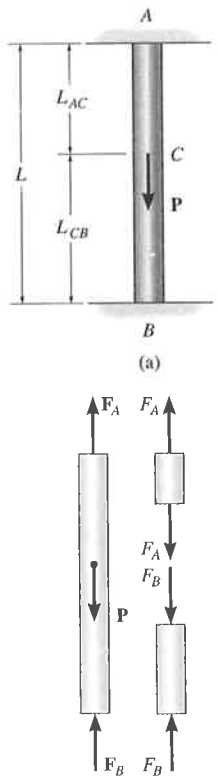


Figura 4.11

Nesse caso, a barra é dita ***estaticamente indeterminada***, visto que as equações de equilíbrio não são suficientes para determinar as reações.

A fim de estabelecer uma equação adicional necessária para a solução, é preciso considerar a geometria da deformação. Explicitamente, uma equação que especifique as condições do deslocamento é denominada ***condição de compatibilidade*** ou ***cinemática***. Uma condição de compatibilidade adequada requer que o deslocamento relativo de uma extremidade da barra em relação à outra extremidade seja nulo, uma vez que os apoios das extremidades são fixos. Podemos, então, escrever:

$$\delta_{A/B} = 0$$

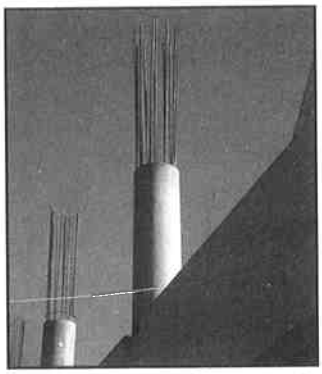
Essa equação pode ser expressa em termos das cargas aplicadas usando-se a *relação carga-deslocamento*, que depende do comportamento do material. Por exemplo, se ocorrer comportamento linear-elástico, pode ser usado $\delta = PL/AE$. Compreendendo que a força interna no segmento AC é $+F_A$ e no segmento CB é $-F_B$ (Figura 4.11*c*), a equação de compatibilidade é escrita como:

$$\frac{F_A L_{AC}}{AE} - \frac{F_B L_{CB}}{AE} = 0$$

Supondo que AE seja constante, podemos resolver as reações pelas duas equações anteriores, o que dá:

$$F_A = P\left(\frac{L_{CB}}{L}\right) \quad \text{e} \quad F_B = P\left(\frac{L_{AC}}{L}\right)$$

Ambos os resultados são positivos; assim, as reações estão mostradas corretamente no diagrama de corpo livre.



A maioria das colunas de concreto é reforçada com barras de aço; como esses dois materiais trabalham juntos para suportar a carga aplicada, a coluna torna-se estaticamente indeterminada.

PONTOS IMPORTANTES

- O *princípio da superposição* é usado para simplificar problemas de tensão e deslocamento com carregamento complexo. A aplicação consiste em subdividir a carga em componentes e somar algebricamente os resultados.
- A superposição requer que a carga esteja relacionada linearmente à tensão e ao deslocamento e que não mude significativamente a geometria original do elemento.
- Um membro é *estaticamente indeterminado* se as equações de equilíbrio não forem suficientes para determinar as reações sobre ele.
- As *condições de compatibilidade* especificam as restrições que ocorrem nos apoios ou outros pontos do membro.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

- As forças desconhecidas dos problemas estaticamente indeterminados são calculadas satisfazendo-se os requisitos de equilíbrio, compatibilidade e força-deslocamento do membro.

Equilíbrio.

- Desenhar o diagrama de corpo livre do elemento a fim de identificar todas as forças que atuam sobre ele.
- O problema é classificado como estaticamente indeterminado se o número de reações desconhecidas no diagrama de corpo livre for maior que o número de equações de equilíbrio disponíveis.
- Escrever as equações de equilíbrio do membro.

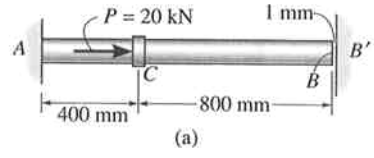
(Continuação)

Compatibilidade.

- Para estabelecer as equações de compatibilidade, desenhar o diagrama de deslocamento a fim de investigar a maneira como o elemento alonga-se ou contrai-se quando submetido a cargas externas.
- Expressar as condições de compatibilidade em termos do deslocamento provocado pelas forças.
- Usar uma relação carga-deslocamento, tal como $\delta = PL/AE$, para relacionar os deslocamentos desconhecidos com as reações desconhecidas.
- Resolver as equações de equilíbrio e compatibilidade para as forças de reação desconhecidas. Se qualquer das grandezas tiver valor numérico negativo, isso indica que tal força atua na direção oposta ao sentido apontado no diagrama de corpo livre.

EXEMPLO 4.5

A haste de aço mostrada na Figura 4.12*a* tem diâmetro de 5 mm. É presa à parede fixa em A e, antes de ser carregada, mantém uma folga de 1 mm em relação à parede B'. Determinar as reações em A e B' se a haste for submetida a uma força axial $P = 20$ kN como mostrado. Desprezar o tamanho do colar C e supor que $E_{aço} = 200$ GPa.



(a)

SOLUÇÃO

Equilíbrio. Como mostrado no diagrama de corpo livre (Figura 4.12*b*), admitiremos que a força P seja suficientemente grande para provocar o contato da extremidade B da haste com a parede B'. O problema é estaticamente indeterminado porque há duas incógnitas e apenas uma equação de equilíbrio.

O equilíbrio da haste requer que:

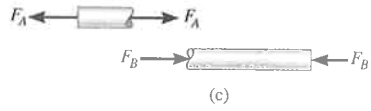
(b)

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \qquad -F_A - F_B + 20(10^3)\ \text{N} = 0 \qquad (1)$$

Compatibilidade. A carga provoca o movimento do ponto B para B', sem deslocamento adicional. Portanto, a condição de compatibilidade da haste é:

$$\delta_{B/A} = 0{,}001\ \text{m}$$

O deslocamento é expresso em termos das reações desconhecidas usando-se a relação carga-deslocamento (Equação 4.2), aplicada aos segmentos AC e CB (Figura 4.12*c*). Trabalhando com unidades em newtons e metros, temos:



(c)

Figura 4.12

$$\delta_{B/A} = 0{,}001\ \text{m} = \frac{F_A L_{AC}}{AE} - \frac{F_B L_{CB}}{AE}$$

$$0{,}001\ \text{m} = \frac{F_A(0{,}4\ \text{m})}{\pi(0{,}0025\ \text{m})^2[200(10^9)\ \text{N/m}^2]} - \frac{F_B(0{,}8\ \text{m})}{\pi(0{,}0025\ \text{m})^2[200(10^9)\ \text{N/m}^2]}$$

ou:

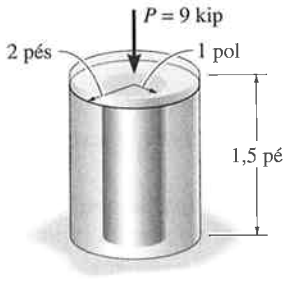
$$F_A(0{,}4\ \text{m}) - F_B(0{,}8\ \text{m}) = 3.927{,}0\ \text{N} \cdot \text{m} \qquad (2)$$

Resolvendo as equações 1 e 2, temos:

$$F_A = 16{,}6\ \text{kN} \qquad F_B = 3{,}39\ \text{kN} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

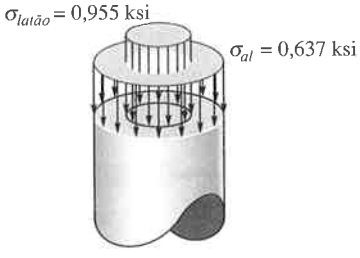
Como a resposta de F_B é *positiva*, a extremidade B toca a parede B', como suposto inicialmente. Por outro lado, se F_B fosse uma quantidade negativa, o problema seria estaticamente determinado, de modo que $F_B = 0$ e $F_A = 20$ kN.

EXEMPLO 4.6



(a)

(b)



(c)

Figura 4.13

O poste de alumínio mostrado na Figura 4.13*a* é reforçado com um núcleo de latão. Supondo que o conjunto suporte uma carga resultante axial de compressão $P = 9$ kip, aplicada na tampa rígida, determinar a tensão normal média no alumínio e no latão. Supor, também, que $E_{al} = 10(10^3)$ ksi e $E_{latão} = 15(10^3)$ ksi.

SOLUÇÃO

Equilíbrio. O diagrama de corpo livre do poste é mostrado na Figura 4.13*b*. Nesse caso, a força axial resultante na base é representada pelos componentes desconhecidos suportados pelo alumínio, $\mathbf{F}_{al}$, e pelo latão, $\mathbf{F}_{latão}$. O problema é estaticamente indeterminado. Por quê?

O equilíbrio da força vertical requer que:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad -9 \text{ kip} + F_{al} + F_{latão} = 0 \tag{1}$$

Compatibilidade. A tampa rígida no topo faz com que ambos, alumínio e latão, desloquem-se pela mesma distância. Portanto,

$$\delta_{al} = \delta_{latão}$$

Usando as relações carga-deslocamento,

$$\frac{F_{al}L}{A_{al}E_{al}} = \frac{F_{latão}L}{A_{latão}E_{latão}}$$

$$F_{al} = F_{latão}\left(\frac{A_{al}}{A_{latão}}\right)\left(\frac{E_{al}}{E_{latão}}\right)$$

$$F_{al} = F_{latão}\left[\frac{\pi[(2 \text{ pol})^2 - (1 \text{ pol})^2]}{\pi(1 \text{ pol})^2}\right]\left[\frac{10(10^3) \text{ ksi}}{15(10^3) \text{ ksi}}\right]$$

$$F_{al} = 2F_{latão} \tag{2}$$

Resolvendo as equações 1 e 2 simultaneamente, temos:

$$F_{al} = 6 \text{ kip} \qquad F_{latão} = 3 \text{ kip}$$

Como os resultados são positivos, o esforço é, na verdade, de compressão. A tensão normal média do alumínio e do latão é, portanto:

$$\sigma_{al} = \frac{6 \text{ kip}}{\pi[(2 \text{ pol})^2 - (1 \text{ pol})^2]} = 0{,}637 \text{ ksi} \qquad \textit{Resposta}$$

$$\sigma_{latão} = \frac{3 \text{ kip}}{\pi(1 \text{ pol})^2} = 0{,}955 \text{ ksi} \qquad \textit{Resposta}$$

As distribuições da tensão são mostradas na Figura 4.13*c*.

EXEMPLO 4.7

As três barras de aço A-36 mostradas na Figura 4.14*a* são acopladas a um elemento *rígido* por pinos. Supondo que a carga aplicada ao elemento seja de 15 kN, determinar a força desenvolvida em cada barra. Cada uma das barras *AB* e *EF* tem área da seção transversal de 25 mm^2, e a barra *CD* tem área da seção transversal de 15 mm^2.

SOLUÇÃO

Equilíbrio. O diagrama de corpo livre do elemento rígido é mostrado na Figura 4.14*b*. Esse problema é estaticamente indeterminado porque há três incógnitas e apenas duas equações de equilíbrio disponíveis. Essas equações são:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad F_A + F_C + F_E - 15\ \text{kN} = 0 \tag{1}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0; \qquad -F_A(0{,}4\ \text{m}) + 15\ \text{kN}(0{,}2\ \text{m}) + F_E(0{,}4\ \text{m}) = 0 \tag{2}$$

Compatibilidade. A carga aplicada povocará o movimento da reta *ACE* para a posição inclinada *A'C'E'* mostrada na Figura 4.14*c*. Os deslocamentos dos pontos *A*, *C* e *E* estão relacionados pelos triângulos proporcionais. Assim, a equação de compatibilidade desses deslocamentos é:

$$\frac{\delta_A - \delta_E}{0{,}8\ \text{m}} = \frac{\delta_C - \delta_E}{0{,}4\ \text{m}}$$

$$\delta_C = \frac{1}{2}\delta_A + \frac{1}{2}\delta_E$$

Usando a relação carga-deslocamento (Equação 4.2), temos:

$$\frac{F_C L}{(15\ \text{mm}^2)E_{aço}} = \frac{1}{2}\left[\frac{F_A L}{(25\ \text{mm}^2)E_{aço}}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{F_E L}{(25\ \text{mm}^2)E_{aço}}\right]$$

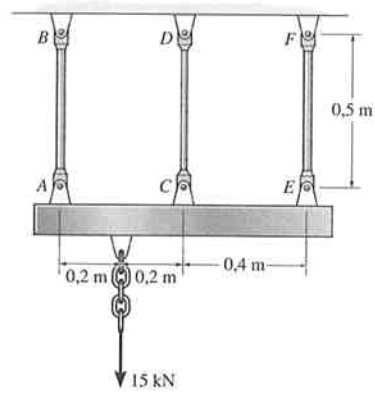
$$F_C = 0{,}3F_A + 0{,}3F_E \tag{3}$$

Resolvendo as equações 1 a 3 simultaneamente, temos:

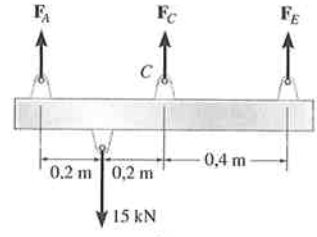
$$F_A = 9{,}52\ \text{kN} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

$$F_C = 3{,}46\ \text{kN} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

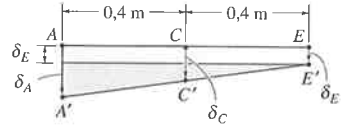
$$F_E = 2{,}02\ \text{kN} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$



(a)



(b)



(c)

Figura 4.14

EXEMPLO 4.8

O parafuso mostrado na Figura 4.15*a* é feito de liga de alumínio 2014-T6 e apertado de modo que comprima um tubo cilíndrico feito de liga de magnésio Am 1004-T61. O tubo tem raio externo de $\frac{1}{2}$ pol e supõe-se que tanto seu raio interno como o raio do parafuso sejam de $\frac{1}{4}$ pol. As arruelas nas partes superior e inferior do tubo são consideradas rígidas e têm espessura desprezível. A porca é apertada inicialmente com a força da mão; depois, é apertada com uma chave, dando-se mais meia volta. Se o parafuso tem 20 roscas por polegada, determinar a tensão nele.

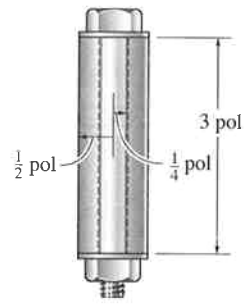
SOLUÇÃO

Equilíbrio. Consideremos o diagrama de corpo livre de uma seção de corte do parafuso e do tubo (Figura 4.15*b*), a fim de relacionar a força no parafuso, F_p à do tubo, F_t.

O equilíbrio requer que:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad F_p - F_t = 0 \tag{1}$$

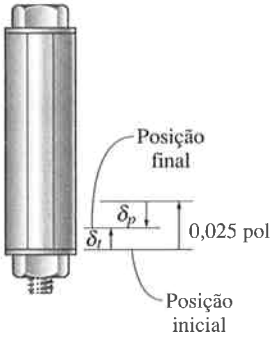
O problema é estaticamente indeterminado visto que há duas incógnitas nessa equação.



(a)

Figura 4.15

(b)



(c)

Figura 4.15

Compatibilidade. Quando a porca é apertada no parafuso, o tubo encurta δ_t e o parafuso *alonga-se* δ_p (Figura 4.15*c*). Como a porca sofre meia volta de aperto, avança uma distância de $(\frac{1}{2})(\frac{1}{20}\text{ pol}) = 0{,}025$ pol ao longo do parafuso. Assim, a compatibilidade desses deslocamentos requer:

$$(+\uparrow) \qquad \delta_t = 0{,}025 \text{ pol} - \delta_p$$

Usando o módulo de elasticidade mostrado nas tabelas de propriedades no final do livro e aplicando a Equação 4.2, temos:

$$\frac{F_t(3 \text{ pol})}{\pi[(0{,}5 \text{ pol})^2 - (0{,}25 \text{ pol})^2][6{,}48(10^3) \text{ ksi}]} = 0{,}025 \text{ pol} - \frac{F_p(3 \text{ pol})}{\pi(0{,}25\text{pol})^2[10{,}6(10^3) \text{ ksi}]}$$

$$0{,}78595F_t = 25 - 1{,}4414F_p \qquad (2)$$

Resolvendo as equações 1 e 2 simultaneamente, obtemos:

$$F_p = F_t = 11{,}22 \text{ kip}$$

As tensões no parafuso e no tubo são, portanto,

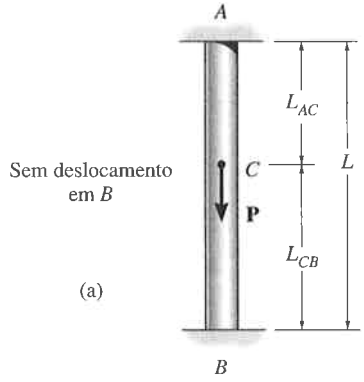
$$\sigma_p = \frac{F_p}{A_p} = \frac{11{,}22 \text{ kip}}{\pi(0{,}25 \text{ pol})^2} = 57{,}2 \text{ ksi} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

$$\sigma_t = \frac{F_t}{A_t} = \frac{11{,}22 \text{ kip}}{\pi(0{,}5 \text{ pol})^2 - (0{,}25 \text{ pol})^2} = 19{,}1 \text{ ksi}$$

As tensões são menores que os limites de escoamento tabelados de cada material $(\sigma_E)_{al} = 60$ ksi e $(\sigma_E)_{mg} = 22$ ksi (consultar as tabelas de propriedades no final do livro) e, portanto, essa análise 'elástica' é válida.

4.5 MÉTODO DAS FORÇAS PARA ANALISAR MEMBROS COM CARGA AXIAL

Também é possível resolver problemas estaticamente indeterminados escrevendo a equação de compatibilidade com a superposição das forças que atuam no diagrama de corpo livre. Esse método de solução é em geral denominado ***método da flexibilidade*** ou ***método das forças***. Para mostrar como é aplicado, consideremos novamente a barra da Figura 4.11*a*. A fim de escrever a equação de compatibilidade requerida, primeiro escolhemos qualquer dos apoios como 'redundante' e retiramos temporariamente seu efeito da barra. A palavra ***redundante***, como usada aqui, indica que o apoio não é necessário para manter a barra em equilíbrio estável, de modo que, quando removido, a barra torna-se estaticamente determinada. Nesse caso, vamos escolher o apoio B como redundante. Pelo princípio da superposição, a barra da Figura 4.16*a* é equivalente à barra sujeita apenas à carga externa **P** (Figura 4.16*b*), mais a barra sujeita apenas à carga redundante desconhecida $\mathbf{F}_B$ (Figura 4.16*c*).



(a)

Figura 4.16

Se a carga **P** faz B deslocar-se *para baixo* uma quantidade δ_P, a reação $\mathbf{F}_B$ deve deslocar a extremidade B da barra *para cima* uma quantidade δ_B, de modo que não ocorra deslocamento em B quando as duas cargas são superpostas. Assim:

$$(+\downarrow) \qquad 0 = \delta_P - \delta_B$$

Essa equação representa a equação de compatibilidade dos deslocamentos do ponto B, desde que os admitamos positivos para baixo.

Aplicando a relação carga-deslocamento a cada caso, temos $\delta_P = PL_{AC}/AE$ e $\delta_B = F_B L/AE$. Conseqüentemente:

$$0 = \frac{PL_{AC}}{AE} - \frac{F_B L}{AE}$$

$$F_B = P\left(\frac{L_{AC}}{L}\right)$$

Pelo diagrama de corpo livre da barra (Figura 4.11*b*), a reação em A é determinada pela equação de equilíbrio:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad P\left(\frac{L_{AC}}{L}\right) + F_A - P = 0$$

Como $L_{CB} = L - L_{AC}$, então:

$$F_A = P\left(\frac{L_{CB}}{L}\right)$$

Esses resultados são os mesmos obtidos na Seção 4.4, exceto que aqui aplicamos a condição de compatibilidade *e depois* a condição de equilíbrio para obter a solução. Observe também que o princípio da superposição pode ser usado nesse caso, visto que o deslocamento e a carga estão relacionados linearmente ($\delta = PL/AE$), o que supõe, naturalmente, que o material comporta-se de maneira linear-elástica.

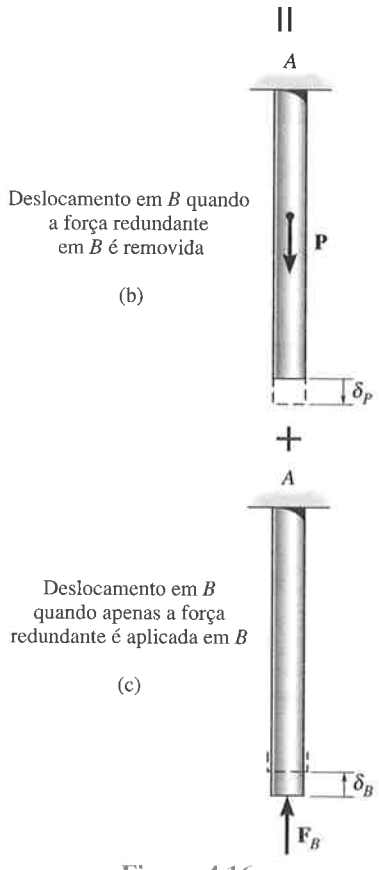


Figura 4.16

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

O método das forças requer os seguintes passos.

Compatibilidade.

- Escolher um dos apoios como redundante e escrever a equação de compatibilidade. Para isso, relaciona-se o deslocamento conhecido do apoio redundante, geralmente nulo, ao deslocamento do apoio provocado *apenas* pelas forças externas que atuam sobre o elemento, *somado* — entenda-se a soma como uma superposição — (vetorialmente) ao deslocamento do apoio provocado *apenas* pela reação redundante que atua sobre o elemento.
- Expressar a carga externa e os deslocamentos redundantes em termos das cargas usando uma relação carga-deslocamento, tal como $\delta = PL/AE$.
- Uma vez estabelecida, a equação de compatibilidade pode então ser resolvida para se encontrar a intensidade da força redundante.

Equilíbrio.

- Desenhar o diagrama de corpo livre e escrever as equações de equilíbrio apropriadas para o elemento usando os resultados calculados para a redundante. Resolver essas equações para determinar as outras reações.

EXEMPLO 4.9

A haste de aço A-36 mostrada na Figura 4.17*a* tem diâmetro de 5 mm. É presa à parede fixa em A e, antes de ser carregada, mantém uma folga de 1 mm em relação à parede B'. Determinar as reações em A e B'.

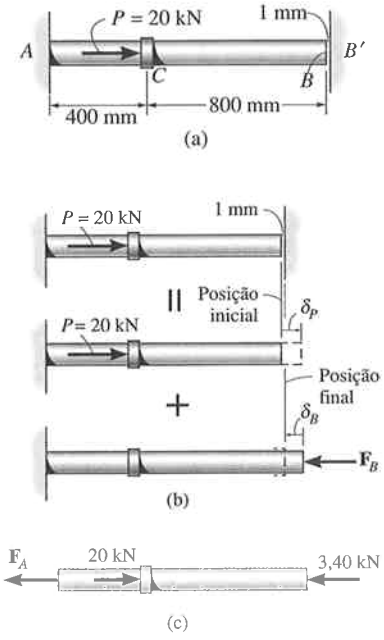


Figura 4.17

SOLUÇÃO

Compatibilidade. Aqui consideraremos o apoio B' como redundante. Usando o princípio da superposição (Figura 4.17*b*), temos:

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad 0{,}001 \text{ m} = \delta_P - \delta_B \qquad (1)$$

As deflexões δ_P e δ_B são determinadas pela Equação 4.2:

$$\delta_P = \frac{PL_{AC}}{AE} = \frac{[20(10^3)\text{ N}](0{,}4\text{ m})}{\pi(0{,}0025\text{ m})^2[200(10^9)\text{ N/m}^2]} = 0{,}002037\text{ m}$$

$$\delta_B = \frac{F_B L_{AB}}{AE} = \frac{F_B(1{,}20\text{ m})}{\pi(0{,}0025\text{ m})^2[200(10^9)\text{ N/m}^2]} = 0{,}3056(10^{-6})F_B$$

Substituindo na Equação 1, obtemos:

$$0{,}001\text{ m} = 0{,}002037\text{ m} - 0{,}3056(10^{-6})F_B$$

$$F_B = 3{,}40(10^3)\text{ N} = 3{,}40\text{ kN} \qquad \textit{Resposta}$$

Equilíbrio. Pelo diagrama de corpo livre (Figura 4.17*c*), temos:

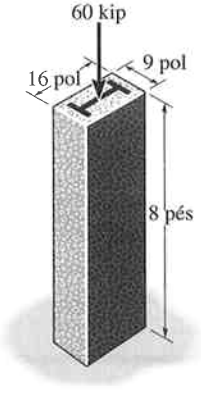
$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad -F_A + 20\text{ kN} - 3{,}40\text{ kN} = 0 \quad F_A = 16{,}6\text{ kN} \qquad \textit{Resposta}$$

PROBLEMAS

Lembrando: 1 kip = 1.000 lb e 1 ksi = 1.000 lb/pol².

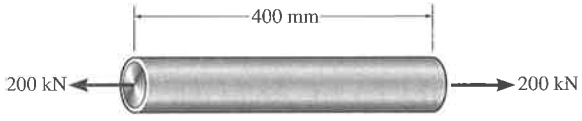
4.37. A coluna de aço A-36, com área da seção transversal de 18 pol², está embutida em concreto de alta resistência, como mostrado. Supondo que seja aplicada uma força de 60 kip à coluna, determinar o esforço de compressão médio no concreto e no aço. Quanto a coluna encolhe? Seu comprimento original é de 8 pés.

4.38. A coluna de aço A-36 está embutida em concreto de alta resistência, como mostrado. Supondo que seja aplicada uma força de 60 kip à coluna, determinar a área requerida de aço para que a força seja compartilhada igualmente entre o aço e o concreto. Quanto a coluna encolhe? Seu comprimento original é de 8 pés.



Problemas 4.37/4.38

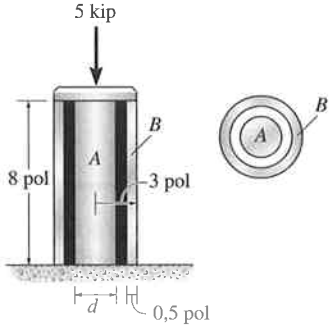
4.39. Um tubo de aço A-36 tem um núcleo de alumínio 6061-T6. Ele está submetido a uma força de tração de 200 kN. Determinar a tensão normal média no alumínio e no aço devido a esse carregamento. O tubo tem diâmetro externo de 80 mm e diâmetro interno de 70 mm.



Problema 4.39

***4.40.** O poste A de aço inoxidável 304 tem um diâmetro $d = 2$ pol e está envolto por um tubo B de latão C83400. Ambos repousam em uma superfície rígida. Se for aplicada uma força de 5 kip sobre a tampa rígida, qual será a tensão normal média desenvolvida sobre o poste e o tubo?

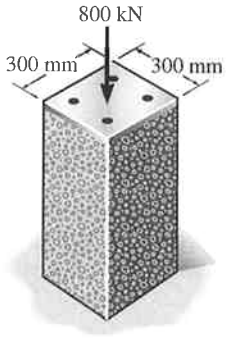
4.41. O poste A de aço inoxidável 304 está envolto por um tubo B de latão C83400. Ambos repousam em uma superfície rígida. Supondo que seja aplicada uma força de 5 kip sobre a tampa rígida, determinar o diâmetro d requerido do poste de aço de modo que a carga seja compartilhada igualmente entre o poste e o tubo.



Problemas 4.40/4.41

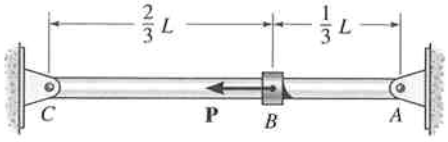
4.42. A coluna de concreto é reforçada com quatro barras de aço, cada uma com diâmetro de 18 mm. Determinar a tensão normal média do concreto e do aço se a coluna está submetida a uma carga axial de 800 kN. $E_{aço} = 200$ GPa e $E_c = 25$ GPa.

4.43. A coluna é construída de concreto de alta resistência e quatro barras de reforço de aço A-36. Supondo que ela seja submetida a uma força axial de 800 kN, determinar o diâmetro requerido de cada barra de modo que um quarto da carga seja suportada pelo aço e três quartos pelo concreto.



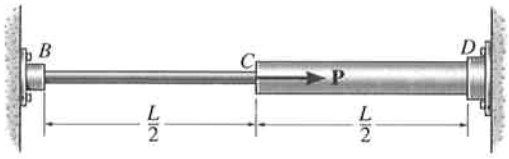
Problemas 4.42/4.43

***4.44.** A barra uniforme está submetida a uma carga **P** no colar B. Determinar as reações nos pinos A e C. Desprezar as dimensões do colar.



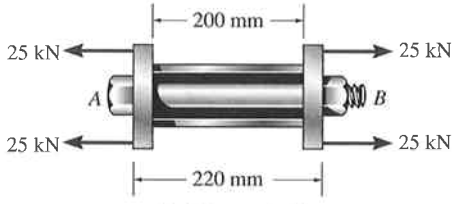
Problema 4.44

4.45. Os dois tubos são feitos do mesmo material e estão acoplados como mostrado. Supondo que a área da seção transversal de BC seja A e a de CD seja $2A$, determinar as reações em B e D quando a força **P** for aplicada na junção C.



Problema 4.45

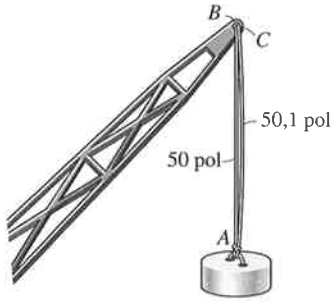
4.46. O parafuso AB tem diâmetro de 20 mm e passa através de um cilindro com diâmetro interno de 40 mm e diâmetro externo de 50 mm. O parafuso e o cilindro são feitos de aço A-36 e estão presos aos suportes rígidos como mostrado. Se o comprimento do parafuso for de 220 mm e o do cilindro 200 mm, determinar a tensão no parafuso quando for aplicada uma força de 50 kN aos suportes.



Problema 4.46

4.47. A carga de 1.500 lb deve ser suportada por dois arames verticais de aço A-36. Se, inicialmente, o arame AB tiver 50 pol de comprimento e o arame AC tiver 50,1 pol de comprimento, determinar a força desenvolvida em cada arame depois que a carga estiver suspensa. Cada arame tem área da seção transversal de 0,02 pol^2.

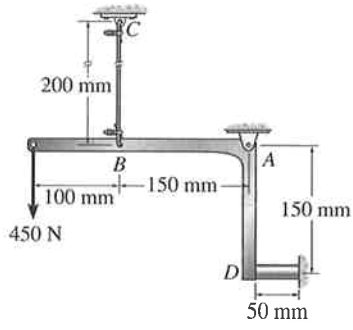
***4.48.** A carga de 15 kip deve ser suportada por dois arames verticais de aço A-36. Se, inicialmente, o arame AB tiver 50 pol de comprimento e o arame AC tiver 50,1 pol de comprimento, determinar a área da seção transversal de AB se a carga tiver de ser compartilhada igualmente entre os arames. O arame AC tem área da seção transversal de 0,02 pol^2.



Problemas 4.47/4.48

4.49. O elo rígido é suportado por um pino em A, um arame de aço BC (com 200 mm de comprimento sem deformação e área da seção transversal de 22,5 mm^2), e por um pequeno bloco de alumínio (com 50 mm de comprimento sem carga e área da seção transversal de 40 mm^2). Supondo que o elo seja submetido à carga vertical mostrada, determinar a tensão normal média no arame e no bloco. $E_{aço} = 200$ GPa, $E_{al} = 70$ GPa.

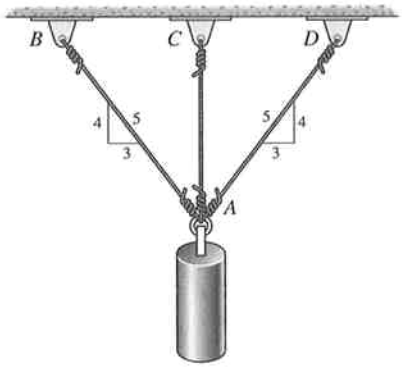
4.50. O elo rígido é suportado por um pino em A, um arame de aço BC (com 200 mm de comprimento sem deformação e área da seção transversal de 22,5 mm^2), e por um pequeno bloco de alumínio (com 50 mm de comprimento sem carga e área da seção transversal de 40 mm^2). Supondo que o elo seja submetido à carga vertical mostrada, determinar sua rotação em torno do pino A. Dar a resposta em radianos. $E_{aço} = 200$ GPa, $E_{al} = 70$ GPa.



Problemas 4.49/4.50

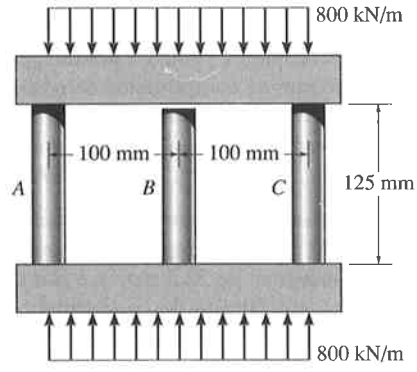
4.51. Os três arames de aço A-36 têm, cada um, diâmetro de 2 mm e comprimentos sem carga de $L_{AC} = 1{,}60$ m e $L_{AB} = L_{AD} = 2{,}00$ m. Determinar a força em cada arame depois que a massa de 150 kg for suspensa pelo anel em A.

***4.52.** Os arames de aço A-36 AB e AD têm, cada um, diâmetro de 2 mm e comprimentos sem carga de L_{AC} = 1,60 m e $L_{AB} = L_{AD}$ = 2,00 m. Determinar o diâmetro requerido do arame AC de modo que cada arame seja submetido à mesma força provocada pela massa de 150 kg suspensa pelo anel em A.



Problemas 4.51/4.52

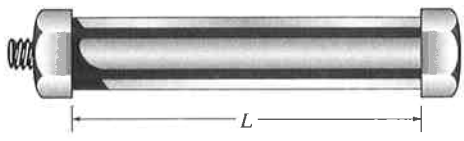
4.53. O poste central B do conjunto tem comprimento original de 124,7 mm, enquanto os postes A e C têm comprimento de 125 mm. Supondo que as tampas superior e inferior sejam consideradas rígidas, determinar a tensão normal média em cada poste. Os postes são feitos de alumínio e têm área da seção transversal de 400 mm^2. E_{al} = 70 GPa.



Problema 4.53

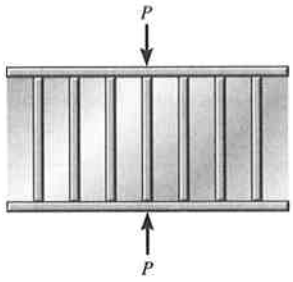
4.54. O conjunto consiste de um parafuso de aço A-36 e um tubo de latão C83400. Supondo que a porca seja apertada contra o tubo de modo que L = 75 mm e depois girada uma quantidade adicional de modo que avance 0,02 mm no parafuso, determinar a força no parafuso e no tubo. O parafuso tem diâmetro de 7 mm, e o tubo tem área da seção transversal de 100 mm^2.

4.55. O conjunto consiste de um parafuso de aço A-36 e um tubo de latão C83400. A porca é apertada contra o tubo de modo que L = 75 mm. Determinar o avanço máximo adicional da porca no parafuso de modo que nenhum dos materiais escoe. O parafuso tem diâmetro de 7 mm, e o tubo tem área da seção transversal de 100 mm^2.



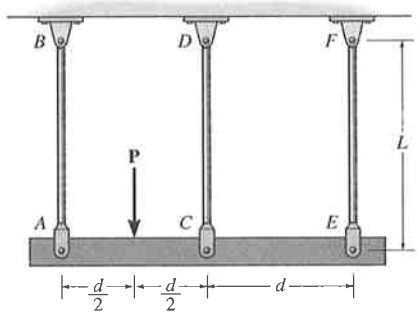
Problemas 4.54/4.55

***4.56.** O corpo-de-prova representa um sistema filamento-molde reforçado, feito de vidro (filamento) e plástico (molde). Supondo que haja n filamentos, cada um com A_f de área da seção transversal, embutidos em um molde de área da seção transversal A_m, determinar a tensão no molde e em cada filamento quando P é aplicada ao corpo-de-prova.



Problema 4.56

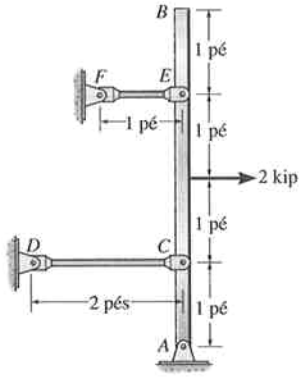
4.57. Os três tirantes são feitos do mesmo material e têm áreas da seção transversal A iguais. Determinar a tensão normal média em cada tirante se a viga rígida ACE estiver submetida à força **P**.



Problema 4.57

4.58. A barra é articulada por um pino em A e apoiada por duas hastes de alumínio, cada uma com diâmetro de 1 pol e módulo de elasticidade $E_{al} = 10(10^3)$ ksi. Supondo que a barra seja rígida e inicialmente vertical, determinar o deslocamento da extremidade B quando é aplicada a força de 2 kip.

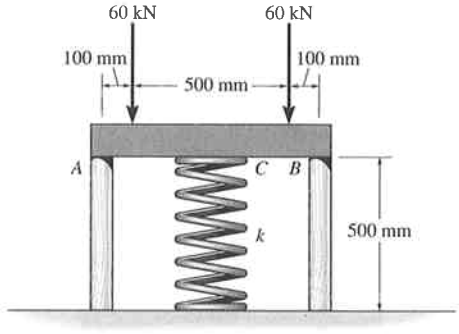
4.59. A barra é articulada por um pino em A e apoiada por duas hastes de alumínio, cada uma com diâmetro de 1 pol e módulo de elasticidade $E_{al} = 10(10^3)$ ksi. Supondo que a barra seja rígida e inicialmente vertical, determinar a força em cada haste quando é aplicada a força de 2 kip.



Problemas 4.58/4.59

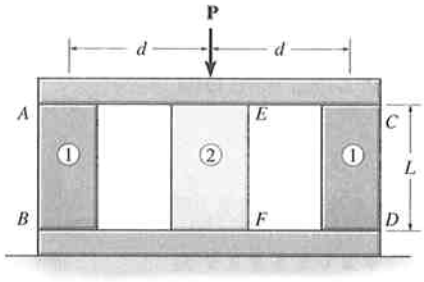
***4.60.** A barra rígida é apoiada por dois postes curtos de madeira e por uma mola. Supondo que cada poste tenha comprimento de 500 mm sem carga e uma área da seção transversal de 800 mm^2, e a mola tenha uma rigidez de k = 1,8 MN/m e um comprimento sem estiramento de 520 mm, determinar a força em cada poste depois que a carga for aplicada à barra. E_{mad} = 11 GPa.

4.61. A barra rígida é apoiada por dois postes curtos de madeira e por uma mola. Supondo que cada poste tenha comprimento de 500 mm sem carga e área da seção transversal de 800 mm^2, e a mola tenha rigidez de k = 1,8 MN/m e comprimento sem estiramento de 520 mm, determinar o deslocamento vertical de A e B depois que a carga for aplicada à barra. E_{mad} = 11 GPa.



Problemas 4.60/4.61

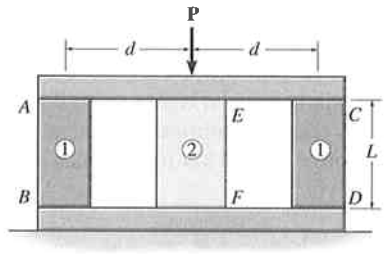
4.62. O conjunto consiste de dois postes feitos dos seguintes materiais: material 1 com módulo de elasticidade E_1 e área da seção transversal A_1; material 2 com módulo de elasticidade E_2 e área da seção transversal A_2. Se for aplicada uma carga central **P** na tampa rígida, qual será a força em cada poste? O apoio também é rígido.



Problema 4.62

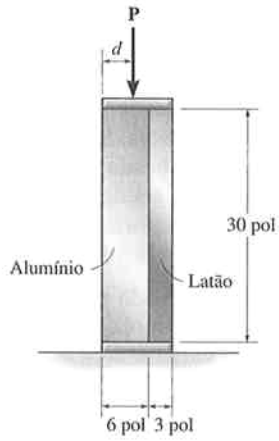
4.63. O conjunto consiste de dois postes AB e CD feitos do material 1, que tem módulo de elasticidade E_1 e área da seção transversal A_1, e de um poste central EF feito do material 2, que tem módulo de elasticidade E_2 e área da seção transversal A_2. Se os postes AB e CD tiverem de ser substituídos por outros construídos com o material 2, determinar a área da seção transversal necessária para os novos postes de modo que ambos os conjuntos deformem a mesma quantidade quando carregados. O apoio também é rígido.

***4.64.** O conjunto consiste de dois postes AB e CD feitos do material 1, que tem módulo de elasticidade E_1 e área da seção transversal A_1, e de um poste central EF feito do material 2, que tem módulo de elasticidade E_2 e área da seção transversal A_2. Se o poste EF tiver de ser substituído por outro feito do material 1, determinar a área da seção transversal requerida para o novo poste de modo que ambos os conjuntos deformem a mesma quantidade quando carregados. O apoio também é rígido.



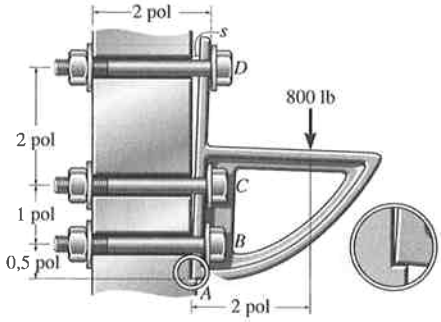
Problemas 4.63/4.64

4.65. O conjunto consiste em um elemento de alumínio 6061-T6 e um elemento de latão C83400 que repousam sobre chapas rígidas. Determinar a distância d em que a força **P** deve ser colocada sobre as chapas, de modo que estas permaneçam horizontais quando os materiais se deformarem. Cada elemento tem largura de 8 pol, e eles não estão unidos.



Problema 4.65

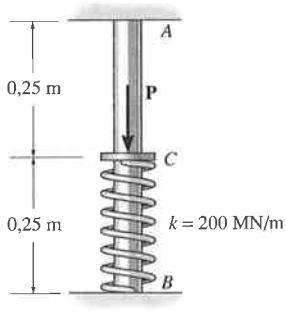
4.66. O suporte é preso à parede por três parafusos de aço A-36 em B, C e D. Cada parafuso tem diâmetro de 0,5 pol e comprimento não deformado de 2 pol. Supondo que seja aplicada uma força de 800 lb sobre o suporte como mostrado, determinar a distância s que o topo do suporte se afasta da parede no parafuso D. Supor, também, que o parafuso não sofra cisalhamento; ao contrário, a força vertical de 800 lb é suportada pela extremidade A. Admitir, por fim, que a parede e o suporte sejam rígidos. É mostrada uma deformação exagerada dos parafusos.



Problema 4.66

4.67. O poste é feito de alumínio 6061-T6 e tem diâmetro de 50 mm. Está engastado em A e B e no seu centro C há uma mola espiral acoplada ao colar rígido preso ao poste. Se a mola inicialmente não estiver comprimida, quais serão as reações em A e B quando a força $P = 40$ kN for aplicada ao colar?

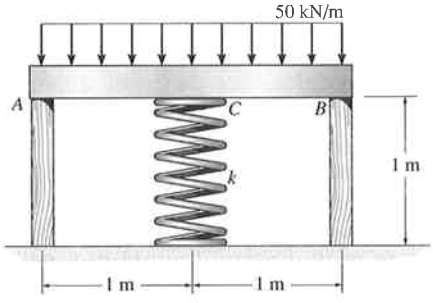
***4.68.** O poste é feito de alumínio 6061-T6 e tem diâmetro de 50 mm. Está engastado em A e B e no seu centro C há uma mola espiral acoplada ao colar rígido preso ao poste. Se a mola inicialmente não estiver comprimida, qual será a compressão nela quando a força $P = 50$ kN for aplicada ao colar?



Problemas 4.67/4.68

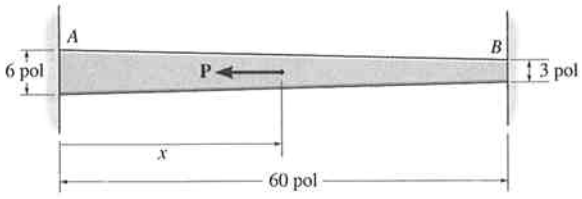
4.69. A barra rígida é apoiada por dois postes de madeira pinho branco e por uma mola. Se cada poste tem comprimento de 1 m sem carga aplicada e área da seção transversal de 600 mm^2, e a mola tem rigidez de $k = 2$ MN/m e comprimento de 1,02 m, sem deformação, qual será a força em cada poste depois de aplicada à barra a carga mostrada?

4.70. A barra rígida é apoiada por dois postes de madeira pinho branco e por uma mola. Se cada poste tem comprimento de 1 m sem carga e área da seção transversal de 600 mm^2, e a mola tem rigidez de $k = 2$ MN/m e comprimento de 1,02 m, sem deformação, qual será o deslocamento vertical de A e B depois de aplicada à barra a carga mostrada?



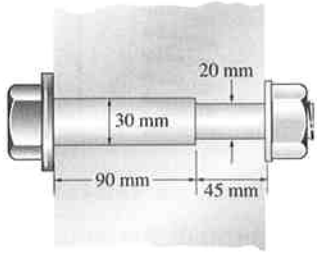
Problemas 4.69/4.70

4.71. O elemento cônico está engastado em suas extremidades A e B e submetido a uma carga $P = 7$ kip em $x = 30$ pol. Determinar as reações dos apoios. O material tem espessura de 2 pol e é feito de alumínio 2014-T6.



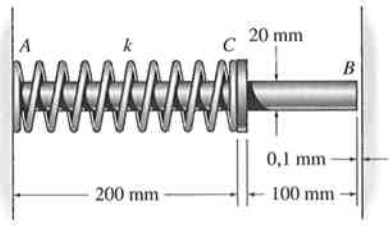
Problema 4.71

***4.72.** O parafuso é feito de aço A-36, e sua rosca simples tem passo de 0,100 mm. Determinar a tensão normal máxima no parafuso se a porca receber uma volta completa adicional depois de apertada contra a chapa rígida. Supor que a arruela, a cabeça do parafuso e a porca também sejam rígidas. *Nota*: o passo é a distância que a rosca avança ao longo de seu eixo em uma volta completa.



Problema 4.72

4.73. A mola tem comprimento sem deformação de 250 mm e rigidez de $k = 400$ kN/m. Se estiver comprimida e colocada no trecho AC de 200 mm de comprimento da barra de alumínio AB e for solta, qual força a barra exercerá sobre a parede em A? Antes do carregamento há folga de 0,1 mm em B entre a barra e a parede. Desprezar a espessura da chapa rígida em C. $E_{al} = 70$ GPa.



Problema 4.73

4.6 TENSÃO TÉRMICA

Uma mudança na temperatura pode provocar alterações nas dimensões de um material. Em geral, se a temperatura aumenta, o material se expande; se a temperatura diminui, o material se contrai. Normalmente, a expansão ou

contração está *linearmente* relacionada ao aumento ou à diminuição de temperatura ocorrida. Se esse for o caso e o material for homogêneo e isotrópico, será determinado experimentalmente que a deformação de um elemento com comprimento L será calculada pela fórmula:

$$\delta_T = \alpha \Delta T L \tag{4.4}$$

onde:

α = propriedade do material, denominada ***coeficiente linear de expansão térmica***. Sua unidade de medida é a deformação específica por grau de temperatura. As unidades são 1/°F (Fahrenheit), no sistema Pés-Libras-Segundo ou FPS*, e 1/°C (Celsius) ou 1/°K (Kelvin) no SI. Valores típicos estão relacionados na tabela no final do livro.
ΔT = mudança algébrica na temperatura do elemento
L = comprimento original do elemento
δ_T = mudança algébrica no comprimento do elemento

Se a mudança na temperatura varia em todo o comprimento do elemento, isto é, $\Delta T = \Delta T(x)$, ou se α varia ao longo do comprimento, então a Equação 4.4 aplica-se a cada segmento de comprimento dx. Nesse caso, a mudança no comprimento do membro é:

$$\delta_T = \int_0^L \alpha \, \Delta T \, dx \tag{4.5}$$

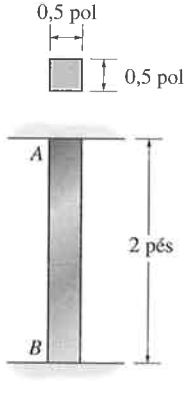
A mudança no comprimento de um elemento *estaticamente determinado* é calculada prontamente pela Equação 4.4 ou 4.5, uma vez que o elemento fica livre para se expandir ou contrair quando sofre mudança de temperatura. Entretanto, em um elemento *estaticamente indeterminado*, esses deslocamentos térmicos são limitados pelos apoios, o que produz ***tensões térmicas*** que devem ser consideradas no projeto.

A tensão térmica é calculada pelos métodos descritos nas seções anteriores. Os exemplos a seguir ilustram algumas aplicações.

A maioria das pontes é projetada com juntas de dilatação para equilibrar o movimento térmico do tabuleiro e, assim, evitar tensão térmica.

EXEMPLO 4.10

A barra de aço A-36 mostrada na Figura 4.18 está confinada entre os dois apoios quando $T_1 = 60°F$. Se a temperatura aumentar para $T_2 = 120°F$, qual será a tensão térmica normal média desenvolvida na barra?



(a)

Figura 4.18

SOLUÇÃO

Equilíbrio. O diagrama de corpo livre da barra é mostrado na Figura 4.18*b*. Como não há carga externa, a força em A é igual, porém oposta, à força que atua em B, isto é:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad F_A = F_B = F$$

O problema é estaticamente indeterminado, visto que a força não pode ser determinada somente pelo uso das equações de equilíbrio.

Compatibilidade. Como $\delta_{A/B} = 0$, o deslocamento térmico δ_T que ocorreria em A (Figura 4.18*c*) é contrabalançado pela força **F** que seria necessária para

* Das iniciais de *foot, pound* e *second*, em inglês (N. do R.T.)

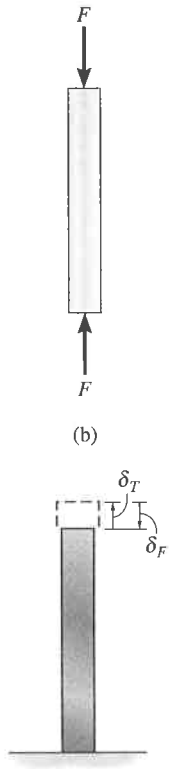


Figura 4.18

a barra ser deslocada δ_F de volta à sua posição original. A condição de compatibilidade em A leva a:

$$(+\uparrow) \qquad \delta_{A/B} = 0 = \delta_T - \delta_F$$

Aplicando as relações térmica e de carga-deslocamento, temos:

$$0 = \alpha \Delta T L - \frac{FL}{AE}$$

Então, pelos dados sobre as propriedades dos materiais no final do livro:

$$\begin{aligned} F &= \alpha \Delta T A E \\ &= [6{,}60(10^{-6})/°\text{F}](120°\text{F} - 60°\text{F})(0{,}5 \text{ pol})^2[29(10^3) \text{ kip/pol}^2] \\ &= 2{,}87 \text{ kip} \end{aligned}$$

Pela intensidade de **F**, percebe-se que as mudanças de temperatura podem provocar grandes forças de reação em elementos estaticamente indeterminados.

Como **F** também representa a força axial interna no interior da barra, a tensão de compressão normal média é:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{2{,}87 \text{ kip}}{(0{,}5 \text{ pol})^2} = 11{,}5 \text{ ksi} \qquad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 4.11

Um tubo de alumínio 2014-T6 com área da seção transversal de 600 mm^2 é usado como luva para um parafuso de aço A-36 com área da seção transversal de 400 mm^2 (Figura 4.19*a*). Quando a temperatura é $T_1 = 15°\text{C}$, a porca mantém o conjunto apertado em uma posição tal que a força axial no parafuso é desprezível. Se a temperatura aumentar para $T_2 = 80°\text{C}$, qual será a tensão normal média no parafuso e na luva?

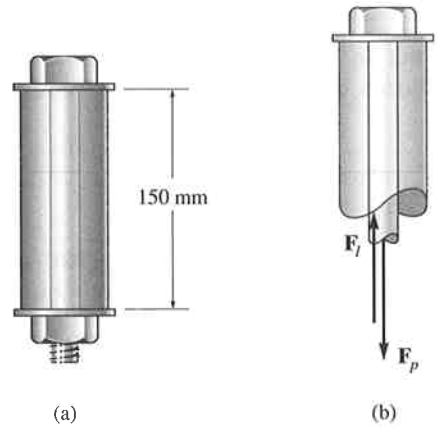


Figura 4.19

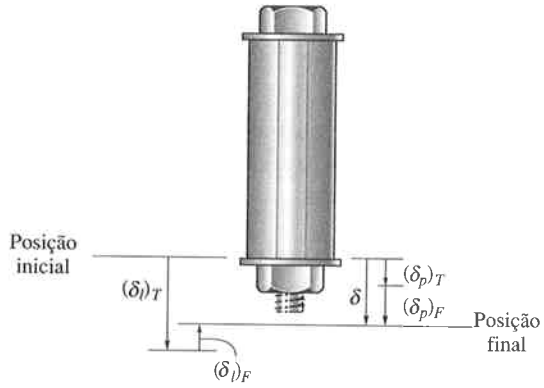
SOLUÇÃO

Equilíbrio. Um diagrama de corpo livre da seção de um segmento do conjunto é mostrado na Figura 4.19*b*. As forças F_p e F_l são produzidas visto que a luva tem um coeficiente de expansão térmica maior que o do parafuso e, portanto, expande-se mais que ele quando a temperatura aumenta. O problema é estaticamente indeterminado, uma vez que as forças não podem ser determinadas pelo equilíbrio. Entretanto, é requerido que:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad F_l = F_p \tag{1}$$

Compatibilidade. O aumento de temperatura provoca a expansão $(\delta_l)_T$ e $(\delta_p)_T$ da luva e do parafuso (Figura 4.19*c*). Entretanto, as forças redundantes F_p e F_l alongam o parafuso e encurtam a luva. Conseqüentemente, a extremidade do conjunto atinge uma posição final diferente da inicial. Portanto, a condição de compatibilidade torna-se:

$$(+\downarrow) \qquad \delta = (\delta_p)_T + (\delta_p)_F = (\delta_l)_T - (\delta_l)_F$$



(c)

Aplicando as equações 4.2 e 4.4 e usando as propriedades mecânicas das tabelas no final do livro, temos:

$$[12(10^{-6})/°C](80°C - 15°C)(0{,}150\ \text{m}) + \frac{F_p(0{,}150\ \text{m})}{(400\ \text{mm}^2)(10^{-6}\ \text{m}^2/\text{mm}^2)[200(10^9)\ \text{N/m}^2]}$$

$$= [23(10^{-6})/°C](80°C - 15°C)(0{,}150\ \text{m}) - \frac{F_l(0{,}150\ \text{m})}{600\ \text{mm}^2(10^{-6}\ \text{m}^2/\text{mm}^2)[73{,}1(10^9)\ \text{N/m}^2]}$$

Usando a Equação 1 e resolvendo, temos:

$$F_l = F_p = 20{,}26\ \text{kN}$$

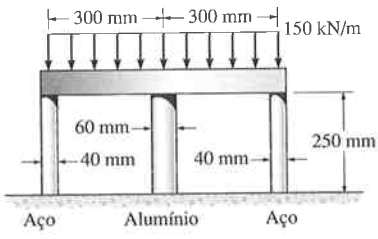
A tensão normal média no parafuso e na luva é, portanto:

$$\sigma_p = \frac{20{,}26\ \text{kN}}{400\ \text{mm}^2(10^{-6}\ \text{m}^2/\text{mm}^2)} = 50{,}6\ \text{MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

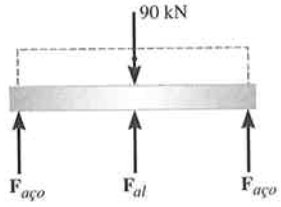
$$\sigma_l = \frac{20{,}26\ \text{kN}}{600\ \text{mm}^2(10^{-6}\ \text{m}^2/\text{mm}^2)} = 33{,}8\ \text{MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

Como nessa análise se pressupôs que o material tem comportamento linear-elástico, as tensões calculadas devem ser verificadas para assegurar que não excedam os limites de proporcionalidade do material.

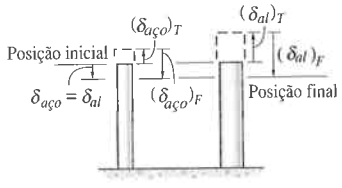
EXEMPLO 4.12



(a)



(b)



(c)

Figura 4.20

A barra rígida mostrada na Figura 4.20*a* está presa no topo dos três postes feitos de aço A-36 e alumínio 2014-T6. Cada poste tem comprimento de 250 mm quando não há carga aplicada sobre a barra e a temperatura é $T_1 = 20°C$. Determinar a força suportada em cada poste se a barra estiver submetida a uma carga uniformemente distribuída de 150 kN/m e a temperatura for aumentada para $T_2 = 80°C$.

SOLUÇÃO

Equilíbrio. O diagrama de corpo livre da barra é mostrado na Figura 4.20*b*. O equilíbrio dos momentos em torno do centro da barra requer que as forças nos postes de aço sejam iguais. Somando as forças no diagrama de corpo livre, temos:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad 2F_{aço} + F_{al} - 90(10^3)\ \text{N} = 0 \tag{1}$$

Compatibilidade. Devido à simetria da carga, da geometria e do material, o topo de cada poste desloca-se o mesmo tanto. Logo,

$$(+\downarrow) \qquad \delta_{aço} = \delta_{al} \tag{2}$$

A posição final do topo de cada poste é igual ao seu deslocamento provocado pelo aumento de temperatura, somado ao seu deslocamento provocado pela força de compressão axial interna (Figura 4.20*c*). Assim, para o poste de aço e o de alumínio, temos:

$$(+\downarrow) \qquad \delta_{aço} = -(\delta_{aço})_T + (\delta_{aço})_F$$
$$(+\downarrow) \qquad \delta_{al} = -(\delta_{al})_T + (\delta_{al})_F$$

Aplicando a Equação 2, temos:

$$-(\delta_{aço})_T + (\delta_{aço})_F = -(\delta_{al})_T + (\delta_{al})_F$$

Usando as equações 4.2 e 4.4 e as propriedades do material relacionadas nas tabelas no final do livro, obtemos:

$$-[12(10^{-6})/°C](80°C - 20°C)(0{,}250\ \text{m}) + \frac{F_{aço}(0{,}250\ \text{m})}{\pi(0{,}020\ \text{m})^2[200(10^9)\ \text{N/m}^2]}$$
$$= -[23(10^{-6})/°C](80°C - 20°C)(0{,}250\ \text{m}) + \frac{F_{al}(0{,}250\ \text{m})}{\pi(0{,}03\ \text{m})^2[73{,}1(10^9)\ \text{N/m}^2]}$$

$$F_{aço} = 1{,}216F_{al} - 165{,}9(10^3) \tag{3}$$

Para ser *consistentes*, todos os dados têm de ser expressos em newtons, metros e graus Celsius. Resolvendo as equações 1 e 3 simultaneamente, temos:

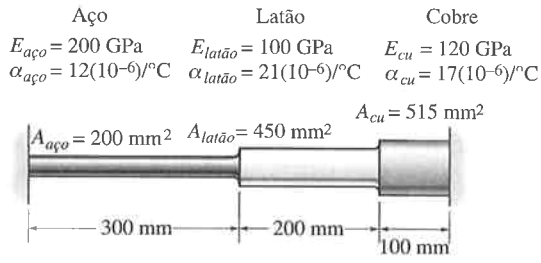
$$F_{aço} = -16{,}4\ \text{kN} \qquad F_{al} = 123\ \text{kN} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

O valor negativo de $F_{aço}$ indica que essa força atua no sentido contrário ao mostrado na Figura 4.20*b*. Em outras palavras, os postes de aço estão sob tração e o poste de alumínio está sob compressão.

PROBLEMAS

Lembrando: 1 kip = 1.000 lb e 1 ksi = 1.000 lb/pol².

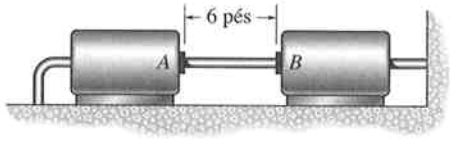
4.74. Três barras feitas de materiais diferentes estão acopladas e colocadas entre duas paredes sob uma temperatura $T_1 = 12°C$. Determinar a força exercida sobre os apoios (rígidos) quando a temperatura muda para $T_2 = 18°C$. As propriedades dos materiais e a área das seções transversais são dadas na figura.



Problema 4.74

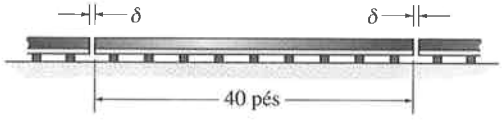
4.75. Um cano de vapor com 6 pés de comprimento é feito de aço A-36 e está acoplado diretamente a duas turbinas A e B como mostrado. O cano tem diâmetro externo de 4 pol e sua parede tem espessura de 0,25 pol. A ligação foi feita a uma temperatura $T_1 = 70°F$. Supondo que os pontos de acoplamento das turbinas sejam rígidos, determinar a força que o cano exerce sobre estas quando o vapor — e, portanto, o cano — atingem uma temperatura $T_2 = 275°F$.

***4.76.** Um cano de vapor com 6 pés de comprimento é feito de aço A-36 e está acoplado diretamente a duas turbinas A e B como mostrado. O cano tem diâmetro externo de 4 pol e sua parede tem espessura de 0,25 pol. A ligação foi feita a uma temperatura $T_1 = 70°F$. Supondo que os pontos de acoplamento das turbinas tenham rigidez de $k = 80(10^3)$ kip/pol, determinar a força que o cano exerce sobre as turbinas quando o vapor — e, portanto, o cano — atingem uma temperatura $T_2 = 275°F$.



Problemas 4.75/4.76

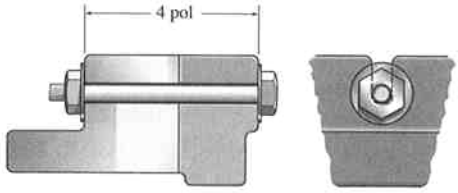
4.77. Os trilhos de uma ferrovia, feitos de aço A-36 e com 40 pés de comprimento cada, foram colocados com uma pequena folga entre si para permitir expansão térmica. Determinar a folga requerida δ de modo que os trilhos apenas se toquem quando a temperatura aumentar de $T_1 = -20°F$ para $T_2 = 90°F$. Considerando a mesma folga, qual seria a força axial sobre os trilhos se a temperatura aumentasse para $T_3 = 110°F$? A área da seção transversal de cada trilho é de 5,10 pol^2.



Problema 4.77

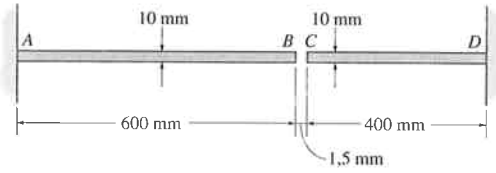
4.78. O parafuso de aço A-36 com 0,40 pol de diâmetro é usado para prender o conjunto (rígido). Determinar a força de aperto que o parafuso deve exercer quando a temperatura for $T_1 = 90°F$, de modo que tal força seja de 500 lb quando $T_2 = 175°F$.

4.79. O parafuso de aço A-36 com 0,40 pol de diâmetro é usado para prender o conjunto (rígido). Se a porca estiver apertada (sem força axial sobre o parafuso) quando $T = 90°F$, qual força de aperto exercerá sobre o conjunto quando $T = 20°F$?



Problemas 4.78/4.79

***4.80.** Uma porta térmica consiste de uma chapa AB de alumínio 6061-T6 e uma chapa CD de magnésio Am-1004-T61, cada uma com largura de 15 mm e ambas engastadas nas extremidades. Se a folga entre elas for de 1,5 mm quando a temperatura é $T_1 = 25°C$, determinar a temperatura requerida para apenas fechar a folga. Qual será a força axial em cada chapa se a temperatura tornar-se $T_2 = 100°C$? Supor que não ocorre flexão ou flambagem.

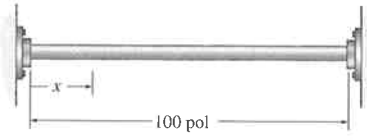


Problema 4.80

4.81. O tubo de aço A-36 com área da seção transversal de 0,5 pol^2 está acoplado a apoios fixos e transporta um líquido que o submete a uma queda de temperatura $\Delta T = (-0{,}2x^{3/2})°F$, onde x é dado em polegadas. Determinar a força axial desenvolvida no tubo.

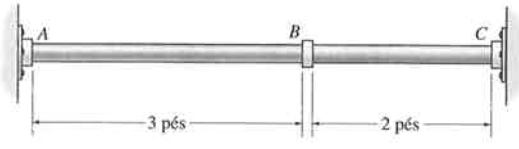
4.82. O tubo de aço A-36 com área da seção transversal de 0,5 pol^2 está acoplado a apoios fixos e transporta um líquido que o submete a uma queda de temperatura $\Delta T = (-0{,}2x^{1/2})°F$, onde x é dado em polegadas. Determinar a deformação máxima e a mínima na direção normal.

4.83. O tubo de aço A-36 com área da seção transversal de 0,5 pol^2 está acoplado a apoios fixos e transporta um líquido que o submete a uma queda de temperatura $\Delta T = (20 - x)°F$, onde x é dado em polegadas. Determinar a tensão normal média desenvolvida no tubo.



Problemas 4.81/4.82/4.83

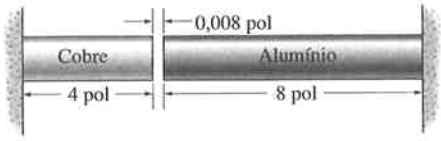
***4.84.** A haste AB de latão C83400 e a haste BC de alumínio 2014-T6 estão unidas pelo colar B e engastadas em suas extremidades. Supondo que não haja carga sobre os membros quando $T_1 = 50°F$, determinar a tensão normal média em cada elemento quando $T_2 = 120°F$. Por qual distância o colar será deslocado? A área da seção transversal de cada membro é 1,75 pol^2.



Problema 4.84

4.85. Os dois segmentos de haste circular, um de alumínio e o outro de cobre, estão presos a paredes rígidas de modo que haja uma folga de 0,008 pol entre eles quando $T_1 = 60°F$. Que temperatura maior T_2 é necessária a fim de apenas fechar a folga? Cada haste tem diâmetro de 1,25 pol, $\alpha_{al} = 13(10^{-6})/°F$, $E_{al} = 10(10^3)$ ksi, $\alpha_{cu} = 9{,}4(10^{-6})/°F$, $E_{cu} = 18(10^3)$ ksi. Determinar a tensão normal média em cada haste se $T_2 = 200°F$.

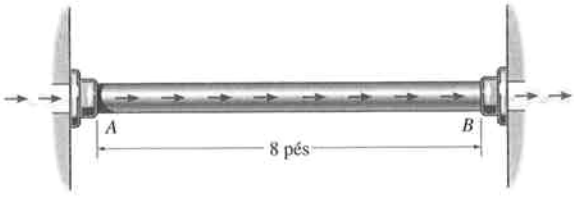
4.86. Os dois segmentos de haste circular, um de alumínio e o outro de cobre, estão presos a paredes rígidas de modo que haja uma folga de 0,008 pol entre eles quando $T_1 = 60°F$. Cada haste tem diâmetro de 1,25 pol, $\alpha_{al} = 13(10^{-6})/°F$, $E_{al} = 10(10^3)$ ksi, $\alpha_{cu} = 9{,}4(10^{-6})/°F$, $E_{cu} = 18(10^3)$ ksi. Determinar a tensão normal média em cada haste se $T_2 = 300°F$ e calcular também o novo comprimento do segmento de alumínio.



Problemas 4.85/4.86

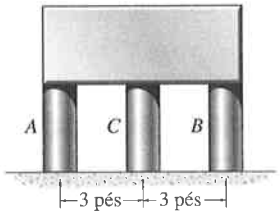
4.87. O tubo é feito de aço A-36 e está acoplado aos colares A e B. Quando a temperatura é de 60° F, não há carga axial sobre ele. Supondo que o gás quente transportado no tubo provoque o aumento em sua temperatura de $\Delta T = (40 + 15x)°F$, onde x é expresso em pés, determinar a tensão normal média no tubo. O diâmetro interno é de 2 pol, e a espessura da parede é de 0,15 pol.

***4.88.** O tubo de bronze 86100 tem raio interno de 0,5 pol, e sua parede tem espessura de 0,2 pol. Supondo que o gás que flui através dele mude a temperatura do tubo uniformemente de $T_A = 200°F$ em A para $T_B = 60°F$ em B, determinar a força axial que ele exerce sobre as paredes. O tubo foi instalado entre as paredes quando $T = 60°F$.



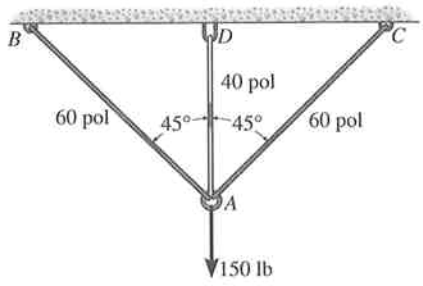
Problemas 4.87/4.88

4.89. O bloco rígido tem um peso de 80 kip e deve ser suportado pelos postes A e B, feitos de aço A-36, e pelo poste C, feito de latão C83400. Supondo que todos os postes tenham o mesmo comprimento original antes de carregados, determinar a tensão normal média desenvolvida em cada um quando o poste C é aquecido de modo que sua temperatura aumenta 20°F. Cada poste tem área da seção transversal de 8 pol^2.



Problema 4.89

4.90. Os arames AB e AC são de aço e o arame AD é de cobre. Antes de ser aplicada a força de 150 lb, AB e AC têm 60 pol de comprimento cada um e AD tem 40 pol. Supondo que a temperatura suba para 80°F, determinar a força necessária em cada arame para suportar a carga. Supor, também, que $E_{aço} = 29(10^3)$ ksi, $E_{cu} = 17(10^3)$ ksi, $\alpha_{aço} = 8(10^{-6})/°F$, $\alpha_{cu} = 9{,}60\ (10^{-6})/°F$. Cada arame tem área da seção transversal de 0,0123 pol^2.

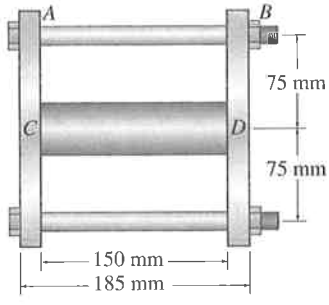


Problema 4.90

4.91. O parafuso de aço tem diâmetro de 7 mm e está instalado em uma luva de alumínio como mostrado. A luva tem diâmetro interno de 8 mm e diâmetro externo de 10 mm. A porca em A é ajustada de modo que fica apenas apertada contra a luva. Se o conjunto está inicialmente em uma temperatura $T_1 = 20°C$ e depois é aquecido até $T_2 = 100°C$, qual a tensão normal média no parafuso e na luva? $E_{aço} = 200$ GPa, $E_{al} = 70$ GPa, $\alpha_{aço} = 14(10^{-6})/°C$, $\alpha_{al} = 23(10^{-6})/°C$.

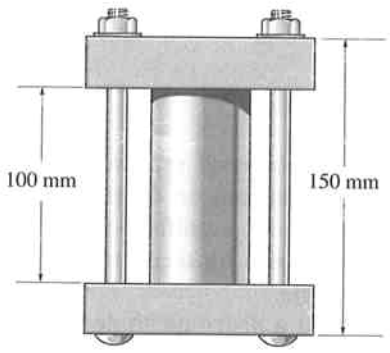
Problema 4.91

***4.92.** O tubo CD de alumínio 2014-T6 é colocado no fixador e os parafusos do fixador são apertados de leve. Supondo que o conjunto seja submetido a um aumento de temperatura de $\Delta T = 50°C$, determinar a tensão normal média desenvolvida no tubo e no parafuso. Supor, também, que os cabeçotes do fixador são rígidos e que os parafusos são de aço A-36. Os parafusos têm diâmetro de 14 mm; o tubo tem diâmetro externo de 35 mm e sua parede tem espessura de 2 mm.



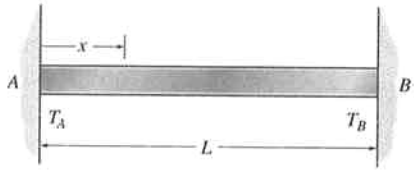
Problema 4.92

4.93. O cilindro de 50 mm de diâmetro, feito de magnésio Am 1004-T61, é colocado no fixador quando a temperatura é $T_1 = 15°C$. Supondo que os dois parafusos do fixador, feitos de aço inoxidável 304, tenham diâmetro de 10 mm e apertem o cilindro de leve com força desprezível contra as garras rígidas, determinar a temperatura em que a tensão normal média, tanto no magnésio como no aço, torna-se 12 MPa.



Problema 4.93

4.94. A barra tem área da seção transversal A, comprimento L, módulo de elasticidade E e coeficiente de expansão térmica α. Sua temperatura muda uniformemente ao longo do comprimento, indo de uma temperatura inicial T_A em A para T_B em B, de modo que, em qualquer ponto x ao longo da barra, $T = T_A + x(T_B - T_A)/L$. Determinar a força que a barra exerce sobre as paredes rígidas. Inicialmente, não há força axial sobre ela.



Problema 4.94

4.7 CONCENTRAÇÕES DE TENSÃO

Na Seção 4.1 atentou-se para o fato de que, quando uma força axial é aplicada em um elemento, cria-se uma distribuição de tensão complexa em uma região localizada do ponto de aplicação da carga. Tais distribuições de tensão típicas foram mostradas na Figura 4.1. Distribuições de tensão complexas aparecem não apenas sob cargas concentradas, mas também nas seções em que a área da seção transversal muda. Como exemplo, consideremos a barra da Figura 4.21*a*, sujeita a uma carga axial P. Pode-se verificar que as retas da grelha, antes horizontais e verticais, defletem-se em um padrão irregular em torno do furo central. A tensão normal máxima ocorre na seção *a–a*, cortada pela *menor* área da seção transversal. Desde que o material comporte-se de maneira linear-elástica, a distribuição de tensão que atua na seção é determinada tanto por análise matemática, usando-se a teoria da elasticidade, como experimentalmente, medindo-se a deformação normal na seção *a–a* e calculando-se a tensão pela lei de Hooke, $\sigma = E\epsilon$. Independentemente do método usado, a forma geral da distribuição de tensão será como a mostrada na Figura 4.21*b*. De modo similar, se a barra sofrer uma redução em sua seção transversal, determinada por curvas de concordância como indicado na Figura 4.22*a*, então, novamente, a tensão normal máxima ocorrerá na *menor* área da seção transversal, seção *a–a*, e a distribuição de tensão será como a mostrada na Figura 4.22*b*.

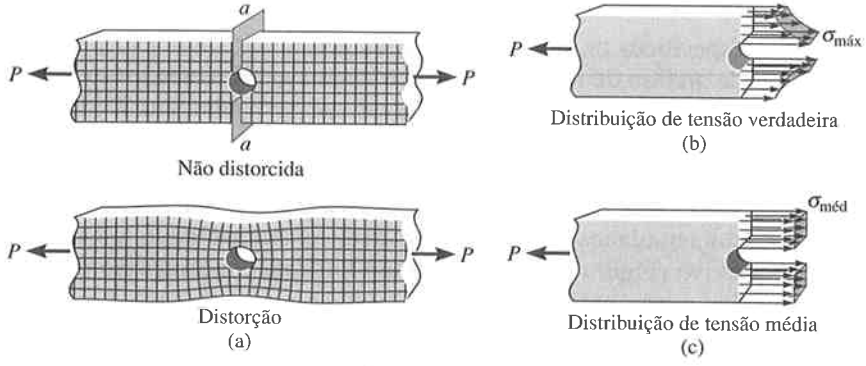
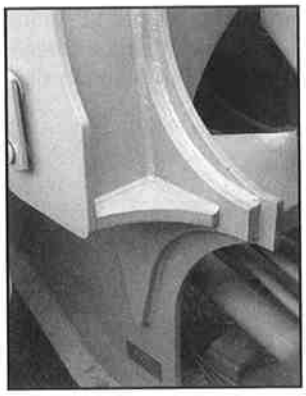


Figura 4.21



Com freqüência, concentrações de tensão surgem nos cantos vivos de máquinas pesadas. Os engenheiros podem atenuar esse efeito soldando contentores em cada canto.

Em ambos os casos, o *equilíbrio da força* requer que a intensidade da *força resultante* desenvolvida pela distribuição de tensão seja igual a P. Em outras palavras,

$$P = \int_A \sigma \, dA \tag{4.6}$$

Como afirmamos na Seção 1.4, essa integral representa *graficamente* o *volume* sob cada um dos diagramas de distribuição de tensão mostrados na Figura 4.21*b* ou na Figura 4.22*b*. Além disso, o equilíbrio de momento requer que cada distribuição de tensão seja simétrica na seção transversal, de modo que **P** passe pelo *centróide* de cada *volume*.

Na prática da engenharia, no entanto, a distribuição de tensão verdadeira *não* precisa ser determinada. Em vez disso, apenas a *tensão máxima* nessas seções deve ser conhecida e o elemento é então projetado para resistir a essa tensão quando a força axial **P** for aplicada. Nos casos em que a área da seção transversal muda, como os já discutidos, valores específicos da tensão normal máxima na seção crítica são determinados por métodos experimentais ou técnicas matemáticas avançadas que empregam a teoria da elasticidade. Em geral, os resultados dessas investigações são que empregam informados em forma gráfica por meio do ***fator de concentração de tensão*** K. Definimos o K como a relação entre a tensão máxima e a tensão média que atuam sobre a menor seção transversal, isto é:

$$K = \frac{\sigma_{máx}}{\sigma_{méd}} \tag{4.7}$$

Desde que K seja conhecido e a tensão normal média tenha sido calculada por $\sigma_{méd} = P/A$, onde A é a *menor* área da seção transversal (figuras 4.21*c* e 4.22*c*), então, pela equação anterior, a tensão máxima na seção transversal é $\sigma_{máx} = K(P/A)$.

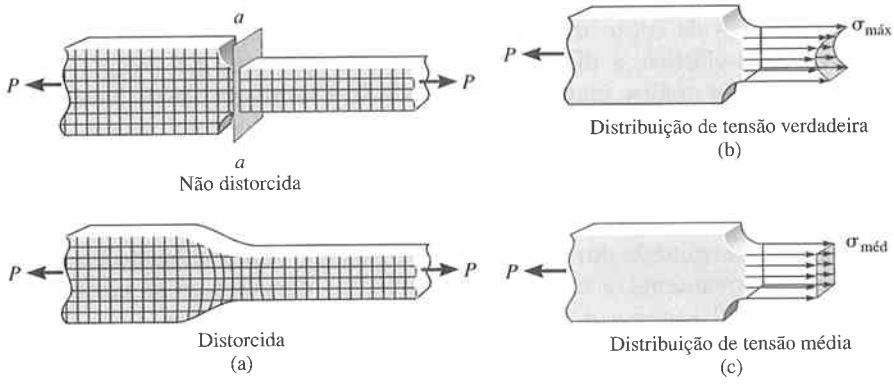
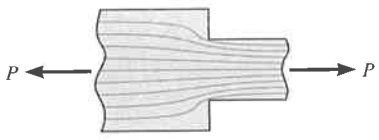


Figura 4.22

Valores específicos de K são informados geralmente sob a forma gráfica nos manuais de análise de tensão. Exemplos de tais gráficos são mostrados nas figuras 4.24 e 4.25, respectivamente.[2] Observar, em particular, que K independe das propriedades do material da barra; em vez disso, *depende* apenas da *geometria* da barra e do tipo de descontinuidade. À medida que a descontinuidade, r, *decresce*, a concentração de tensão aumenta. Por exemplo, se uma barra requer uma mudança na seção transversal, foi determinado teoricamente que um canto vivo (Figura 4.23*a*), produz um fator de concentração de tensão maior que 3. Em outras palavras, a tensão normal máxima será três vezes maior



(a)

Figura 4.23

[2] Consultar Lipson, C. e Juvinall, R. C., *Handbook of stress and strength*, Macmillan, 1963.

que a tensão normal média na seção menor. Entretanto, essa tensão pode ser reduzida a, digamos, 1,5 introduzindo-se uma curva de concordância (Figura 4.23*b*). Pode-se ter uma redução adicional, ainda, por meio de sulcos ou furos pequenos colocados na zona de transição (figuras 4.23*c* e 4.23*d*). Em todos esses casos, os formatos ajudam a reduzir a rigidez do material que circunda os cantos, de modo que ambas, deformação e tensão, sejam distribuídas mais igualmente em toda a barra.

Os fatores de concentração de tensão mostrados nas figuras 4.24 e 4.25 foram determinados com base em um carregamento estático, sob a hipótese de que a tensão no material não excede o limite de proporcionalidade. Se o material for *muito frágil*, o limite de proporcionalidade pode estar na tensão de ruptura, de modo que para esse material a falha começa *no* ponto de concentração de tensão quando o limite de proporcionalidade é atingido. Basicamente, nesse ponto começa a se formar uma trinca e uma concentração de tensão maior se desenvolve na *ponta* dessa trinca. Isso, por sua vez, provoca a progressão da trinca ao longo da seção transversal, o que resulta em fratura súbita. Por essa razão, é muito importante usar fatores de concentração de tensão no projeto quando materiais frágeis são usados. Por outro lado, se o material for dúctil e estiver sujeito a uma carga estática, os calculistas geralmente desprezam os fatores de concentração de tensão, uma vez que qualquer tensão que exceda o limite de proporcionalidade não resultará em trinca. Em vez disso, o material tem resistência de reserva devido ao escoamento e ao endurecimento por deformação (encruamento). Na próxima seção discutiremos os efeitos provocados por esse fenômeno.

Concentrações de tensão também são responsáveis por muitas falhas em elementos estruturais ou elementos mecânicos sujeitos a *carregamentos cíclicos*. Nesses casos, uma concentração de tensão provoca trinca no material se a tensão excede o limite de resistência à fadiga do material, seja este dúctil ou frágil. O material *localizado* na ponta da trinca permanece no *estado frágil* e, desse modo, a trinca continua a crescer, levando a uma fratura progressiva. Portanto, os engenheiros envolvidos no projeto de tais elementos devem procurar meios de limitar o dano provocado por fadiga.

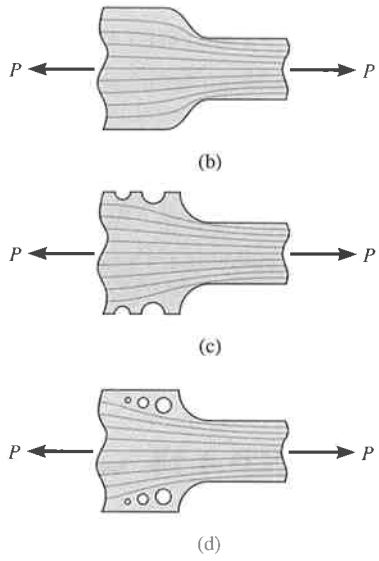
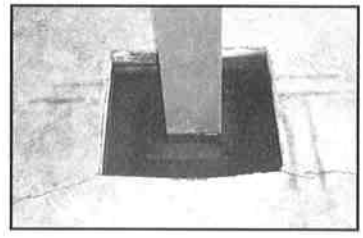


Figura 4.23



O trincamento ocorreu em todos os cantos desta laje devido ao encolhimento do concreto durante a curva. Essas concentrações de tensão podem ser evitadas pela presença de um buraco circular.

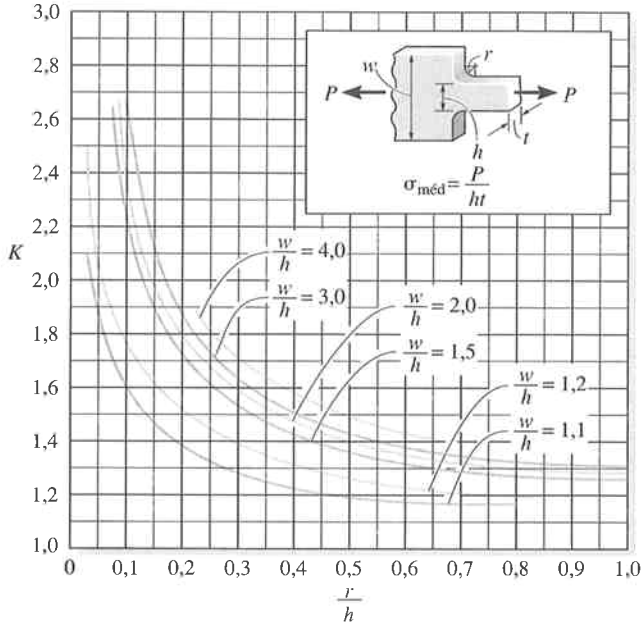


Figura 4.24

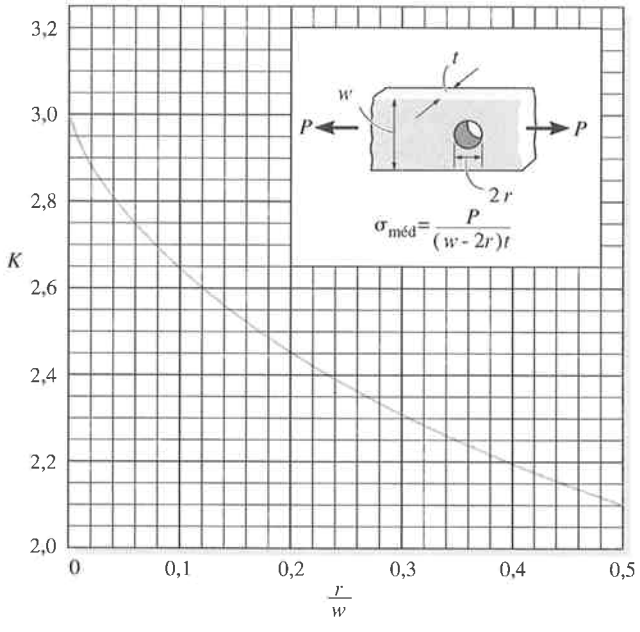


Figura 4.25

PONTOS IMPORTANTES

- *Concentrações de tensão* ocorrem nas seções em que a área da seção transversal muda subitamente. Quanto mais severa a mudança, maior a concentração de tensão.
- Para projeto ou análise, é necessário apenas determinar a tensão máxima qua atua sobre a seção transversal de menor área. Isso é feito usando-se um *fator de concentração de tensão*, K, determinado por meio de experimento e que só é uma função da geometria do corpo-de-prova.
- Normalmente, a concentração de tensão em um corpo-de-prova dúctil sujeito a carregamento estático *não* precisa ser considerada no projeto; entretanto, se o material for *frágil* ou sujeito a carregamentos *cíclicos*, então as concentrações de tensão tornam-se importantes.

EXEMPLO 4.13

Uma barra de aço tem as dimensões mostradas na Figura 4.26. Supondo que a tensão admissível seja $\sigma_{adm} = 16{,}2$ ksi, determinar a maior força axial P que a barra pode suportar.

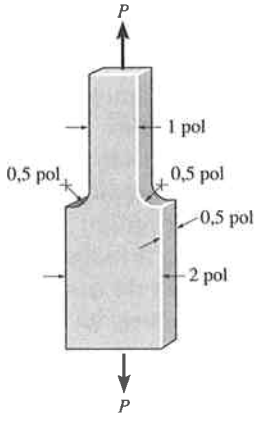


Figura 4.26

SOLUÇÃO

Como há uma curva de concordância, o fator de concentração de tensão pode ser determinado usando-se o gráfico da Figura 4.24. Calculando os parâmetros geométricos necessários, temos:

$$\frac{r}{h} = \frac{0{,}5 \text{ pol}}{1 \text{ pol}} = 0{,}50$$

$$\frac{w}{h} = \frac{2 \text{ pol}}{1 \text{ pol}} = 2$$

Assim, pelo gráfico:

$$K = 1{,}4$$

Calculando a tensão normal média na *menor* seção transversal, temos:

$$\sigma_{méd} = \frac{P}{(1 \text{ pol})(0{,}5 \text{ pol})} = 2P$$

Aplicando a Equação 4.7 com $\sigma_{adm} = \sigma_{máx}$, temos:

$$\sigma_{adm} = K\sigma_{méd}$$
$$16{,}2 \text{ ksi} = 1{,}4(2P)$$
$$P = 5{,}79 \text{ kip}$$ ***Resposta***

EXEMPLO 4.14

A tira de aço mostrada na Figura 4.27 está submetida a uma carga axial de 80 kN. Determinar a tensão normal máxima desenvolvida na tira e o deslocamento de uma de suas extremidades em relação à outra. O aço tem limite de escoamento $\sigma_E = 700$ MPa e $E_{aço} = 200$ GPa.

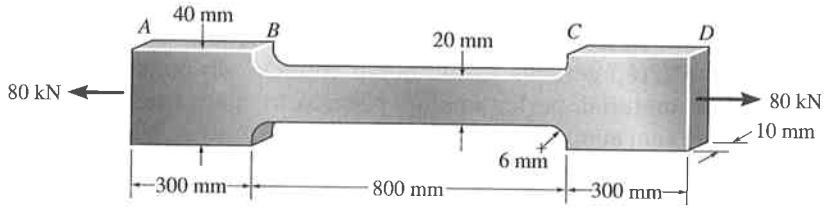


Figura 4.27

SOLUÇÃO

Tensão Normal Máxima. Por inspeção, a tensão normal máxima ocorre na menor seção transversal, onde a curva de concordância começa em B ou C. O fator de concentração de tensão é determinado a partir da Figura 4.23. Requer-se que:

$$\frac{r}{h} = \frac{6 \text{ mm}}{20 \text{ mm}} = 0{,}3; \qquad \frac{w}{h} = \frac{40 \text{ mm}}{20 \text{ mm}} = 2$$

Assim, $K = 1{,}6$.

A tensão máxima é, portanto,

$$\sigma_{máx} = K\frac{P}{A} = 1{,}6\left[\frac{80(10^3) \text{ N}}{(0{,}02 \text{ m})(0{,}01 \text{ m})}\right] = 640 \text{ MPa} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Observe que o material permanece elástico, uma vez que 640 MPa $<$ $\sigma_E = 700$ MPa.

Deslocamento. Aqui desprezamos as deformações localizadas em torno da carga aplicada e na mudança súbita da seção transversal da curva de concordância (princípio de Saint-Venant). Temos:

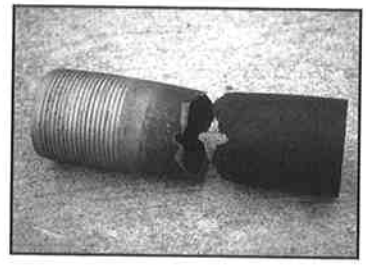
$$\delta_{A/D} = \sum\frac{PL}{AE} = 2\left\{\frac{80(10^3) \text{ N}(0{,}3 \text{ m})}{(0{,}04 \text{ m})(0{,}01 \text{ m})[200(10^9) \text{ N/m}^2]}\right\} + \left\{\frac{80(10^3) \text{ N}(0{,}8 \text{ m})}{(0{,}02 \text{ m})(0{,}01 \text{ m})[200(10^9) \text{ N/m}^2]}\right\}$$

$$\delta_{A/D} = 2{,}20 \text{ mm} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

*4.8 DEFORMAÇÃO AXIAL INELÁSTICA

Até este ponto, consideramos somente cargas que fazem o material de um elemento comportar-se elasticamente. Algumas vezes, entretanto, o elemento é projetado de modo que a carga provoque o escoamento do material e, dessa forma, deforme-o permanentemente. Tais elementos são feitos, em geral, de metal altamente dúctil, como aço recozido com baixo teor de carbono, que possui diagrama tensão-deformação similar ao da Figura 3.6 e é *modelado* como mostrado na Figura 4.28*b*. Um material que exibe esse comportamento é denominado ***elástico perfeitamente plástico ou elastoplástico.***

Para ilustrar fisicamente como tal material comporta-se, consideremos a barra da Figura 4.28*a*, submetida à carga axial **P**. Se a carga provoca o desenvolvimento de uma *tensão elástica* $\sigma = \sigma_1$ na barra, então, de acordo com a Equação 4.6, o *equilíbrio* requer $P = \int \sigma_1 \, dA = \sigma_1 A$. Além disso, a tensão σ_1



A falha deste tubo de aço ocorreu na menor área de sua seção transversal, que é através do furo. Observe o material que escoou ao redor da superfície fraturada antes do rompimento.

provoca a deformação ϵ_1 como indicado no diagrama tensão-deformação (Figura 4.28*b*). Se a carga P for aumentada para P_p de forma que cause escoamento do material, isto é, $\sigma = \sigma_E$, então $P_p = \int \sigma_E \, dA = \sigma_E A$. A carga P_p é chamada *carga plástica*, uma vez que representa a carga máxima suportada por um material elastoplástico. Nesse caso, as deformações *não* são definidas de maneira única. Ao contrário, no instante em que σ_E é atingida, a barra é submetida *primeiro* à deformação de escoamento ϵ_E (Figura 4.28*b*), após o que a barra *continuará a escoar* (ou alongar-se) de modo que as deformações ϵ_2 — depois ϵ_3 etc. — serão geradas. Como nosso 'modelo' do material exibe comportamento de material perfeitamente plástico, o alongamento continuará indefinidamente sem aumento de carga. Na realidade, porém, o material, depois de algum escoamento, começará a endurecer por deformação, de modo que a resistência extra que ele obtém *impedirá* qualquer deformação adicional. Como resultado, qualquer projeto baseado nesse comportamento será seguro, porque o endurecimento por deformação (encruamento) fornece potencial para o material suportar uma carga *adicional* se necessário.

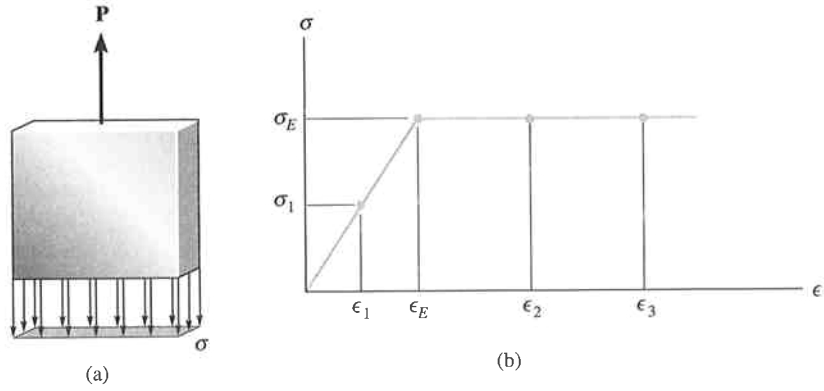


Figura 4.28

Consideremos agora o caso de uma barra com um furo conforme mostrado na Figura 4.29*a*. Como a intensidade de **P** é aumentada, ocorre uma concentração de tensão no material próximo ao furo ao longo da seção *a–a*. A tensão, nesse caso, atingirá um valor máximo de, digamos, $\sigma_{máx} = \sigma_1$, e tem *deformação elástica* correspondente ϵ_1 (Figura 4.29*b*). As tensões e correspondentes deformações em outros pontos ao longo da seção transversal serão menores, como indicado pela distribuição de tensão mostrada na Figura 4.29*c*. Como esperado, o equilíbrio requer que $P = \int \sigma \, dA$. Em outras palavras, P é geometricamente equivalente ao 'volume' contido na distribuição de tensão. Se agora a carga for aumentada para P', de modo que $\sigma_{máx} = \sigma_E$, o material

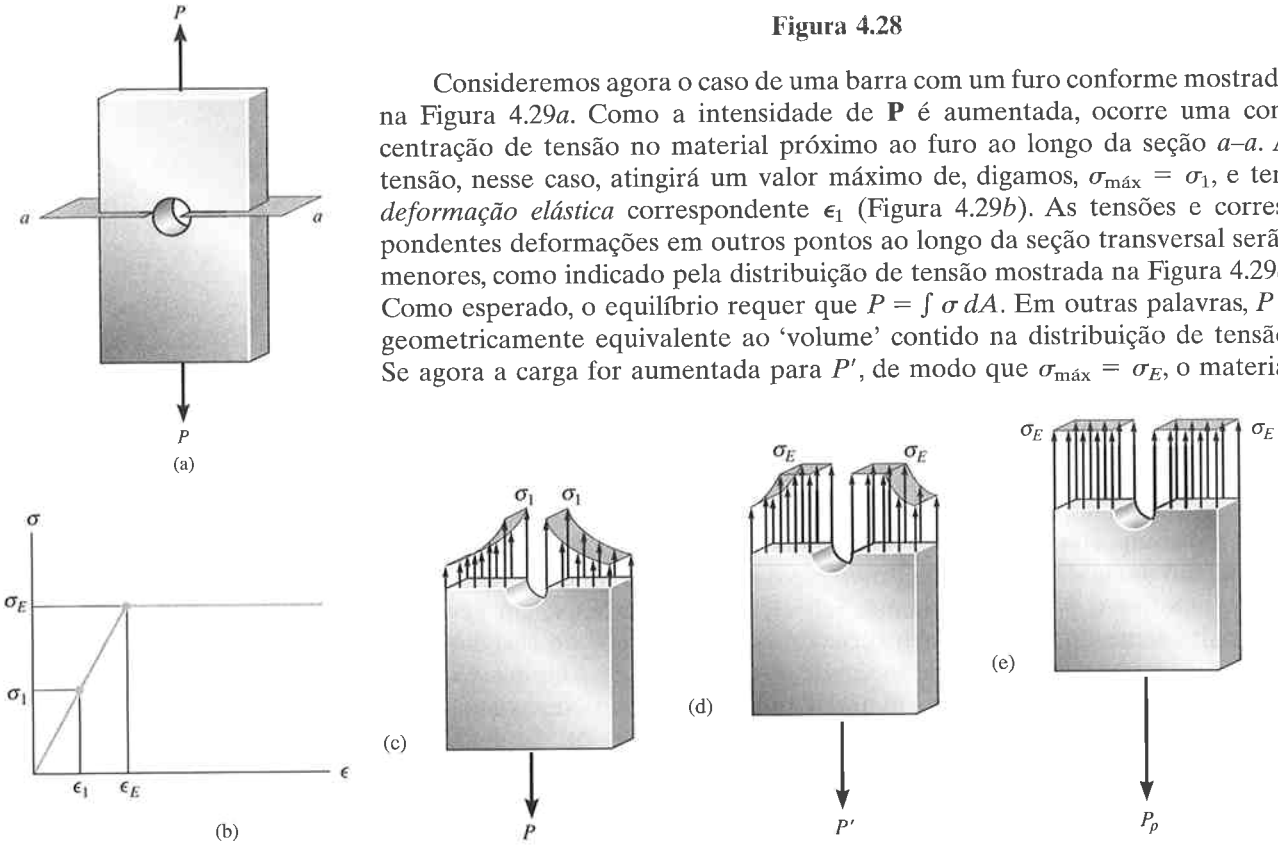


Figura 4.29

começará a escoar para longe do furo, até que a condição de equilíbrio $P' = \int \sigma\, dA$ seja satisfeita (Figura 4.29*d*). Como se vê, essa condição produz uma distribuição de tensão que tem um 'volume' geometricamente *maior* do que o mostrado na Figura 4.29*c*. Um aumento ainda maior da carga provocará o escoamento do material em *toda a seção transversal*, até que *nenhuma carga maior* possa ser suportada pela barra. Essa *carga plástica* P_p é mostrada na Figura 4.29*e*. Ela é calculada pela condição de equilíbrio:

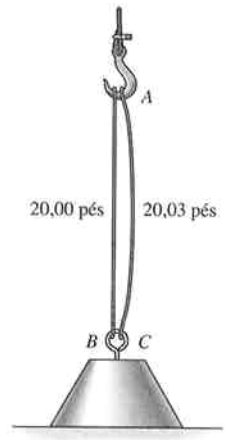
$$P_p = \int_A \sigma_E\, dA = \sigma_E A \tag{4.7}$$

Aqui σ_E é a tensão de escoamento e A é a área da seção transversal da barra no corte *a–a*.

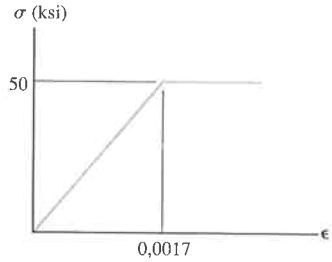
Os exemplos a seguir ilustram numericamente como esses conceitos aplicam-se a outros problemas em que o material tem comportamento elastoplástico.

EXEMPLO 4.15

Dois arames de aço são usados para suspender o peso de 3 kip (Figura 4.30*a*). O arame AB tem comprimento de 20,00 pés sem estiramento, e o arame AC tem 20,03 pés sem estiramento. Supondo que cada arame tenha área da seção transversal de 0,05 pol^2 e o aço possa ser considerado elástico perfeitamente plástico como mostrado pelo gráfico $\sigma-\epsilon$ da Figura 4.30*b*, determinar a força em cada arame e seu alongamento.



(a)



(b)

(c)

Figura 4.30

SOLUÇÃO

Por inspeção, o arame AB começa a suportar o peso quando o gancho é levantado. Entretanto, se esse arame esticar mais do que 0,03 pé, a carga será então suportada por ambos os arames. Para que essa condição ocorra, a deformação no arame AB deve ser:

$$\epsilon_{AB} = \frac{0{,}03 \text{ pé}}{20 \text{ pés}} = 0{,}0015$$

que é menor do que a deformação elástica máxima, $\epsilon_E = 0{,}0017$ (Figura 4.30*b*). Além disso, quando acontece essa condição, a tensão no arame AB é determinada na Figura 4.30*b* por proporção, isto é:

$$\frac{0{,}0017}{50 \text{ ksi}} = \frac{0{,}0015}{\sigma_{AB}}$$

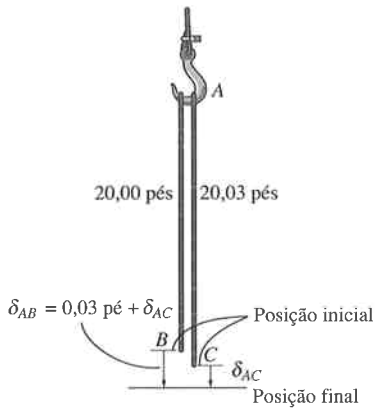
$$\sigma_{AB} = 44{,}12 \text{ ksi}$$

Assim, a força no arame é:

$$F_{AB} = \sigma_{AB} A = (44{,}12 \text{ ksi})(0{,}05 \text{ pol}^2) = 2{,}21 \text{ kip}$$

Como o peso a ser suportado é de 3 kip, concluímos que ambos os arames devem ser usados para suportá-lo.

Uma vez suportado o peso, a tensão nos arames depende da deformação correspondente. Há três possibilidades, ou seja, as deformações em ambos os arames são elásticas, o arame AB deforma-se plasticamente enquanto o arame AC deforma-se elasticamente, ou ambos os arames deformam-se plasticamente. Começemos por supor que ambos os arames permaneçam *elásticos*. O exame



(d)

Figura 4.30

do diagrama de corpo livre do peso suspenso (Figura 4.30*c*) indica que o problema é estaticamente indeterminado. A equação de equilíbrio é:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad T_{AB} + T_{AC} - 3 \text{ kip} = 0 \tag{1}$$

Como AC é 0,03 pé maior do que AB, então, pela Figura 4.30*d*, a compatibilidade do deslocamento das extremidades B e C requer que:

$$\delta_{AB} = 0{,}03 \text{ pé} + \delta_{AC} \tag{2}$$

O módulo de elasticidade (Figura 4.30*b*) é $E_{aço} = 50 \text{ ksi}/0{,}0017 = 29{,}4(10^3)$ ksi. Como esta é uma análise linear-elástica, a relação carga-deslocamento é $\delta = PL/AE$ e, portanto,

$$\frac{T_{AB}(20{,}00 \text{ pés})(12 \text{ pol/pé})}{(0{,}05 \text{ pol}^2)[29{,}4(10^3) \text{ ksi}]} = 0{,}03 \text{ pé}(12 \text{ pol/pé}) + \frac{T_{AC}(20{,}03 \text{ pés})(12 \text{ pol/pé})}{(0{,}05 \text{ pol}^2)[29{,}4(10^3) \text{ ksi}]}$$

$$20{,}00T_{AB} = 44{,}11 + 20{,}03T_{AC} \tag{3}$$

Resolvendo as equações 1 e 3, temos:

$$T_{AB} = 2{,}60 \text{ kip}$$
$$T_{AC} = 0{,}400 \text{ kip}$$

A tensão no arame AB é, assim,

$$\sigma_{AB} = \frac{2{,}60 \text{ kip}}{0{,}05 \text{ pol}^2} = 52{,}0 \text{ ksi}$$

Essa tensão é maior do que a tensão elástica máxima admissível (σ_E = 50 ksi) e, portanto, o arame AB torna-se deformado plasticamente e suporta a carga máxima de:

$$T_{AB} = 50 \text{ ksi } (0{,}05 \text{ pol}^2) = 2{,}50 \text{ kip} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Pela equação 1:

$$T_{AC} = 0{,}500 \text{ kip} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Observe que o arame AC permanece elástico porque a tensão nele é σ_{AC} = 0,500 kip/0,05 pol^2 = 10 ksi < 50 ksi. A deformação elástica correspondente é determinada pela proporção (Figura 4.30*b*), ou seja:

$$\frac{\epsilon_{AC}}{10 \text{ ksi}} = \frac{0{,}0017}{50 \text{ ksi}}$$
$$\epsilon_{AC} = 0{,}000340$$

O alongamento de AC é, então:

$$\delta_{AC} = (0{,}000340)(20{,}03 \text{ pés}) = 0{,}00681 \text{ pé} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Aplicando a Equação 2, temos que o alongamento de AB é, então:

$$\delta_{AB} = 0{,}03 \text{ pé} + 0{,}00681 \text{ pé} = 0{,}0368 \text{ pé} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

EXEMPLO 4.16

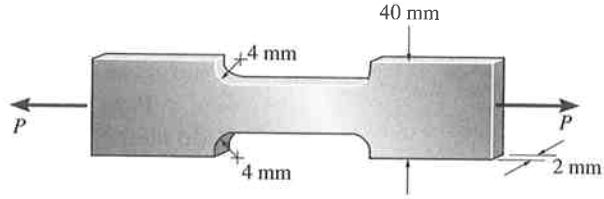
A barra da Figura 4.31*a* é feita de aço e supõe-se que seja elástica perfeitamente plástica, com σ_E = 250 MPa. Determinar (*a*) o valor máximo da carga P que pode ser aplicada sem provocar escoamento do aço e (*b*) o valor máximo de P que a barra pode suportar. Esquematizar a distribuição de tensão na seção crítica para cada caso.

SOLUÇÃO

Parte (a). *Quando o material se comporta* elasticamente, devemos usar um fator de concentração de tensão determinado pela Figura 4.23 que seja único para a geometria da barra. Aqui:

$$\frac{r}{h} = \frac{4 \text{ mm}}{(40 \text{ mm} - 8 \text{ mm})} = 0{,}125$$

$$\frac{w}{h} = \frac{40 \text{ mm}}{(40 \text{ mm} - 8 \text{ mm})} = 1{,}25$$



(a)

A carga máxima, sem provocar escoamento, ocorre quando $\sigma_{máx} = \sigma_E$. A tensão normal média é $\sigma_{méd} = P/A$. Usando a Equação 4.7, temos:

$$\sigma_{máx} = K\sigma_{méd}; \qquad \sigma_E = K\left(\frac{P_E}{A}\right)$$

$$250(10^6) \text{ Pa} = 1{,}75\left[\frac{P_E}{(0{,}002 \text{ m})(0{,}032 \text{ m})}\right]$$

$$P_E = 9{,}14 \text{ kN} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

(b)

Essa carga foi calculada usando-se a *menor* seção transversal. A distribuição da tensão resultante é mostrada na Figura 4.31*b*. No equilíbrio, o 'volume' contido nessa distribuição deve ser igual a 9,14 kN.

Parte (b). A carga máxima suportada pela barra provoca o escoamento de *todo o material* da menor seção transversal. Portanto, à medida que P é aumentada para a *carga plástica* P_p, a distribuição de tensão do estado elástico mostrado na Figura 4.31*b* muda gradualmente para o estado plástico mostrado na Figura 4.31*c*. Requeremos que:

$$\sigma_E = \frac{P_p}{A}$$

$$250(10^6) \text{ Pa} = \frac{P_p}{(0{,}002 \text{ m})(0{,}032 \text{ m})}$$

$$P_p = 16{,}0 \text{ kN} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

(c)

Figura 4.31

Aqui, P_p é igual ao 'volume' contido na distribuição de tensão que, neste caso, é $P_p = \sigma_E A$.

*4.9 TENSÃO RESIDUAL

Se um elemento ou grupo de tais elementos com carga axial formar um sistema estaticamente indeterminado que pode suportar tanto cargas de tração como de compressão, então o excesso de carga externa, que provoca o escoamento do material, criará *tensões residuais* nos elementos quando a carga for retirada. A razão para isso tem que ver com a recuperação elástica do material ocorrida durante a retirada da carga. Como exemplo, consideremos um elemento prismático feito de material elastoplástico com diagrama tensão-deformação OAB, como mostrado na Figura 4.32. Se uma carga axial produzir uma tensão σ_E no material e uma deformação plástica ϵ_C correspondente, então, quando a carga for *retirada*, o material responderá elasticamente e seguirá a reta CD a fim de recuperar alguma deformação plástica. A recuperação total até a tensão zero no ponto O' será possível somente se o

elemento for estaticamente determinado, visto que as reações do apoio do elemento devem ser nulas quando a carga for retirada. Nessas circunstâncias, o membro ficará permanentemente deformado e, assim, sua deformação permanente será $\epsilon_{O'}$. Se o elemento for *estaticamente indeterminado*, a retirada da carga externa causará, no entanto, resposta das forças do apoio à recuperação elástica *CD*. Como essas forças impedem a recuperação total do elemento, induzem ***tensões residuais*** nesse elemento.

Para resolver um problema desse tipo, o ciclo completo de carga e descarga do elemento pode ser considerado como a *superposição* de uma carga positiva (carregamento) sobre uma carga negativa (descarga). O carregamento, de *O* a *C*, resulta em uma distribuição de tensão plástica, enquanto a descarga, ao longo de *CD*, resulta apenas em uma distribuição de tensão elástica. A superposição requer que as cargas se anulem; entretanto, as distribuições de tensão não se anulam e a tensão residual permanece.

O exemplo a seguir ilustra numericamente esses conceitos.

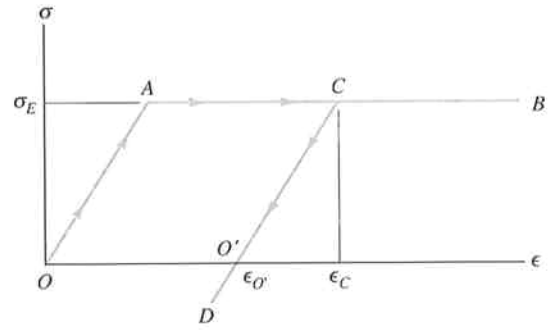


Figura 4.32

EXEMPLO 4.17

A haste mostrada na Figura 4.33*a* tem raio de 5 mm e é feita de um material elástico perfeitamente plástico, para o qual $\sigma_E = 420$ MPa e $E = 70$ GPa (Figura 4.33*b*). Supondo que uma força de $P = 60$ kN seja aplicada à haste e depois retirada, determinar a tensão residual na haste e o deslocamento permanente do colar em *C*.

SOLUÇÃO

O diagrama de corpo livre da haste é mostrado na Figura 4.33*b*. Por inspeção, a haste é estaticamente indeterminada. A aplicação da carga **P** provoca uma das três possibilidades, a saber: ambos os segmentos *AC* e *CB* permanecem elásticos, *AC* fica plástico enquanto *CB* fica elástico, ou *AC* e *CB* ficam plásticos.[3]

Uma *análise elástica*, semelhante à discutida na Seção 4.4, produzirá $F_A = 45$ kN e $F_B = 15$ kN nos apoios. No entanto, isso resulta em uma tensão de:

$$\sigma_{AC} = \frac{45 \text{ kN}}{\pi(0{,}005 \text{ m})^2} = 573 \text{ MPa (compressão)} > \sigma_E = 420 \text{ MPa}$$

no segmento *AC* e:

$$\sigma_{CB} = \frac{15 \text{ kN}}{\pi(0{,}005 \text{ m})^2} = 191 \text{ MPa (tração)}$$

[3] A possibilidade de *CB* tornar-se plástico antes de *AC* não ocorrerá porque, quando o ponto *C* se deformar, a *deformação* em *AC* (visto que esse segmento mais curto) será sempre maior do que a deformação em *CB*.

no segmento CB. Como o material do segmento AC escoará, vamos supor que AC torne-se plástico, enquanto CB permanece elástico.

Nesse caso, a força máxima possível desenvolvida em AC é:

$$(F_A)_E = \sigma_E A = 420(10^3)\ \text{kN/m}^2[\pi(0{,}005\ \text{m})^2]$$
$$= 33{,}0\ \text{kN}$$

e pelo equilíbrio da haste (Figura 4.33*b*),

$$F_B = 60\ \text{kN} - 33{,}0\ \text{kN} = 27{,}0\ \text{kN}$$

A tensão em cada segmento da haste é, portanto:

$$\sigma_{AC} = \sigma_E = 420\ \text{MPa (compressão)}$$

$$\sigma_{CB} = \frac{27{,}0\ \text{kN}}{\pi(0{,}005\ \text{m})^2} = 344\ \text{MPa (tração)} < 420\ \text{MPa (OK)}$$

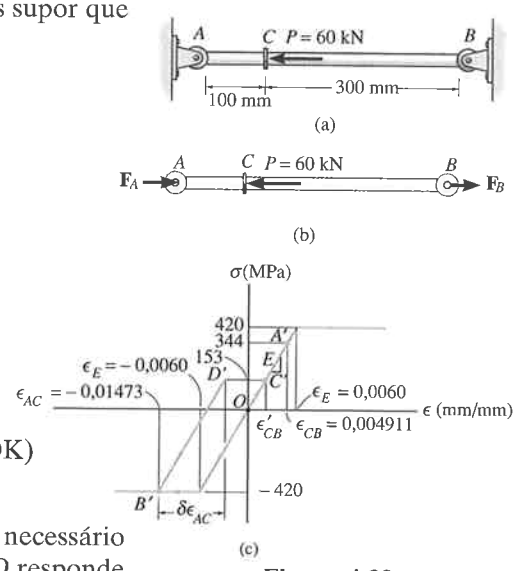


Figura 4.33

Tensão Residual. Para se obter a tensão residual, também é necessário conhecer a deformação em cada segmento devido à carga. Como CD responde elasticamente,

$$\delta_C = \frac{F_B L_{CB}}{AE} = \frac{(27{,}0\ \text{kN})(0{,}300\ \text{m})}{\pi(0{,}005\ \text{m})^2[70(10^6)\ \text{kN/m}^2]} = 0{,}001474\ \text{m}$$

Assim:

$$\epsilon_{CB} = \frac{\delta_C}{L_{CB}} = \frac{0{,}001474\ \text{m}}{0{,}300\ \text{m}} = +0{,}004913$$

Além disso, como δ_C é conhecido, a deformação em AC é:

$$\epsilon_{AC} = \frac{\delta_C}{L_{AC}} = -\frac{0{,}001474\ \text{m}}{0{,}100\ \text{m}} = -0{,}01474$$

Portanto, quando **P** é *aplicada*, o comportamento tensão-deformação do material no segmento CB move-se de O para A' (Figura 4.33*c*), e o comportamento tensão-deformação do material no segmento AC move-se de O para B'. Se a carga **P** for aplicada no sentido contrário — em outras palavras, se a carga for retirada —, ocorrerá uma resposta elástica, e as forças contrárias $F_A = 45$ kN e $F_B = 15$ kN serão aplicadas a cada segmento. Como calculado antes, essas forças produzem as tensões $\sigma_{AC} = 573$ MPa (tração) e $\sigma_{CB} = 191$ MPa (compressão) e, como resultado, a tensão residual em cada segmento será:

$$(\sigma_{AC})_r = -420\ \text{MPa} + 573\ \text{MPa} = 153\ \text{MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

$$(\sigma_{CB})_r = 344\ \text{MPa} - 191\ \text{MPa} = 153\ \text{MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

Essa tensão de tração é a *mesma* em ambos os segmentos, como esperado. Observe também que o comportamento tensão-deformação do segmento AC move-se de B' para D' na Figura 4.33*c*, enquanto o comportamento tensão-deformação do material no segmento CB move-se de A' para C'.

Deslocamento Permanente. Pela Figura 4.33*c*, a deformação residual em CB é:

$$\epsilon'_{CB} = \frac{\sigma}{E} = \frac{153(10^6)\ \text{Pa}}{70(10^9)\ \text{Pa}} = 0{,}002185$$

de modo que o deslocamento permanente de C é:

$$\delta_C = \epsilon'_{CB} L_{CB} = 0{,}002185(300\ \text{mm}) = 0{,}656\ \text{mm} \leftarrow \qquad \textit{Resposta}$$

Podemos obter esse resultado determinando também a deformação residual ϵ'_{AC} de AC (Figura 4.33*c*). Como a reta $B'D'$ tem declive E, então:

$$\delta\epsilon_{AC} = \frac{\delta\sigma}{E} = \frac{(420 + 153)10^6 \text{ Pa}}{70(10^9) \text{ Pa}} = 0{,}008185$$

Portanto:

$$\epsilon'_{AC} = \epsilon_{AC} + \delta\epsilon_{AC} = -0{,}01474 + 0{,}008185 = -0{,}006555$$

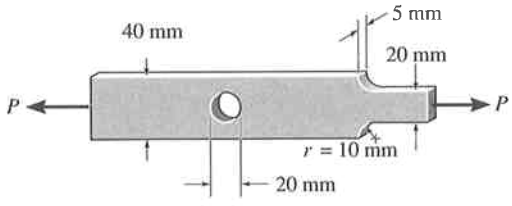
Finalmente:

$$\delta_C = \epsilon'_{AC} L_{AC} = -0{,}006555(100 \text{ mm}) = 0{,}656 \text{ mm} \leftarrow$$ ***Resposta***

PROBLEMAS

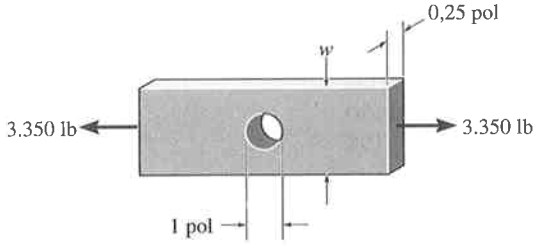
Lembrando: 1 kip = 1.000 lb e 1 ksi = 1.000 lb/pol²

4.95. Supondo que a tensão normal admissível para a barra seja $\sigma_{adm} = 120$ MPa, determinar a força axial máxima P que pode ser aplicada à barra.



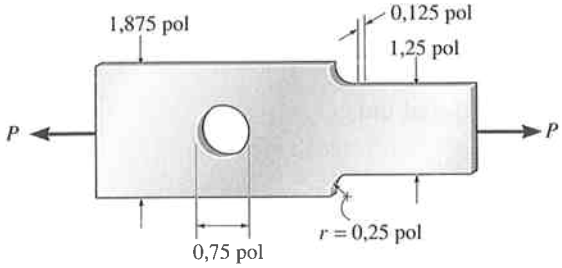
Problema 4.95

***4.96.** A peça deve ser feita de chapa de aço com 0,25 pol de espessura. Se for feito um furo de 1 pol em seu centro, determinar a largura aproximada w da chapa suficiente para que ela suporte uma força axial de 3.350 lb. A tensão admissível é $\sigma_{adm} = 22$ ksi.



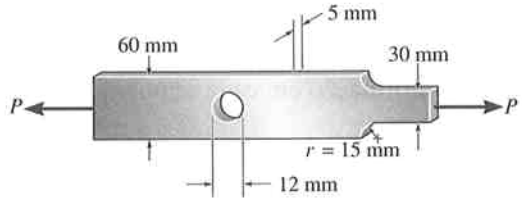
Problema 4.96

4.97. Determinar a tensão normal máxima desenvolvida na barra quando esta é submetida a uma tração $P = 2$ kip.



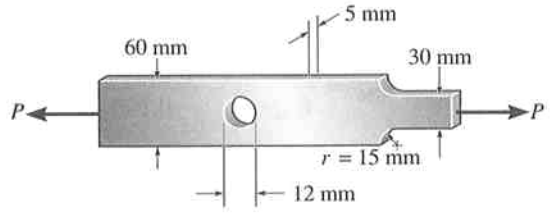
Problema 4.97

4.98. Determinar a tensão normal máxima desenvolvida na barra quando esta é submetida a uma tração $P = 8$ kN.



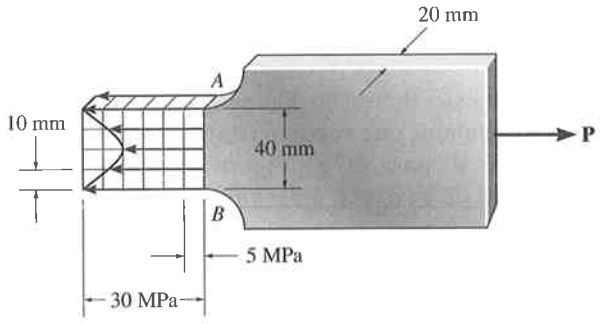
Problema 4.98

4.99. Supondo que a tensão normal admissível da barra seja $\sigma_{adm} = 120$ MPa, determinar a força axial máxima P que pode ser aplicada à barra.



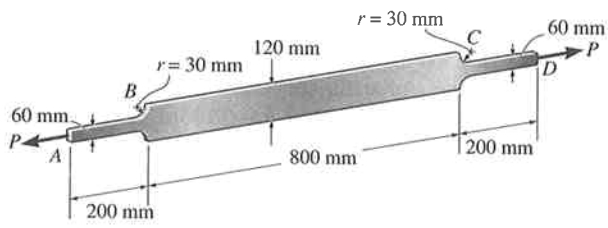
Problema 4.99

***4.100.** A distribuição da tensão resultante ao longo da seção AB da barra é mostrada na figura. Considerando essa distribuição, determinar a força axial resultante aproximada P aplicada à barra. Além disso, qual é o fator de concentração de tensão para essa geometria?



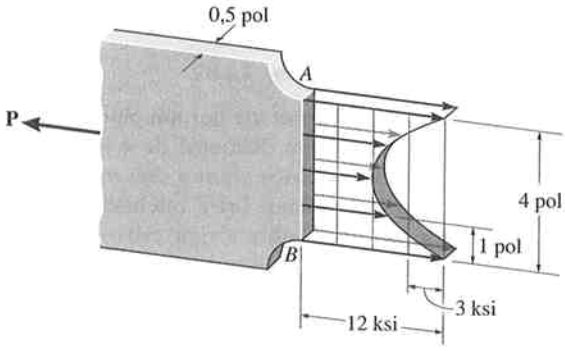
Problema 4.100

4.101. Uma chapa de aço A-36 tem espessura de 12 mm. Supondo que haja curvas de concordância em B e C e $\sigma_{adm} = 150$ MPa, determinar a carga axial máxima P que ela suporta. Calcular seu alongamento desprezando o efeito das curvas de concordância.



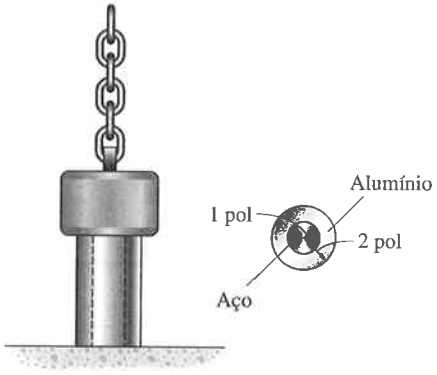
Problema 4.101

4.102. A distribuição da tensão resultante ao longo da seção AB da barra é mostrada. Considerando essa distribuição, determinar a força axial resultante aproximada P aplicada à barra. Além disso, qual é o fator de concentração de tensão para essa geometria?



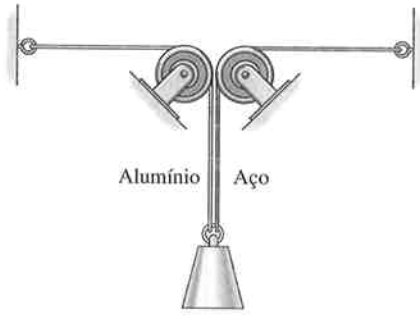
Problema 4.102

4.103. O peso de 300 kip é ajustado vagarosamente no topo de um poste feito de alumínio 2014-T6 com núcleo de aço A-36. Se ambos os materiais forem elásticos perfeitamente plásticos, qual será a tensão em cada um?



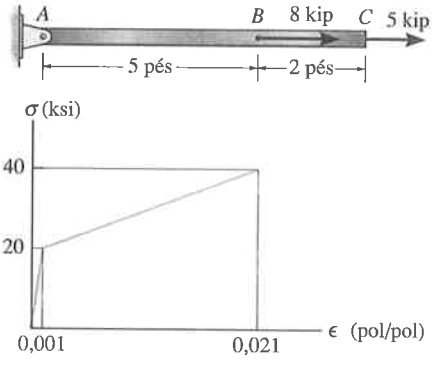
Problema 4.103

***4.104.** O peso está suspenso por arames de aço e alumínio de mesmo comprimento inicial, 3 m, e área da seção transversal de 4 mm^2. Supondo que os materiais sejam elásticos perfeitamente plásticos, com $(\sigma_E)_{aço}$ = 120 MPa e $(\sigma_E)_{al}$ = 70 MPa, determinar a força em cada arame se o peso for (*a*) 600 N e (*b*) 720 N. E_{al} = 70 GPa, $E_{aço}$ = 200 GPa.



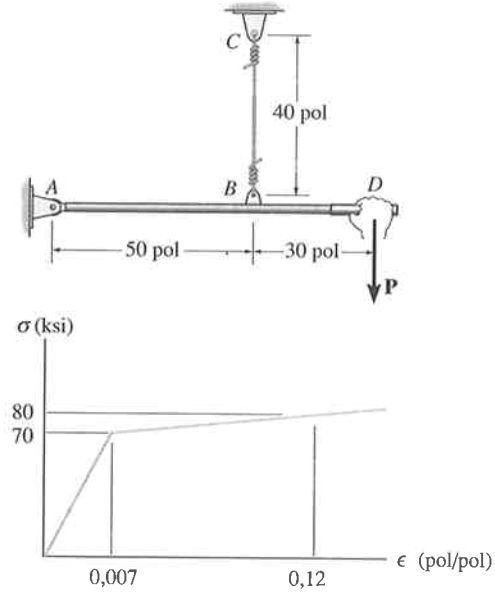
Problema 4.104

4.105. A barra tem área da seção transversal de 0,5 pol^2 e é feita de um material cujo diagrama tensão-deformação pode ser aproximado pelos dois segmentos de reta mostrados. Determinar o alongamento da barra devido à carga aplicada.



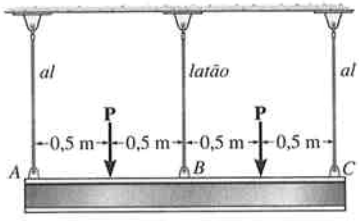
Problema 4.105

4.106. O arame BC tem diâmetro de 0,125 pol e seu material tem as características de tensão-deformação mostradas na figura. Determinar o deslocamento vertical do cabo em D se a força de tração for aumentada vagarosamente e alcançar a intensidade de (*a*) P = 450 lb e (*b*) P = 600 lb.



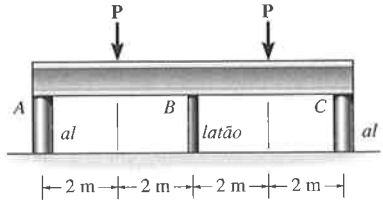
Problema 4.106

4.107. A viga rígida é suportada pelas três hastes *A*, *B* e *C*, de comprimentos iguais. As hastes *A* e *C* têm diâmetro de 25 mm e são feitas de alumínio, para o qual E_{al} = 70 GPa e $(\sigma_E)_{al}$ = 20 MPa. A haste *B* tem diâmetro de 10 mm e é feita de latão, para o qual $E_{latão}$ = 100 GPa e $(\sigma_E)_{latão}$ = 590 MPa. Determinar a menor intensidade de **P** de modo que (*a*) somente as hastes *A* e *C* escoem e (*b*) todas as hastes escoem.



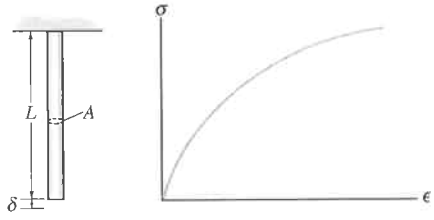
Problema 4.107

***4.108.** A viga rígida é suportada pelos três postes *A*, *B* e *C*, de comprimentos iguais. Os postes *A* e *C* têm diâmetro de 75 mm e são feitos de alumínio, para o qual E_{al} = 70 GPa e $(\sigma_E)_{al}$ = 20 MPa. O poste *B* tem diâmetro de 20 mm e é feito de latão, para o qual $E_{latão}$ = 100 GPa e $(\sigma_E)_{latão}$ = 590 MPa. Determinar a menor intensidade de **P** de modo que (*a*) somente os postes *A* e *C* escoem e (*b*) todos os postes escoem.



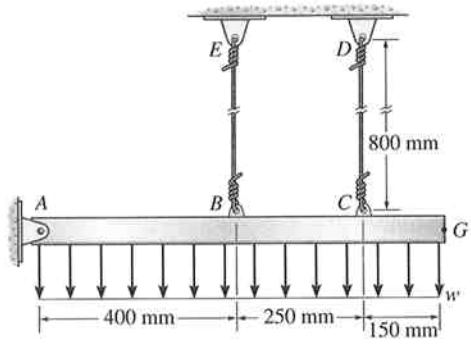
Problema 4.108

4.109. Um material tem diagrama tensão-deformação descrito pela curva $\sigma = c\epsilon^{1/2}$. Determinar a deflexão δ da extremidade de uma haste feita desse material se ela tiver comprimento *L*, área da seção transversal *A* e peso específico γ.



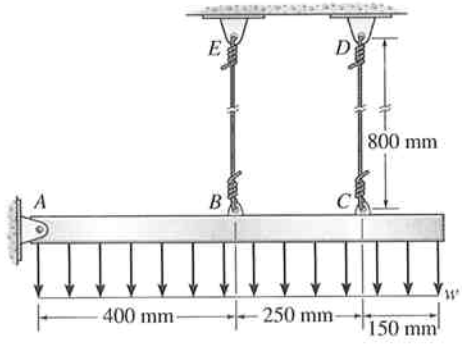
Problema 4.109

4.110. A barra rígida é suportada por um pino em *A* e dois arames de aço, cada um com diâmetro de 4 mm. Supondo que o limite de escoamento dos arames seja σ_E = 530 MPa e $E_{aço}$ = 200 GPa, determinar a intensidade da carga distribuída *w* que, colocada sobre a viga, provoque apenas escoamento do arame *EB*. Qual é o deslocamento do ponto *G* neste caso? Supor nos cálculos que o aço é elástico perfeitamente plástico.



Problema 4.110

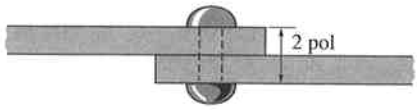
4.111. A barra rígida é suportada por um pino em *A* e dois arames de aço, cada um com diâmetro de 4 mm. Supondo que o limite de escoamento dos arames seja σ_E = 530 MPa e $E_{aço}$ = 200 GPa, determinar: (*a*) a intensidade da carga distribuída *w* que, colocada sobre a viga, provoque apenas o início do escoamento de um dos arames e (*b*) a menor intensidade da carga distribuída que provoque o escoamento de ambos os arames. Supor nos cálculos que o aço é elástico perfeitamente plástico.



Problema 4.111

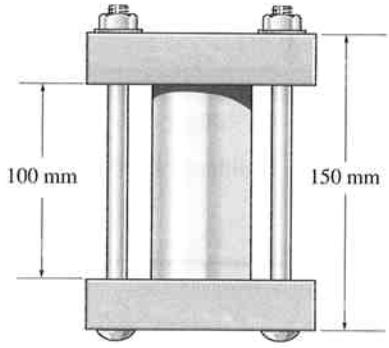
PROBLEMAS DE REVISÃO

***4.112.** Um rebite de aço de 0,25 pol de diâmetro a uma temperatura de 1.500°F está preso entre duas chapas, de modo que nessa temperatura tem 2 pol de comprimento e exerce uma força de aperto de 250 lb entre as chapas. Determinar a força de aperto aproximada entre as chapas quando o rebite esfria para 70°F. Supor nos cáculos que as cabeças do rebite e as chapas são rígidas. Adotar $\alpha_{aço} = 8(10^{-6})/°F$ e $E_{aço} = 29(10^3)$ ksi. O resultado é uma estimativa conservadora da resposta real? Por quê?



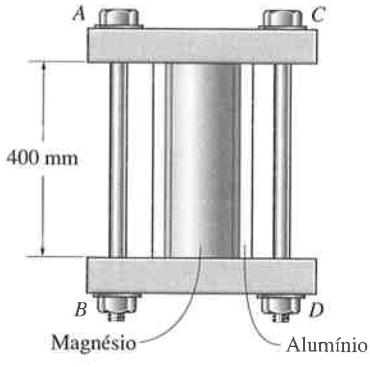
Problema 4.112

4.113. O cilindro de 50 mm de diâmetro, feito de magnésio Am 1004-T61, é colocado no fixador quando a temperatura é $T_1 = 15°C$. Os dois parafusos de aço inoxidável 304 do fixador têm diâmetro de 10 mm e apertam o cilindro de leve, com força desprezível, contra as garras rígidas. Determinar a temperatura em que a tensão normal média tanto no magnésio como no aço não excede $\sigma_{adm} = 12$ MPa.



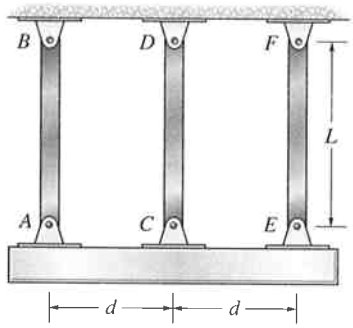
Problema 4.113

4.114. O conjunto consiste de um cilindro de alumínio 2014-T6 com diâmetro externo de 200 mm e diâmetro interno de 150 mm, junto com um cilindro interno concêntrico de magnésio Am 1004-T61 com diâmetro de 125 mm. Supondo que a força de aperto nos parafusos AB e CD seja de 4 kN quando a temperatura é $T_1 = 16°C$, determinar essa força quando a temperatura torna-se $T_2 = 48°C$. Supor que os parafusos e as barras de fixação são rígidos.



Problema 4.114

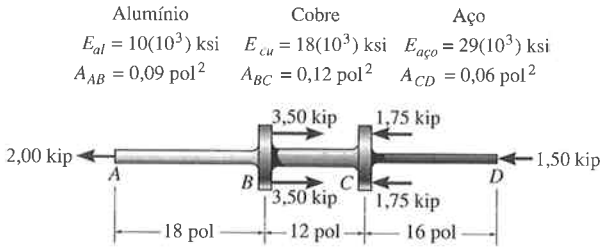
4.115. O conjunto consiste em duas barras AB e CD do mesmo material, com módulo de elasticidade E_1 e coeficiente de expansão térmica α_1, e uma barra EF com módulo de elasticidade E_2 e coeficiente de expansão térmica α_2. Todas as barras têm o mesmo comprimento L e área da seção transversal A. Se a viga rígida estiver inicialmente horizontal na temperatura T_1, determinar o ângulo que ela faz com a horizontal quando a temperatura aumenta para T_2.



Problema 4.115

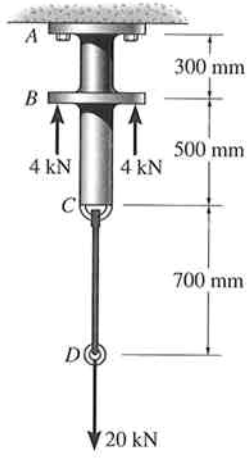
***4.116.** O eixo composto, formado por segmentos feitos de alumínio, cobre e aço, está submetido ao carregamento mostrado. Determinar o deslocamento da extremidade A em relação à extremidade D e a tensão normal média em cada segmento. A área da seção transversal e o módulo de elasticidade de cada segmento são mostrados. Desprezar as dimensões dos colares B e C.

4.117. Determinar o deslocamento de B em relação a C do eixo composto do Problema 4.116.



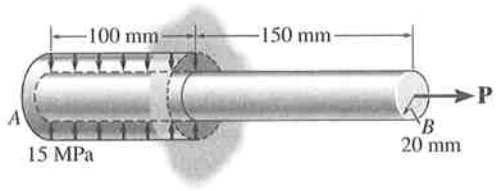
Problemas 4.116/4.117

4.118. O conjunto consiste de uma barra de alumínio ABC, com diâmetro de 30 mm e colar fixo em B, e uma haste de aço CD com diâmetro de 10 mm. Determinar o deslocamento do ponto D quando o conjunto é carregado como mostrado. Desprezar as dimensões do colar em B e a conexão em C. $E_{aço} = 200$ GPa, $E_{al} = 70$ GPa.



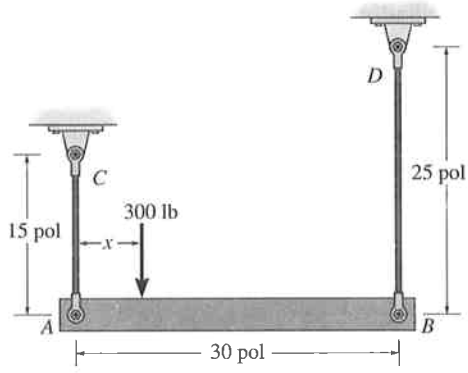
Problema 4.118

4.119. O bujão de latão é colocado sob pressão no fundido rígido. A pressão normal uniforme do mancal sobre o bujão é estimada em 15 MPa. Supondo que o coeficiente de atrito estático entre o bujão e o fundido seja $\mu_e = 0{,}3$, determinar a força axial P necessária para retirar o bujão. Calcular também o deslocamento da extremidade B em relação à extremidade A imediatamente depois que o bujão começa a sair. $E_{latão} = 98$ GPa.



Problema 4.119

***4.120.** O conjunto consiste de dois tirantes AC e BD de aço A-36 acoplados à viga rígida uniforme de 100 lb AB. Determinar a posição x da carga de 300 lb de modo que a viga permaneça na posição horizontal tanto antes como depois de a carga ser aplicada. Cada haste tem diâmetro de 0,5 pol.

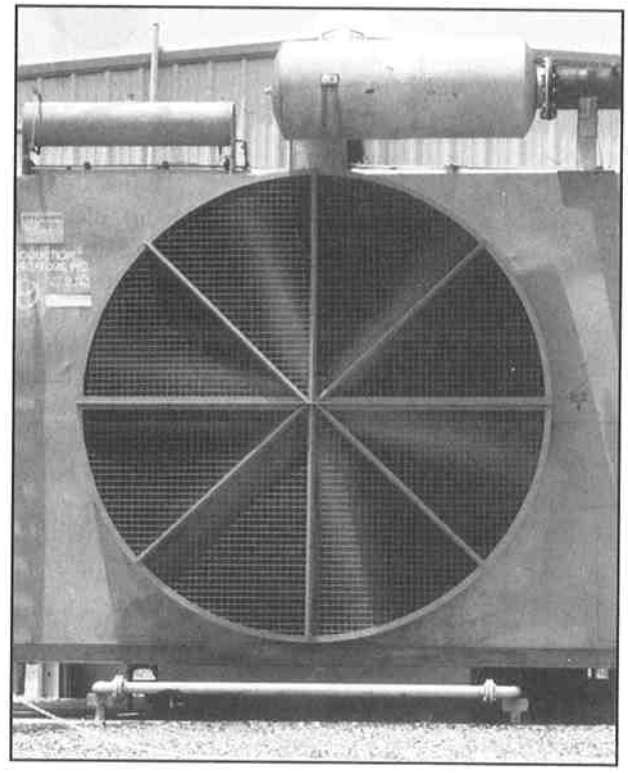


Problema 4.120

5 TORÇÃO

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

Neste capítulo discutiremos os efeitos da aplicação de esforços torcionais em um elemento linear longo, tal como um eixo ou um tubo. Inicialmente consideraremos que o elemento tenha seção transversal circular. Mostraremos como determinar tanto a distribuição de tensão no interior do elemento como o ângulo de torção quando o material comporta-se de maneira linear-elástica e, também, quando é inelástico. Ademais, será discutida a análise estaticamente indeterminada de eixos e tubos, além de tópicos especiais, como elementos com seções transversais não-circulares. Por último, concentrações de tensão e a tensão residual provocadas por cargas de torção.



O esforço de torção desenvolvido no eixo de acionamento deste ventilador de condensação depende da potência de saída do motor.

5.1 DEFORMAÇÃO POR TORÇÃO DE UM EIXO CIRCULAR

Torque é o momento que tende a torcer o membro em torno de seu eixo longitudinal. Seu efeito é de interesse principal no projeto de eixos ou eixos de acionamento usados em veículos e maquinaria. Fisicamente, podemos ilustrar o que acontece quando um torque é aplicado em um eixo circular, considerando o eixo como feito de um material altamente deformável, como a borracha (Figura 5.1*a*). Quando o torque é aplicado, os círculos e as retas longitudinais da grelha originalmente marcada no eixo tendem a se distorcer com o padrão mostrado na Figura 5.1*b*. Por inspeção, a torção faz os círculos *permanecerem como círculos* e cada reta longitudinal da grelha deforma-se em uma hélice que intercepta os círculos em ângulos iguais. Além disso, as seções transversais das *extremidades* do eixo permanecem *planas* — ou seja, não entortam nem incham ou se contraem — e as retas radiais dessas extremidades *permanecem retas* durante a deformação (Figura 5.1*b*). A partir dessas observações, podemos supor que, se o ângulo de rotação for *pequeno*, o *comprimento do eixo* e *seu raio permanecerão inalterados*.

Se o eixo estiver preso em uma extremidade e for aplicado um torque na outra extremidade, o plano sombreado da Figura 5.2 se distorcerá e assumirá uma forma oblíqua como mostrado. Nesse caso, uma linha radial localizada na seção transversal a uma distância x da extremidade fixa do eixo girará por meio de um ângulo $\phi(x)$. O ângulo $\phi(x)$, assim definido, é denominado *ângulo de torção*. Ele depende da posição x e varia ao longo do eixo como mostrado.

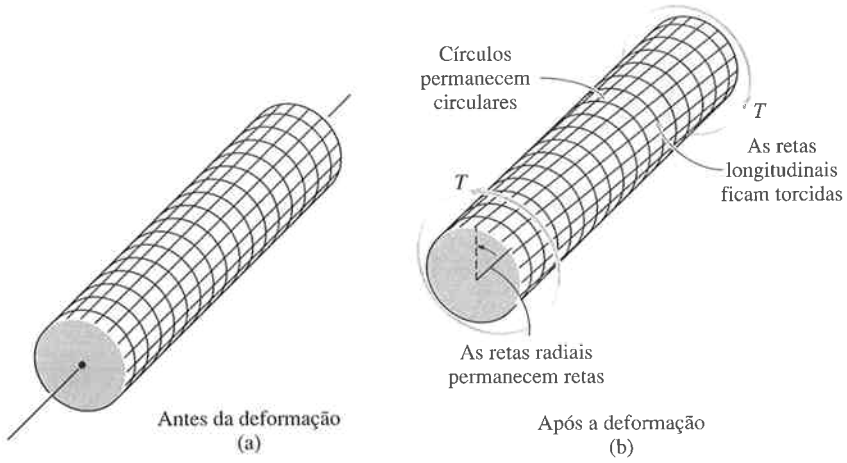
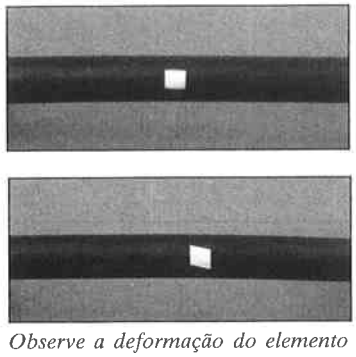


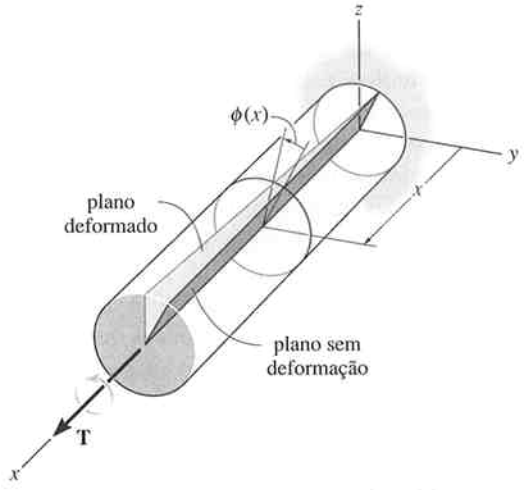
Figura 5.1

A fim de compreender como essa distorção deforma o material, vamos isolar um elemento pequeno localizado a uma distância radial ρ (rô) da linha de centro do eixo (Figura 5.3). Devido à deformação, como observado na Figura 5.2, as faces anterior e posterior do elemento sofrem rotação. A face posterior por $\phi(x)$, e a face anterior por $\phi(x) + \Delta\phi$. O resultado é que a *diferença* entre as rotações, $\Delta\phi$, torna o elemento sujeito a *deformação por cisalhamento*. Para calcular essa deformação, observe que antes da deformação principal o ângulo entre as bordas AB e AC era de 90°; depois dela, entretanto, as bordas do elemento passam a ser AD e AC e o ângulo entre elas θ'. Pela definição de deformação por cisalhamento (Equação 2.4), temos:

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \lim_{\substack{C \to A \text{ along } CA \\ B \to A \text{ along } BA}} \theta'$$



Observe a deformação do elemento retangular quando esta barra de borracha é submetida a um torque.



O ângulo de torção $\phi(x)$ aumenta à medida que x aumenta.

Figura 5.2

Esse ângulo, γ, está indicado no elemento. Ele pode ser relacionado ao comprimento do elemento Δx e à diferença no ângulo de rotação ($\Delta\phi$) entre as faces sombreadas. Se $\Delta x \to dx$ e $\Delta\phi \to d\phi$, temos:

$$BD = \rho\, d\phi = dx\, \gamma$$

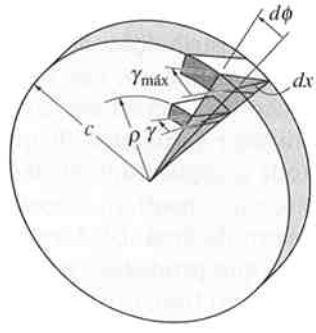
Portanto,

$$\gamma = \rho \frac{d\phi}{dx} \tag{5.1}$$

Como dx e $d\phi$ são os *mesmos* para *todos os elementos* localizados na seção transversal em x, então $d\phi/dx$ é constante e a Equação 5.1 diz que a intensidade da deformação por cisalhamento de qualquer um desses elementos varia apenas de acordo com sua distância radial ρ a partir da linha de centro do eixo. Em outras palavras, a deformação por cisalhamento no interior do eixo varia linearmente ao longo de qualquer reta radial, de zero na linha de centro do eixo a um máximo $\gamma_{máx}$ em seu limite externo (Figura 5.4). Como $d\phi/dx = \gamma/\rho = \gamma_{máx}/c$, então:

$$\gamma = \left(\frac{\rho}{c}\right)\gamma_{máx} \tag{5.2}$$

Os resultados obtidos nesse caso também são válidos para tubos circulares. Dependem apenas das hipóteses relativas à deformação mencionadas anteriormente.



A deformação por cisalhamento do material aumenta linearmente de acordo com ρ, isto é, $\gamma = (\rho/c)\gamma_{máx}$

Figura 5.4

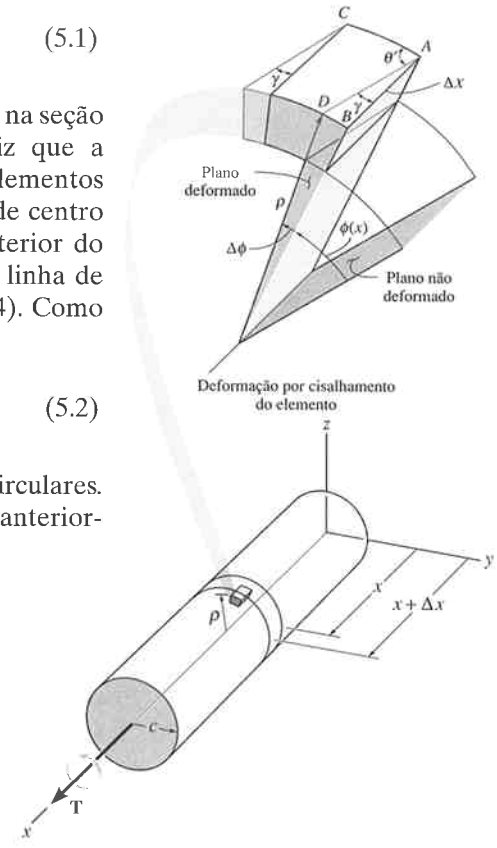


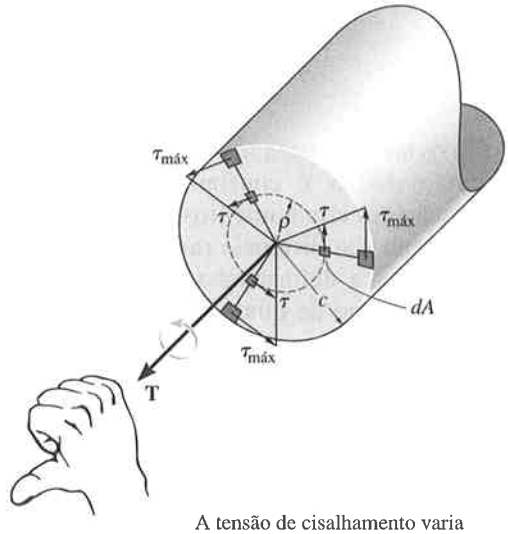
Figura 5.3

5.2 FÓRMULA DA TORÇÃO

Quando um torque externo é aplicado a um eixo, cria um torque interno correspondente no interior do eixo. Nesta seção, desenvolveremos uma equação que relacione o torque interno com a distribuição das tensões de cisalhamento na seção transversal de um eixo ou tubo circular.

Se o material for linear-elástico, então a lei de Hooke, $\tau = G\,\gamma$, aplica-se e, conseqüentemente, como observado na seção anterior, uma ***variação linear na deformação por cisalhamento*** leva a uma ***variação linear na tensão de cisalhamento*** ao longo de qualquer reta radial na seção transversal. Assim, como a variação tensão-deformação, para um eixo maciço, τ varia de zero na linha de centro longitudinal do eixo a um valor máximo, $\tau_{máx}$, em seu limite externo. Tal variação é mostrada na Figura 5.5 para as faces dianteiras de um número selecionado de elementos, localizados em uma posição radial intermediária ρ e na extremidade do raio c. Devido à proporcionalidade dos triângulos, ou pela lei de Hooke ($\tau = G\,\gamma$) e pela Equação 5.2 [$\gamma = (\rho/c)\gamma_{máx}$], podemos escrever:

$$\tau = \left(\frac{\rho}{c}\right)\tau_{máx} \tag{5.3}$$



A tensão de cisalhamento varia linearmente ao longo de cada reta radial da seção transversal.

Figura 5.5

Essa equação expressa a distribuição cisalhamento-tensão como uma *função* da posição radial ρ do elemento; em outras palavras, ela define a distribuição de tensão na seção transversal em termos da geometria do eixo. Com ela, podemos então satisfazer a exigência de que o torque produzido pela distribuição de tensão em toda a seção transversal seja equivalente ao torque interno resultante T na seção, o que manterá o eixo em equilíbrio (Figura 5.5). Especificamente, cada elemento de área dA, localizado em ρ, está submetido a uma força $dF = \tau\, dA$. O torque produzido por essa força é $dT = \rho(\tau\, dA)$. Temos, portanto, para toda a seção transversal:

$$T = \int_A \rho(\tau\, dA) = \int_A \rho\left(\frac{\rho}{c}\right)\tau_{máx}\, dA \tag{5.4}$$

Como $\tau_{máx}/c$ é constante,

$$T = \frac{\tau_{máx}}{c}\int_A \rho^2\, dA \tag{5.5}$$

A integral dessa equação depende somente da geometria do eixo. Ela representa o ***momento de inércia polar*** da área da seção transversal, calculado em torno da linha de centro longitudinal do eixo. Usaremos o símbolo J para esse valor; assim, a equação anterior pode ser escrita de forma mais compacta, ou seja:

$$\tau_{máx} = \frac{Tc}{J} \tag{5.6}$$

onde:

$\tau_{máx}$ = tensão de cisalhamento máxima no eixo, que ocorre na superfície externa
T = torque interno resultante que atua na seção transversal. Seu valor é determinado pelo método das seções e pela equação do momento de equilíbrio aplicada em torno da linha de centro longitudinal do eixo
J = momento de inércia polar da área da seção transversal
c = raio externo do eixo

A tensão de cisalhamento é determinada na distância intermediária ρ a partir de uma equação semelhante obtida por meio das equações 5.3 e 5.6:

$$\tau = \frac{T\rho}{J} \tag{5.7}$$

Qualquer uma das duas equações anteriores é geralmente denominada ***fórmula da torção***. Lembre-se de que ela é usada somente se o eixo for circular e o material for homogêneo e comportar-se de maneira linear-elástica, visto que a dedução baseia-se no fato de que a tensão de cisalhamento é proporcional à deformação de cisalhamento.

Eixo Sólido. Se o eixo tiver uma seção transversal circular maciça, deerminaremos o momento de inércia polar J usando um elemento de área sob a forma de um *anel infinitesimal* com espessura $d\rho$ e circunferência $2\pi\rho$ (Figura 5.6). Nesse anel, $dA = 2\pi\rho\, d\rho$, então:

$$J = \int_A \rho^2\, dA = \int_0^c \rho^2\,(2\pi\rho\, d\rho) = 2\pi \int_0^c \rho^3\, d\rho = 2\pi\left(\frac{1}{4}\right)\rho^4 \Big|_0^c$$

$$J = \frac{\pi}{2}c^4 \tag{5.8}$$

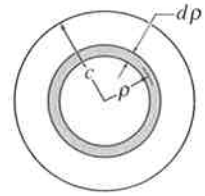
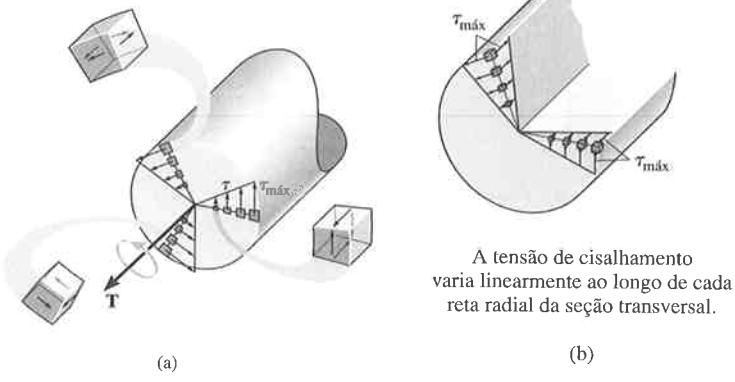


Figura 5.6

Observe que J é uma *propriedade geométrica* da área do círculo e é sempre positiva. As unidades usadas para sua medida são mm^4 e pol^4.

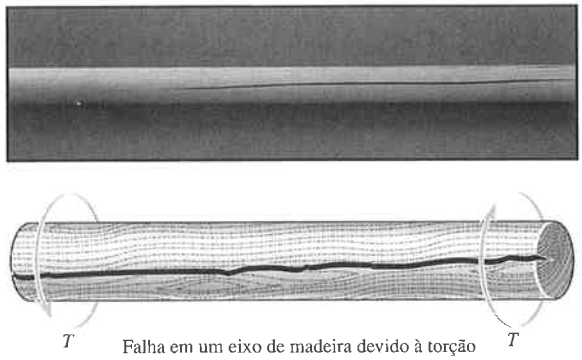
Foi mostrado que a tensão de cisalhamento varia linearmente ao longo de cada reta radial dessa seção transversal do eixo. Entretanto, se um elemento de volume do material dessa seção transversal for isolado, então, devido à propriedade complementar do cisalhamento, tensões de cisalhamento iguais também devem atuar sobre quatro de suas faces adjacentes, como mostrado na Figura 5.7*a*. Então, ***o torque interno T não só desenvolve uma distribuição linear da tensão de cisalhamento ao longo de cada reta radial do plano da área da seção transversal, como também desenvolve uma distribuição da tensão de cisalhamento associada ao longo de um plano axial*** (Figura 5.7*b*). É interessante observar que, devido a essa distribuição axial da tensão de cisalhamento, os eixos feitos de madeira tendem a *rachar* ao longo do plano axial quando submetidos a torque excessivo (Figura 5.8). Isso acontece porque a madeira é um material anisotrópico. Sua resistência ao cisalhamento no sentido paralelo aos grãos ou às fibras, na direção da linha de centro do eixo, é muito menor do que sua resistência no sentido perpendicular às fibras, na direção do plano da seção transversal.



(a) (b)

Figura 5.7

Este eixo de acionamento tubular de caminhão foi submetido a uma sobrecarga, o que resultou na falha provocada por escoamento do material.



Falha em um eixo de madeira devido à torção

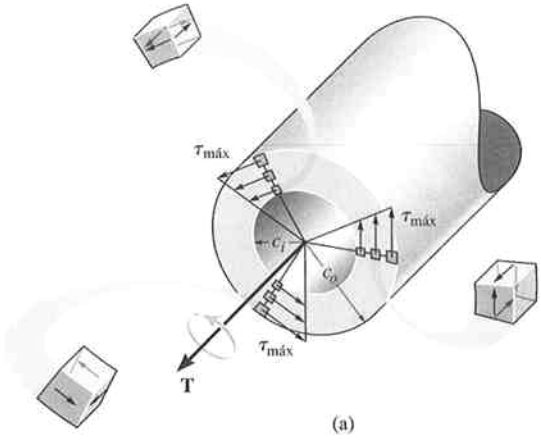
Figura 5.8

Eixo Tubular. Se um eixo tem seção transversal tubular (eixo vazado), com raio interno c_i e raio externo c_e, então, pela Equação 5.8, determinamos seu momento de inércia polar subtraindo o J para o eixo de raio c_i daquele determinado para o eixo de raio c_e. O resultado é:

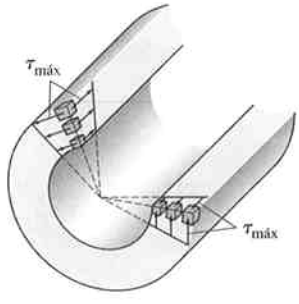
$$J = \frac{\pi}{2}(c_e^4 - c_i^4) \tag{5.9}$$

Como no eixo maciço, a tensão de cisalhamento distribuída sobre a área da seção transversal varia linearmente ao longo de qualquer reta radial (Figura 5.9*a*). Além disso, a tensão de cisalhamento varia ao longo do plano axial do mesmo modo (Figura 5.9*b*). Exemplos da atuação da tensão de cisalhamento sobre elementos de volume típicos são mostrados na Figura 5.9*a*.

Tensão de Torção Máxima Absoluta. Em qualquer seção transversal do eixo, a tensão de cisalhamento ocorre na superfície externa. No entanto, se o eixo for submetido a uma série de torques externos, ou o raio (momento de inércia polar) mudar, a tensão de torção máxima no interior do eixo poderá diferir de uma seção para a outra. Se formos determinar a tensão de torção máxima, será importante determinar a localização onde a relação Tc/J é máxima. A esse respeito, é útil mostrar a variação do torque interno T, em cada seção ao longo da linha de centro do eixo, desenhando um ***diagrama de torque***. Especificamente, esse diagrama é um gráfico do torque interno T *versus* sua posição ao longo do comprimento do eixo. Pela convenção de sinais, T é positivo se pela regra da mão direita a direção do polegar ficar no sentido de afastar-se do eixo quando os dedos curvam-se na direção da torção provocada pelo torque (Figura 5.5). Uma vez determinado o torque interno em todo o eixo, a relação máxima Tc/J pode, então, ser identificada.



(a)



A tensão de cisalhamento varia linearmente ao longo de cada reta radial da seção transversal.

(b)

Figura 5.9

PONTOS IMPORTANTES

- Quando um eixo que tem *seção transversal circular* é submetido a um torque, a seção transversal *permanece plana* enquanto as retas radiais giram. Isso provoca uma *deformação por cisalhamento* no interior do material que *varia linearmente* ao longo de qualquer reta radial, indo desde zero na linha de centro do eixo até o máximo no seu limite externo.
- No caso de material homogêneo linear-elástico, devido à lei de Hooke, a *tensão de cisalhamento* ao longo de qualquer reta radial do eixo também *varia linearmente* de zero na linha de centro até o máximo no seu limite externo. A tensão de cisalhamento máxima *não deve* exceder o limite de proporcionalidade.
- Devido à propriedade complementar do cisalhamento, a distribuição da tensão de cisalhamento linear no plano da seção transversal também é distribuída ao longo de um plano axial adjacente ao eixo.
- A fórmula da torção baseia-se no requisito de que o torque resultante na seção transversal seja igual ao torque produzido pela distribuição da tensão de cisalhamento linear em torno da linha de centro longitudinal do eixo. É necessário que o eixo ou o tubo tenha seção transversal *circular* e seja feito de material *homogêneo* com comportamento *linear-elástico*.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

A fórmula da torção é aplicada segundo o procedimento a seguir.

Carga Interna.

- Fazer o corte do eixo perpendicular à sua linha de centro no ponto em que a tensão de cisalhamento deve ser determinada e usar o diagrama de corpo livre e as equações de equilíbrio necessárias para obter o torque interno da seção.

Propriedade da Seção Transversal.

- Calcular o momento de inércia polar da área da seção transversal. Para uma seção maciça de raio c, $J = \pi c^4/2$ e, para um tubo de raio externo c_e e raio interno c_i, $J = \pi(c_e^4 - c_i^4)/2$.

Tensão de Cisalhamento.

- Especificar a distância radial ρ, medida a partir do centro da seção transversal ao ponto em que a tensão de cisalhamento deve ser determinada. Aplicar então a fórmula da torção $\tau = T\rho/J$ ou usar $\tau_{máx} = Tc/J$ caso a tensão de cisalhamento máxima tenha de ser determinada. Ao substituir os dados, certificar-se de usar um conjunto de unidades compatíveis.
- A tensão de cisalhamento atua na seção transversal sempre na direção perpendicular a ρ. A força que ela cria deve fornecer um torque em torno da linha de centro do eixo que tenha a *mesma direção* do torque interno resultante **T** que atua na seção analisada. Uma vez estabelecida a direção, um elemento de volume, localizado no ponto em que τ é determinado, pode ser isolado e pode-se mostrar a direção de τ atuando sobre as três outras faces adjacentes do elemento.

EXEMPLO 5.1

A distribuição de tensão em um eixo maciço foi esquematizada graficamente ao longo de três retas radiais arbitrárias como mostrado na Figura 5.10*a*. Determinar o torque interno resultante na seção.

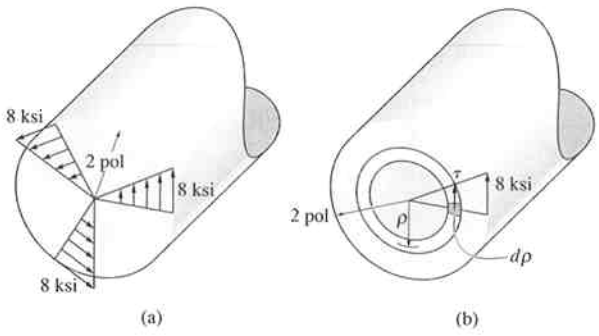


Figura 5.10

SOLUÇÃO I

O momento de inércia polar da área da seção transversal é:

$$J = \frac{\pi}{2}(2 \text{ pol})^4 = 25{,}13 \text{ pol}^4$$

Aplicando a fórmula da torção com $\tau_{máx} = 8$ ksi (Figura 5.10*a*), temos:

$$\tau_{máx} = \frac{Tc}{J}; \qquad 8 \text{ kip/pol}^2 = \frac{T(2 \text{ pol})}{(25{,}13 \text{ pol}^4)}$$

$$T = 101 \text{ kip} \cdot \text{pol} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

SOLUÇÃO II

O mesmo resultado é obtido calculando-se o torque produzido pela distribuição de tensão em torno da linha de centro do eixo. Primeiro devemos expressar $\tau = f(\rho)$. Usando triângulos proporcionais (Figura 5.10*b*), temos:

$$\frac{\tau}{\rho} = \frac{8 \text{ ksi}}{2 \text{ pol}}$$

$$\tau = 4\rho$$

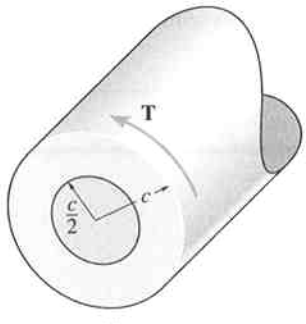
Essa tensão atua em todas as partes do elemento do anel infinitesimal com área $dA = 2\pi\rho\, d\rho$. Como a força criada por τ é $dF = \tau\, dA$, o torque é:

$$dT = \rho\, dF = \rho(\tau dA) = \rho(4\rho)2\pi\rho\, d\rho = 8\pi\rho^3\, d\rho$$

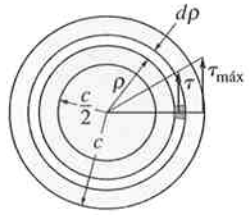
Para toda a área sobre a qual τ atua, requer-se que:

$$T = \int_0^2 8\pi\rho^3\, d\rho = 8\pi\left(\frac{1}{4}\rho^4\right)\Big|_0^2 = 101 \text{ kip} \cdot \text{pol} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

EXEMPLO 5.2



(a)



(b)

Figura 5.11

O eixo *maciço* de raio c é submetido ao torque **T** (Figura 5.11*a*). Determinar a fração de **T** que é resistida pelo material contido na região externa do eixo, com raio interno $c/2$ e raio externo c.

SOLUÇÃO

A tensão no eixo varia linearmente, de tal modo que $\tau = (\rho/c)\tau_{máx}$ (Equação 5.3). Portanto, o torque dT' no anel (área) localizado na região sombreada clara (Figura 5.11*b*) é:

$$dT' = \rho(\tau\, dA) = \rho(\rho/c)\tau_{máx}(2\pi\rho\, d\rho)$$

O torque para toda a área sombreada clara é:

$$T' = \frac{2\pi\tau_{máx}}{c}\int_{c/2}^{c} \rho^3\, d\rho$$

$$= \frac{2\pi\tau_{máx}}{c}\frac{1}{4}\rho^4\Big|_{c/2}^{c}$$

De modo que:

$$T' = \frac{15\pi}{32}\tau_{máx}c^3 \qquad (1)$$

O torque T' pode ser expresso em termos do torque aplicado T usando-se primeiro a fórmula da torção para determinar a tensão máxima no eixo. Temos:

$$\tau_{máx} = \frac{Tc}{J} = \frac{Tc}{(\pi/2)c^4}$$

ou

$$\tau_{máx} = \frac{2T}{\pi c^3}$$

Substituindo pela Equação 1, temos:

$$T' = \frac{15}{16}T \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Nesse caso, aproximadamente 94% do torque recebe resistência da região sombreada clara e os 6% restantes de T (ou $\frac{1}{16}$) recebem resistência do 'núcleo' interno do eixo, $\rho = 0$ para $\rho = c/2$. Como resultado, o material localizado na *região externa* do eixo é altamente efetivo para resistir ao torque, o que justifica o uso de eixos tubulares como um meio eficiente de transmitir torque e, portanto, economizar material.

EXEMPLO 5.3

O eixo mostrado na Figura 5.12*a* é suportado por dois mancais e está sujeito a três torques. Determinar a tensão de cisalhamento desenvolvida nos pontos A e B, localizados na seção a–a do eixo (Figura 5.12*b*).

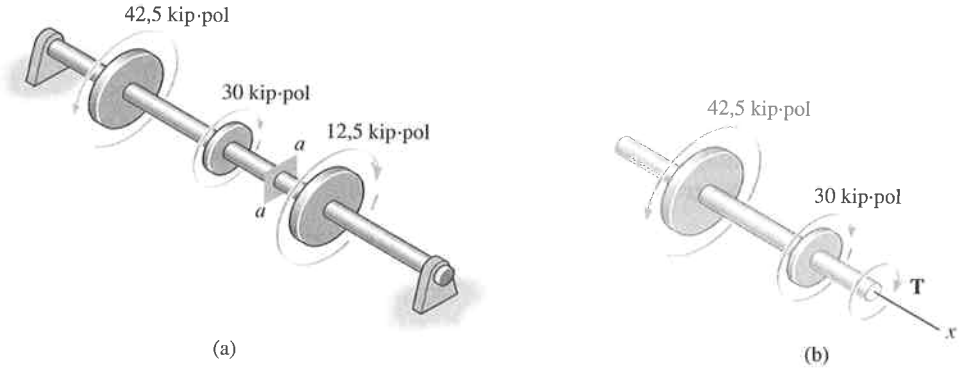


Figura 5.12

SOLUÇÃO

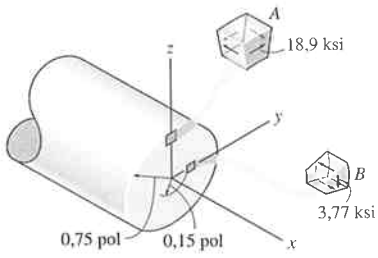
Torque Interno. As reações dos mancais no eixo são nulas, desde que o peso do eixo seja desprezado. Além disso, os torques aplicados satisfazem o equilíbrio de momento em torno da linha de centro do eixo.

O torque interno na seção a–a será determinado pelo diagrama de corpo livre do segmento esquerdo (Figura 5.12*b*). Temos:

$$\Sigma M_x = 0; \quad 42{,}5 \text{ kip} \cdot \text{pol} - 30 \text{ kip} \cdot \text{pol} - T = 0 \quad T = 12{,}5 \text{ kip} \cdot \text{pol}$$

Propriedade da Seção Transversal. O momento de inércia polar da seção transversal do eixo é:

$$J = \frac{\pi}{2}(0{,}75 \text{ pol})^4 = 0{,}497 \text{ pol}^4$$



(c)

Figura 5.12

Tensão de Cisalhamento. Como o ponto A está em $\rho = c = 0{,}75$ pol,

$$\tau_A = \frac{Tc}{J} = \frac{(12{,}5 \text{ kip} \cdot \text{pol})(0{,}75 \text{ pol})}{(0{,}497 \text{ pol}^4)} = 18{,}9 \text{ ksi} \quad \textbf{\textit{Resposta}}$$

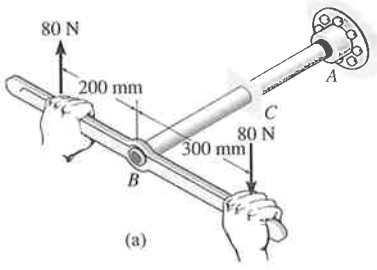
De modo similar para o ponto B, em $\rho = 0{,}15$ pol, temos:

$$\tau_B = \frac{T\rho}{J} = \frac{(12{,}5 \text{ kip} \cdot \text{pol})(0{,}15 \text{ pol})}{(0{,}497 \text{ pol}^4)} = 3{,}77 \text{ ksi} \quad \textbf{\textit{Resposta}}$$

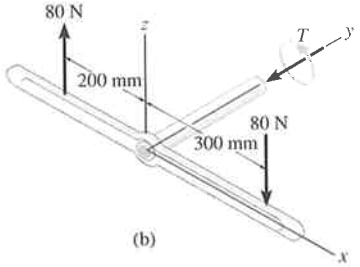
As direções dessas tensões em cada elemento em A e B (Figura 5.12*c*) são estabelecidas pela direção do torque interno resultante **T**, mostrado na Figura 5.12*b*. Observe cuidadosamente como a tensão de cisalhamento atua nos planos de cada um desses elementos.

EXEMPLO 5.4

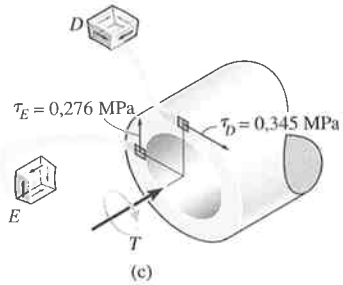
O tubo mostrado na Figura 5.13*a* tem diâmetro interno de 80 mm e diâmetro externo de 100 mm. Supondo que sua extremidade seja apertada contra o apoio em A por meio de um torquímetro em B, determinar a tensão de cisalhamento desenvolvida no material nas paredes interna e externa ao longo da parte central do tubo quando são aplicadas forças de 80 N ao torquímetro.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.13

SOLUÇÃO

Torque Interno. É feito um corte na localização intermediária C ao longo do eixo do tubo (Figura 5.13*b*). A única incógnita na seção é o torque interno **T**. Os equilíbrios da força e do momento em torno dos eixos x e z são satisfeitos. Requer-se que:

$$\Sigma M_y = 0; \qquad 80 \text{ N}(0{,}3 \text{ m}) + 80 \text{ N}(0{,}2 \text{ m}) - T = 0$$
$$T = 40 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Propriedade da Seção Transversal. O momento de inércia polar da área da seção transversal é:

$$J = \frac{\pi}{2}[(0{,}05 \text{ m})^4 - (0{,}04 \text{ m})^4] = 5{,}80(10^{-6}) \text{ m}^4$$

Tensão de Cisalhamento. Em qualquer ponto localizado na superfície externa do tubo, $\rho = c_e = 0{,}05$ m, temos:

$$\tau_o = \frac{Tc_e}{J} = \frac{40 \text{ N} \cdot \text{m}(0{,}05 \text{ m})}{5{,}80(10^{-6}) \text{ m}^4} = 0{,}345 \text{ MPa} \quad \textbf{\textit{Resposta}}$$

E, em qualquer ponto localizado na superfície interna do tubo, $\rho = c_i = 0{,}04$ m, de modo que:

$$\tau_i = \frac{Tc_i}{J} = \frac{40 \text{ N} \cdot \text{m}(0{,}04 \text{ m})}{5{,}80(10^{-6}) \text{ m}^4} = 0{,}276 \text{ MPa} \quad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Para mostrar como essas tensões atuam em pontos representativos, como, por exemplo, D e E na área da seção transversal, primeiro vamos ver a seção transversal pela frente do segmento CA do tubo (Figura 5.13*a*). Nessa seção (Figura 5.13*c*), o torque interno resultante é igual mas oposto, como mostrado na Figura 5.13*b*. As tensões de cisalhamento em D e E contribuem para esse torque e atuam, portanto, nas faces sombreadas dos elementos nas direções mostradas. Como conseqüência, observe como os componentes cisalhamento-

tensão atuam sobre as outras três faces. Além do mais, como o topo da face de D e a face interna de E estão em regiões sem tensões localizadas nas paredes externa e interna do tubo, não pode existir tensão de cisalhamento nessas faces nem nas outras faces correspondentes dos elementos.

5.3 TRANSMISSÃO DE POTÊNCIA

Eixos e tubos com seção transversal circular são freqüentemente empregados para transmitir a potência gerada por máquinas. Quando usados para essa finalidade, são submetidos a torques que dependem da potência gerada pela máquina e da velocidade angular do eixo. A ***potência*** é definida como o trabalho realizado por unidade de tempo. O trabalho transmitido por um eixo rotativo é igual ao torque aplicado multiplicado pelo ângulo de rotação. Portanto, se durante um instante de tempo dt o torque aplicado **T** fizer o eixo girar $d\theta$, então a potência instantânea será:

$$P = \frac{T\,d\theta}{dt}$$

O eixo de acionamento desta máquina de cortar deve ser projetado para satisfazer os requisitos de potência de seu motor.

Como a velocidade angular do eixo é $\omega = d\theta/dt$, também podemos expressar a potência como:

$$\boxed{P = T\omega} \tag{5.10}$$

No SI, a potência é expressa em *watts*, quando o torque é medido em newton metros (N · m) e ω é medido em radianos por segundo (rad/s) (1 W = 1 N · m/s). No sistema Pés-Libras-Segundo ou FPS, a unidade básica de potência é pés-libras por segundo (pés · lb/s); entretanto, o horsepower (hp) é usado comumente na prática da engenharia, sendo:

$$1 \text{ hp} = 550 \text{ pés} \cdot \text{lb/s}^*$$

No caso de maquinaria, a *freqüência* de rotação de um eixo, f, é geralmente conhecida. Expressa em hertz (1 Hz = 1 ciclo/s), ela representa o número de revoluções ou ciclos que o eixo realiza por segundo. Como 1 ciclo = 2π rad, então $\omega = 2\pi f$ e a equação da potência apresentada anteriormente se torna:

$$\boxed{P = 2\pi f T} \tag{5.11}$$

Projeto do Eixo. Quando a potência transmitida por um eixo e sua freqüência de rotação são conhecidas, o torque desenvolvido no eixo é determinado pela Equação 5.11, ou seja, $T = P/2\pi f$. Conhecendo T e a tensão de cisalhamento admissível para o material, τ_{adm}, podemos determinar a área da seção transversal usando a fórmula da torção, desde que o material seja linear-elástico. Em particular, o projeto ou parâmetro geométrico J/c torna-se:

$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{\text{adm}}} \tag{5.12}$$

Para um *eixo maciço*, $J = (\pi/2)c^4$, e, desse modo, após a substituição, obtém-se um *único valor* para o raio do eixo c. Se o eixo for *tubular*, de modo que $J = (\pi/2)(c_o^4 - c_i^4)$, o projeto pode ser feito de várias maneiras. Isso porque se pode fazer uma *escolha arbitrária* tanto de c_o como de c_i e o outro raio (aquele que não foi escolhido arbitrariamente) é determinado pela Equação 5.12.

* Outra unidade de potência utilizada é o cavalo-vapor, c.v., sendo que 1 cv = 735,5W e 1 hp ≅ 1,014 cv (N. do R. T.).

EXEMPLO 5.5

O eixo maciço AB mostrado na Figura 5.14 deve ser usado para transmitir 5 hp do motor M ao qual está acoplado. Supondo que o eixo gire a $\omega = 175$ rpm e o aço tenha tensão de cisalhamento admissível de $\tau_{adm} = 14{,}5$ ksi, determinar o diâmetro necessário para o eixo com aproximação de $\frac{1}{8}$ pol.

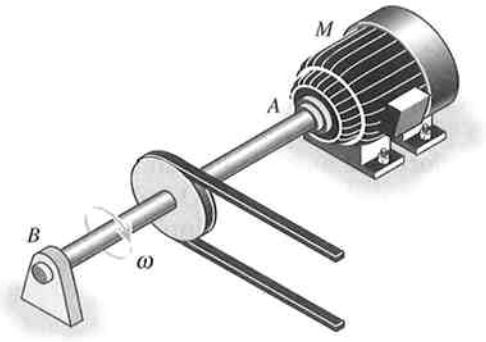


Figura 5.14

SOLUÇÃO

O torque no eixo é determinado pela Equação 5.10, ou seja, $P = T\omega$. Expressando P em pés-libras por segundo e ω em radianos por segundo, temos:

$$P = 5 \text{ hp}\left(\frac{550 \text{ pés} \cdot \text{lb/s}}{1 \text{ hp}}\right) = 2.750 \text{ pés} \cdot \text{lb/s}$$

$$\omega = \frac{175 \text{ rev}}{\text{min}}\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}}\right)\left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right) = 18{,}33 \text{ rad/s}$$

Assim:

$$P = T\omega; \qquad 2.750 \text{ pés} \cdot \text{lb/s} = T(18{,}33 \text{ rad/s})$$

$$T = 150{,}1 \text{ pés} \cdot \text{lb}$$

Aplicando a Equação 5.12, temos:

$$\frac{J}{c} = \frac{\pi}{2}\frac{c^4}{c} = \frac{T}{\tau_{adm}}$$

$$c = \left(\frac{2T}{\pi\tau_{adm}}\right)^{1/3} = \left(\frac{2(150{,}1 \text{ pés} \cdot \text{lb})(12 \text{ pol/pé})}{\pi(14.500 \text{ lb/pol}^2)}\right)^{1/3}$$

$$c = 0{,}429 \text{ pol}$$

Como $2c = 0{,}858$ pol, escolher um eixo que tenha diâmetro de:

$$d = \frac{7}{8} \text{ pol} = 0{,}875 \text{ pol} \qquad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 5.6

Um eixo tubular de diâmetro interno de 30 mm e diâmetro externo de 42 mm é usado para transmitir 90 kW de potência. Determinar a freqüência de rotação do eixo de modo que a tensão de cisalhamento não exceda 50 MPa.

SOLUÇÃO

O torque máximo que pode ser aplicado ao eixo é determinado pela fórmula da torção.

$$\tau_{máx} = \frac{Tc}{J}$$

$$50(10^6)\ \text{N/m}^2 = \frac{T(0{,}021\ \text{m})}{(\pi/2)[(0{,}021\ \text{m})^4 - (0{,}015\ \text{m})^4]}$$

$$T = 538\ \text{N} \cdot \text{m}$$

Pela equação 5.11, a freqüência de rotação é:

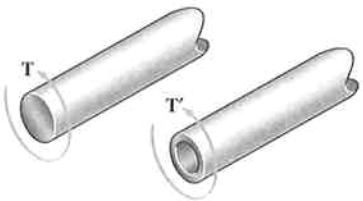
$$P = 2\pi f T$$

$$90(10^3)\ \text{N} \cdot \text{m/s} = 2\pi f(538\ \text{N} \cdot \text{m})$$

$$f = 26{,}6\ \text{Hz}$$ ***Resposta***

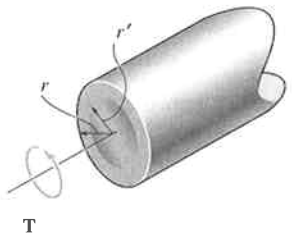
PROBLEMAS

5.1. Um eixo é feito de liga de aço com tensão de cisalhamento admissível de $\tau_{adm} = 12$ ksi. Supondo que o diâmetro do eixo seja de 1,5 pol, determinar o torque máximo **T** que pode ser transmitido. Qual seria o torque máximo **T'** se fosse feito um furo de 1 pol de diâmetro ao longo do eixo? Traçar o gráfico da distribuição cisalhamento-tensão ao longo de uma reta radial em cada caso.



Problema 5.1

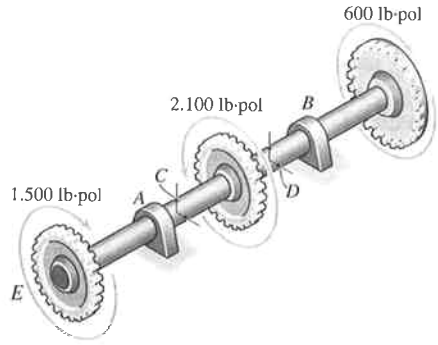
5.2. O eixo maciço de raio r está submetido a um torque **T**. Determinar o raio r' do núcleo interno capaz de resistir a um quarto do torque aplicado ($T/4$). Resolver o problema de duas maneiras: (*a*) usando a fórmula da torção e (*b*) encontrando a resultante da distribuição cisalhamento-tensão.



Problema 5.2

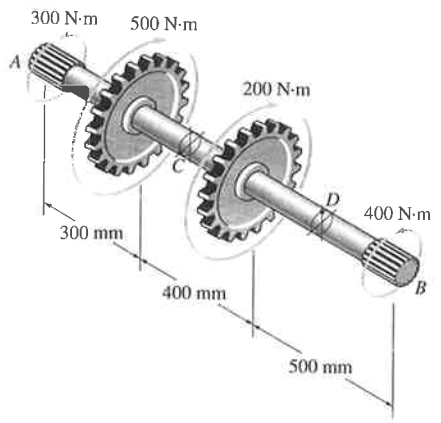
5.3. O eixo tem diâmetro externo de 1,25 pol e diâmetro interno de 1 pol. Supondo que seja submetido a torques como mostrado, determinar a tensão de cisalhamento máxima absoluta nele desenvolvida. Os mancais A e B não resistem a torque.

***5.4.** O eixo tem diâmetro externo de 1,25 pol e diâmetro interno de 1 pol. Supondo que seja submetido a torques como mostrado, construir um gráfico da distribuição cisalhamento-tensão que atua ao longo de uma reta radial da região EA do eixo. Os mancais A e B não resistem a torque.



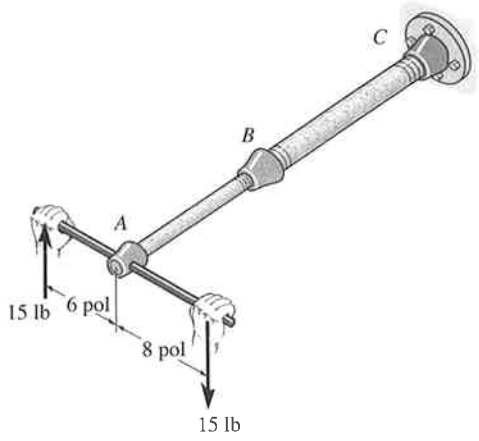
Problemas 5.3/5.4

5.5. O eixo maciço de 30 mm de diâmetro é usado para transmitir os torques aplicados às engrenagens. Determinar a tensão de cisalhamento desenvolvida nos pontos C e D do eixo. Indicar a tensão de cisalhamento nos elementos de volume localizados nesses pontos.



Problema 5.5

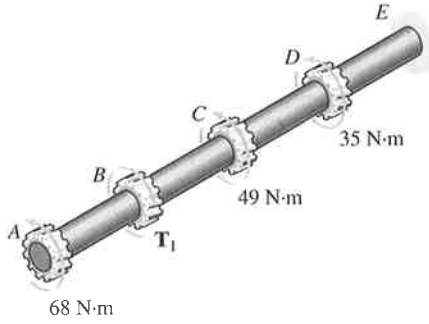
5.6. O conjunto consiste de dois segmentos de tubos de aço galvanizado acoplados por uma redução em B. O tubo menor tem diâmetro externo de 0,75 pol e diâmetro interno de 0,68 pol, enquanto o tubo maior tem diâmetro externo de 1 pol e diâmetro interno de 0,86 pol. Supondo que o tubo esteja firmemente preso à parede em C, determinar a tensão de cisalhamento máxima desenvolvida em cada seção do tubo quando o conjugado mostrado é aplicado ao cabo da chave.



Problema 5.6

5.7. O eixo maciço de alumínio tem diâmetro de 50 mm e tensão de cisalhamento admissível de $\tau_{adm} = 6$ MPa. Determinar o maior torque $\mathbf{T}_1$ que pode ser aplicado ao eixo se ele também estiver sujeito a outras cargas de torção. É requerido que $\mathbf{T}_1$ atue na direção mostrada. Determinar também a tensão de cisalhamento máxima nas regiões CD e DE.

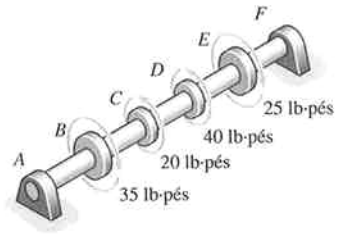
***5.8.** O eixo maciço de alumínio tem diâmetro de 50 mm. Determinar a tensão de cisalhamento máxima absoluta nele desenvolvida e traçar o gráfico da distribuição cisalhamento-tensão ao longo de uma reta radial onde o cisalhamento é máximo. Considerar $T_1 = 20$ N · m.



Problemas 5.7/5.8

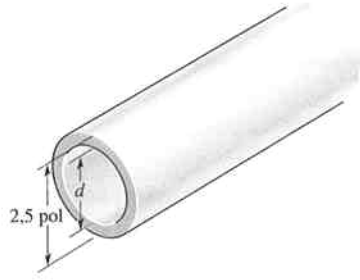
5.9. O eixo maciço tem diâmetro de 0,75 pol. Supondo que seja submetido aos torques mostrados, determinar a tensão de cisalhamento máxima desenvolvida nas regiões BC e DE. Os mancais em A e F permitem rotação livre do eixo.

5.10. O eixo maciço tem diâmetro de 0,75 pol. Supondo que seja submetido aos torques mostrados, determinar a tensão de cisalhamento máxima desenvolvida nas regiões CD e EF. Os mancais em A e F permitem rotação livre do eixo.



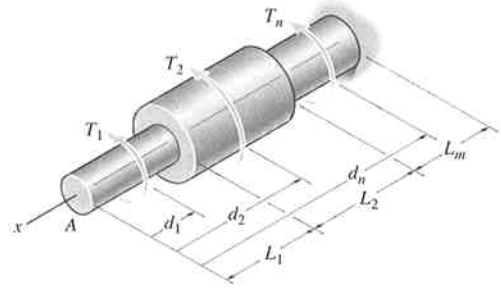
Problemas 5.9/5.10

5.11. Um tubo de aço com diâmetro externo de 2,5 pol transmite 35 hp quando gira a 2.700 rev/min. Determinar o diâmetro interno d do tubo com aproximação de $\frac{1}{8}$ pol se a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 10$ ksi.



Problema 5.11

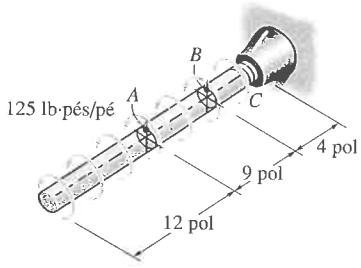
■***5.12.** Consideremos o problema geral de um eixo circular feito com m segmentos, cada um com raio c_m. Supondo que haja n torques sobre o eixo como mostrado, escrever um programa de computador que possa ser usado para determinar a tensão de cisalhamento máxima em qualquer localização especificada x ao longo do eixo. Mostrar uma aplicação do programa usando os valores $L_1 = 2$ pés, $c_1 = 2$ pol, $L_2 = 4$ pés, $c_2 = 1$ pol, $T_1 = 800$ lb · pés, $d_1 = 0$, $T_2 = -600$ lb · pés, $d_2 = 5$ pés.



Problema 5.12

5.13. O tubo de cobre tem diâmetro externo de 2,50 pol e diâmetro interno de 2,30 pol. Supondo que esteja firmemente preso à parede em C e lhe seja aplicado um torque distribuído uniformemente como mostrado, determinar a tensão de cisalhamento desenvolvida nos pontos A e B. Esses pontos estão localizados na superfície externa do tubo. Desenhar o gráfico da tensão de cisalhamento nos elementos de volume localizados em A e B.

5.14. O tubo de cobre tem diâmetro externo de 2,50 pol e diâmetro interno de 2,30 pol. Supondo que esteja firmemente preso à parede em C e submetido a um torque uniformemente distribuído ao longo do seu comprimento, determinar a tensão de cisalhamento máxima absoluta nele desenvolvida. Discutir a validade do resultado.

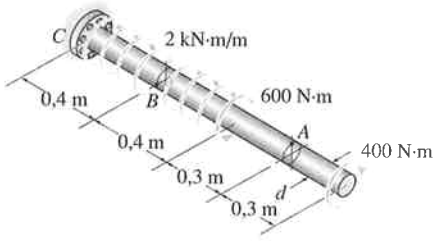


Problemas 5.13/5.14

5.15. O eixo maciço de 60 mm de diâmetro está submetido às cargas de torção distribuída e concentrada mostradas. Determinar a tensão de cisalhamento nos pontos A e B e desenhar o gráfico da tensão de cisalhamento nos elementos de volume localizados nesses pontos.

***5.16.** O eixo maciço de 60 mm de diâmetro está submetido às cargas de torção distribuída e concentrada mostradas. Determinar as tensões de cisalhamento máxima e mínima absolutas no eixo e especificar suas localizações, medidas a partir da extremidade fixa.

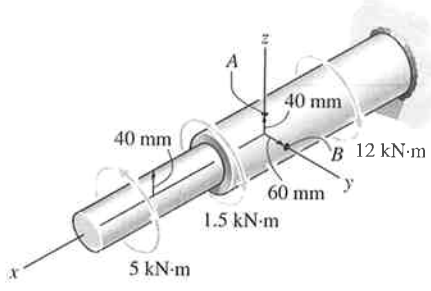
5.17. O eixo maciço está submetido às cargas de torção distribuída e concentrada mostradas. Determinar o diâmetro requerido d do eixo se a tensão de cisalhamento admissível para o material é $\tau_{adm} = 175$ MPa.



Problemas 5.15/5.16/5.17

5.18. O eixo de aço está submetido à carga de torção mostrada. Determinar a tensão de cisalhamento desenvolvida nos pontos A e B e desenhar o gráfico da tensão de cisalhamento nos elementos de volume localizados nesses pontos. O eixo onde A e B estão localizados tem raio externo de 60 mm.

5.19. O eixo de aço está submetido à carga de torção mostrada. Determinar a tensão de cisalhamento máxima absoluta nele desenvolvida e desenhar a distribuição cisalhamento-tensão ao longo de uma reta radial em que ela atija o máximo.

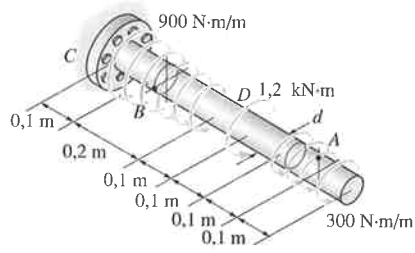


Problemas 5.18/5.19

***5.20.** O eixo maciço está submetido às cargas de torção distribuída e concentrada mostradas. Determinar a tensão de cisalhamento nos pontos A e B e desenhar essa mesma tensão nos elementos de volume localizados em tais pontos. O torque distribuído de D a C varia de zero a 900 N · m/m. Supor que $d = 40$ mm.

5.21. O eixo maciço está submetido às cargas de torção distribuída e concentrada mostradas. Determinar a tensão de cisalhamento máxima absoluta no eixo e especificar sua localização, medida a partir da extremidade fixa C. Supor $d = 40$ mm.

5.22. O eixo maciço está submetido às cargas de torção distribuída e concentrada mostradas. Determinar o diâmetro requerido do eixo d se a tensão de cisalhamento admissível para o material é $\tau_{adm} = 150$ MPa.



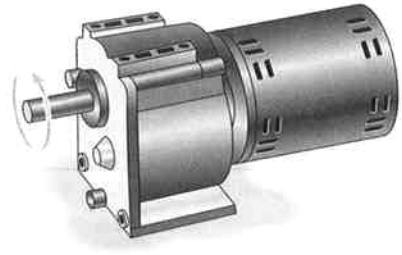
Problemas 5.20/5.21/5.22

5.23. Determinar, com aproximação de $\frac{1}{8}$ pol, o diâmetro de um eixo maciço necessário para transmitir 150 hp a 4.000 rev/min. O material tem tensão de cisalhamento admissível $\tau_{adm} = 8$ ksi.

***5.24.** Feito de aço, o tubo de perfuração de uma perfuratriz de petróleo tem diâmetro externo de 4,5 pol e espessura de 0,25 pol. Supondo que o tubo gire a 650 rev/min quando acionado por um motor de 15 hp, determinar a tensão de cisalhamento máxima nele desenvolvida.

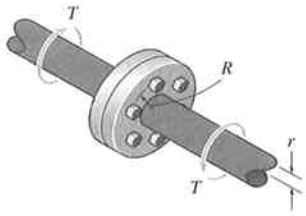
5.25. O motor de engrenagens desenvolve $\frac{1}{10}$ hp quando gira a 300 rev/min. Supondo que o eixo tenha diâmetro de $\frac{1}{2}$ pol, determinar a tensão de cisalhamento máxima nele desenvolvida.

5.26. O motor de engrenagens desenvolve $\frac{1}{10}$ hp quando gira a 300 rev/min. Supondo que a tensão de cisalhamento admissível para o eixo seja $\tau_{adm} = 4$ ksi, determinar o menor diâmetro de eixo que pode ser usado com aproximação de $\frac{1}{8}$ pol.



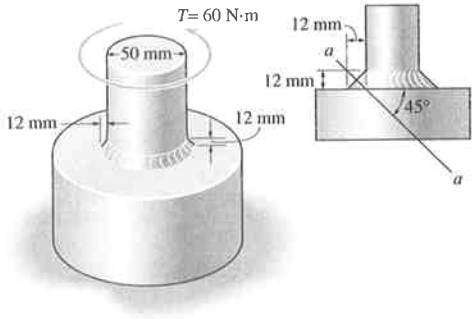
Problemas 5.25/5.26

5.27. O acoplamento é usado para acoplar dois eixos. Supondo que a tensão de cisalhamento nos parafusos seja *uniforme*, determinar o número de parafusos necessários para que a tensão de cisalhamento máxima no eixo seja igual à tensão de cisalhamento nos parafusos. Cada parafuso tem diâmetro d.



Problema 5.27

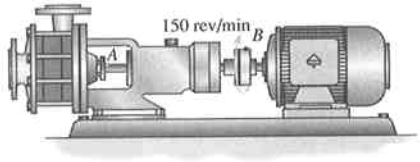
***5.28.** Os eixos de aço estão acoplados por um filete de solda como mostrado. Determinar a tensão de cisalhamento média na solda ao longo da seção *a–a* se o torque aplicado aos eixos for $T = 60$ N · m. *Nota*: a seção crítica onde a solda falha localiza-se ao longo da seção *a–a*.



Problema 5.28

5.29. Um motor fornece 500 hp ao eixo de aço, que é tubular e tem diâmetro externo de 2 pol. Supondo que o eixo gire a 200 rad/s, determinar seu maior diâmetro interno, com aproximação de $\frac{1}{8}$ pol, se a tensão de cisalhamento admissível do material for $\tau_{adm} = 25$ ksi.

5.30. A bomba opera com um motor que tem potência de 85 W. Supondo que o impulsor em *B* esteja girando a 150 rev/min, determinar a tensão de cisalhamento máxima desenvolvida em *A*, localizada no eixo de transmissão que tem 20 mm de diâmetro.



Problema 5.30

5.31. Um tubo de aço com diâmetro externo $d_1 = 2{,}5$ pol transmite 35 hp quando gira a 2.700 rev/min. Determinar o diâmetro interno d_2 do tubo, com aproximação de $\frac{1}{8}$ pol, se a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 10$ ksi.

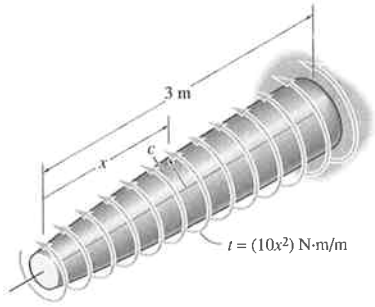
Problema 5.31

***5.32.** Um tubo de aço com diâmetro externo $d_1 = 2{,}5$ pol e diâmetro interno $d_2 = 2$ pol é usado para transmitir 45 hp. Determinar sua taxa de rotação máxima se a tensão de cisalhamento admissível for $\tau_{adm} = 12$ ksi.

Problema 5.32

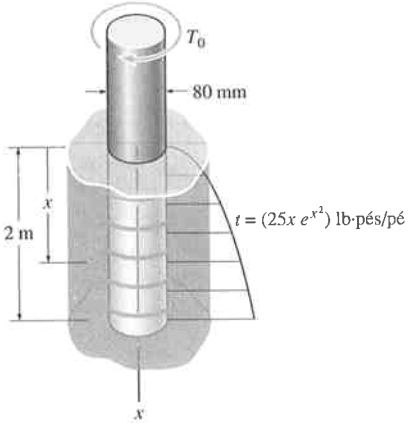
5.33. Um navio tem um eixo de acionamento da hélice que gira a 1.500 rev/min quando desenvolve 1.800 hp. Se o eixo tem 8 pés de comprimento e diâmetro de 4 pol, determinar a tensão de cisalhamento máxima nele provocada por torção.

5.34. O eixo está submetido a um torque distribuído de $t = (10x^2)$ N · m/m, onde x é dado em metros, ao longo de seu comprimento. Se a tensão máxima deve permanecer constante em 80 MPa, determinar a variação requerida do raio c do eixo no intervalo $0 \leq x \leq 3$ m.



Problema 5.34

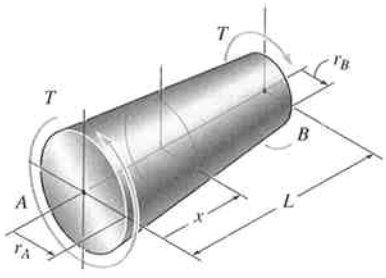
■**5.35.** O eixo tem diâmetro de 80 mm e, devido ao atrito de sua superfície dentro do furo, está submetido a um torque variável descrito pela função $t = (25xe^{x^2})$ N · m/m, onde x é dado em metros. Determinar o torque mínimo T_0 necessário para vencer o atrito e girar o eixo. Determinar também a tensão máxima absoluta nele desenvolvida.



Problema 5.35

***5.36.** Determinar o diâmetro d de um eixo sólido requerido para transmitir uma potência P se a tensão de cisalhamento admissível for τ_{adm} e a velocidade angular do eixo for ω.

5.37. O eixo maciço tem forma cônica que varia de r_A em uma extremidade a r_B na outra. Deduzir a equação da tensão de cisalhamento máxima no eixo a uma distância x ao longo da linha de centro.

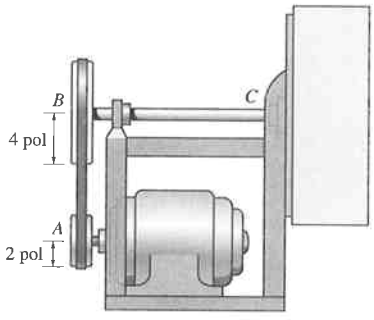


Problema 5.37

5.38. O eixo de acionamento de um automóvel consiste em um tubo de aço com tensão de cisalhamento admissível de τ_{adm} = 8 ksi. Supondo que o diâmetro externo seja 2,5 pol e o motor produza 200 hp quando o eixo gira a 1.140 rev/min, determinar a espessura mínima requerida para a parede do eixo.

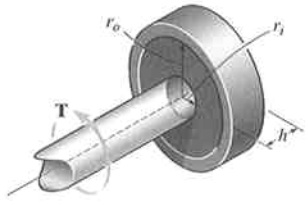
5.39. O eixo de acionamento de um automóvel deve ser projetado como um tubo de paredes finas. O motor fornece 150 hp quando o eixo gira a 1.500 rev/min. Determinar a espessura mínima da parede do tubo se o diâmetro externo é de 2,5 pol. O material tem tensão de cisalhamento admissível τ_{adm} = 7 ksi.

***5.40.** O motor fornece 50 hp quando gira com taxa constante de 1.350 rev/min em A. Pelo sistema de correia e polia, aquela potência é fornecida ao eixo de aço BC do ventilador. Determinar, com aproximação de $\frac{1}{8}$ pol, o menor diâmetro do eixo se a tensão de cisalhamento admissível para o aço é τ_{adm} = 12 ksi.



Problema 5.40

5.41. A mola cilíndrica consiste em um anel de borracha preso ao anel e ao eixo rígidos. Se o anel for mantido fixo e for aplicado o torque **T** ao eixo, qual será a tensão de cisalhamento máxima na borracha?



Problema 5.41

5.4 ÂNGULO DE TORÇÃO

Ocasionalmente, o projeto de um eixo depende de limitações na quantidade de rotação ou torção ocorrida quando o eixo é submetido ao torque. Além disso, o cálculo do ângulo de torção do eixo é importante quando se analisam as reações em eixos estaticamente indeterminados.

Nesta seção desenvolveremos uma fórmula para determinar o ***ângulo de torção*** ϕ (fi) de uma extremidade do eixo em relação à outra. Suponha que o eixo tenha seção transversal circular, que pode variar gradualmente ao longo de seu comprimento (Figura 5.15*a*); suponha também que o material seja homogêneo e comporte-se de maneira linear-elástica quando o torque é aplicado. Como no caso de uma barra com carga axial, vamos desprezar as deformações localizadas que ocorrem nos pontos de aplicação dos torques e onde a seção transversal muda abruptamente suas dimensões. Pelo princípio de Saint-Venant, essas conseqüências ocorrem dentro de pequenas regiões do comprimento do eixo e geralmente têm pouca influência sobre o resultado final.

Usando o método das seções, um disco infinitesimal de espessura dx, localizado na posição x, é retirado do eixo (Figura 5.15*b*). O torque interno resultante é representado como $T(x)$, visto que a carga externa pode fazê-lo variar ao longo da linha de centro do eixo. Devido a $T(x)$, o disco se torce, de modo que a *rotação relativa* de uma de suas faces em relação à outra é $d\phi$ (Figura 5.15*b*). O resultado é que um elemento do material localizado no raio

Os poços de petróleo são comumente perfurados a profundidades que excedem mil metros. O resultado é que o ângulo de torção total nos tubos de perfuração é substancial e deve ser calculado.

arbitrário ρ no interior do disco sofre a deformação por cisalhamento γ. Os valores de γ e $d\phi$ são relacionados pela Equação 5.1, ou seja:

$$d\phi = \gamma \frac{dx}{\rho} \tag{5.13}$$

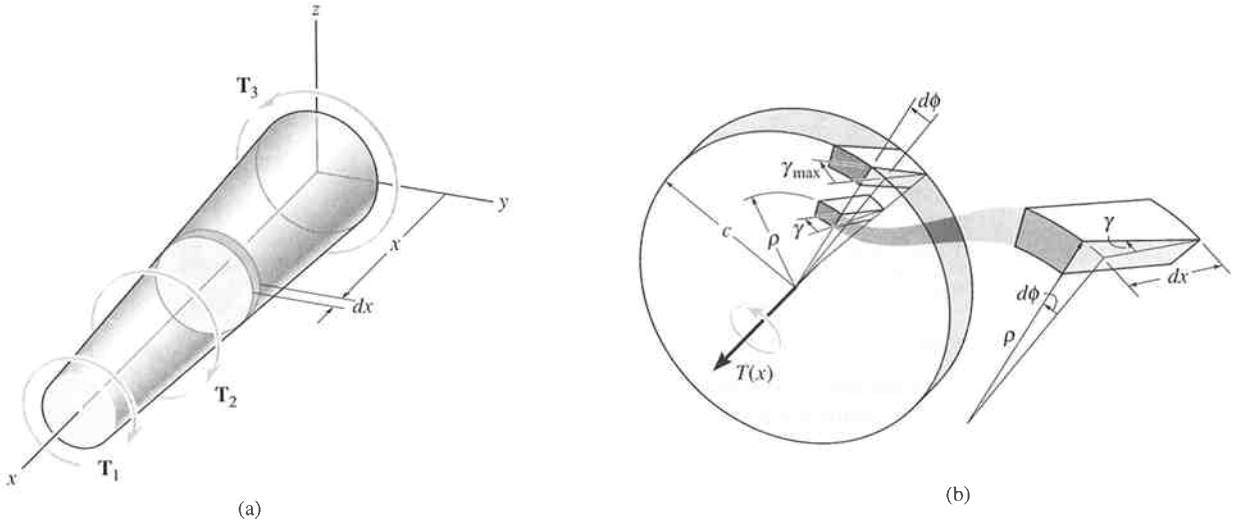


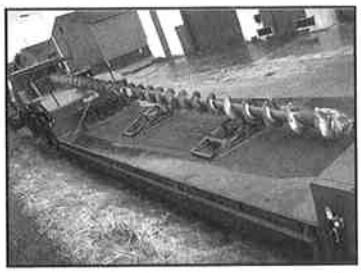
Figura 5.15

Como a lei de Hooke, $\gamma = \tau/G$, aplica-se e a tensão de cisalhamento pode ser expressa em termos do torque aplicado usando-se a fórmula da torção $\tau = T(x)\rho/J(x)$, então $\gamma = T(x)\rho/J(x)G$. Substituindo pela Equação 5.13, temos que o ângulo de torção do disco é:

$$d\phi = \frac{T(x)}{J(x)G}\,dx$$

Integrando em todo o comprimento L do eixo, obtemos o ângulo de torção para todo o eixo, ou seja:

$$\boxed{\phi = \int_0^L \frac{T(x)dx}{J(x)G}} \tag{5.14}$$



Quando calculamos a tensão e o ângulo de torção deste trado, precisamos considerar a carga variável que atua ao longo de seu comprimento.

Onde:

ϕ = ângulo de torção de uma extremidade do eixo em relação à outra, medido em radianos
$T(x)$ = torque interno na posição arbitrária x, determinado pelo método das seções e pela equação do momento na condição de equilíbrio aplicada em torno da linha de centro do eixo
$J(x)$ = momento de inércia polar do eixo expresso como função da posição x
G = módulo de elasticidade ao cisalhamento do material

Torque Constante e Área da Seção Transversal. Normalmente, na prática da engenharia o material é homogêneo, de modo que G é constante. Além disso, a área da seção transversal e o torque aplicado são constantes ao longo do comprimento do eixo (Figura 5.16). Se esse for o caso, o torque interno $T(x) = T$, o momento de inércia polar $J(x) = J$ e a Equação 5.14 são integráveis, o que resulta em:

$$\boxed{\phi = \frac{TL}{JG}} \tag{5.15}$$

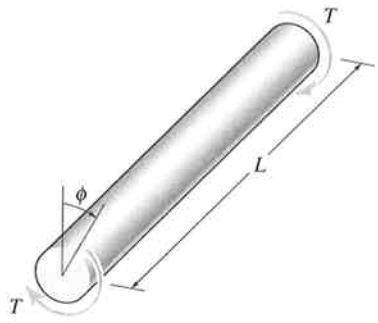


Figura 5.16

As semelhanças entre as duas equações anteriores e as de uma barra com carga axial ($\delta = \int P(x)\, dx/A(x)E$ e $\delta = PL/AE$) devem ser observadas.

Podemos usar a Equação 5.15 para determinar o módulo de elasticidade ao cisalhamento do material G. Para isso, um corpo-de-prova de comprimento e diâmetro conhecidos é colocado em uma máquina de teste de torção como a mostrada na Figura 5.17. O torque T aplicado e o ângulo de torção ϕ são medidos no comprimento de referência L. Pela Equação 5.15, $G = TL/J\phi$. Para obter um valor mais confiável de G, são executados vários testes e usa-se o valor médio.

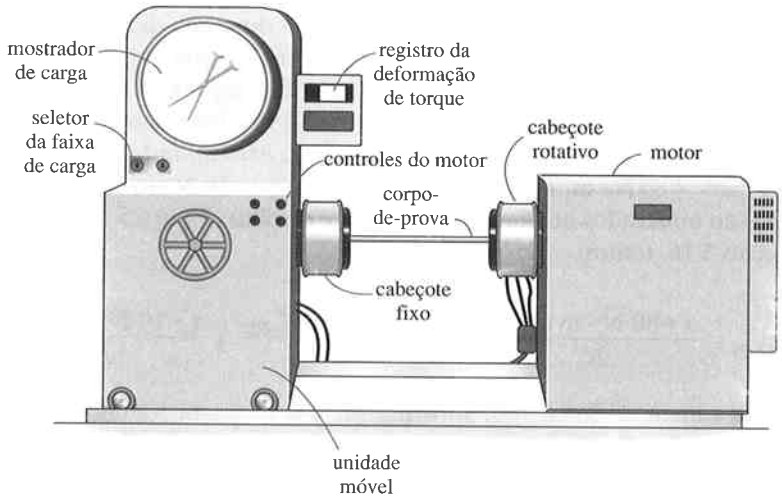


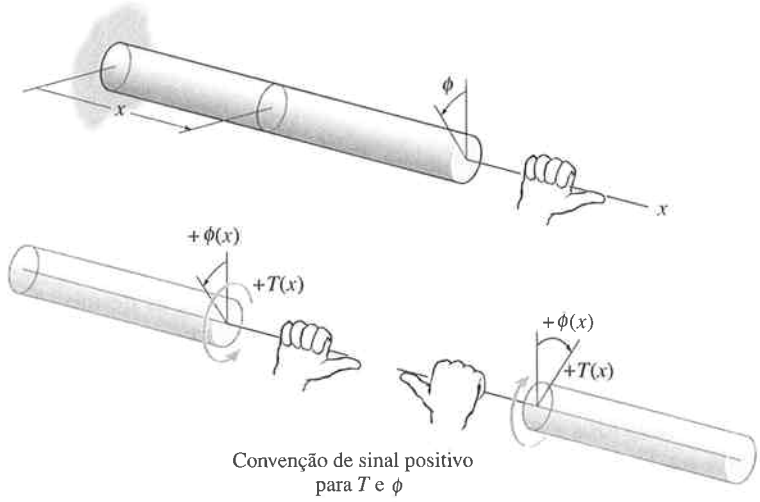
Figura 5.17

Se o eixo estiver sujeito a diversos torques diferentes, ou a área da seção transversal ou ainda o módulo ao cisalhamento mudar abruptamente de uma região do eixo para outra, a Equação 5.15 será aplicada a cada segmento do eixo em que essas quantidades sejam constantes. O ângulo de torção de uma extremidade do eixo em relação à outra será, então, determinado pela adição de vetores dos ângulos de torção de cada segmento. Nesse caso:

$$\phi = \sum \frac{TL}{JG} \tag{5.16}$$

Convenção de Sinais. A fim de aplicarmos a equação anterior, devemos criar uma convenção de sinais para o torque interno e o ângulo de torção de uma extremidade do eixo em relação à outra. Para isso, usaremos a regra da mão direita, pela qual o torque e o ângulo serão *positivos* se a direção indicada

pelo *polegar* for no sentido de *afastar-se* do eixo quando os dedos são fechados para indicar a tendência da rotação (Figura 5.18).



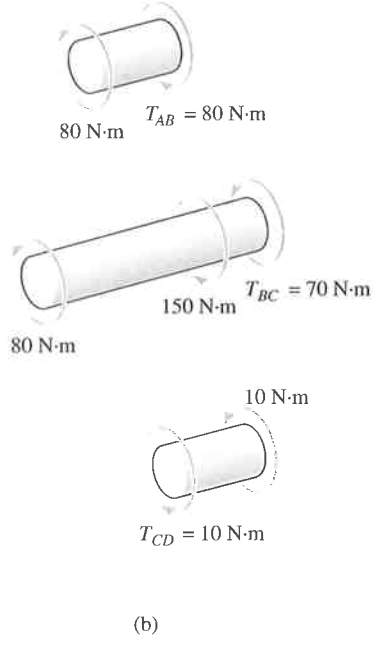
Convenção de sinal positivo para T e ϕ

Figura 5.18

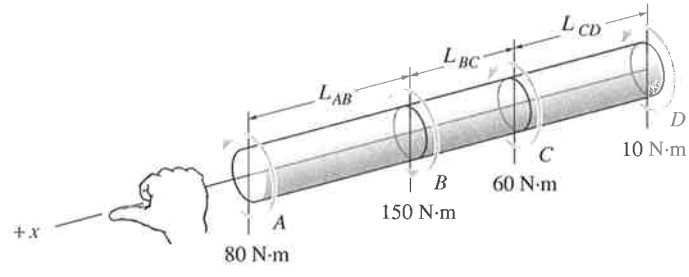
Para ilustrar o uso da convenção de sinais, consideremos o eixo mostrado na Figura 5.19*a*, o qual está submetido a quatro torques. O ângulo de torção da extremidade A em relação à extremidade D deve ser determinado. Neste problema devem ser considerados três segmentos do eixo, visto que o torque interno muda em B e C. Usando-se o método das seções, os torques internos são determinados para cada segmento (Figura 5.19*b*). Pela regra da mão direita, com torques positivos no sentido que se afasta da *extremidade* do corte do eixo, temos $T_{AB} = +80\ \text{N} \cdot \text{m}$, $T_{BC} = -70\ \text{N} \cdot \text{m}$ e $T_{CD} = -10\ \text{N} \cdot \text{m}$. Esses resultados também são mostrados no *diagrama de torque* do eixo (Figura 5.19*c*). Aplicando a Equação 5.16, temos:

$$\phi_{A/D} = \frac{(+80\ \text{N} \cdot \text{m})\ L_{AB}}{JG} + \frac{(-70\ \text{N} \cdot \text{m})\ L_{BC}}{JG} + \frac{(-10\ \text{N} \cdot \text{m})\ L_{CD}}{JG}$$

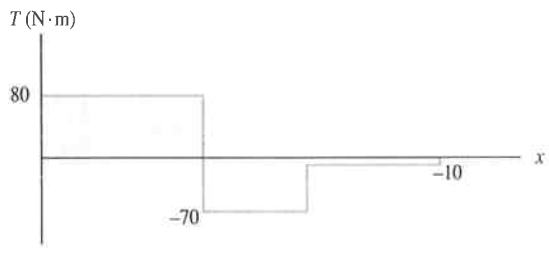
Se os outros dados forem substituídos e a resposta for uma quantidade *positiva*, isso significa que a extremidade A gira como indicado pela curvatura dos dedos da mão direita quando o polegar está na direção que *se afasta* do eixo (Figura 5.19*a*). A notação com duplo subscrito é usada para indicar o ângulo de torção relativo ($\phi_{A/D}$); entretanto, se o ângulo de torção for determinado em relação a um *ponto fixo*, será usado apenas um índice. Por exemplo, se D estiver localizado em um apoio fixo, o ângulo de torção calculado será denotado por ϕ_A.



(b)



(a)



(c)

Figura 5.19

PONTOS IMPORTANTES

- Determinamos o ângulo de torção relacionando o torque aplicado à tensão de cisalhamento por meio da fórmula da torção, $\tau = T\rho/J$, e relacionando a rotação relativa à deformação por cisalhamento usando $d\phi = \gamma dx/\rho$. Finalmente, essas equações são combinadas por meio da lei de Hooke, $\tau = G\gamma$, o que resulta na Equação 5.14.
- Como a lei de Hooke é usada no desenvolvimento da fórmula do ângulo de torção, é importante que os torques aplicados não provoquem escoamento do material e que o material seja homogêneo e comporte-se de maneira linear-elástica.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

O ângulo de torção de uma extremidade de um eixo ou tubo em relação à outra é determinado aplicando-se as equações 5.14, 5.15 e 5.16.

Torque Interno.

- O torque interno é determinado em um ponto da linha de centro do eixo usando-se o método das seções e a equação do momento na condição de equilíbrio aplicada ao longo da linha de centro do eixo.
- Se o torque variar ao longo do comprimento do eixo, deve ser feito um corte em uma posição arbitrária x do eixo e o torque expresso como função de x, isto é, $T(x)$.
- Se vários torques externos atuam sobre o eixo entre suas extremidades, deve ser determinado o torque interno de cada *segmento* do eixo, entre quaisquer dois torques externos. O resultado pode ser representado como um diagrama de torque.

Ângulo de Torção.

- Quando a área circular da seção transversal varia ao longo da linha de centro do eixo, o momento de inércia polar deve ser expresso em função de sua posição x ao longo do eixo, $J(x)$.
- Se o momento de inércia polar ou o torque interno *mudarem subitamente* entre as extremidades do eixo, então a fórmula $\phi = \int (T(x)/J(x)G)\, dx$ ou $\phi = TL/JG$ deve ser aplicada a cada *segmento* no qual J, G e T sejam contínuos ou constantes.
- Quando o torque interno é determinado, certifique-se de usar para o eixo uma convenção de sinais consistente, tal como a discutida anteriormente. Certifique-se também de empregar um conjunto de unidades consistente ao substituir os dados numéricos nas equações.

EXEMPLO 5.7

As engrenagens acopladas ao eixo de aço com uma das extremidades fixa estão sujeitas aos torques mostrados na Figura 5.20*a*. Supondo que o módulo de elasticidade de cisalhamento seja $G = 80$ GPa e o eixo tenha diâmetro de 14 mm, determinar o deslocamento do dente P da engrenagem A. O eixo gira livremente no mancal em B.

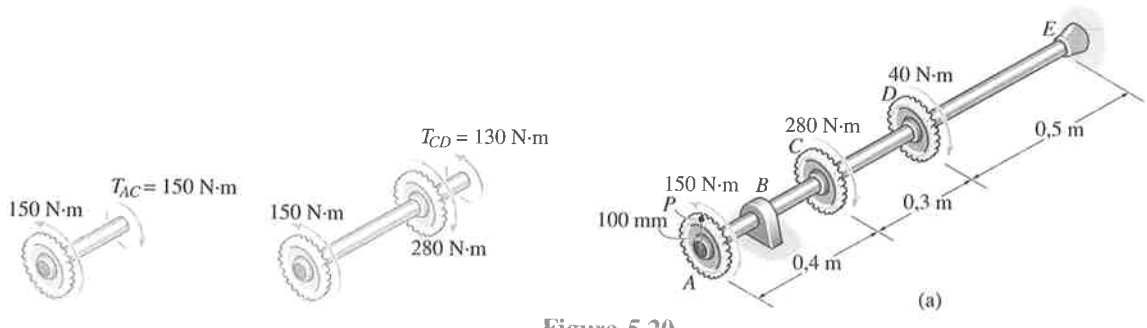
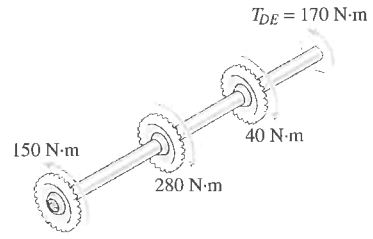
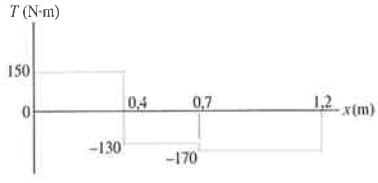


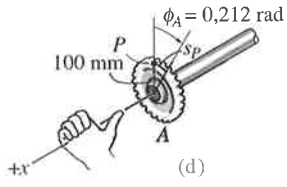
Figura 5.20



(b)



(c)



(d)

Figura 5.20

SOLUÇÃO

Torque Interno. Por inspeção, os torques nos segmentos *AC, CD* e *DE* são diferentes porém *constantes* em cada segmento. Os diagramas de corpo livre dos segmentos apropriados do eixo, junto com os torques internos calculados, são mostrados na Figura 5.20*b*. Usando a regra da mão direita e a convenção de sinais estabelecida de que o torque é positivo quando se afasta da extremidade cortada do eixo, temos:

$$T_{AC} = +150 \text{ N} \cdot \text{m} \qquad T_{CD} = -130 \text{ N} \cdot \text{m} \qquad T_{DE} = -170 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Esses resultados também são mostrados no diagrama de torque (Figura 5.20*c*).

Ângulo de Torção. O momento de inércia polar do eixo é:

$$J = \frac{\pi}{2}(0{,}007 \text{ m})^4 = 3{,}77(10^{-9}) \text{ m}^4$$

Aplicando a Equação 5.16 a cada segmento e adicionando algebricamente os resultados, temos:

$$\phi_A = \sum \frac{TL}{JG} = \frac{(+150 \text{ N} \cdot \text{m})(0{,}4 \text{ m})}{3{,}77(10^{-9}) \text{ m}^4[80(10^9) \text{ N/m}^2]} + \frac{(-130 \text{ N} \cdot \text{m})(0{,}3 \text{ m})}{3{,}77(10^{-9}) \text{ m}^4[80(10^9) \text{ N/m}^2)]} + \frac{(-170 \text{ N} \cdot \text{m})(0{,}5 \text{ m})}{3{,}77(10^{-9}) \text{ m}^4[80(10^9) \text{ N/m}^2)]} = -0{,}212 \text{ rad}$$

Como a resposta é negativa, pela regra da mão direita o polegar está direcionado no *sentido* da extremidade *E* do eixo e, portanto, a engrenagem *A* gira como mostrado na Figura 5.20*d*.

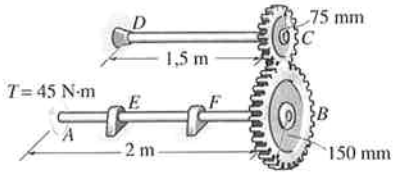
O deslocamento do dente *P* na engrenagem *A* é:

$$s_P = \phi_A r = (0{,}212 \text{ rad})(100 \text{ mm}) = 21{,}2 \text{ mm} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

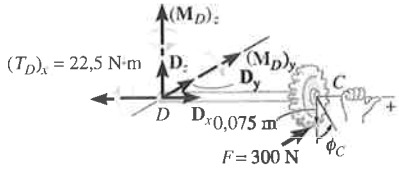
Lembrar que essa análise é válida apenas se a tensão de cisalhamento não exceder o limite de proporcionalidade do material.

EXEMPLO 5.8

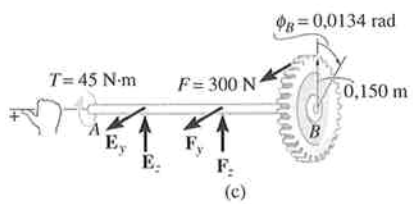
Os dois eixos maciços de aço mostrados na Figura 5.21*a* estão acoplados por meio de engrenagens. Determinar o ângulo de torção da extremidade *A* do eixo *AB* quando é aplicado o torque $T = 45 \text{ N} \cdot \text{m}$. Supor $G = 80$ GPa. O eixo *AB* é livre para girar nos mancais *E* e *F*, enquanto o eixo *DC* é fixo em *D*. Cada eixo tem diâmetro de 20 mm.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.21

SOLUÇÃO

Torque Interno. Os diagramas de corpo livre de cada eixo são mostrados nas figuras 5.21*b* e 5.21*c*. Somando os momentos ao longo do eixo x do eixo AB, temos a reação tangencial entre as engrenagens $F = 45\ \text{N} \cdot \text{m}/0{,}15\ \text{m} = 300\ \text{N}$. Somando os momentos em torno do eixo x do eixo DC, temos que essa força cria um torque de $(T_D)_x = 300\ \text{N}(0{,}075\ \text{m}) = 22{,}5\ \text{N} \cdot \text{m}$ no eixo DC.

Ângulo de Torção. Para resolver o problema, calculamos primeiro a rotação da engrenagem C devido ao torque de $22{,}5\ \text{N} \cdot \text{m}$ no eixo DC (Figura 5.21*b*). Esse ângulo de torção é:

$$\phi_C = \frac{TL_{DC}}{JG} = \frac{(+22{,}5\ \text{N} \cdot \text{m})(1{,}5\ \text{m})}{(\pi/2)(0{,}010\ \text{m})^4[80(10^9)\ \text{N/m}^2]} = +0{,}0269\ \text{rad}$$

Como as engrenagens na extremidade do eixo estão engrenadas, a rotação ϕ_C da engrenagem C faz a engrenagem B girar ϕ_B (Figura 5.21*c*), onde:

$$\phi_B(0{,}15\ \text{m}) = (0{,}0269\ \text{rad})(0{,}075\ \text{m})$$
$$\phi_B = 0{,}0134\ \text{rad}$$

Vamos determinar agora o ângulo de rotação da extremidade A em relação à extremidade B do eixo AB provocado pelo torque de $45\ \text{N} \cdot \text{m}$ (Figura 5.21*c*). Temos:

$$\phi_{A/B} = \frac{T_{AB}L_{AB}}{JG} = \frac{(+45\ \text{N} \cdot \text{m})(2\ \text{m})}{(\pi/2)(0{,}010\ \text{m})^4[80(10^9)\ \text{N/m}^2]} = +0{,}0716\ \text{rad}$$

A rotação da extremidade A é, portanto, determinada somando-se ϕ_B e $\phi_{A/B}$, visto que ambos os ângulos estão na *mesma direção* (Figura 5.21*c*). Temos assim:

$$\phi_A = \phi_B + \phi_{A/B} = 0{,}0134\ \text{rad} + 0{,}0716\ \text{rad} = +0{,}0850\ \text{rad} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

EXEMPLO 5.9

O poste maciço de ferro fundido com 2 pol de diâmetro mostrado na Figura 5.22*a* está enterrado no solo. Supondo que seja aplicado um torque em seu topo com uma chave rígida, determinar a tensão de cisalhamento máxima no poste e o ângulo de torção em seu topo. Supor, também, que o torque está quase girando o poste e que o solo exerce uma resistência uniforme à torção de t lb · pol/pol ao longo do comprimento enterrado de 24 pol. $G = 5{,}5(10^3)$ ksi.

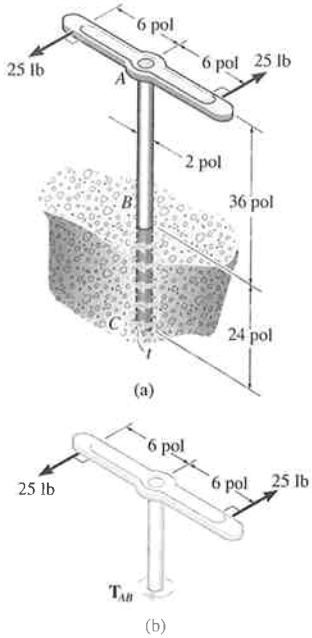


Figura 5.22

SOLUÇÃO

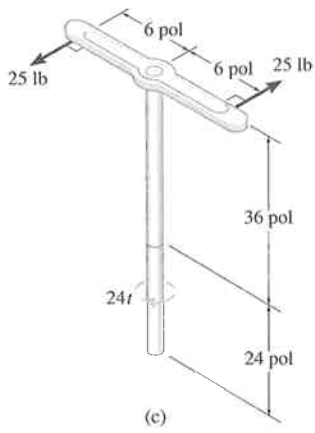
Torque Interno. O torque interno no segmento AB do poste é constante. Pelo diagrama de corpo livre (Figura 5.22*b*), temos:

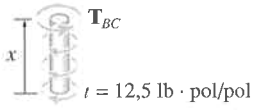
$$\Sigma M_z = 0; \qquad T_{AB} = 25\ \text{lb}(12\ \text{pol}) = 300\ \text{lb} \cdot \text{pol}$$

A intensidade da distribuição uniforme do torque ao longo do segmento enterrado BC é determinada pelo equilíbrio de todo o poste (Figura 5.22*c*). Nesse caso:

$$\Sigma M_z = 0; \qquad 25\ \text{lb}(12\ \text{pol}) - t(24\ \text{pol}) = 0$$
$$t = 12{,}5\ \text{lb} \cdot \text{pol/pol}$$

Então, pelo diagrama de corpo livre de uma seção do poste localizada na posição x dentro da região BC (Figura 5.22*d*), temos:





(d)

Figura 5.22

$$\Sigma M_z = 0; \qquad T_{BC} - 12{,}5x = 0$$
$$T_{BC} = 12{,}5x$$

Tensão de Cisalhamento Máxima. A maior tensão de cisalhamento ocorre na região AB, visto que o torque é maior naquela região e J é constante para o poste. Aplicando a fórmula da torção, temos:

$$\tau_{máx} = \frac{T_{AB}}{J} = \frac{(300 \text{ lb} \cdot \text{pol})(1 \text{ pol})}{(\pi/2)(1 \text{ pol})^4} = 191 \text{ psi} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Ângulo de Torção. O ângulo de torção no topo do poste pode ser determinado em relação à parte inferior desse poste desde que ele esteja fixado e ainda vá girar. Tanto o segmento AB quanto o BC sofrem torção e, nesse caso, temos:

$$\phi_A = \frac{T_{AB}L_{AB}}{JG} + \int_0^{L_{BC}} \frac{T_{BC}\,dx}{JG}$$
$$= \frac{(300 \text{ lb} \cdot \text{pol})(36 \text{ pol})}{JG} + \int_0^{24 \text{ pol}} \frac{12{,}5x\,dx}{JG}$$
$$= \frac{10.800 \text{ lb} \cdot \text{pol}^2}{JG} + \frac{12{,}5[(24)^2/2] \text{ lb} \cdot \text{pol}^2}{JG}$$
$$= \frac{14.400 \text{ lb} \cdot \text{pol}^2}{(\pi/2)(1 \text{ pol})^4 5.500(10^3) \text{ lb/pol}^2} = 0{,}00167 \text{ rad} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

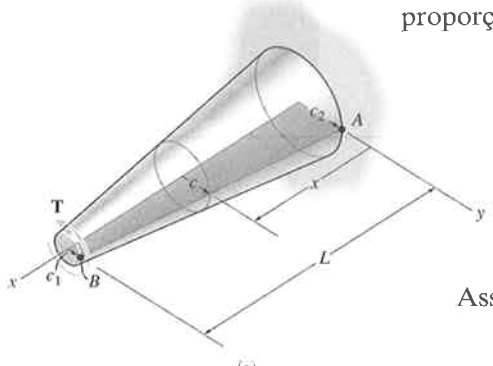
EXEMPLO 5.10

O eixo cônico mostrado na Figura 5.23*a* é feito de um material que tem módulo de elasticidade ao cisalhamento G. Determinar o ângulo de torção da extremidade B do eixo quando este é submetido a torque.

SOLUÇÃO

Torque Interno. Por inspeção ou pelo diagrama de corpo livre de uma seção localizada na posição arbitrária x (Figura 5.23*b*), o torque interno é T.

Ângulo de Torção. Nesse caso, o momento de inércia polar varia ao longo da linha de centro do eixo e, portanto, devemos expressá-lo em termos da coordenada x. O raio c do eixo é determinado em função da distância x pela proporção do declive da reta AB na Figura 5.23*c*. Temos:



(a)

Figura 5.23

$$\frac{c_2 - c_1}{L} = \frac{c_2 - c}{x}$$

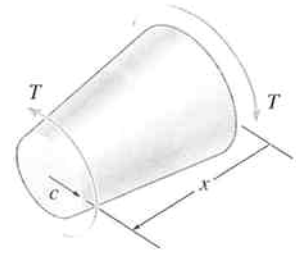
$$c = c_2 - x\left(\frac{c_2 - c_1}{L}\right)$$

Assim, em x,

$$J(x) = \frac{\pi}{2}\left[c_2 - x\left(\frac{c_2 - c_1}{L}\right)\right]^4$$

Aplicando a Equação 5.14, temos:

$$\phi = \int_0^L \frac{T\,dx}{\left(\frac{\pi}{2}\right)\left[c_2 - x\left(\frac{c_2 - c_1}{L}\right)\right]^4 G} = \frac{2T}{\pi G}\int_0^L \frac{dx}{\left[c_2 - x\left(\frac{c_2 - c_1}{L}\right)\right]^4}$$



(b)

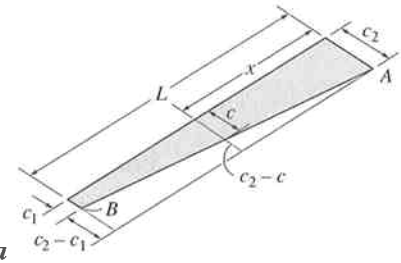
Fazendo a integração com uma tabela de integrais, o resultado torna-se:

$$\phi = \left(\frac{2T}{\pi G}\right) \frac{1}{3\left(\frac{c_2 - c_1}{L}\right)\left[c_2 - x\left(\frac{c_2 - c_1}{L}\right)\right]^3} \Bigg|_0^L$$

$$= \frac{2T}{\pi G}\left(\frac{L}{3(c_2 - c_1)}\right)\left(\frac{1}{c_1^3} - \frac{1}{c_2^3}\right)$$

Rearranjando os termos, obtém-se:

$$\phi = \frac{2TL}{3\pi G}\left(\frac{c_2^2 + c_1c_2 + c_1^2}{c_1^3c_2^3}\right)$$ ***Resposta***



(c)

Figura 5.23

Para verificar parcialmente o resultado, observar que, quando $c_1 = c_2 = c$,

$$\phi = \frac{TL}{[(\pi/2)c^4]G} = \frac{TL}{JG}$$

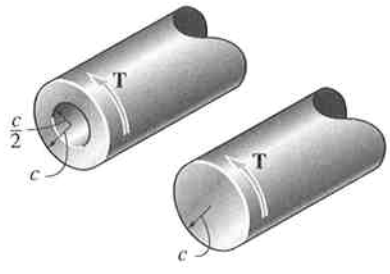
que é a Equação 5.15.

PROBLEMAS

Lembrando: 1 kip = 1.000 lb e 1 ksi = 1.000 lb/pol².

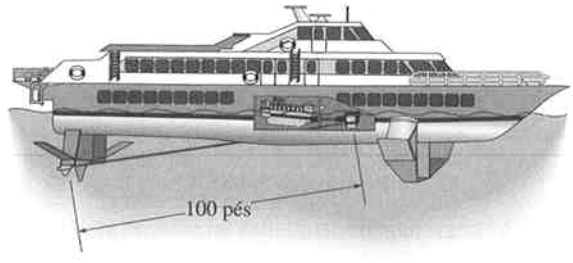
5.42. As hélices de um navio estão acopladas a um eixo maciço, feito de aço A-36 e com 60 m de comprimento, diâmetro externo de 340 mm e diâmetro interno de 260 mm. Se a potência de saída for 4,5 MW quando o eixo girar a 20 rad/s, qual será a tensão de torção máxima no eixo e seu ângulo de torção?

5.43. Um eixo está submetido a um torque **T**. Comparar a eficácia do tubo mostrado na figura com a de um eixo de seção maciça de raio c. Para isso, calcular a porcentagem de aumento na tensão de torção e no ângulo de torção por unidade de comprimento do tubo em relação aos valores do eixo de seção maciça.



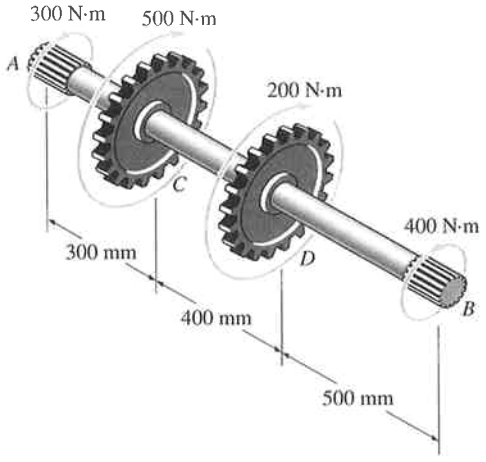
Problema 5.43

***5.44.** O hidrofólio tem um eixo da hélice, feita de aço A-36, com 100 pés de comprimento. Tal eixo está acopladas a um motor diesel que fornece potência máxima de 2.500 hp e gira a 1.700 rpm. Se o diâmetro externo do eixo é de 8 pol e a espessura da parede é de $\frac{3}{8}$ pol, qual é a tensão de cisalhamento máxima desenvolvida no eixo? E qual é o ângulo de torção do eixo quando a máxima potência é transmitida à hélice?



Problema 5.44

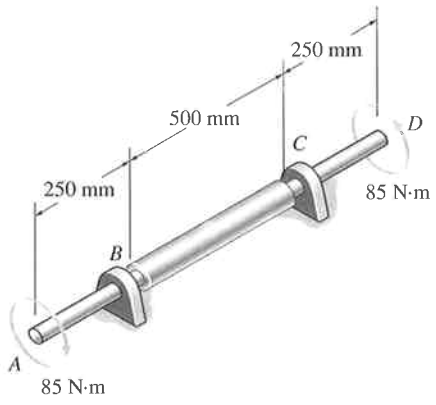
5.45. As extremidades estriadas e as engrenagens acopladas ao eixo de aço A-36 estão submetidas aos torques mostrados. Determinar o ângulo de torção da extremidade B em relação à extremidade A. O eixo tem diâmetro de 40 mm.



Problema 5.45

5.46. O eixo de aço A-36 está composto pelos tubos AB e CD e por uma parte maciça BC. Apóia-se em mancais lisos que lhe permitem girar livremente. Se as extremidades estão sujeitas a torques de 85 N · m, qual o ângulo de torção da extremidade A em relação à extremidade D? Os tubos têm diâmetro externo de 30 mm e diâmetro interno de 20 mm. A parte maciça tem diâmetro de 40 mm.

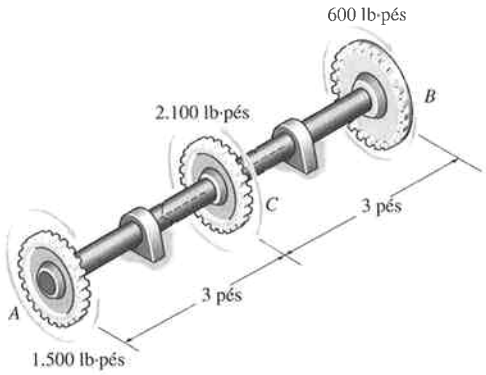
5.47. O eixo de aço A-36 está composto pelos tubos AB e CD e por uma parte maciça BC. Apóia-se em mancais lisos que lhe permitem girar livremente. Se as extremidades A e D estão sujeitas a torques de 85 N · m, qual o ângulo de torção da extremidade B da parte maciça em relação à extremidade C? Os tubos têm diâmetro externo de 30 mm e diâmetro interno de 20 mm. A parte maciça tem diâmetro de 40 mm.



Problemas 5.46/5.47

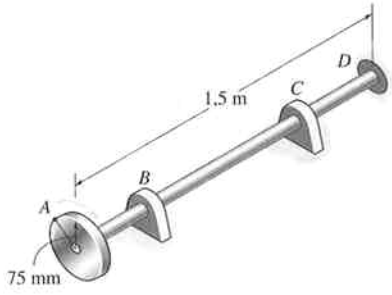
***5.48.** As engrenagens acopladas ao eixo de aço inoxidável ASTM-304 estão sujeitas aos torques mostrados. Determinar o ângulo de torção da extremidade A em relação à extremidade B. O eixo tem diâmetro de 1,5 pol.

5.49. As engrenagens acopladas ao eixo de aço inoxidável ASTM-304 estão sujeitas aos torques mostrados. Determinar o ângulo de torção da engrenagem C em relação à engrenagem B. O eixo tem diâmetro de 1,5 pol.



Problemas 5.48/5.49

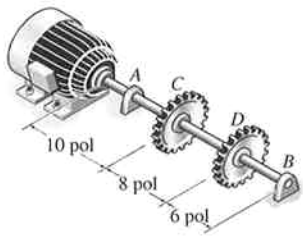
5.50. O eixo e o volante rotativos, quando parados subitamente em D, começam a oscilar nos sentidos horário e anti-horário, de modo que um ponto A na borda externa do volante desloca-se um arco de 6 mm. Determinar a tensão de cisalhamento máxima desenvolvida no eixo tubular de aço A-36 devido à oscilação. O eixo tem diâmetro interno de 24 mm e diâmetro externo de 32 mm. Os mancais em B e C permitem que ele gire livremente, enquanto o apoio em D o mantém fixo.



Problema 5.50

5.51. O motor fornece 40 hp ao eixo de aço inoxidável ASTM-304 quando gira a 20 Hz. O eixo apóia-se em mancais sem atrito em A e B, os quais lhe permitem rotação livre. As engrenagens C e D presas ao eixo consomem 25 hp e 15 hp, respectivamente. Determinar o diâmetro do eixo, com aproximação de $\frac{1}{8}$ pol, se a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 8$ ksi e o ângulo de torção admissível de C em relação a D é de 0,20°.

***5.52.** O motor fornece 40 hp ao eixo de aço inoxidável ASTM-304 quando gira a 20 Hz. O eixo tem diâmetro de 1,5 pol e apóia-se em mancais sem atrito em A e B, os quais lhe permitem rotação livre. As engrenagens C e D presas ao eixo consomem 25 hp e 15 hp, respectivamente. Determinar a tensão máxima absoluta no eixo e o ângulo de torção da engrenagem C em relação à engrenagem D.



Problemas 5.51/5.52

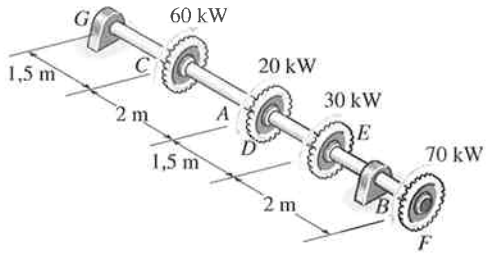
5.53. O eixo de aço A-36 tem 2 m de comprimento e diâmetro externo de 40 mm. Quando gira a 80 rad/s, transmite 32 kW de potência do motor E para o gerador G. Determinar a menor espessura do eixo se a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 140$ MPa e o eixo não pode ter uma torção maior que 0,05 rad.

5.54. O eixo maciço de aço A-36 tem 3 m de comprimento e diâmetro externo de 50 mm. Requer-se que transmita 35 kW de potência do motor E para o gerador G. Determinar a menor velocidade angular que o eixo pode ter se a máxima torção admissível é de 1°.

Problemas 5.53/5.54

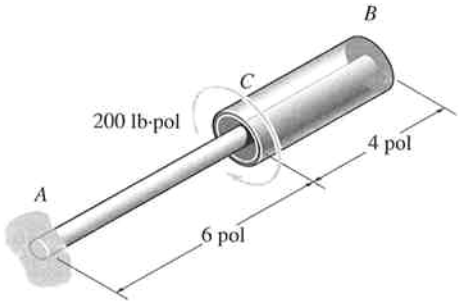
5.55. O eixo de aço A-36 gira a $\omega = 125$ rad/s e transmite a potência mostrada. Determinar a tensão de cisalhamento máxima absoluta no eixo e o ângulo de torção de C em relação a F. Os diâmetros interno e externo do eixo são $d_i = 30$ mm e $d_o = 40$ mm. Os mancais de apoio em B e G são lisos.

***5.56.** O eixo de aço A-36 gira a $\omega = 125$ rad/s e transmite a potência mostrada. Determinar os diâmetros interno e externo do eixo se $d_1/d_0 = 0{,}6$, a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 150$ MPa e o ângulo de torção relativo admissível é $\phi_{adm} = 2°/m$. Os mancais de apoio em B e G não estão em atrito.



Problemas 5.55/5.56

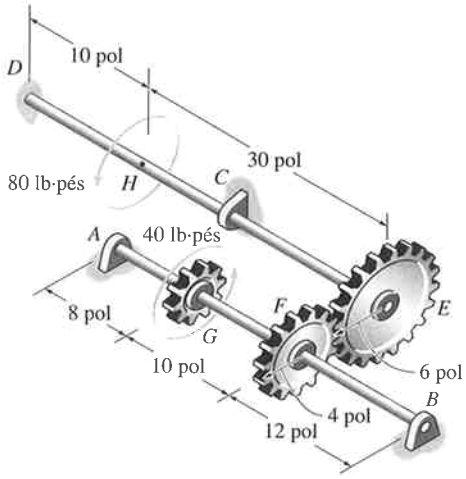
5.57. O conjunto de aço A-36 consiste em um tubo com raio externo de 1 pol e espessura da parede de 0,125 pol. Por meio de uma chapa rígida em B, ele é acoplado ao eixo maciço AB de 1 pol de diâmetro. Determinar a rotação da extremidade C do tubo se um torque de 200 lb · pol for aplicado nessa extremidade. A extremidade A do eixo tem apoio fixo.



Problema 5.57

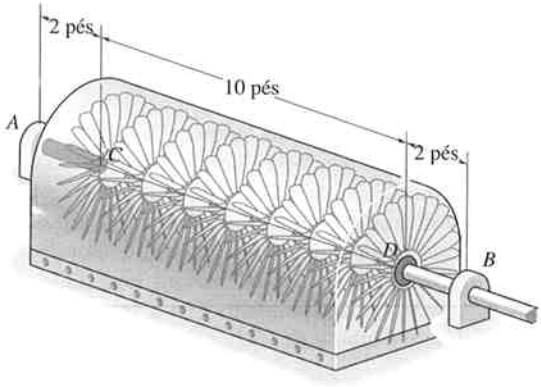
5.58. Os dois eixos são feitos de aço A-36. Cada um tem diâmetro de 1 pol, e eles estão apoiados por mancais em A, B e C, o que permite rotação livre. Supondo que o apoio em D seja fixo, determinar o ângulo de torção da extremidade B quando os torques são aplicados ao conjunto como mostrado.

5.59. Os dois eixos são feitos de aço A-36. Cada um tem diâmetro de 1 pol, e eles estão apoiados por mancais em A, B e C, o que permite rotação livre. Supondo que o apoio em D seja fixo, determinar o ângulo de torção da extremidade A quando os torques são aplicados ao conjunto como mostrado.



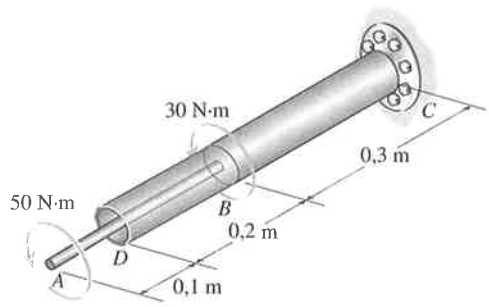
Problemas 5.58/5.59

***5.60.** O eixo da turbina, feito de aço L-2 e com 6 pol de diâmetro, está apoiado nos mancais em A e B. Se C for fixo e as pás da turbina criarem um torque que aumente linearmente de zero em C para 2.000 lb · pé em D, qual será o ângulo de torção do eixo na extremidade D em relação à extremidade C? Calcular também a tensão de cisalhamento máxima absoluta no eixo. Desprezar as dimensões das pás.



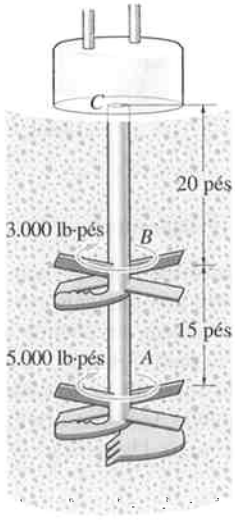
Problema 5.60

5.61. O conjunto é feito de aço A-36 e consiste em uma haste maciça de 15 mm de diâmetro acoplada ao interior de um tubo por meio de um disco rígido em B. Determinar o ângulo de torção em A. O tubo tem diâmetro externo de 30 mm e sua parede, espessura de 3 mm.



Problema 5.61

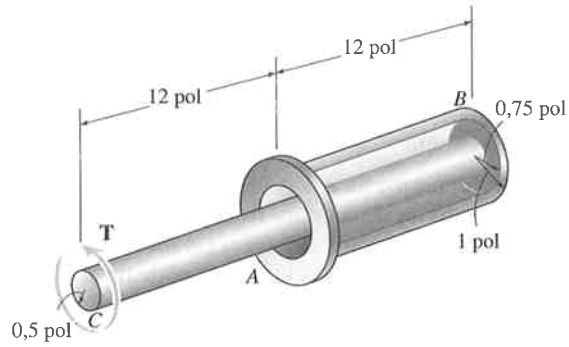
5.62. O dispositivo mostrado é usado para misturar solos a fim de fornecer estabilização local. Supondo que o misturador esteja acoplado a um eixo tubular de aço A-36 com diâmetro interno de 3 pol e diâmetro externo de 4,5 pol, determinar o ângulo de torção do eixo em A relativo a C se cada pá está submetida aos torques mostrados.



Problema 5.62

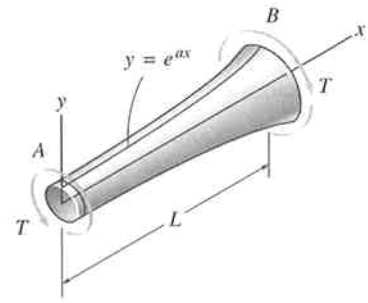
5.63. O dispositivo funciona como uma mola de torção compacta. É feito de aço A-36 e consiste em um eixo interno maciço CB circundado por — e acoplado a — um tubo AB por meio de um anel rígido em B. O anel em A também pode ser considerado rígido e impedido de girar. Supondo que seja aplicado um torque $T = 2$ kip · pol ao eixo, determinar o ângulo de torção na extremidade C e a tensão de cisalhamento máxima no tubo e no eixo.

***5.64.** O dispositivo funciona como uma mola de torção compacta. É feito de aço A-36 e consiste em um eixo interno maciço CB circundado por — e acoplado a — um tubo AB por meio de um anel rígido em B. O anel em A também pode ser considerado rígido e impedido de girar. Se a tensão de cisalhamento admissível para o material for $\tau_{adm} = 12$ ksi e o ângulo de torção em C for limitado a $\phi_{adm} = 3°$, qual torque máximo T pode ser aplicado à extremidade C.



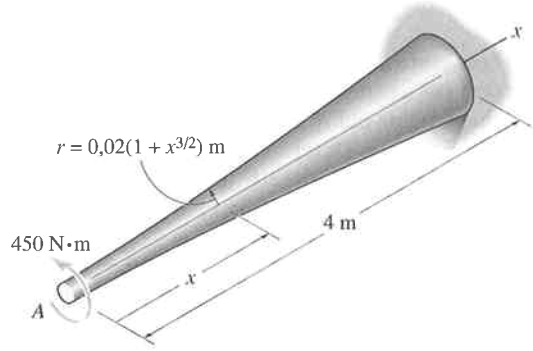
Problemas 5.63/5.64

5.65. O contorno da superfície do eixo é definido pela equação $y = e^{ax}$, onde a é uma constante. Se o eixo estiver submetido a um torque T em suas extremidades, qual será o ângulo de torção da extremidade A em relação à extremidade B? O módulo de elasticidade ao cisalhamento é G.



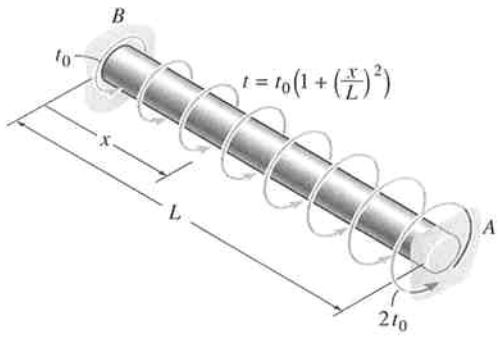
Problema 5.65

5.66. O eixo cônico é feito de liga de alumínio 2014-T6 e tem raio descrito pela função $r = 0,02(1 + x^{3/2})$ m, onde x é dado em metros. Determinar o ângulo de torção de sua extremidade A se ela estiver submetida a um torque de 450 N · m.



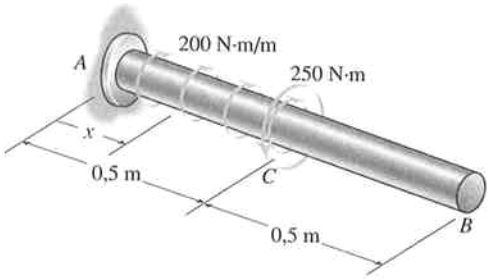
Problema 5.66

5.67. O eixo de raio c está submetido a um torque distribuído t, medido como torque por comprimento do eixo. Determinar o ângulo de torção da extremidade A. O módulo de elasticidade ao cisalhamento é G.



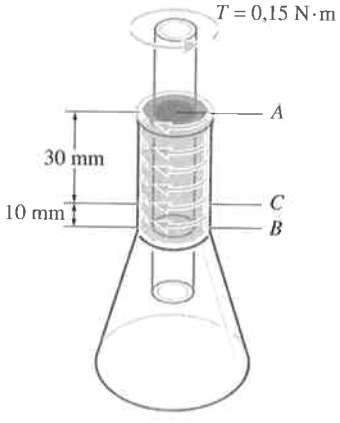
Problema 5.67

*5.68. O eixo de aço A-36 tem diâmetro de 50 mm e está submetido às cargas distribuída e concentrada mostradas. Determinar a tensão de cisalhamento máxima absoluta no eixo e construir o gráfico do ângulo de torção do eixo em radianos *versus* a distância x.



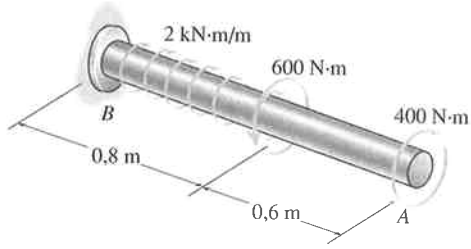
Problema 5.68

5.69. O tubo de vidro está embutido em um batoque de borracha, de modo que, quando o tubo gira com velocidade angular constante, o batoque cria uma *distribuição constante* de torque por atrito ao longo do comprimento de contato AB do tubo. Supondo que o tubo tenha diâmetro interno de 2 mm e diâmetro externo de 4 mm, determinar a tensão de cisalhamento desenvolvida em um ponto qualquer de suas paredes interna e externa em uma seção no nível C. Mostrar a distribuição cisalhamento-tensão qua atua ao longo de um segmento de reta radial nessa seção. Determinar também o ângulo de torção em A relativo a B. $G_{vidro} = 10$ GPa.



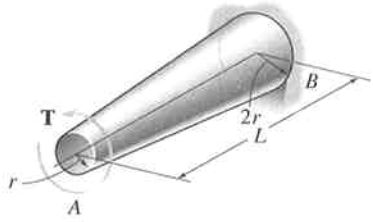
Problema 5.69

5.70. O eixo maciço de 60 mm de diâmetro é feito de aço A-36 e está sujeito às cargas de torção distribuída e concentrada mostradas. Determinar o ângulo de torção na extremidade livre A devido a essas cargas.



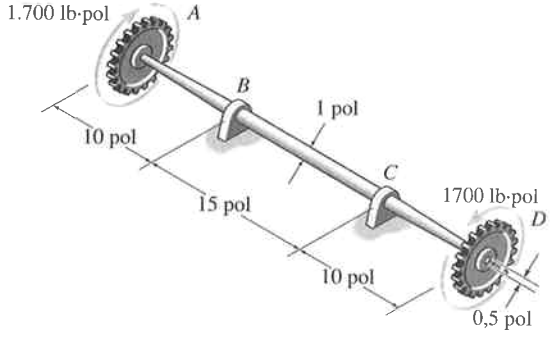
Problema 5.70

*5.71. O eixo cônico de comprimento L tem raio r na extremidade A e $2r$ na extremidade B. Se for engastado na extremidade B e submetido a um torque T, qual será o ângulo de torção na extremidade A? O módulo de elasticidade ao cisalhamento é G.



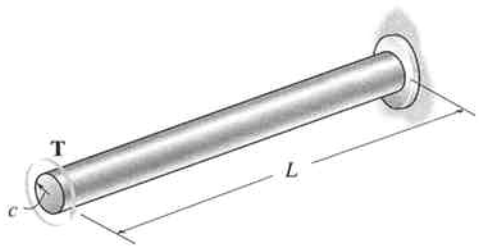
Problema 5.71

5.72. O eixo maciço de aço consiste em duas extremidades cônicas AB e CD e uma parte central BC de diâmetro constante. É apoiado por dois mancais sem atrito, o que lhe permite girar livremente. Se as engrenagens presas em suas extremidades estiverem submetidas a torques de equilíbrio de 1.700 lb · pol, qual será o ângulo de torção de uma extremidade em relação à outra. *Dica*: usar os resultados do Problema 5.71. $G_{aço} = 12(10^3)$ ksi.



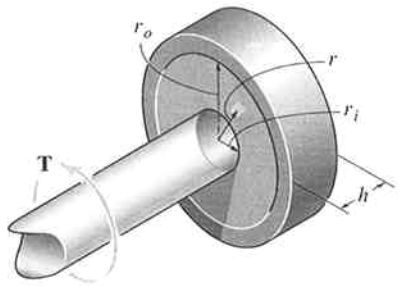
Problema 5.72

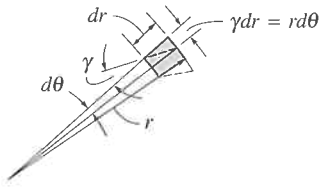
5.73. Mostre que, quando a barra está submetida ao torque T, o comprimento L diminui uma quantidade $L(1 - \sqrt{1 - (2T/\pi c^3 G)^2})$. O material de que é feito o eixo tem módulo de elasticidade ao cisalhamento G.



Problema 5.73

5.74. A mola cilíndrica consiste de um anel de borracha preso a um anel e a um eixo rígidos. Se o anel for mantido fixo e for aplicado o torque T ao eixo rígido, qual será o ângulo de torção do eixo? O módulo de elasticidade ao cisalhamento da borracha é G. *Dica*: como mostrado na figura, a deformação do elemento no raio r é determinada por $r\,d\theta = dr\,\gamma$. Usar essa expressão juntamente com $\tau = T(2\pi r^2 h)$, do Problema 5.41, para obter o resultado.





Problema 5.74

5.5 ELEMENTOS ESTATICAMENTE INDETERMINADOS CARREGADOS COM TORQUE

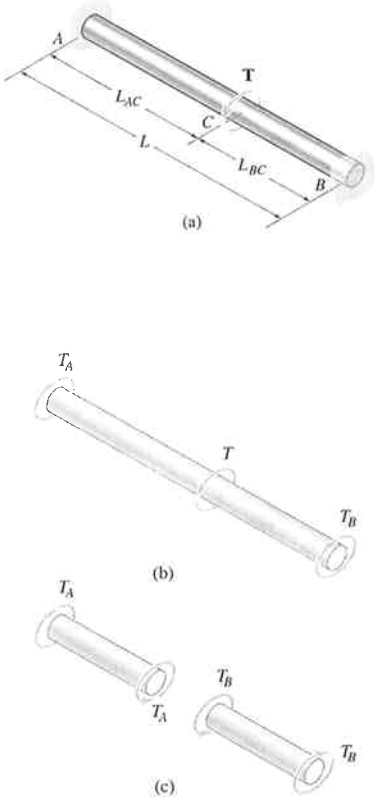


Figura 5.24

Um eixo carregado por torque pode ser classificado como estaticamente indeterminado se a equação do momento na condição de equilíbrio aplicada em torno de sua linha de centro não for suficiente para determinar os torques desconhecidos que atuam sobre ele. Um exemplo dessa situação é mostrado na Figura 5.24*a*. Como se vê no diagrama de corpo livre da Figura 5.24*b*, os torques de reação dos apoios A e B são desconhecidos. É requerido que:

$$\Sigma M_x = 0; \qquad T - T_A - T_B = 0$$

Como apenas uma equação de equilíbrio é aplicável e há duas incógnitas, o problema é estaticamente indeterminado (tem-se um número de incógnitas maior que o número de equações disponíveis). A fim de obter a solução, vamos usar o método de análise discutido na Seção 4.4.

A condição de compatibilidade necessária, ou a condição cinemática, requer que o ângulo de torção de uma extremidade do eixo em relação à outra seja nulo, visto que os apoios das extremidades são fixos. Portanto,

$$\phi_{A/B} = 0$$

A fim de escrever essa equação em termos dos torques desconhecidos, vamos supor que o material comporte-se de maneira linear-elástica, de modo que a relação carga-deslocamento seja expressa por $\phi = TL/JG$. Entendendo-se que o torque interno no segmento AC é $+T_A$ e no segmento CB é $-T_B$ (Figura 5.24*c*), a equação de compatibilidade mencionada anteriormente é escrita como:

$$\frac{T_A L_{AC}}{JG} - \frac{T_B L_{BC}}{JG} = 0$$

Nesse caso, admite-se que JG seja constante, onde J é o momento de inércia polar e G, o módulo de elasticidade ao cisalhamento.

Resolvendo as duas equações anteriores para as reações, compreendendo que $L = L_{AC} + L_{BC}$, obtemos:

$$T_A = T\left(\frac{L_{BC}}{L}\right)$$

e

$$T_B = T\left(\frac{L_{AC}}{L}\right)$$

Observe que esses torques de reação aumentam ou diminuem linearmente com a localização L_{AC} ou L_{BC} do torque aplicado.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

Determinamos os torques desconhecidos em eixos estaticamente indeterminados, satisfazendo os requisitos de equilíbrio, compatibilidade e torque-deslocamento do eixo.

Equilíbrio.

- Desenhar o diagrama de corpo livre do eixo a fim de identificar todos os torques que atuam sobre ele. Escrever, então, as equações do momento na condição de equilíbrio em torno da linha de centro do eixo.

Compatibilidade.

- Para escrever a equação de compatibilidade, investigar a maneira como o eixo torcerá quando submetido às cargas externas, levando em consideração como os apoios restringirão os movimentos do eixo quando este for torcido.
- Expressar a condição de compatibilidade em termos dos deslocamentos rotacionais provocados pelos torques de reação e usar, então, uma relação torque-deslocamento, tal como $\phi = TL/JG$, para relacionar os torques desconhecidos aos deslocamentos desconhecidos.
- Resolver as equações de equilíbrio e de compatibilidade para os torques de reação desconhecidos. Se qualquer das intensidades tiver valor numérico negativo, isso indica que esse torque atua na direção oposta à adotada no diagrama de corpo livre.

EXEMPLO 5.11

O eixo de aço maciço mostrado na Figura 5.25*a* tem diâmetro de 20 mm. Se for submetido aos dois torques, quais serão as reações nos apoios fixos A e B?

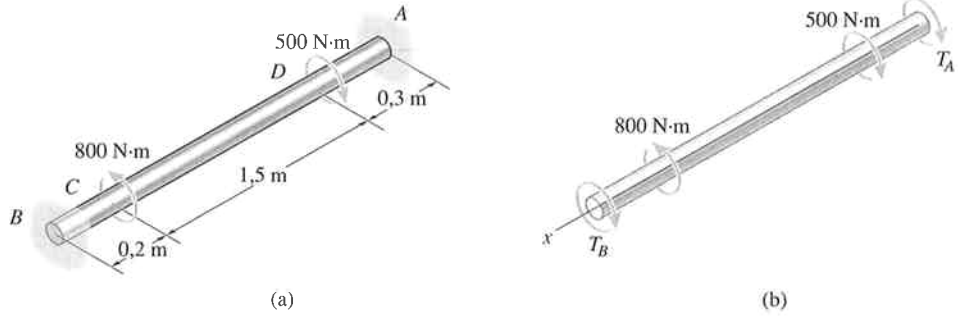
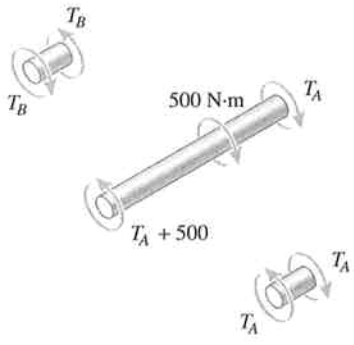


Figura 5.25



(c)

Figura 5.25

SOLUÇÃO

Equilíbrio. Por inspeção do diagrama de corpo livre (Figura 5.25*b*), vemos que o problema é estaticamente indeterminado uma vez que há apenas *uma* equação de equilíbrio disponível, enquanto $\mathbf{T}_A$ e $\mathbf{T}_B$ são incógnitas. É requerido que:

$$\Sigma M_x = 0; \qquad -T_B + 800\ \text{N} \cdot \text{m} - 500\ \text{N} \cdot \text{m} - T_A = 0 \tag{1}$$

Compatibilidade. Como as extremidades do eixo são fixas, o ângulo de torção de uma extremidade em relação à outra deve ser nulo. Portanto, a equação de compatibilidade é:

$$\phi_{A/B} = 0$$

Essa condição pode ser expressa em termos dos torques desconhecidos usando-se a relação carga-deslocamento, $\phi = TL/JG$. Nesse caso, há três regiões do eixo em que o torque interno é constante: *BC*, *CD* e *DA*. Nos diagramas de corpo livre da Figura 5.25*c* são mostrados os torques internos que atuam nos segmentos do eixo, em cada uma das regiões em que ele foi secionado. Usando a convenção de sinais estabelecida na Seção 5.4, temos:

$$\frac{-T_B(0{,}2\ \text{m})}{JG} + \frac{(T_A + 500\ \text{N} \cdot \text{m})(1{,}5\ \text{m})}{JG} + \frac{T_A(0{,}3\ \text{m})}{JG} = 0$$

ou

$$1{,}8T_A - 0{,}2T_B = -750 \tag{2}$$

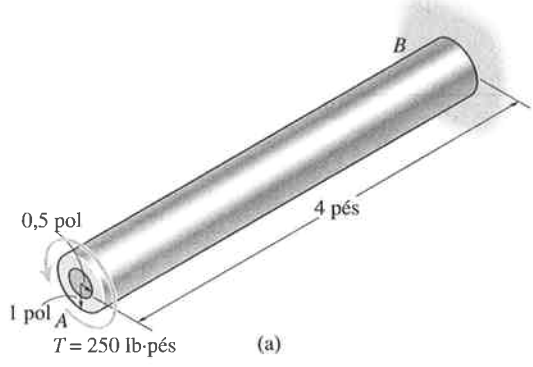
Resolvendo as equações 1 e 2, temos:

$$T_A = -345\ \text{N} \cdot \text{m} \qquad T_B = 645\ \text{N} \cdot \text{m} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

O sinal negativo indica que $\mathbf{T}_A$ atua na direção oposta à mostrada na Figura 5.25*b*.

EXEMPLO 5.12

O eixo mostrado na Figura 5.26*a* está composto por um tubo de aço unido a um núcleo de latão. Supondo que seja aplicado um torque de $T = 250$ lb · pés à sua extremidade, esquematizar a distribuição cisalhamento-tensão ao longo de uma reta radial da área da seção transversal. Supor, também, que $G_{aço} = 11{,}4(10^3)$ ksi e $G_{latão} = 5{,}20(10^3)$ ksi.



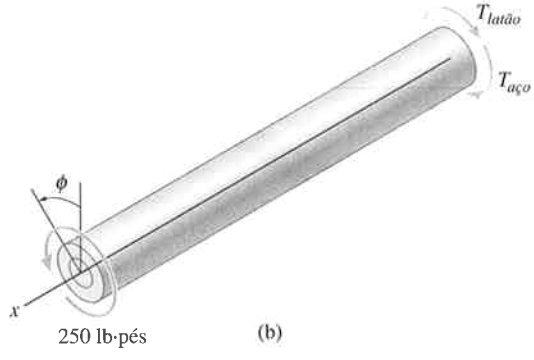


Figura 5.26

SOLUÇÃO

Equilíbrio. O diagrama de corpo livre do eixo é mostrado na Figura 5.26*b*. A reação da parede é representada pela quantidade de torque desconhecido resistido pelo aço, $T_{aço}$, e pelo latão, $T_{latão}$. Trabalhando com as unidades libra e polegada, temos que o equilíbrio requer:

$$-T_{aço} - T_{latão} + 250 \text{ lb} \cdot \text{pés}(12 \text{ pol/pé}) = 0 \tag{1}$$

Compatibilidade. O ângulo de torção da extremidade A tem de ser o mesmo para os elementos de aço e latão, visto que eles estão unidos. Assim:

$$\phi = \phi_{aço} = \phi_{latão}$$

Aplicando a relação carga-deslocamento, $\phi = TL/JG$, temos:

$$\frac{T_{aço}L}{(\pi/2)[(1 \text{ pol})^4 - (0{,}5 \text{ pol})^4]11{,}4(10^3) \text{ kip/pol}^2} = \frac{T_{latão}L}{(\pi/2)(0{,}5 \text{ pol})^4 5{,}20(10^3) \text{ kip/pol}^2}$$

$$T_{aço} = 32{,}88T_{latão} \tag{2}$$

Resolvendo as equações 1 e 2, obtemos:

$$T_{aço} = 2.911{,}0 \text{ lb} \cdot \text{pol} = 242{,}6 \text{ lb} \cdot \text{pés}$$
$$T_{latão} = 88{,}5 \text{ lb} \cdot \text{pol} = 7{,}38 \text{ lb} \cdot \text{pés}$$

Esses torques atuam ao longo de todo o comprimento do eixo, já que não há nenhum torque externo atuando em pontos intermediários ao longo do comprimento da linha de centro do eixo. A tensão de cisalhamento no núcleo de latão varia de zero em seu centro até o máximo na superfície de contato com o tubo de aço. Usando a fórmula da torção:

$$(\tau_{latão})_{máx} = \frac{(88{,}5 \text{ lb} \cdot \text{pol})(0{,}5 \text{ pol})}{(\pi/2)(0{,}5 \text{ pol})^4} = 451 \text{ psi}$$

Para o aço, a tensão de cisalhamento mínima também está nessa interface,

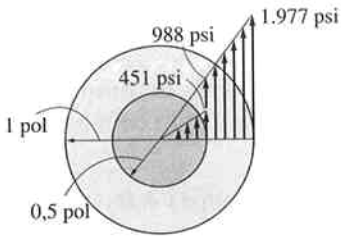
$$(\tau_{aço})_{mín} = \frac{(2.911{,}0 \text{ lb} \cdot \text{pol})(0{,}5 \text{ pol})}{(\pi/2)[(1 \text{ pol})^4 - (0{,}5 \text{ pol})^4]} = 988 \text{ psi}$$

e a tensão de cisalhamento máxima está na superfície externa,

$$(\tau_{aço})_{máx} = \frac{(2.911{,}0 \text{ lb} \cdot \text{pol})(1 \text{ pol})}{(\pi/2)[(1 \text{ pol})^4 - (0{,}5 \text{ pol})^4]} = 1.977 \text{ psi}$$

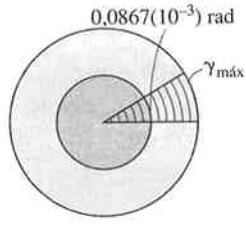
Os resultados estão esquematizados na Figura 5.26*c*. Observe a descontinuidade da *tensão de cisalhamento* na interface entre latão e aço. Essa condição é esperada, visto que os materiais têm módulos de rigidez diferentes, isto é, o aço é mais duro do que o latão ($G_{aço} > G_{latão}$) e, assim, suporta tensão de cisalhamento maior na interface. Apesar de a tensão de cisalhamento ser descontínua, a *deformação por cisalhamento* não é. Ao contrário, a deformação por cisalhamento é a *mesma* para ambos, latão e aço. Essa condição é mostrada pela lei de Hooke, $\gamma = \tau/G$. Na interface (Figura 5.26*d*), a deformação por cisalhamento é:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{451 \text{ psi}}{5{,}2(10^6)\text{psi}} = \frac{988 \text{ psi}}{11{,}4(10^6)\text{psi}} = 0{,}0867(10^{-3})\text{rad}$$



Distribuição cisalhamento-tensão

(c)



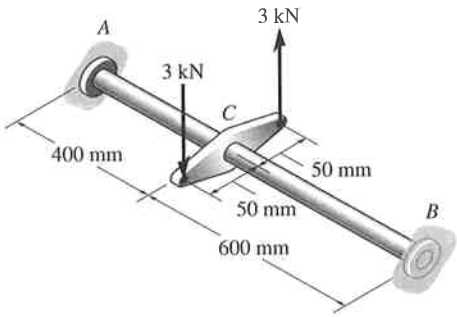
Distribuição cisalhamento-deformação

(d)

Figura 5.26

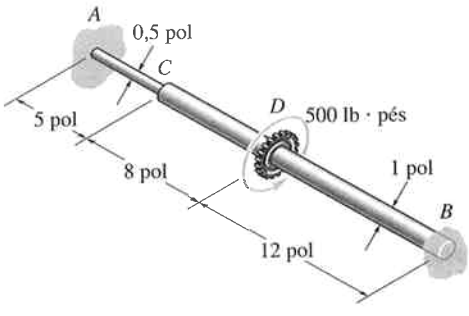
PROBLEMAS

5.75. O eixo de aço tem diâmetro de 40 mm e suas extremidades A e B são fixas. Se ele for submetido ao conjugado (veja o desenho), qual será a tensão de cisalhamento máxima em suas regiões AC e CB. $G_{aço} = 10{,}8(10^3)$ ksi.



Problema 5.75

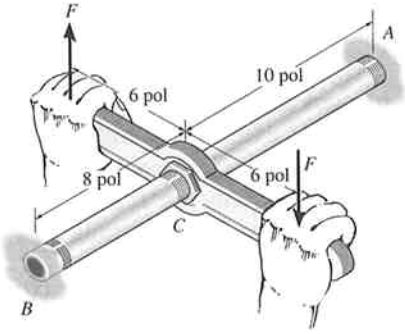
***5.76.** O eixo de aço é feito de dois segmentos: AC tem diâmetro de 0,5 pol e CB tem diâmetro de 1 pol. Se ele estiver fixo em suas extremidades A e B e for submetido a um torque de 500 lb · pés, qual será a tensão de cisalhamento máxima nele desenvolvida. $G_{aço} = 10{,}8(10^3)$ ksi.



Problema 5.76

5.77. O tubo de bronze C86100 tem diâmetro externo de 1,5 pol e sua parede, espessura de 0,125 pol. A conexão em C é apertada com uma chave. Se o torque desenvolvido em A for de 125 lb · pol, qual será a intensidade F do conjugado? O tubo está engastado na extremidade B.

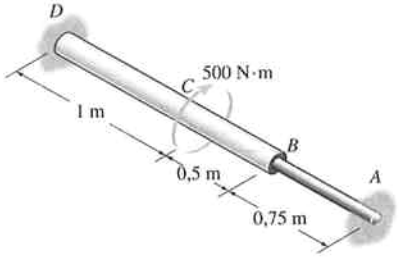
5.78. O tubo de bronze C86100 tem diâmetro externo de 1,5 pol e sua parede, de 0,125 pol. A conexão em C é apertada com uma chave. Se a força aplicada for $F = 20$ lb, qual será a tensão de cisalhamento máxima no tubo?



Problemas 5.77/5.78

5.79. Uma haste é feita de dois segmentos: AB é de aço A-36 e tem diâmetro de 30 mm; BD é de latão C83400 e tem diâmetro de 50 mm. Ela está engastada em suas extremidades e submetida a um torque $T = 500$ N · m. Determinar as reações torcionais nas paredes A e D.

***5.80.** Determinar a tensão de cisalhamento máxima no eixo do Problema 5.79.

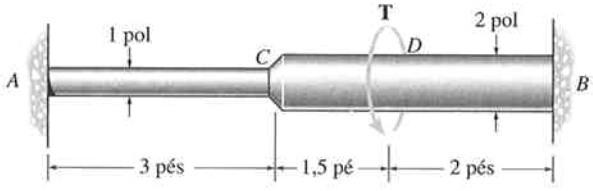


Problemas 5.79/5.80

5.81. O eixo de aço A-36 é feito de dois segmentos: AC tem diâmetro de 1 pol e CB tem diâmetro de 2 pol. Se ele estiver fixo em suas extremidades A e B e for submetido a um torque $T = 500$ lb · pés, qual será a tensão de cisalhamento máxima absoluta nele desenvolvida.

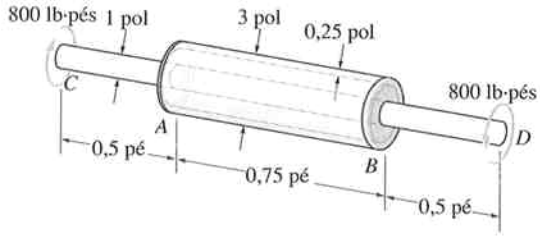
5.82. Determinar as reações de torção nas extremidades A e B do Problema 5.81.

5.83. O eixo de aço A-36 é feito de dois segmentos: AC tem diâmetro de 1 pol e CB tem diâmetro de 2 pol. Supondo que ele seja fixo em suas extremidades A e B, determinar a intensidade do torque aplicado T se a reação em A for 50 lb · pés.



Problemas 5.81/5.82/5.83

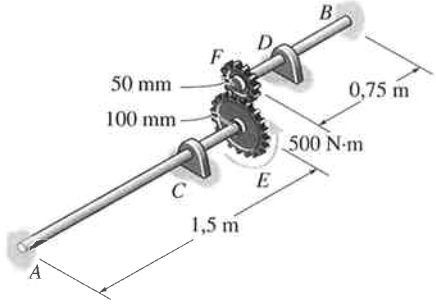
***5.84.** O eixo feito de material composto (ou compósito) consiste de uma seção central que inclui um eixo maciço de 1 pol de diâmetro e um tubo soldado nas flanges rígidas em A e B. Desprezar a espessura das flanges e determinar o ângulo de torção da extremidade C do eixo em relação à extremidade D. O eixo está submetido a um torque de 800 lb · pés. O material é aço A-36.



Problema 5.84

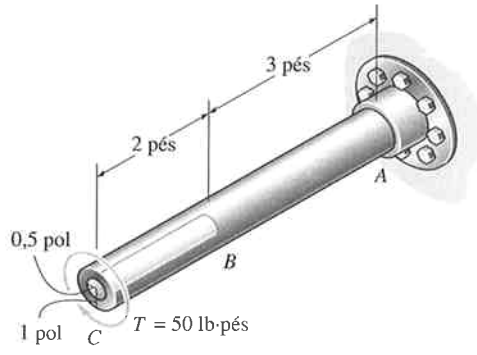
5.85. Os dois eixos são feitos de aço A-36. Cada um tem diâmetro de 25 mm e os dois estão acoplados por engrenagens presas às suas extremidades. As outras extremidades estão engastadas nos apoios A e B. Os eixos também estão apoiados nos mancais C e D, que lhes permitem rotação livre ao longo de sua linha de centro. Se for aplicado um torque de 500 N · m na engrenagem em E, como mostrado, quais serão as reações em A e B?

5.86. Determinar a rotação da engrenagem em E do Problema 5.85.



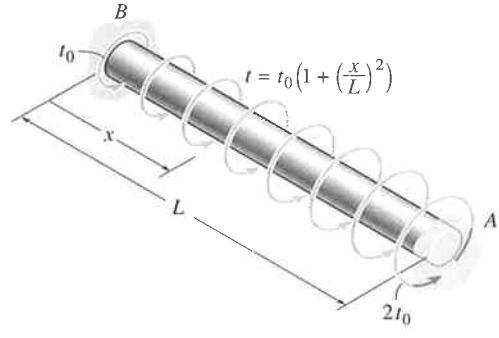
Problemas 5.85/5.86

5.87. Um eixo de aço é constituído por uma seção AB maciça e um segmento tubular de aço com núcleo de latão. Supondo que ele esteja preso a um apoio rígido em A e seja aplicado um torque $T = 50$ lb · pés em C, determinar o ângulo de torção que ocorre em C e calcular o cisalhamento máximo e a deformação por cisalhamento máxima no latão e no aço. Assumir que $G_{aço} = 11{,}5(10^3)$ ksi e $G_{latão} = 5{,}6(10^3)$ ksi.



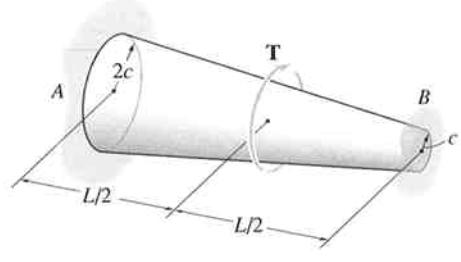
Problema 5.87

***5.88.** O eixo de raio c está submetido a um torque distribuído t, medido como torque por comprimento do eixo. Determinar as reações nos engastes A e B.

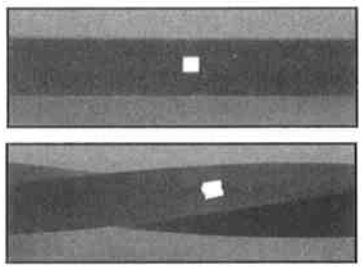


Problema 5.88

5.89. O eixo cônico está confinado entre os apoios engastados A e B. Se for aplicado um torque **T** em seu ponto central, quais serão as reações nos apoios?



Problema 5.89



Observe a deformação que ocorre no elemento quadrado quando essa barra de borracha é submetida a um torque.

*5.6 EIXOS SÓLIDOS NÃO-CIRCULARES

Foi demonstrado na Seção 5.1 que quando se aplica um torque a um eixo com seção transversal circular — ou seja, simétrico em relação à linha de centro — as deformações por cisalhamento variam linearmente de zero no centro a um máximo na superfície externa. Além disso, devido à uniformidade da deformação por cisalhamento em todos os pontos do mesmo raio, a seção transversal não se deforma e, ao contrário, permanece plana após a torção. Eixos que têm seção transversal não-circular, no entanto, são *assimétricos* em relação à linha de centro e, como a tensão de cisalhamento na seção transversal é distribuída de maneira muito complexa, suas seções transversais ***arqueiam*** ou ***entortam*** quando eles são torcidos. Essa condição fica evidente pela maneira como as retas da grelha se deformam em um eixo com seção transversal quadrada quando ele é torcido (Figura 5.27). Como conseqüência dessa deformação, analisar a torção de eixos *não-circulares* torna-se uma tarefa consideravelmente complicada, que não será abordada neste livro.

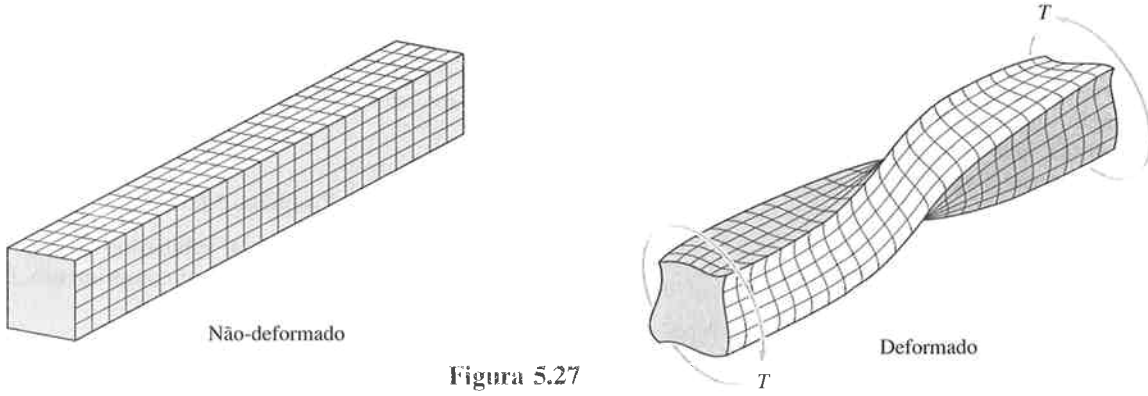
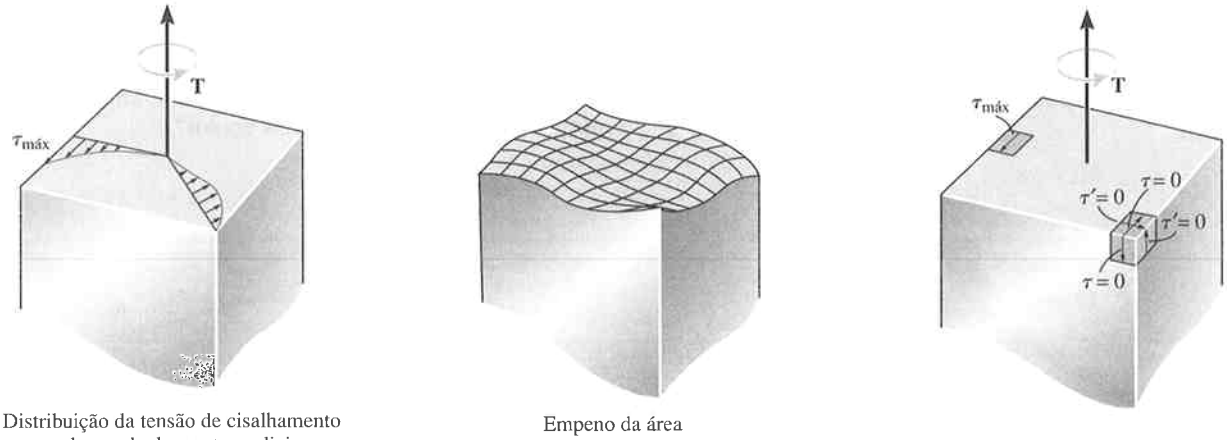


Figura 5.27

Com o uso de análise matemática baseada na teoria da elasticidade, no entanto, podemos determinar a distribuição cisalhamento-tensão em um eixo de seção quadrada. Exemplos de como a tensão de cisalhamento varia ao longo de duas retas radiais são mostrados na Figura 5.28*a*. Como essas distribuições variam de modo complexo, as deformações por cisalhamento que elas geram *empenam* a seção transversal como mostrado na Figura 5.28*b*. Observe que os pontos dos cantos do eixo estão sujeitos a tensão de cisalhamento nula e, portanto, deformação por cisalhamento nula. Verificamos a razão disso ao considerar um elemento de material localizado em um desses pontos (Figura 5.28*c*).



Distribuição da tensão de cisalhamento ao longo de duas retas radiais

(a)

Empeno da área da seção transversal

(b)

(c)

Figura 5.28

Podemos supor que a face superior desse elemento esteja submetida a uma tensão de cisalhamento, a fim de resistir ao torque aplicado **T**. Entretanto, esse *não* é o caso, visto que as tensões de cisalhamento τ e τ' que atuam sobre a *superfície externa* do eixo devem ser *nulas*, o que, por sua vez, implica que os componentes correspondentes τ e τ' no topo da face também devem ser nulos.

Os resultados da análise para seções transversais quadradas, juntamente com outros resultados da teoria da elasticidade, para eixos com seções transversais triangular e elíptica, podem ser vistos na Tabela 5.1. Em todos os casos, a *tensão de cisalhamento máxima* ocorre no ponto da borda da seção transversal a mais *próximo* da linha de centro do eixo. Na Tabela 5.1, tais pontos são indicados pelas 'marcas redondas' nas seções transversais. Também são fornecidas as fórmulas do ângulo de torção para cada eixo. Estendendo os resultados a um eixo com seção transversal *arbitrária*, mostra-se também que um eixo com seção *circular* é mais eficiente, visto que está sujeito tanto a tensão de cisalhamento máxima quanto a ângulo de torção *menores* que os de um eixo que tenha a mesma área da seção transversal, mas no qual ela seja não-circular, submetido ao mesmo torque.

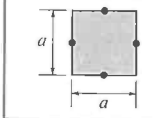
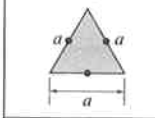
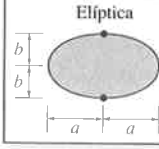
Forma da seção transversal	$\tau_{máx}$	ϕ
Quadrada 	$\frac{4{,}81\,T}{a^3}$	$\frac{7{,}10\,TL}{a^4G}$
Triangular 	$\frac{20\,T}{a^3}$	$\frac{46\,TL}{a^4G}$
Elíptica 	$\frac{2\,T}{\pi ab^2}$	$\frac{(a^2+b^2)TL}{\pi a^3b^3G}$

Tabela 5.1

EXEMPLO 5.13

O eixo de alumínio 6061-T6 mostrado na Figura 5.29 tem área da seção transversal na forma de um triângulo equilátero. Determinar o maior torque **T** que pode ser aplicado na extremidade do eixo se a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 8$ ksi e o ângulo de torção em sua extremidade é limitado a $\phi_{adm} = 0{,}02$ rad. Qual torque poderia ser aplicado a um eixo de seção transversal circular feito da mesma quantidade de material?

SOLUÇÃO

Por inspeção, o torque interno resultante em qualquer seção transversal da linha de centro do eixo também é **T**. Usando as fórmulas de $\tau_{máx}$ e ϕ da Tabela 5.1, é necessário que:

$$\tau_{adm} = \frac{20T}{a^3}; \qquad 8(10^3)\ \text{lb/pol}^2 = \frac{20\ \text{T}}{(1{,}5\ \text{pol})^3}$$

$$T = 1.350\ \text{lb} \cdot \text{pol}$$

Da mesma maneira:

$$\phi_{adm} = \frac{46TL}{a^4G_{al}}; \quad 0{,}02\ \text{rad} = \frac{46T(4\ \text{pés})(12\ \text{pol/pé})}{(1{,}5\ \text{pol})^4[3{,}7(10^6)\ \text{lb/pol}^2]}$$

$$T = 170\ \text{lb} \cdot \text{pol} \qquad \textit{Resposta}$$

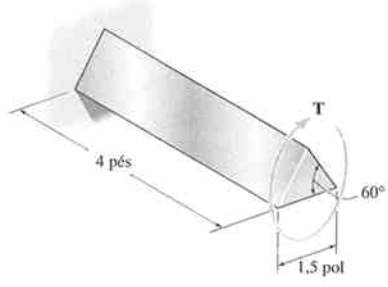


Figura 5.29

Fazendo-se uma comparação, o torque está limitado devido ao ângulo de torção.

Seção Transversal Circular. Se a mesma quantidade de alumínio for utilizada para produzir o mesmo comprimento do eixo com uma seção transversal circular, o raio da seção transversal poderá ser calculado. Temos:

$$A_{círculo} = A_{triângulo}; \qquad \pi c^2 = \frac{1}{2}(1{,}5\ \text{pol})(1{,}5\ \text{sen}\ 60°)$$

$$c = 0{,}557\ \text{pol}$$

As limitações de tensão e ângulo de torção requerem, então:

$$\tau_{adm} = \frac{Tc}{J}; \qquad 8(10^3)\ \text{lb/pol}^2 = \frac{T(0{,}557\ \text{pol})}{(\pi/2)(0{,}557\ \text{pol})^4}$$

$$T = 2.170\ \text{lb} \cdot \text{pol}$$

$$\phi_{adm} = \frac{TL}{JG_{al}}; \qquad 0{,}02 \text{ rad} = \frac{T(4 \text{ pés})(12 \text{ pol/pé})}{(\pi/2)(0{,}557 \text{ pol})^4[3{,}7(10^6) \text{ lb/pol}^2]}$$

$$T = 233 \text{ lb} \cdot \text{pol} \qquad \textit{Resposta}$$

Por outro lado, o ângulo de torção limita o torque aplicado.

Comparando esse resultado (223 lb · pol) com o obtido anteriormente (170 lb · pol), vê-se que um eixo de seção transversal circular suporta 37% mais torque que um de seção transversal triangular.

*5.7 TUBOS DE PAREDE FINA COM SEÇÕES TRANSVERSAIS FECHADAS

Tubos de parede fina de formato não-circular são usados em geral para construir estruturas leves como as empregadas em aviões. Em algumas aplicações, estão sujeitos a cargas de torção. Nesta seção analisaremos os efeitos da aplicação de torque a um tubo de parede fina com seção transversal *fechada*, isto é, um tubo que não tem quaisquer fraturas ou fendas ao longo de seu comprimento. Um tubo como esse, com formato de seção transversal constante apesar de arbitrária, é mostrado na Figura 5.30*a*. Para a análise, admitiremos que as paredes tenham espessura t variável. Como elas são finas, poderemos determinar aproximadamente a tensão de cisalhamento supondo que a tensão seja *distribuída uniformemente* ao longo da espessura do tubo. Em outras palavras, seremos capazes de determinar a *tensão de cisalhamento média* do tubo em qualquer ponto dado. Antes, porém, vamos discutir alguns conceitos preliminares referentes à ação da tensão de cisalhamento sobre a seção transversal.

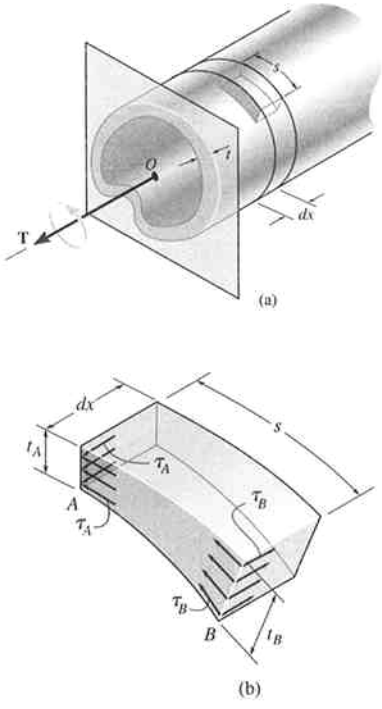


Figura 5.30

Fluxo de Cisalhamento. Um pequeno elemento do tubo com comprimento finito s e largura infinitesimal dx é mostrado nas Figuras 5.30*a* e 5.30*b*. Em uma das extremidades o elemento tem espessura t_A; na outra, a espessura é t_B. Devido ao torque aplicado **T**, surge tensão de cisalhamento na face dianteira do elemento. Especificamente, na extremidade A a tensão de cisalhamento é τ_A e na extremidade B é τ_B. As duas podem ser relacionadas observando-se que as tensões de cisalhamento equivalentes τ_A e τ_B também devem atuar nos lados longitudinais do elemento, que aparecem sombreados na Figura 5.30*b*. Como esses lados têm espessuras *constantes* t_A e t_B, as forças que atuam sobre eles são $dF_A = \tau_A(t_A\, dx)$ e $dF_B = \tau_B(t_B\, dx)$. A força de equilíbrio requer que essas forças sejam de intensidades iguais, mas de sentido oposto, de modo que:

$$\tau_A t_A = \tau_B t_B$$

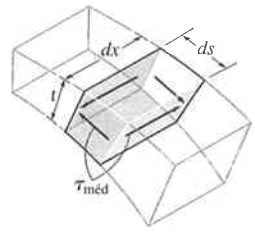
Esse resultado importante afirma que ***o produto da tensão de cisalhamento longitudinal média multiplicada pela espessura do tubo é o mesmo em cada ponto da área da seção transversal.*** Esse produto é denominado ***fluxo de cisalhamento***,[1] q, e em termos gerais é expresso como:

$$\boxed{q = \tau_{méd} t} \qquad (5.17)$$

Como q é constante na seção transversal, a *maior* tensão de cisalhamento ocorre onde a espessura do tubo é *menor*.

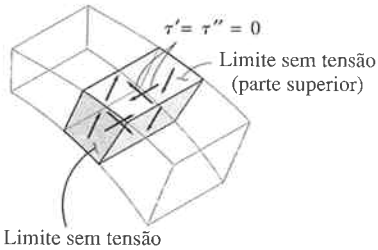
[1] A terminologia 'fluxo' é usada, pois q é análogo à água que flui em um canal de seção transversal retangular, com profundidade constante e largura w variável. Embora a velocidade v da água em cada ponto ao longo do canal seja diferente (como $\tau_{méd}$), o fluxo $q = vy$ será constante.

Se um elemento infinitesimal com espessura t, comprimento ds e largura dx for isolado de um tubo (Figura 5.30*c*), veremos que a área sobre a qual a tensão de cisalhamento média atua é $dA = t\,ds$. Então, $dF = \tau_{méd} t\,ds = q\,ds$, ou $q = dF/ds$. Em outras palavras, *o fluxo de cisalhamento, que é constante na área da seção transversal, mede a força por unidade de comprimento ao longo da área da seção transversal do tubo.*



(c)

É importante observar que os componentes de cisalhamento-tensão mostrados na Figura 5.30*c* são os únicos que atuam sobre o tubo. Componentes atuando em outra direção não podem existir, como mostrado na Figura 5.30*d*, porque as faces superior e inferior do elemento são as paredes interna e externa do tubo, e esses limites não devem ter tensão. Em vez disso, como já observado, o torque faz com que *o fluxo de cisalhamento e a tensão média sempre se direcionem tangencialmente à parede do tubo, de tal maneira que contribui para o torque resultante* **T**.



(d)

Tensão de Cisalhamento Média. A tensão de cisalhamento média $\tau_{méd}$, que atua sobre a área sombreada $dA = t\,ds$ do elemento infinitesimal mostrado na Figura 5.30*c*, é relacionada ao torque T considerando-se o torque produzido pela tensão de cisalhamento em torno de um ponto selecionado O no limite do tubo (Figura 5.30*e*). Como mostrado, a tensão de cisalhamento desenvolve uma força $dF = \tau_{méd}\,dA = \tau_{méd}(t\,ds)$ sobre o elemento. Essa força atua tangencialmente à linha de centro da parede do tubo e, como o braço de momento é h, o torque é:

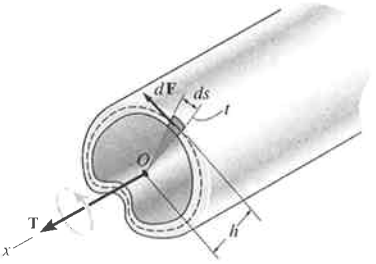
$$dT = h(dF) = h(\tau_{méd} t\,ds)$$

Requer-se para toda a seção transversal que:

$$T = \oint h\,\tau_{méd} t\,ds$$

Aqui, a 'integral de linha' indica que a integração é processada *em torno* de todo o limite da área. Como o fluxo de cisalhamento $q = \tau_{méd} t$ é *constante*, esses termos podem ser fatorados para fora da integral, de modo que:

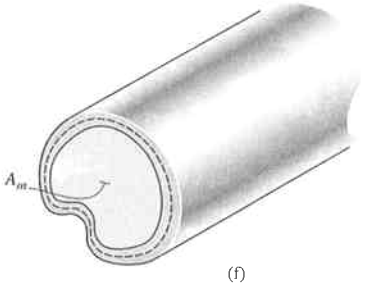
$$T = \tau_{méd} t \oint h\,ds$$



(e)

Pode-se fazer uma simplificação gráfica para avaliar a integral observando-se que a *área média*, mostrada pelo triângulo escuro da Figura 5.30*e*, é $dA_m = (1/2)h\,ds$. Assim:

$$T = 2\tau_{méd} t \int dA_m = 2\tau_{méd} t A_m$$



(f)

Figura 5.30

Resolvendo em $\tau_{méd}$, temos:

$$\tau_{méd} = \frac{T}{2tA_m} \qquad (5.18)$$

Onde:

$\tau_{méd}$ = tensão de cisalhamento média que atua sobre a espessura do tubo
T = torque interno resultante que atua na seção transversal. Seu valor é determinado pelo método das seções e pelas equações de equilíbrio
t = espessura do tubo onde $\tau_{méd}$ deve ser determinada
A_m = área média compreendida pelo limite da *linha de centro* da espessura do tubo. A_m aparece sombreada na Figura 5.30*f*.

Como $q = \tau_{méd} t$, podemos determinar o fluxo do cisalhamento em toda a seção transversal usando a equação:

$$q = \frac{T}{2A_m} \tag{5.19}$$

Ângulo de Torção. O ângulo de torção de um tubo de parede fina e comprimento L é determinado por meio de métodos de energia, e o desenvolvimento das equações necessárias será dado como um problema mais adiante no texto.[5] Se o material comporta-se de maneira linear-elástica e G é o módulo de elasticidade ao cisalhamento, o ângulo ϕ, dado em radianos, é expresso como:

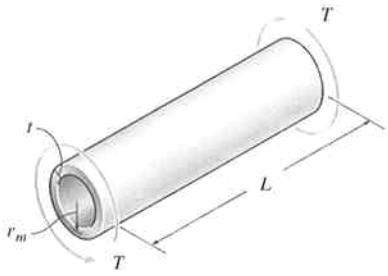
$$\phi = \frac{TL}{4A_m^2 G} \oint \frac{ds}{t} \tag{5.20}$$

Nesse caso, a integração deve ser feita em todo o limite da área da seção transversal do tubo.

PONTOS IMPORTANTES

- O fluxo de cisalhamento q é o produto da espessura do tubo pela tensão de cisalhamento média. Esse valor é *constante* em todos os pontos ao longo da seção transversal do tubo. O resultado é que a *maior* tensão de cisalhamento média na seção transversal ocorre onde a espessura do tubo é *menor*.
- Tanto o fluxo de cisalhamento como a tensão de cisalhamento média atuam *tangencialmente* à parede do tubo em todos os pontos e em uma direção tal que contribui para o torque resultante.

EXEMPLO 5.14



(a)

Figura 5.31

Calcular a tensão de cisalhamento média em um tubo de parede fina com seção transversal circular de raio médio r_m e espessura t, sujeito ao torque T (Figura 5.31*a*). Além disso, qual é o ângulo de torção relativo se o tubo tem comprimento L?

SOLUÇÃO

Tensão de Cisalhamento Média. A área média do tubo é $A_m = \pi r_m^2$. Aplicando a Equação 5.18, temos:

$$\tau_{\text{méd}} = \frac{T}{2tA_m} = \frac{T}{2\pi t r_m^2} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Pode-se verificar a validade desse resultado aplicando a fórmula da torção. Nesse caso, pela Equação 5.9, temos:

$$J = \frac{\pi}{2}(r_o^4 - r_i^4)$$

$$= \frac{\pi}{2}(r_o^2 + r_i^2)(r_o^2 - r_i^2)$$

$$= \frac{\pi}{2}(r_o^2 + r_i^2)(r_o + r_i)(r_o - r_i)$$

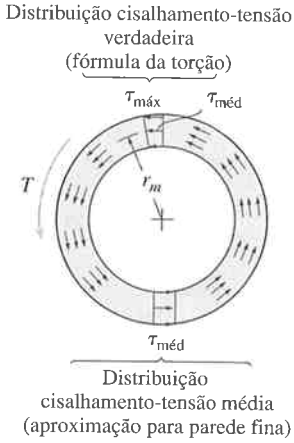
Como $r_m \approx r_o \approx r_i$ e $t = r_o - r_i$, $J = \frac{\pi}{2}(2r_m^2)(2r_m)t = 2\pi r_m^3 t$

de modo que $$\tau_{\text{méd}} = \frac{Tr_m}{J} = \frac{Tr_m}{2\pi r_m^3 t} = \frac{T}{2\pi t r_m^2} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

que está de acordo com o resultado anterior.

[2] Ver o Problema 14.19.

A distribuição cisalhamento-tensão média que atua sobre toda a seção transversal do tubo é mostrada na Figura 5.31*b*. Também é mostrada a distribuição cisalhamento-tensão que atua sobre uma reta radial, conforme calculado pela fórmula da torção. Observe como cada $\tau_{méd}$ atua em uma direção tal que contribui para o torque resultante **T** na seção. Como a espessura decresce, a tensão de cisalhamento em todo o tubo torna-se mais uniforme.



(b)

Figura 5.31

Ângulo de Torção. Aplicando a Equação 5.20, temos:

$$\phi = \frac{TL}{4A_m^2 G}\oint \frac{ds}{t} = \frac{TL}{4(\pi r_m^2)^2 Gt}\oint ds$$

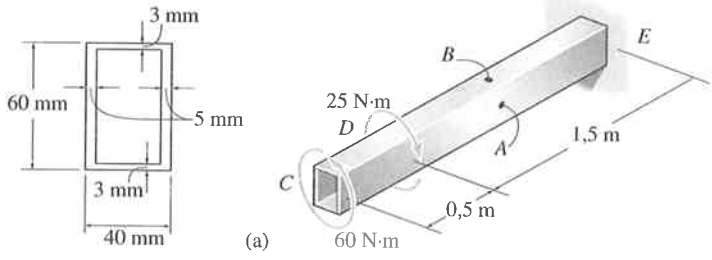
A integral representa o comprimento em torno do limite da linha de centro, o qual é $2\pi r_m$. Substituindo-se, o resultado final é:

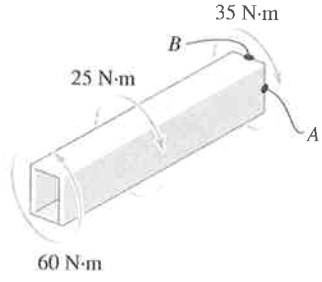
$$\phi = \frac{TL}{2\pi r_m^3 Gt} \qquad \textit{Resposta}$$

Mostrar que se obtém o mesmo resultado usando a Equação 5.15.

EXEMPLO 5.15

O tubo é feito de bronze C86100 e tem seção transversal retangular como mostrado na Figura 5.32*a*. Se ele for submetido a dois torques, qual será a tensão de cisalhamento média nos pontos *A* e *B*? Além disso, qual é o ângulo de torção da extremidade *C*? O tubo é fixo em *E*.





(b)

Figura 5.32

SOLUÇÃO

Tensão de Cisalhamento Média. Se o tubo for cortado nos pontos *A* e *B*, o diagrama de corpo livre resultante será como o mostrado na Figura 5.32*b*. O torque interno é 35 N · m. Como mostrado na Figura 5.32*d*, a área A_m é:

$$A_m = (0{,}035\text{ m})(0{,}057\text{ m}) = 0{,}00200\text{ m}^2$$

Aplicar a Equação 5.18 para o ponto *A*, $t_A = 5$ mm, de modo que:

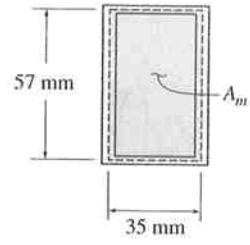
$$\tau_A = \frac{T}{2tA_m} = \frac{35\text{ N}\cdot\text{m}}{2(0{,}005\text{ m})(0{,}00200\text{ m}^2)} = 1{,}75\text{ MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

Para o ponto *B*, $t_B = 3$ mm. Portanto:

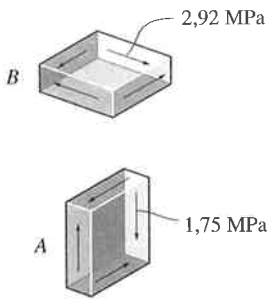
$$\tau_B = \frac{T}{2tA_m} = \frac{35\text{ N}\cdot\text{m}}{2(0{,}003\text{ m})(0{,}00200\text{ m}^2)} = 2{,}92\text{ MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

Esses resultados são mostrados nos elementos do material localizados nos pontos *A* e *B* (Figura 5.32*e*). Observe cuidadosamente na Figura 5.32*b* como o torque de 35 N · m cria as tensões nas faces com sombreamento escuro de cada elemento.

(c)



(d)



(e)

Figura 5.32

Ângulo de Torção. Pelos diagramas de corpo livre das Figuras 5.32*b* e 5.32*c*, os torques internos nas regiões *DE* e *CD* são 35 N · m e 60 N · m, respectivamente. De acordo com a convenção de sinais descrita na Seção 5.4, esses torques são ambos positivos. Assim, a Equação 5.20 torna-se:

$$\phi = \sum \frac{TL}{4A_m^2 G} \oint \frac{ds}{t}$$

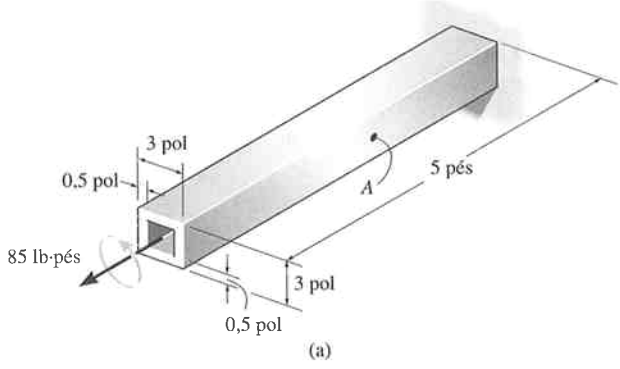
$$= \frac{60\ \text{N} \cdot \text{m}(0{,}5\ \text{m})}{4(0{,}00200\ \text{m}^2)^2(38(10^9)\ \text{N/m}^2)} \left[2\left(\frac{57\ \text{mm}}{5\ \text{mm}}\right) + 2\left(\frac{35\ \text{mm}}{3\ \text{mm}}\right)\right]$$

$$+ \frac{35\ \text{N} \cdot \text{m}(1{,}5\ \text{m})}{4(0{,}00200\ \text{m}^2)^2(38(10^9)\ \text{N/m}^2)} \left[2\left(\frac{57\ \text{mm}}{5\ \text{mm}}\right) + 2\left(\frac{35\ \text{mm}}{3\ \text{mm}}\right)\right]$$

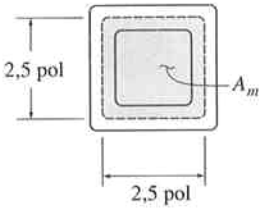
$$= 6{,}29(10^{-3})\ \text{rad} \qquad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 5.16

Um tubo de alumínio quadrado tem as dimensões mostradas na Figura 5.33*a*. Determinar a tensão de cisalhamento média no ponto *A*, se o tubo estiver submetido a um torque de 85 lb · pés. Calcular também o ângulo de torção devido a essa carga. Assumir que $G_{al} = 3{,}80(10^3)$ ksi.



(a)



(b)

(c)

Figura 5.33

SOLUÇÃO

Tensão de Cisalhamento Média. Por inspeção, o torque interno resultante na seção transversal onde o ponto *A* está localizado é $T = 85$ lb · pés. Pela Figura 5.33*b*, a área A_m sombreada é:

$$A_m = (2{,}5\ \text{pol})(2{,}5\ \text{pol}) = 6{,}25\ \text{pol}^2$$

Aplicando a Equação 5.18, temos:

$$\tau_{\text{méd}} = \frac{T}{2tA_m} = \frac{85\ \text{lb} \cdot \text{pés}(12\ \text{pol/pé})}{2(0{,}5\ \text{pol})(6{,}25\ \text{pol}^2)} = 163\ \text{psi} \qquad \textit{Resposta}$$

Como *t* é constante exceto nos cantos, a tensão de cisalhamento média é a mesma em todos os pontos da seção transversal. Na Figura 5.33*c*, ela é mostrada atuando em um elemento localizado no ponto *A*. Observe que $\tau_{\text{méd}}$ atua na face mais clara, uma vez que contribui para o torque interno resultante **T** na seção.

Ângulo de Torção. O ângulo de torção provocado por *T* é determinado pela Equação 5.20, isto é:

$$\phi = \frac{T\,L}{4A_m^2 G}\oint \frac{ds}{t} = \frac{85\text{ lb}\cdot\text{pés}(12\text{ pol/pé})(5\text{ pés})(12\text{ pol/pé})}{4(6{,}25\text{ pol}^2)^2[3{,}80(10^6)\text{ lb/pol}^2]}\oint \frac{ds}{(0{,}5\text{ pol})}$$

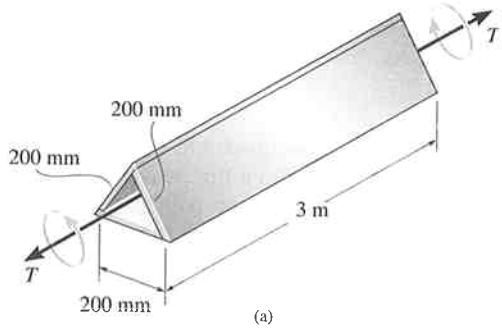
$$= 0{,}206(10^{-3})\text{ pol}^{-1}\oint ds$$

Nesse caso, a integral representa o *comprimento* em torno do limite da linha de centro do tubo (Figura 5.33*b*). Assim,

$$\phi = 0{,}206(10^{-3})\text{ pol}^{-1}[4(2{,}5\text{ pol})] = 2{,}06(10^{-3})\text{ rad}$$ ***Resposta***

EXEMPLO 5.17

Um tubo fino é feito de três chapas de aço A-36 com 5 mm de espessura cada, de modo que tem seção transversal triangular como mostrado na Figura 5.34*a*. Determinar o torque máximo T ao qual o tubo pode ser submetido se a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 90$ MPa e ele está restrito a uma torção de não mais que $\phi = 2(10^{-3})$ rad.



(a)

SOLUÇÃO

A área A_m aparece sombreada na Figura 5.34*b*. Ela é:

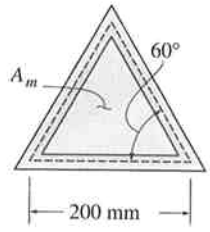
$$A_m = \frac{1}{2}(200\text{ mm})(200\text{ mm sen }60°)$$

$$= 17{,}32(10^3)\text{ mm}^2(10^{-6}\text{ m}^2/\text{mm}^2) = 17{,}32(10^{-3})\text{ m}^2$$

A maior tensão de cisalhamento média ocorre nos pontos em que a espessura do tubo é menor, isto é, ao longo dos lados e não nos cantos. Aplicando a Equação 5.18, com $t = 0{,}005$ m, temos:

$$\tau_{méd} = \frac{T}{2tA_m};\quad 90(10^6)\text{ N/m}^2 = \frac{T}{2(0{,}005\text{ m})(17{,}32(10^{-3})\text{ m}^2)}$$

$$T = 15{,}6\text{ kN}\cdot\text{m}$$



(b)

Figura 5.34

Temos também, pela Equação 5.20:

$$\phi = \frac{TL}{4A_m^2 G}\oint \frac{ds}{t}$$

$$0{,}002\text{ rad} = \frac{T(3\text{ m})}{4(17{,}32(10^{-3})\text{ m})^2[75(10^9)\text{ N/m}^2]}\oint \frac{ds}{(0{,}005\text{ m})}$$

$$300{,}0 = T\oint ds$$

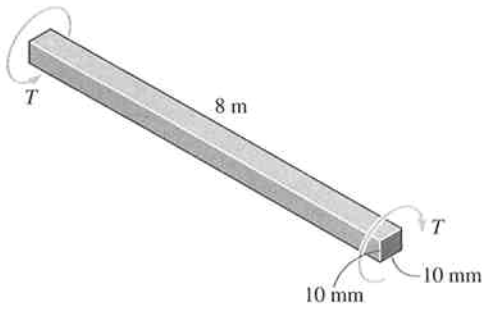
A integral representa a soma das dimensões ao longo dos três lados do limite da linha de centro. Assim,

$$300{,}0 = T[3(0{,}20\text{ m})]$$
$$T = 500\text{ N} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resposta}$$

Por comparação, a aplicação de torque é limitada devido ao ângulo de torção.

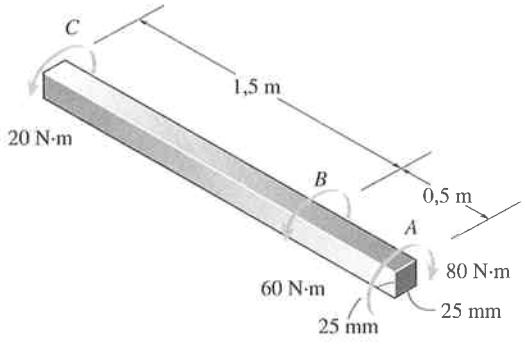
PROBLEMAS

5.90. A haste de alumínio tem seção transversal quadrada de 10 mm por 10 mm. Se ela tiver 8 m de comprimento, qual torque T será necessário para uma extremidade girar 90° em relação à outra? $G_{al} = 28$ GPa, $(\tau_E)_{al} = 240$ MPa.



Problema 5.90

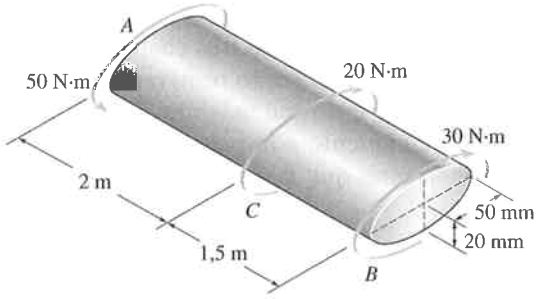
5.91. A barra de alumínio 6061-T6 tem seção transversal quadrada de 25 mm por 25 mm. Supondo que ela tenha 2 m de comprimento, determinar a tensão de cisalhamento máxima nela desenvolvida e a rotação de uma extremidade em relação à outra.



Problema 5.91

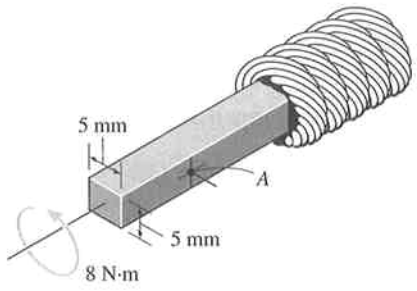
***5.92.** O eixo é feito de latão C83400 e tem seção transversal elíptica. Supondo que seja submetido à carga de torção mostrada, determinar a tensão de cisalhamento máxima nas regiões AC e BC e o ângulo de torção ϕ da extremidade B em relação à extremidade A.

5.93. Resolver o Problema 5.92 para tensão de cisalhamento máxima nas regiões AC e BC e o ângulo de torção ϕ da extremidade B em relação à extremidade C.



Problemas 5.92/5.93

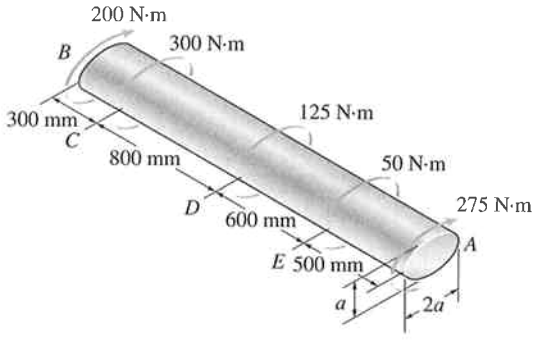
5.94. O eixo quadrado é usado na extremidade de um cabo de acionamento a fim de registrar a rotação do cabo em um marcador. Se o eixo tiver as dimensões mostradas e estiver sujeito a um torque de 8 N · m, qual será a tensão de cisalhamento no ponto A? Desenhar tal tensão em um elemento de volume localizado nesse ponto.



Problema 5.94

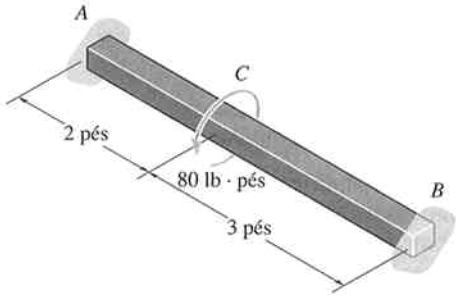
5.95. A haste uniforme de bronze C86100 tem seção transversal elíptica. Supondo que ela seja submetida aos cinco torques mostrados, determinar a dimensão a da sua seção transversal de modo que a tensão de cisalhamento nela desenvolvida não exceda $\tau_{adm} = 85$ MPa. Além disso, qual é a rotação da extremidade A em relação à extremidade B?

***5.96.** A haste uniforme de bronze C86100 tem seção transversal elíptica. Supondo que ela seja submetida aos cinco torques mostrados, determinar a tensão de cisalhamento máxima nela desenvolvida e o ângulo de torção da extremidade A em relação à extremidade B. Assumir que $a = 20$ mm.



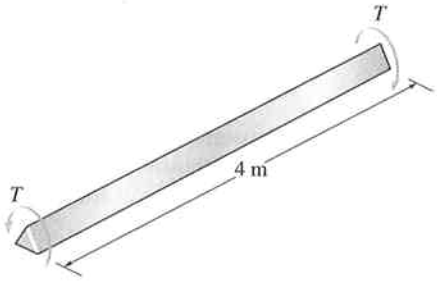
Problemas 5.95/5.96

5.97. O suporte de alumínio está fixado entre as paredes *A* e *B*. Se ele tiver seção transversal quadrada de 2 pol por 2 pol e estiver submetido ao torque de 80 lb · pés em *C*, quais serão as reações dos apoios fixos? Além disso, qual será o ângulo de torção em *C*? $G_{al} = 3{,}8(10^3)$ ksi.



Problema 5.97

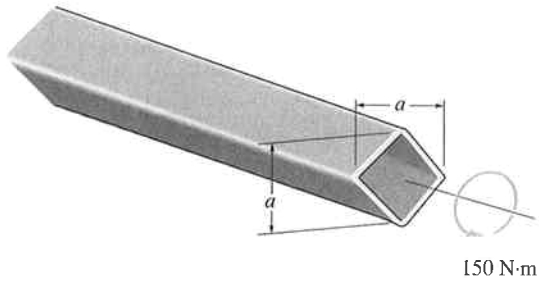
5.98. O arame de latão tem seção transversal triangular de 2 mm em um lado. Se o limite de escoamento do latão é τ_E = 205 MPa, determinar o torque máximo *T* ao qual o arame pode ser submetido de modo que não escoe. Supondo que o torque seja aplicado em um segmento de 4 m de comprimento, determinar o maior ângulo de torção, de uma extremidade em relação à outra, que não provoque dano permanente ao arame. $G_{latão}$ = 37 GPa.



Problema 5.98

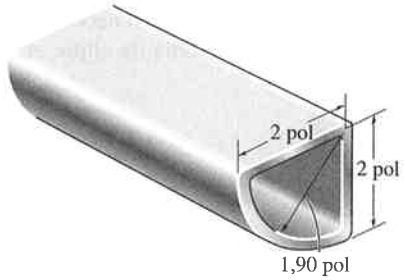
5.99. O tubo de plástico está sujeito a um torque de 150 N · m. Determinar a dimensão média *a* de seus lados se a tensão de cisalhamento admissível é τ_{adm} = 60 MPa. Cada lado tem espessura de *t* = 3 mm. Desprezar as concentrações de tensão nos cantos.

***5.100.** O tubo de plástico está sujeito a um torque de 150 N · m. Determinar a tensão de cisalhamento média nele desenvolvida se a dimensão média é *a* = 200 mm. Cada lado tem espessura de *t* = 3 mm. Desprezar as concentrações de tensão nos cantos.



Problemas 5.99/5.100

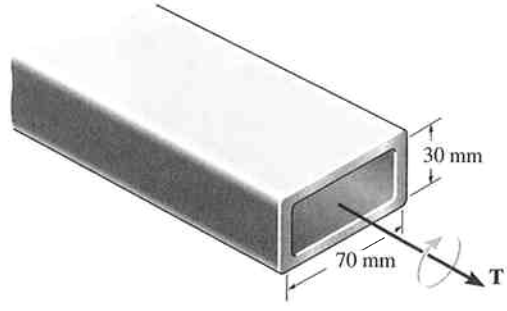
5.101. Um torque de 2 kip · pol é aplicado ao tubo. Se a espessura da parede é de 0,1 pol, qual a tensão de cisalhamento média no tubo?



Problema 5.101

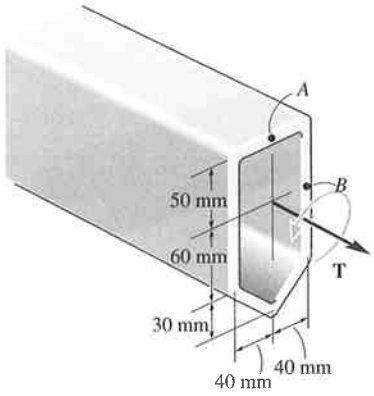
5.102. O tubo de aço inoxidável 304 tem espessura de 10 mm. Se a tensão de cisalhamento admissível é τ_{adm} = 80 MPa, qual o torque máximo *T* que pode ser transmitido. Além disso, qual é o ângulo de torção de uma extremidade em relação à outra se o tubo tiver 4 m de comprimento? Desprezar as concentrações de tensão nos cantos. As dimensões médias são mostradas.

5.103. O tubo de aço inoxidável 304 tem espessura de 10 mm. Se o torque aplicado é *T* = 50 N · m, qual a tensão de cisalhamento média no tubo? Desprezar as concentrações de tensão nos cantos. As dimensões médias são mostradas.



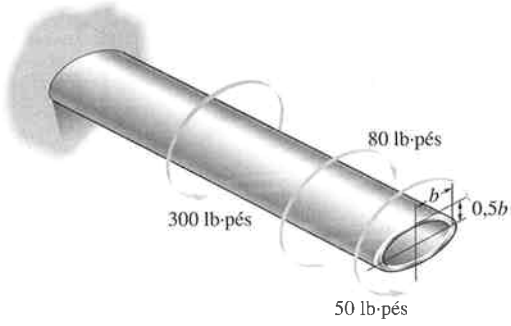
Problemas 5.102/5.103

***5.104.** O tubo de plástico tem 5 mm de espessura e as dimensões médias mostradas. Determinar a tensão de cisalhamento média nos pontos *A* e *B* se ele está submetido ao torque *T* = 5 N · m. Mostrar a tensão de cisalhamento em elementos de volume localizados nesses pontos.



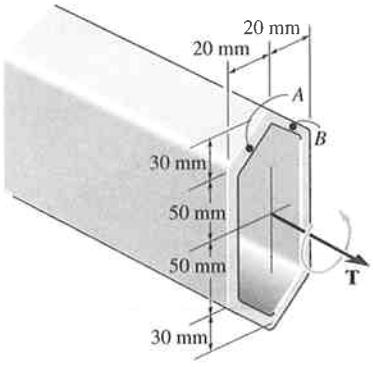
Problema 5.104

5.105. O tubo de aço tem seção transversal elíptica com as dimensões médias mostradas e espessura constante $t = 0,2$ pol. Supondo que a tensão de cisalhamento admissível seja $\tau_{adm} = 8$ ksi, determinar a dimensão b necessária para resistir ao torque mostrado. A área média da elipse A_m é $\pi b(0,5b)$.



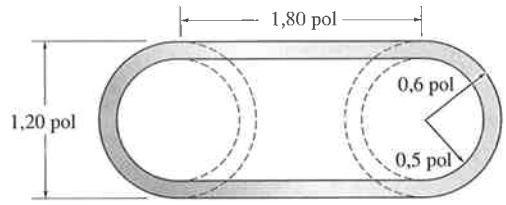
Problema 5.105

5.106. O tubo de plástico tem espessura de 5 mm e as dimensões médias mostradas. Determinar a tensão de cisalhamento média nos pontos A e B se o tubo estiver sujeito ao torque $T = 500$ N · m. Mostrar a tensão de cisalhamento nos elementos de volume localizados nesses pontos. Desprezar as concentrações de tensão nos cantos.



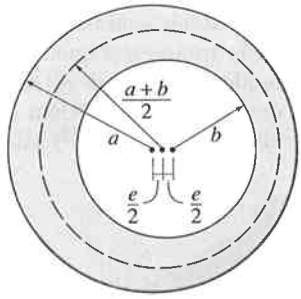
Problema 5.106

5.107. Para dada tensão de cisalhamento média, determinar o fator pelo qual a capacidade de resistir ao torque é aumentada se as seções de meio círculo forem mudadas das posições em linha tracejada para a mostrada. O tubo tem 0,1 pol de espessura.



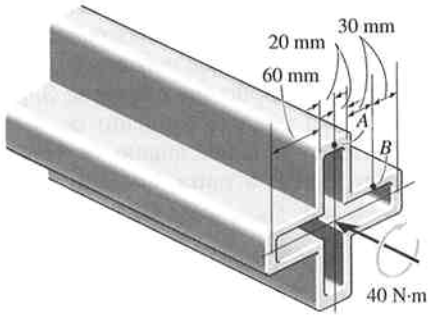
Problema 5.107

***5.108.** Devido a um erro de fabricação, o círculo interno do tubo é excêntrico em relação ao externo. Em quantos por cento a resistência à torção diminui quando a excentricidade e é um quarto da diferença entre os raios?



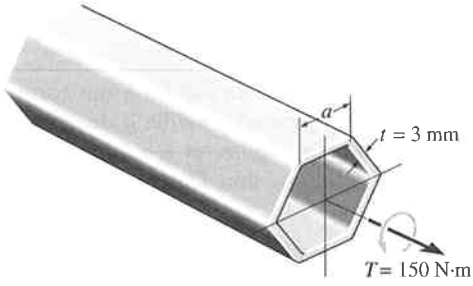
Problema 5.108

5.109. O tubo simétrico é feito de aço de alta resistência, com as dimensões médias mostradas e espessura de 5 mm. Se for submetido a um torque $T = 40$ N · m, qual será a tensão de cisalhamento média desenvolvida nos pontos A e B? Indicar a tensão de cisalhamento nos elementos de volume localizados nesses pontos.



Problema 5.109

5.110. O tubo plástico hexagonal está sujeito a um torque de 150 N · m. Determinar a dimensão média a de seus lados se a tensão de cisalhamento admissível for $\tau_{adm} = 60$ MPa. Cada lado tem espessura de $t = 3$ mm.



Problema 5.110

5.8 CONCENTRAÇÃO DE TENSÃO

A fórmula da torção, $\tau_{máx} = Tc/J$, pode ser aplicada a regiões de um eixo com seção transversal circular constante ou levemente cônica. Quando aparecem mudanças bruscas na seção transversal, as distribuições cisalhamento-tensão e cisalhamento-deformação do eixo tornam-se complexas e só podem ser obtidas por meio de métodos experimentais ou análise matemática baseada na teoria da elasticidade. Três tipos comuns de descontinuidade de seções transversais que ocorrem na prática são mostrados na Figura 5.35. Eles ocorrem em *acoplamentos* usados para unir dois eixos colineares (Figura 5.35*a*), *rasgos de chaveta* usados para acoplar engrenagens ou roldanas a um eixo (Figura 5.35*b*); e *curvas de concordância* usadas para fabricar um único eixo colinear a partir de dois eixos de diâmetros diferentes (Figura 5.35*c*). Em cada caso a tensão de cisalhamento máxima ocorre no ponto indicado na seção transversal.

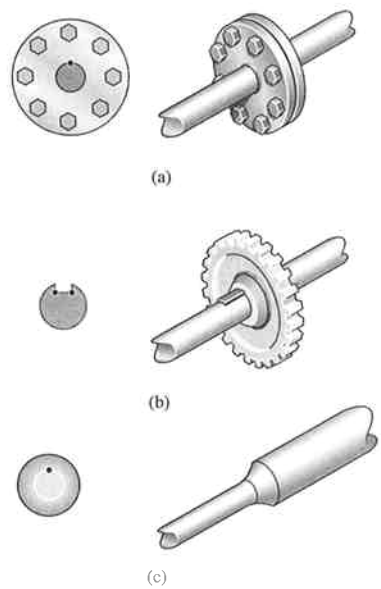


Figura 5.35

Para que o engenheiro não tenha de fazer uma análise complexa da tensão na descontinuidade do eixo, a tensão de cisalhamento máxima é determinada para uma geometria especificada por meio do ***fator de concentração de tensões de torção***, K. Como no caso de elementos com carga axial (Seção 4.7), K, em geral, é obtido a partir de um gráfico. Um exemplo, para o eixo com curva de concordância, é mostrado na Figura 5.36. Para usar o gráfico, primeiro determina-se a razão geométrica D/d para escolher a curva adequada a ser utilizada, entre as apresentadas na curva do fator de concentração de tensões, e depois, uma vez calculada a abscissa r/d, acha-se o valor de K ao longo das ordenadas. A tensão de cisalhamento máxima é então obtida pela seguinte equação:

$$\tau_{máx} = K\frac{Tc}{J} \tag{5.21}$$

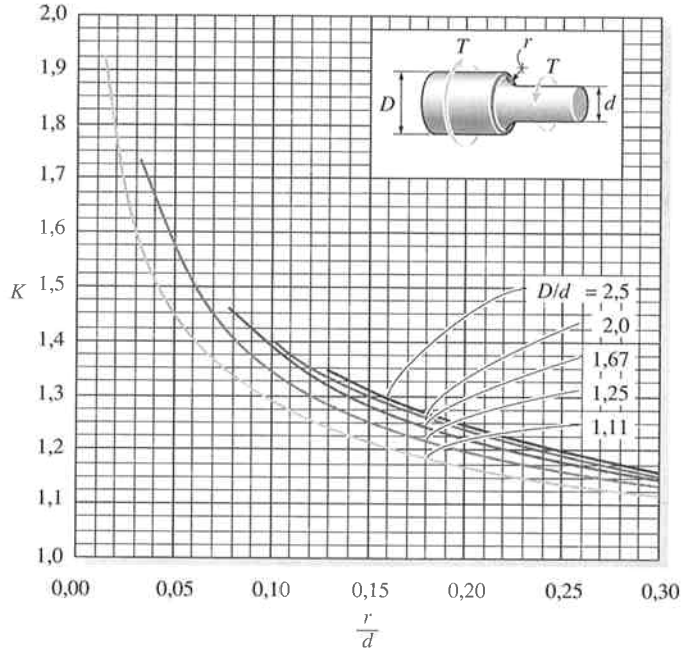
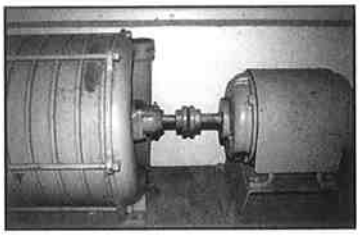


Figura 5.36

Neste exemplo, a fórmula da torção é aplicada ao *menor* dos dois eixos acoplados, visto que $\tau_{máx}$ ocorre na base da curva de concordância (Figura 5.35*c*).



Concentrações de tensão aparecem nos acoplamentos destes eixos, e essa condição deve ser considerada quando se projeta o acoplamento.

Observa-se pelo gráfico que um *aumento* no raio r da curva provoca um *decréscimo* em K. Portanto, a tensão de cisalhamento máxima no eixo é reduzida pelo *aumento* no raio da curva de concordância. Além disso, se o diâmetro do eixo maior for reduzido, a razão D/d será menor e, desse modo, o valor de K e, portanto, $\tau_{máx}$ serão menores.

Como no caso de elementos com carga axial, os fatores de concentração de tensão de torção devem ser usados *sempre* que se projetam eixos feitos de *materiais frágeis* ou quando se projetam eixos que estarão sujeitos à *fadiga ou a cargas cíclicas de torção*. Isso porque tais condições dão origem à formação de trincas no ponto de concentração de tensão, o que freqüentemente leva a uma falha súbita do eixo. Deve-se entender também que, se uma grande carga de torção *estática* for aplicada a um eixo feito de *material dúctil*, surgirão *deformações inelásticas* nesse eixo. Como resultado do escoamento, a distribuição de tensão torna-se ainda mais *uniforme* em todo o eixo, de modo que a tensão máxima resultante não se limita ao ponto de concentração de esforço. Esse fenômeno será mais bem discutido na próxima seção.

PONTOS IMPORTANTES

- As *concentrações de tensão* nos eixos ocorrem em pontos de mudança brusca da seção transversal, tais como acoplamentos, rasgos de chaveta e curvas de concordância. Quanto mais severa a mudança, maior é a concentração de tensão.
- Para projetar ou analisar, não é preciso saber a distribuição cisalhamento-tensão exata na seção transversal. Em vez disso, é possível obter a tensão de cisalhamento máxima usando o fator de concentração de tensões, K, que foi determinado por meio de experimento e é apenas uma função da geometria do eixo.
- Normalmente a concentração de tensão em um eixo dúctil sujeito a torque estático *não* precisa ser considerada no projeto; entretanto, se o material for *frágil*, ou estiver sujeito a cargas de *fadiga,* então as concentrações de tensão tornam-se importantes.

EXEMPLO 5.18

O eixo em degrau mostrado na Figura 5.37*a* é apoiado por mancais em A e B. Determinar a tensão máxima nele desenvolvida devido aos torques aplicados. A curva de concordância na junção de cada eixo tem raio $r = 6$ mm.

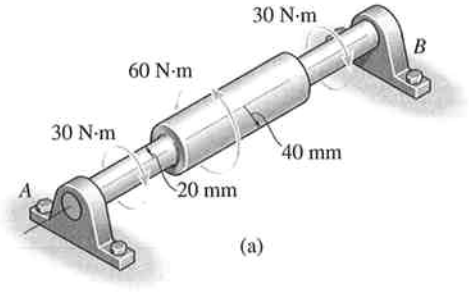


Figura 5.37

SOLUÇÃO

Torque Interno. Por inspeção, a condição de equilíbrio dos momentos em torno da linha de centro do eixo está satisfeita. Como a tensão de cisalhamento máxima ocorre nas extremidades da raiz dos eixos de *menor* diâmetro, o torque interno (30 N · m) pode ser determinado nesses pontos aplicando-se o método das seções (Figura 5.37*b*).

Tensão de Cisalhamento Máxima. O fator de concentração de tensão é determinado usando-se a Figura 5.36. Pela geometria do eixo, temos:

$$\frac{D}{d} = \frac{2(40\text{ mm})}{2(20\text{ mm})} = 2$$

$$\frac{r}{d} = \frac{6\text{ mm}}{2(20\text{ mm})} = 0{,}15$$

Obtém-se, assim, o valor $K = 1{,}3$.
Aplicando a Equação 5.21, temos:

$$\tau_{máx} = K\frac{Tc}{J};\quad \tau_{máx} = 1{,}3\left[\frac{30\text{ N}\cdot\text{m}(0{,}020\text{ m})}{(\pi/2)(0{,}020\text{ m})^4}\right] = 3{,}10\text{ MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

Por evidência experimental, sabe-se que a distribuição de tensão verdadeira ao longo de uma reta radial da seção transversal na seção crítica tem aparência semelhante à mostrada na Figura 5.37*c*. Compare-a à distribuição linear encontrada pela fórmula da torção.

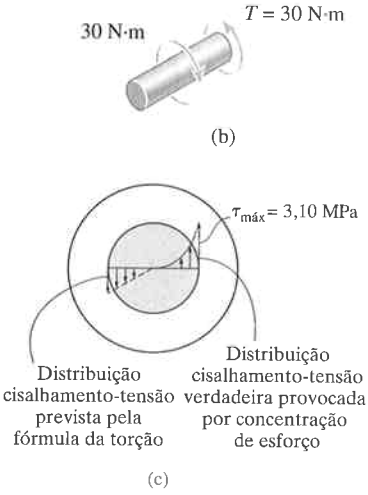


Figura 5.37

*5.9 TORÇÃO INELÁSTICA

As equações de tensão e deformação desenvolvidas até agora são válidas apenas se o torque aplicado provoca comportamento linear-elástico do material. No entanto, se as cargas de torção são excessivas, o material pode escoar e, conseqüentemente, deve-se usar uma 'análise plástica' para determinar a distribuição cisalhamento-tensão e o ângulo de torção. Para executar tal análise é necessário satisfazer tanto as condições de deformação quanto as de equilíbrio.

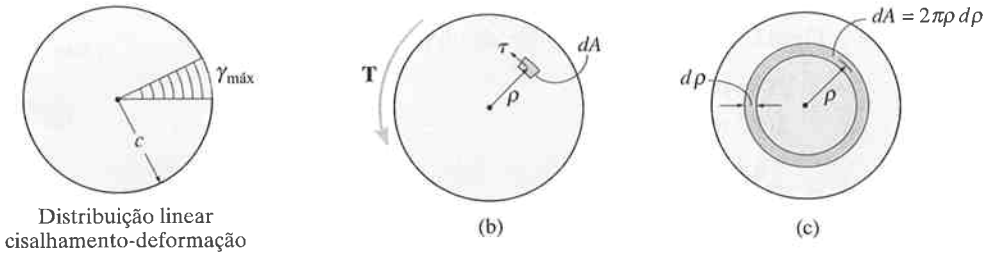
Foi mostrado na Seção 5.1 que as tensões de cisalhamento que se desenvolvem no material devem variar *linearmente* de zero no centro do eixo até o máximo no seu limite externo (Figura 5.38*a*). Essa conclusão baseou-se inteiramente em considerações geométricas e não no comportamento do material. Além disso, o torque resultante na seção deve equivaler ao torque provocado por toda a distribuição cisalhamento-tensão em toda a seção transversal. Essa condição é expressa matematicamente, considerando-se a tensão de cisalhamento τ que atua sobre um elemento de área dA localizado à distância ρ do centro do eixo (Figura 5.38*b*). A força produzida por essa tensão é $dF = \tau\, dA$, e o torque produzido é $dT = \rho\, dF = \rho\, \tau\, dA$. Requer-se para todo o eixo:

$$T = \int_A \rho\tau\, dA \tag{5.22}$$

Se a área dA sobre a qual τ age for definida como um *anel infinitesimal* de área $dA = 2\pi\rho\, d\rho$ (Figura 5.38*c*), a equação anterior poderá ser escrita como:

$$\boxed{T = 2\pi\int_A \tau\rho^2\, d\rho} \tag{5.23}$$

Essas condições de geometria e carregamento serão usadas agora para determinar a distribuição cisalhamento-tensão em um eixo quando este for submetido a três tipos de torque.



Distribuição linear cisalhamento-deformação

(a) (b) (c)

Figura 5.38

Torque Elástico Máximo. Se o torque produzir a máxima deformação por cisalhamento *elástica* γ_E no limite externo do eixo, a distribuição cisalhamento-deformação ao longo de uma reta radial terá a aparência mostrada na Figura 5.39*b*. Para estabelecer como é a distribuição do cisalhamento-tensão, devemos usar a lei de Hooke ou encontrar os valores correspondentes da tensão de cisalhamento no diagrama $\tau-\gamma$ do material (Figura 5.39*a*). Por exemplo, a deformação de cisalhamento γ_E produz a tensão de cisalhamento τ_E em $\rho = c$. Da mesma maneira, em $\rho = \rho_1$ a deformação de cisalhamento é $\gamma_1 = (\rho_1/c)\gamma_E$. Pelo diagrama $\tau-\gamma,\gamma_1$ produz τ_1. Quando essas tensões e outras semelhantes são colocadas em $\rho = c$, $\rho = \rho_1$ etc., ocorre a distribuição *linear* cisalhamento-tensão mostrada na Figura 5.39c. Uma vez que essa distribuição cisalhamento-tensão pode ser descrita matematicamente como $\tau = \tau_Y(\rho/c)$, o torque elástico máximo é determinado pela Equação 5.23, isto é:

$$T_E = 2\pi \int_0^c \tau_E\left(\frac{\rho}{c}\right)\rho^2\, d\rho$$

ou:

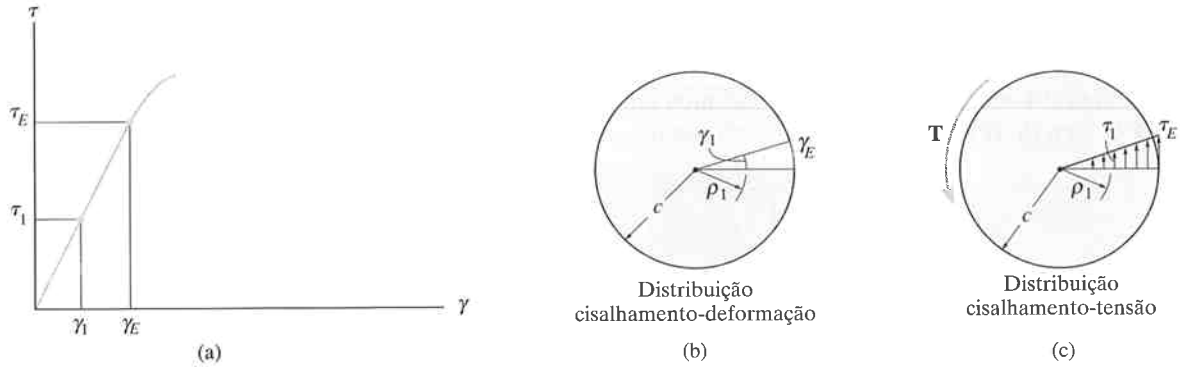
$$T_E = \frac{\pi}{2}\tau_E c^3 \tag{5.24}$$

Esse mesmo resultado pode ser obtido de maneira mais direta pela fórmula da torção, $\tau_E = T_E c/[(\pi/2)c^4]$. Além disso, o ângulo de torção pode ser determinado pela Equação 5.13, ou seja:

$$d\phi = \gamma\frac{dx}{\rho} \tag{5.25}$$

Como observado na Seção 5.4, essa equação resulta em $\phi = TL/JG$, quando o eixo é submetido a um torque constante e tem área da seção transversal constante.

Torque Elastoplástico. Consideremos agora que o material exiba comportamento elástico perfeitamente plástico. Como mostrado na Figura 5.40*a*, essa



(a) Distribuição cisalhamento-deformação (b) Distribuição cisalhamento-tensão (c)

Figura 5.39

condição caracteriza-se por um diagrama de tensão de cisalhamento-deformação no qual o material sofre uma quantidade crescente de deformação por cisalhamento quando a tensão de cisalhamento atinge o ponto de escoamento τ_E. Assim, à medida que o torque aplicado aumenta em intensidade acima de T_E, começa a provocar escoamento. Primeiro no limite externo do eixo $\rho = c$ e, depois, quando a deformação de cisalhamento máxima aumenta para, digamos, γ', a fronteira do escoamento progride para dentro do eixo na direção do centro (Figura 5.40*b*). Como mostrado, essa condição produz um *núcleo elástico*, cujo raio externo do núcleo, por proporção, é $\rho_Y = (\gamma_E/\gamma')c$. Além disso, a porção externa do eixo forma um *anel plástico*, visto que as deformações por cisalhamento γ são maiores do que γ_E nessa região. A distribuição cisalhamento-tensão correspondente ao longo da reta radial do eixo é mostrada na Figura 5.40*c*. Para estabelecer tal distribuição, consideramos pontos sucessivos da distribuição cisalhamento-deformação e achamos o valor correspondente da tensão de cisalhamento no diagrama $\tau - \gamma$. Por exemplo, em $\rho = c$, γ' dá τ_E, e em $\rho = \rho_E$, γ_E também dá τ_E etc.

Como τ pode agora ser estabelecido em função de ρ, podemos aplicar a Equação 5.23 para determinar o torque. Temos como fórmula geral do comportamento elastoplástico:

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \int_0^c \tau\rho^2 \, d\rho \\ &= 2\pi \int_0^{\rho_Y} \left(\tau_E \frac{\rho}{\rho_E}\right) \rho^2 \, d\rho + 2\pi \int_{\rho_E}^c \tau_E \rho^2 \, d\rho \\ &= \frac{2\pi}{\rho_E} \tau_E \int_0^{\rho_E} \rho^3 \, d\rho + 2\pi\tau_E \int_{\rho_E}^c \rho^2 \, d\rho \\ &= \frac{\pi}{2\rho_E} \tau_E \rho_E^4 + \frac{2\pi}{3} \tau_E (c^3 - \rho_E^3) \\ &= \frac{\pi\tau_E}{6} (4c^3 - \rho_E^3) \end{aligned} \tag{5.26}$$

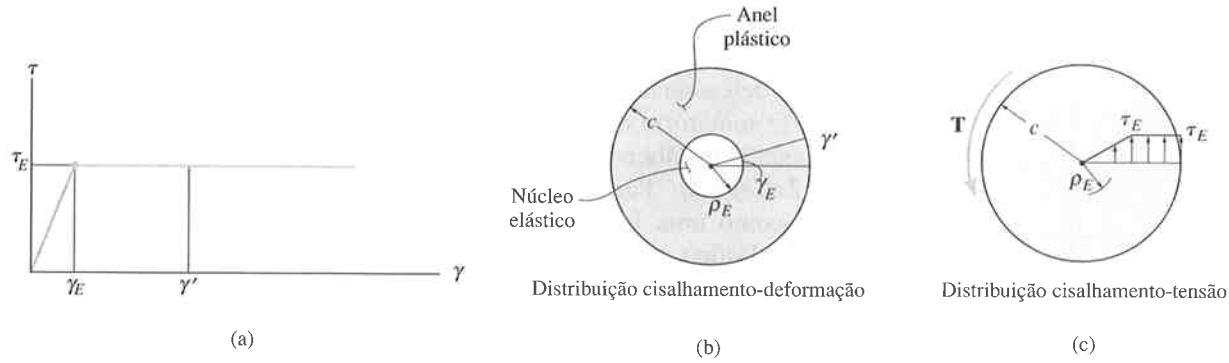
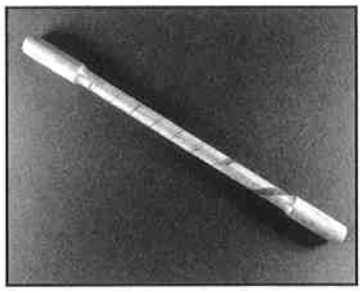


Figura 5.40

Torque Plástico. Aumentos adicionais em T tendem a contrair o raio do núcleo elástico até que todo o material escoe, isto é, $\rho_E \to 0$ (Figura 5.40*b*). O material do eixo é então submetido a um *comportamento perfeitamente plástico* e a distribuição do cisalhamento-tensão torna-se constante (Figura 5.40*d*). Como nesse momento $\tau = \tau_E$, podemos aplicar a Equação 5.23 para determinar o ***torque plástico*** $T_{plás}$, ou seja, o maior torque possível que o eixo suporta.

$$\begin{aligned} T_p &= 2\pi \int_0^c \tau_E \rho^2 \, d\rho \\ &= \frac{2\pi}{3} \tau_E \, c^3 \end{aligned} \tag{5.27}$$



Torção severa de um corpo-de-prova de alumínio provocada pela aplicação de torque plástico.

Comparando com o torque elástico máximo T_E (Equação 5.24), podemos verificar que:

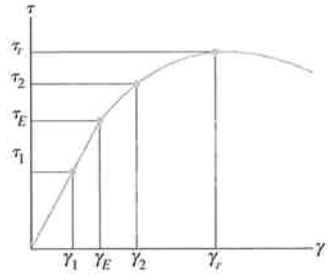
$$T_p = \frac{4}{3} T_E$$

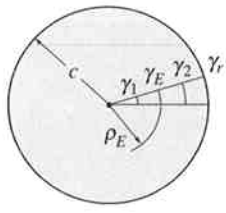
Em outras palavras, o torque plástico é 33% maior que o torque elástico máximo.

O ângulo de torção ϕ da distribuição cisalhamento-tensão da Figura 5.40*d* *não pode* ser definido de modo único. Isso porque $\tau = \tau_E$ não corresponde a um valor único da deformação por cisalhamento $\gamma \geq \gamma_E$. Como resultado, uma vez aplicado $\mathbf{T}_p$, o eixo continuará a se deformar ou torcer sem aumento correspondente na tensão de cisalhamento.

Torque Máximo. A maioria dos materiais da engenharia tem diagrama tensão de cisalhamento-deformação como o mostrado na Figura 5.41*a*. Conseqüentemente, se T for aumentado de modo que a deformação por cisalhamento máxima no eixo se torne $\gamma = \gamma_r$ (Figura 5.41*b*), então, por proporção γ_E ocorrerá em $\rho_E = (\gamma_E/\gamma_r)c$. Da mesma maneira, as deformações por cisalhamento em, digamos, $\rho = \rho_1$ e $\rho = \rho_2$ podem ser encontradas por proporção, ou seja, $\gamma_1 = (\rho_1/c)\gamma_r$ e $\gamma_2 = (\rho_2/c)\gamma_r$. Se extrairmos do diagrama τ–γ os valores correspondentes de τ_1, τ_E, τ_2 e τ_r e construirmos um gráfico, obteremos a distribuição cisalhamento-tensão que atua sobre a reta radial da seção transversal (Figura 5.41*c*). O torque produzido por essa distribuição de tensão é denominado ***torque máximo***, $T_{máx}$, uma vez que qualquer aumento adicional na deformação de cisalhamento deve fazer com que a tensão de cisalhamento máxima no limite externo do eixo seja menor que τ_r e, portanto, o torque produzido pela distribuição cisalhamento-tensão resultante será *menor* que $T_{máx}$.

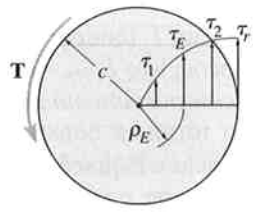
A intensidade de $\mathbf{T}_{máx}$ pode ser determinada integrando-se 'graficamente' a Equação 5.23. O procedimento consiste em segmentar a área da seção transversal do eixo em um número finito de anéis, como o que aparece sombreado na Figura 5.41*d*. A área do anel, $\Delta A = 2\pi\rho\,\Delta\rho$, é multiplicada pela tensão de cisalhamento τ que atua sobre ele, de modo que a força $\Delta F = \tau\,\Delta A$ possa ser determinada. O torque criado pela força é então $\Delta T = \rho\,\Delta F = \rho(\tau\,\Delta A)$. O somatório dos torques em toda a seção transversal, determinados dessa maneira, resulta no torque máximo $T_{máx}$; ou seja, a Equação 5.23 torna-se $T_{máx} \approx 2\pi\Sigma\tau\rho^2\,\Delta\rho$. Por outro lado, se a distribuição de tensão puder ser expressa como uma função analítica, $\tau = f(\rho)$, como nos casos dos torques elástico e plástico, então a integração da Equação 5.23 pode ser processada diretamente.





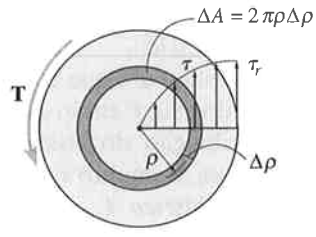
Distribuição máxima cisalhamento-deformação

(b)



Distribuição máxima cisalhamento-tensão

(c)



(d)

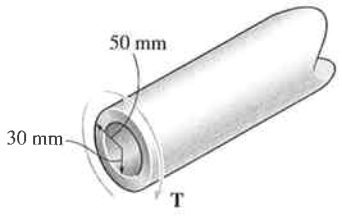
Figura 5.41

PONTOS IMPORTANTES

- A *distribuição cisalhamento-deformação* sobre uma reta radial do eixo baseia-se em considerações geométricas e *sempre permanece linear*. A distribuição cisalhamento-deformação depende porém do torque aplicado e deve, portanto, ser determinada pelo comportamento do material ou pelo diagrama tensão de cisalhamento-deformação.
- Uma vez estabelecida a distribuição cisalhamento-tensão para o eixo, ela produz um torque em torno da linha de centro equivalente ao torque resultante que atua sobre a seção transversal.
- O *comportamento perfeitamente plástico* faz supor que a distribuição cisalhamento-tensão seja *constante* e o eixo continue a se torcer sem aumento do torque. Esse torque é denominado *torque plástico*.

EXEMPLO 5.19

O eixo tubular da Figura 5.42*a* é feito de uma liga de alumínio que se supõe ter um diagrama $\tau-\gamma$ elastoplástico como mostrado. Determinar (*a*) o torque máximo que pode ser aplicado ao eixo sem provocar escoamento do material e (*b*) o torque máximo ou plástico que pode ser aplicado ao eixo. Qual deve ser a deformação por cisalhamento mínima no raio externo para que um torque plástico se desenvolva?



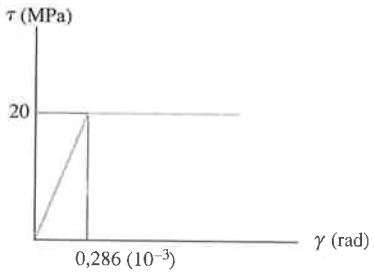
SOLUÇÃO

Torque Elástico Máximo. Requer-se que a tensão de cisalhamento na fibra externa seja 20 MPa. Usando a fórmula da torção, temos:

$$\tau_E = \frac{T_Y c}{J};\ 20(10^6)\ \text{N/m}^2 = \frac{T_E(0{,}05\ \text{m})}{(\pi/2)[(0{,}05\ \text{m})^4 - (0{,}03\ \text{m})^4]}$$

$$T_E = 3{,}42\ \text{kN} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resposta}$$

As distribuições cisalhamento-tensão e cisalhamento-deformação deste caso são mostradas na Figura 5.42*b*. Os valores na parede interna do tubo são obtidos por proporção.



(a)

Torque Plástico. A distribuição cisalhamento-tensão deste caso é mostrada na Figura 5.42*c*. Para se aplicar a Equação 5.23 é preciso que $\tau = \tau_E$. Temos:

$$T_{plás} = 2\pi \int_{0{,}03\ \text{m}}^{0{,}05\ \text{m}} [20(10^6)\ \text{N/m}^2]\rho^2\, d\rho = 125{,}66(10^6)\,\frac{1}{3}\rho^3 \Big|_{0{,}03\ \text{m}}^{0{,}05\ \text{m}}$$

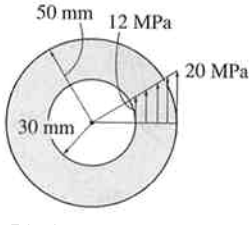
$$= 4{,}10\ \text{kN} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resposta}$$

Nesse tubo, $T_{plás}$ representa um aumento de 20% na capacidade do torque comparado com o torque elástico T_E.

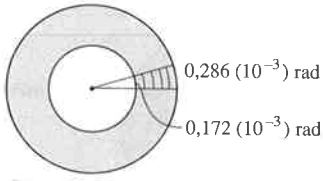
Deformação por Cisalhamento no Raio Externo. O tubo torna-se totalmente plástico quando a deformação por cisalhamento da *parede interna* torna-se $0{,}286(10^{-3})$ rad, como mostrado na Figura 5.42*c*. Como a deformação por cisalhamento *permanece linear* na seção transversal, a deformação plástica das fibras externas do tubo na Figura 5.42*c* é determinada por proporção:

$$\frac{\gamma_e}{50\ \text{mm}} = \frac{0{,}286(10^{-3})\ \text{rad}}{30\ \text{mm}}$$

$$\gamma_e = 0{,}477(10^{-3})\ \text{rad} \qquad \textit{Resposta}$$



Distribuição elástica cisalhamento-tensão



Distribuição elástica cisalhamento-deformação

(b)

Figura 5.42

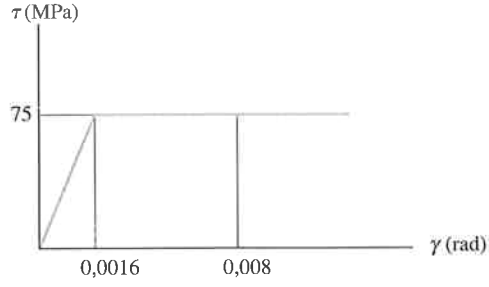
Distribuição plástica cisalhamento-tensão Distribuição plástica cisalhamento-deformação

(c)

Figura 5.42

EXEMPLO 5.20

Um eixo circular maciço tem raio de 20 mm e comprimento de 1,5 m. O material tem diagrama $\tau-\gamma$ elastoplástico como mostrado na Figura 5.43*a*. Determinar o torque necessário para torcer o eixo $\phi = 0{,}6$ rad.



(a)

SOLUÇÃO

Para resolver o problema, primeiro vamos obter a distribuição cisalhamento-deformação e depois estabelecer a distribuição cisalhamento-tensão. Uma vez conhecidas essas distribuições, pode-se determinar o torque aplicado.

A deformação por cisalhamento máxima ocorre na superfície do eixo, $\rho = c$. Como o ângulo de torção é $\phi = 0{,}6$ rad em todo o comprimento de 1,5 m do eixo, temos então, usando a Equação 5.25 para o comprimento total do eixo:

$$\phi = \gamma\frac{L}{\rho}; \qquad 0{,}6 = \frac{\gamma_{máx}(1{,}5\text{ m})}{(0{,}02\text{ m})}$$

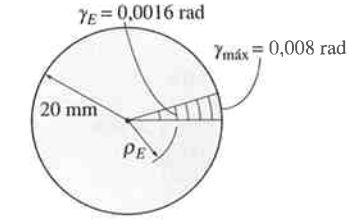
$$\gamma_{máx} = 0{,}008\text{ rad}$$

A distribuição cisalhamento-deformação, que sempre varia linearmente, é mostrada na Figura 5.43*b*. Observe que ocorre escoamento do material uma vez que $\gamma_{máx} > \gamma_E = 0{,}0016$ rad na Figura 5.43*a*. O raio do núcleo elástico, ρ_E, é obtido por proporção. Pela Figura 5.43*b*,

$$\frac{\rho_E}{0{,}0016} = \frac{0{,}02\text{ m}}{0{,}008}$$

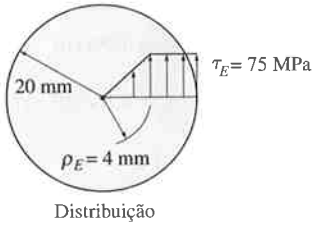
$$\rho_E = 0{,}004\text{ m} = 4\text{ mm}$$

A distribuição cisalhamento-tensão, baseada na distribuição cisalhamento-deformação, esquematizada em um segmento de reta radial, é mostrada na Figura 5.43*c*. O torque é obtido por meio da Equação 5.26. Substituindo os dados numéricos, temos:



Distribuição cisalhamento-deformação

(b)



Distribuição cisalhamento-tensão

(c)

Figura 5.43

$$T = \frac{\pi \tau_E}{6}(4c^3 - \rho_E^3)$$
$$= \frac{\pi[75(10^6)\ \text{N/m}^2]}{6}[4(0{,}02\ \text{m})^3 - (0{,}004\ \text{m})^3]$$
$$= 1{,}25\ \text{kN} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resposta}$$

*5.10 TENSÃO RESIDUAL

Quando um eixo é submetido a deformações plásticas por cisalhamento provocadas por torção, a remoção do torque acarreta a permanência no eixo de parte da tensão de cisalhamento. Tal tensão remanescente é conhecida como ***tensão residual*** e sua distribuição é calculada por meio dos princípios de superposição e de recuperação elástica.

A recuperação elástica, discutida na Seção 3.4, refere-se ao fato de que, quando um material é deformado plasticamente, parte da deformação é recuperada quando a carga é removida. Por exemplo, se o material for deformado para γ_1, mostrado como ponto C na curva $\tau-\gamma$ da Figura 5.44, a retirada provocará tensão de cisalhamento inversa, de forma que o comportamento do material seguirá o segmento de reta CD, o que resultará na *recuperação elástica* parcial da deformação por cisalhamento γ_1. Essa reta é paralela ao segmento inicial da reta AB do diagrama $\tau-\gamma$, de modo que ambas as retas têm declive G, como indicado.

Para ilustrar como a distribuição de tensão residual é determinada em um eixo, primeiro vamos considerar que esse eixo esteja submetido a um torque plástico $\mathbf{T}_{plás}$. Como explicado na Seção 5.9, $\mathbf{T}_p$ cria a distribuição cisalhamento-tensão

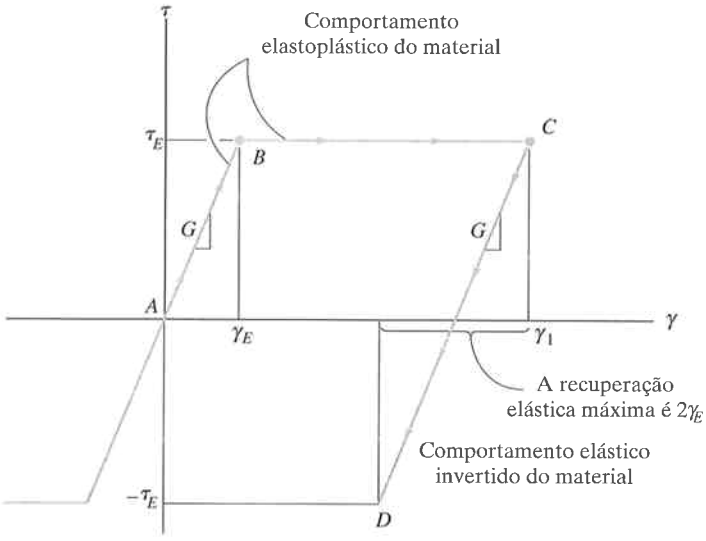
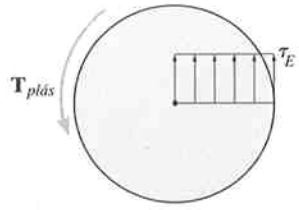


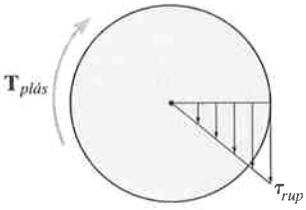
Figura 5.44

mostrada na Figura 5.45*a*. Vamos supor que a distribuição seja conseqüência da deformação do material γ_1 no limite externo do eixo (Figura 5.44). Além disso, γ_1 é suficientemente grande, de modo que podemos admitir que o raio do núcleo elástico aproxima-se de zero, ou seja, $\gamma_1 >> \gamma_E$. Se $\mathbf{T}_p$ for retirado, o material tende a recuperar-se *elasticamente,* seguindo ao longo da reta CD. Como ocorre comportamento elástico, podemos sobrepor à distribuição de tensão da Figura



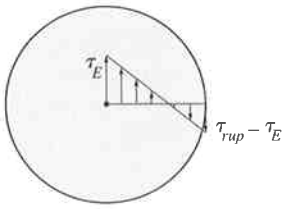
Torque plástico aplicado que provoca deformações plásticas por cisalhamento em todo o eixo

(a)



Torque plástico invertido que provoca deformações elásticas por cisalhamento em todo o eixo

(b)



Distribuição cisalhamento-tensão residual no eixo

(c)

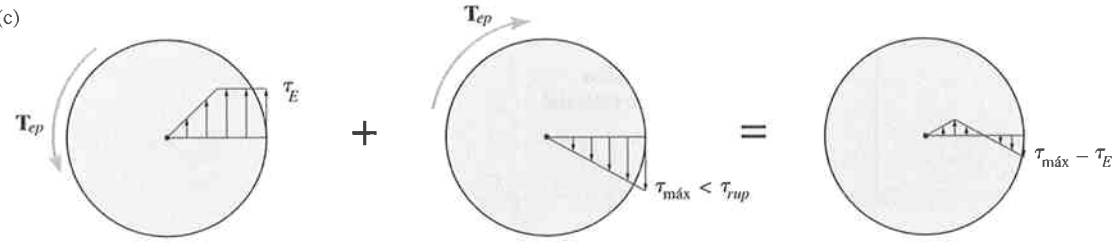
5.45*a* uma *distribuição de tensão linear* provocada pela aplicação do torque plástico $\mathbf{T}_{plás}$ em direção *oposta* (Figura 5.45*b*). Nesse caso, a tensão de cisalhamento máxima, calculada para essa distribuição, é chamada *módulo de ruptura* à torção. Ele é determinado pela fórmula da torção,[3] que dá:

$$\tau_{rup} = \frac{T_{plás}c}{J} = \frac{T_{plás}c}{(\pi/2)c^4}$$

Usando a Equação 5.27,

$$\tau_{rup} = \frac{[(2/3)\pi\tau_E c^3]c}{(\pi/2)c^4} = \frac{4}{3}\tau_E$$

Observe que a aplicação invertida de $\mathbf{T}_p$ usando a distribuição linear cisalhamento-tensão da Figura 5.45*b* é possível aqui, visto que a recuperação máxima para a deformação de cisalhamento elástica é $2\gamma_E$, como observado na Figura 5.44. Isso corresponde a uma tensão de cisalhamento máxima aplicada de $2\tau_E$, que é *maior* do que a tensão de cisalhamento máxima de $\frac{4}{3}\tau_E$ calculada anteriormente. Por conseguinte, superpondo as distribuições de tensão que envolvem aplicação e remoção de torque plástico, obtemos a distribuição residual de cisalhamento-tensão no eixo, como mostrado na Figura 5.45*c*. Observa-se pelo diagrama que a tensão de cisalhamento no centro do eixo, mostrada como τ_E, na realidade deve ser *nula*, uma vez que o material ao longo do eixo não está deformado. A razão para não ser nula é porque supomos que *todo* o material do eixo foi deformado além do ponto de escoamento a fim de determinar o torque plástico (Figura 5.45*a*). Para ser mais realista, deve ser considerado um torque elastoplástico ao se modelar o comportamento do material. Isso leva à superposição da distribuição mostrada na Figura 5.45*d*.



Torque elastoplástico aplicado | Torque elastoplástico invertido | Distribuição cisalhamento-tensão residual no eixo

(d)

Figura 5 .45

EXEMPLO 5.21

Um tubo feito de liga de latão tem comprimento de 5 pés e área da seção transversal mostrada na Figura 5.46*a*. O material tem um diagrama $\tau-\gamma$ elastoplástico também mostrado na Figura 5.46*a*. Determinar o torque plástico $T_{plás}$. Quais são a distribuição cisalhamento-tensão residual e a torção permanente do tubo que restarão se $\mathbf{T}_{plás}$ for removido *imediatamente após* o tubo tornar-se totalmente plástico?

[3] A fórmula da torção é válida somente quando o material comporta-se de maneira linear-elástica; no entanto, o módulo de ruptura é assim denominado porque se supõe que o material comporta-se elasticamente e então, de súbito, *se rompe* ao atingir o limite de proporcionalidade.

SOLUÇÃO

Torque Plástico. O torque plástico $\mathbf{T}_p$ deforma o tubo de modo que todo o material escoa. Aqui a distribuição de tensão aparece como mostrado na Figura 5.46*b*. Aplicando a Equação 5.23, temos:

$$T_{plás} = 2\pi \int_{c_i}^{c_e} \tau_E \rho^2 \, d\rho = \frac{2\pi}{3} \tau_E (c_e^3 - c_i^3)$$

$$= \frac{2\pi}{3}(12(10^3) \text{ lb/pol}^2)[(2 \text{ pol})^3 - (1 \text{ pol})^3] = 175{,}9 \text{ kip} \cdot \text{pol} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Quando o tubo se torna totalmente plástico, o escoamento começa no raio interno, ou seja, em $c_i = 1$ pol, $\gamma_E = 0{,}002$ rad (Figura 5.46*a*). O ângulo de torção que ocorre é determinado pela Equação 5.25, que, para todo o tubo, torna-se:

$$\phi_p = \gamma_E \frac{L}{c_i} = \frac{(0{,}002)(5 \text{ pés})(12 \text{ pol/pé})}{(1 \text{ pol})} = 0{,}120 \text{ rad} \curvearrowleft$$

$\mathbf{T}_p$ é então *removido* ou na verdade reaplicado na direção oposta; a distribuição cisalhamento-tensão linear 'fictícia' mostrada na Figura 5.46*c* deve ser sobreposta à mostrada na Figura 5.46*b*. Na Figura 5.46*c*, a tensão de cisalhamento máxima ou o módulo de ruptura são calculados pela fórmula da torção.

$$\tau_{rup} = \frac{T_p c_e}{J} = \frac{(175{,}9 \text{ kip} \cdot \text{pol})(2 \text{ pol})}{(\pi/2)[(2 \text{ pol})^4 - (1 \text{ pol})^4]} = 14{,}93 \text{ ksi}$$

Além disso, a tensão de cisalhamento na parede interna do tubo é:

$$\tau_i = (14{,}93 \text{ ksi})\left(\frac{1 \text{ pol}}{2 \text{ pol}}\right) = 7{,}47 \text{ ksi}$$

Pela Figura 5.46*a*, $G = \tau_E/\gamma_E = 12 \text{ ksi}/(0{,}002 \text{ rad}) = 6.000$ ksi, de modo que o ângulo de torção correspondente ϕ'_p após a remoção de $\mathbf{T}_p$ é, então:

$$\phi'_p = \frac{T_p L}{JG} = \frac{(175{,}9 \text{ kip} \cdot \text{pol})(5 \text{ pés})(12 \text{ pol/pé})}{(\pi/2)[(2 \text{ pol})^4 - (1 \text{ pol})^4]6.000 \text{ kip/pol}^2} = 0{,}0747 \text{ rad} \curvearrowright$$

A *distribuição cisalhamento-tensão residual* resultante é, portanto, a mostrada na Figura 5.46*d*. A rotação permanente do tubo após a remoção de T_p é:

$$\curvearrowright^{+} \quad \phi = 0{,}120 - 0{,}0747 = 0{,}0453 \text{ rad} \curvearrowleft \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

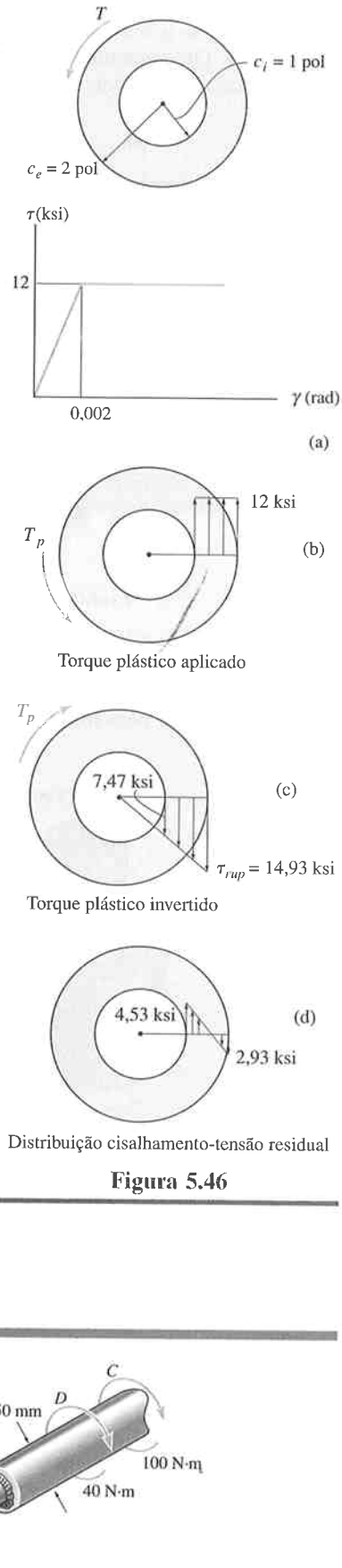
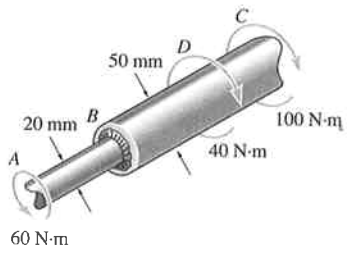


Figura 5.46

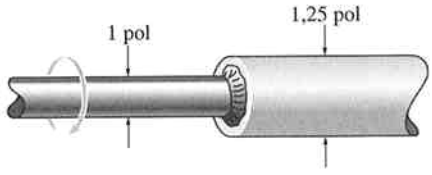
PROBLEMAS

5.111. O eixo de aço é feito de dois segmentos *AB* e *BC*, unidos por um filete de solda com raio de 2,8 mm. Determinar a tensão de cisalhamento máxima desenvolvida no eixo.



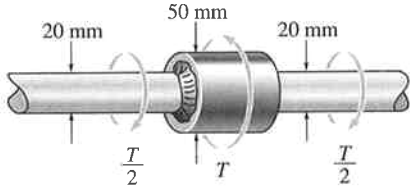
Problema 5.111

***5.112.** O eixo é usado para transmitir 9 hp girando a 600 rpm. Determinar a tensão de cisalhamento máxima neste desenvolvida. Os segmentos estão unidos por um filete de solda com raio de 0,15 pol.



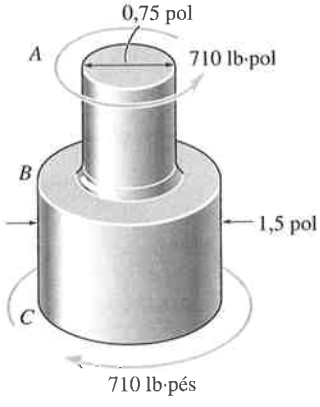
Problema 5.112

5.113. Os elementos estão unidos por um filete de solda de raio $r = 4$ mm. Determinar a tensão de cisalhamento máxima no eixo se $T = 10$ N · m.



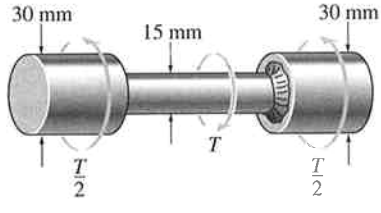
Problema 5.113

5.114. O conjunto está sujeito a um torque de 710 lb · pol. Se a tensão de cisalhamento admissível para o material for $\tau_{adm} = 12$ ksi, determinar o raio do filete de menor tamanho que pode ser usado para transmitir o torque.



Problema 5.114

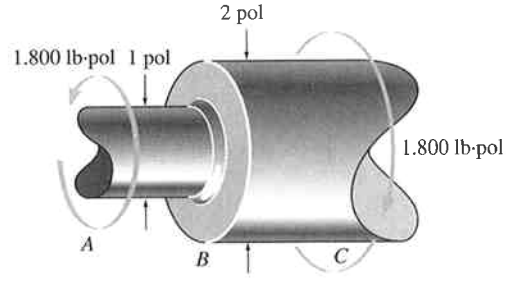
5.115. O aço usado no eixo tem tensão de cisalhamento admissível de $\tau_{adm} = 8$ MPa. Supondo que os elementos estejam unidos por um filete de solda de raio $r = 2{,}25$ mm, determinar o torque máximo T que pode ser aplicado.



Problema 5.115

***5.116.** Um eixo sólido é submetido ao torque **T**, que provoca o escoamento do material. Supondo que o material seja elástico perfeitamente plástico, mostrar que o torque pode ser expresso, em termos do ângulo de torção ϕ do eixo, como $T = \frac{4}{3}T_E(1 - \phi_E^3/4\phi^3)$, onde T_E e ϕ_E são o torque e o ângulo de torção quando o material começa a escoar.

5.117. O conjunto está sujeito a um torque de 1.800 lb · pol. Supondo que a tensão de cisalhamento admissível para o material seja $\tau_{adm} = 12$ ksi, determinar o raio do menor filete de solda que pode ser usado para transmitir o torque.

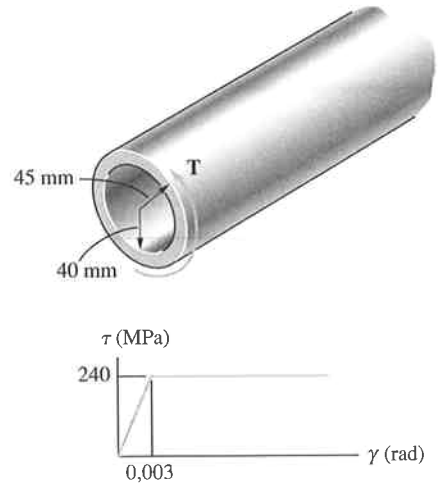


Problema 5.117

5.118. Uma barra com seção transversal circular de 3 pol de diâmetro está submetida a um torque de 100 kip · pol. Supondo que o material seja elástico perfeitamente plástico, com $\tau_E = 16$ ksi, determinar o raio do núcleo elástico.

5.119. Um eixo maciço com diâmetro de 2 pol é feito de material elástico perfeitamente plástico com limite de escoamento $\tau_E = 16$ ksi e módulo de elasticidade ao cisalhamento $G = 12(10^3)$ ksi. Determinar o torque requerido para desenvolver um núcleo elástico no eixo com diâmetro de 1 pol. Além disso, qual é o torque plástico?

***5.120.** O tubo de 2 m de comprimento com as dimensões mostradas é feito de material elástico perfeitamente plástico. Determinar o torque aplicado T, que submete o material da borda externa a uma deformação por cisalhamento de $\gamma_{máx} = 0{,}008$ rad. Qual será o ângulo de torção permanente do tubo quando o torque for removido? Desenhar a distribuição de tensão residual no tubo.

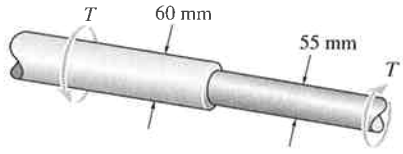


Problema 5.120

5.121. Determinar o torque necessário para torcer um arame de aço curto de 3 mm de diâmetro algumas voltas, supondo que ele seja feito de um aço considerado elástico perfeitamente plástico e com limite de escoamento $\tau_E = 80$ MPa. Suponha que o material torne-se totalmente plástico.

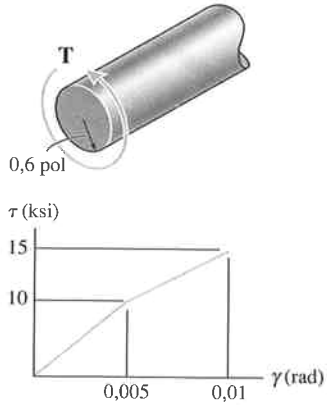
5.122. Um eixo maciço tem diâmetro de 40 mm e comprimento de 1 m. É feito de material elástico perfeitamente plástico com limite de escoamento $\tau_E = 100$ MPa. Determinar o torque elástico máximo T_E e o ângulo de torção correspondente. Qual é o ângulo de torção se o torque for aumentado para $T = 1{,}2T_E$? $G = 80$ GPa.

5.123. O eixo em degrau está submetido a um torque T que produz escoamento na superfície do segmento de diâmetro maior. Determinar o raio do núcleo elástico produzido no segmento de menor diâmetro. Desprezar a concentração de tensão no filete.



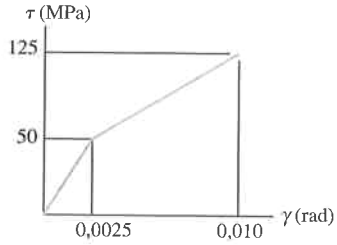
Problema 5.123

***5.124.** O eixo é feito de material sujeito a endurecimento por deformação (encruamento) com o diagrama $\tau-\gamma$ mostrado. Determinar o torque T que deve ser aplicado ao eixo a fim de criar um núcleo elástico com raio $\rho = 0{,}5$ pol.



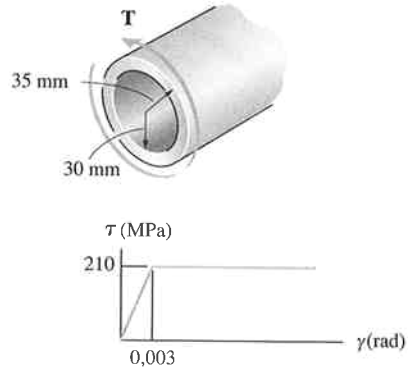
Problema 5.124

5.125. O diagrama tensão de cisalhamento-deformação para um eixo maciço de diâmetro de 50 mm pode ser aproximado como mostra a figura. Determinar o torque requerido para provocar uma tensão de cisalhamento máxima de 125 MPa no eixo. Se o eixo tiver 3 m de comprimento, qual será o ângulo de torção correspondente?



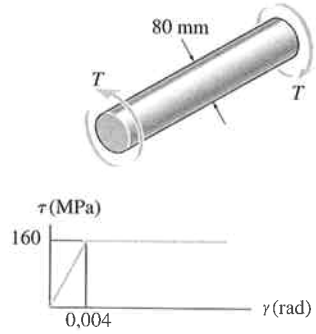
Problema 5.125

5.126. O tubo de 2 m de comprimento é feito de material elástico perfeitamente plástico como mostrado. Determinar o torque aplicado T que submete o material da borda externa a uma deformação por cisalhamento de $\gamma_{máx} = 0{,}006$ rad. Qual será o ângulo de torção permanente quando o torque for retirado? Desenhar a distribuição de tensão residual no tubo.



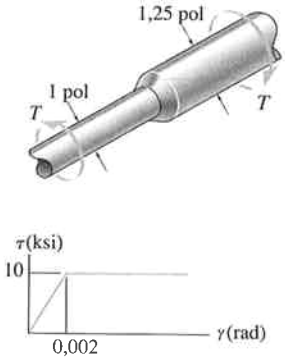
Problema 5.126

5.127. O eixo maciço é feito de material elástico perfeitamente plástico como mostrado. Determinar o torque T necessário para formar um núcleo elástico no eixo com raio de $\rho_E = 20$ mm. Se o eixo tiver 3 m de comprimento, que ângulo uma extremidade girará em relação à outra? Determinar a distribuição de tensão residual no eixo e o ângulo de torção permanente quando o torque for removido.



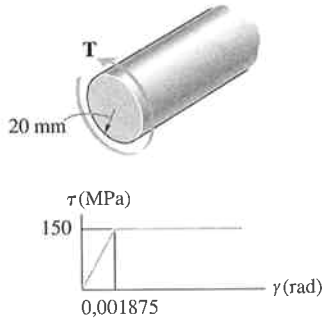
Problema 5.127

***5.128.** O eixo consiste em duas seções rigidamente acopladas. Se o material for elástico perfeitamente plástico como mostrado, determinar o maior torque T que pode ser aplicado ao eixo. Desenhar também a distribuição cisalhamento-tensão sobre uma reta radial de cada seção. Desprezar o efeito da concentração de tensão.



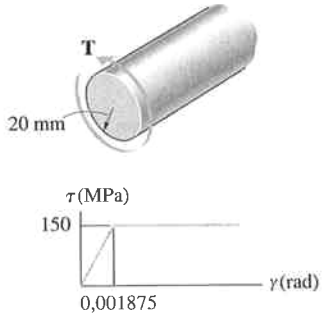
Problema 5.128

5.129. O eixo é feito de material elástico perfeitamente plástico como mostrado. Construir o gráfico da distribuição cisalhamento-tensão que atuará ao longo de uma reta radial se o eixo for submetido a um torque $T = 2$ kN · m. Qual é a distribuição de tensão residual no eixo quando o torque é removido?



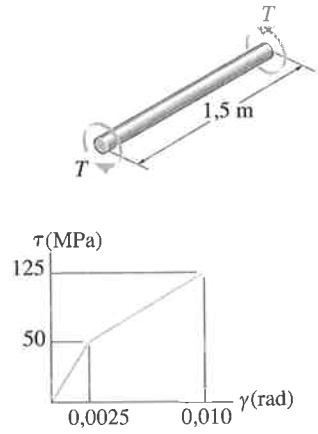
Problema 5.129

5.130. O eixo é feito de material elástico perfeitamente plástico como mostrado. Determinar o torque que ele poderá transmitir se o ângulo de torção admissível for 0,375 rad. Determinar também o ângulo de torção permanente quando o torque é retirado. O eixo tem 2 m de comprimento.



Problema 5.130

5.131. O diagrama tensão de cisalhamento-deformação de um eixo maciço de 50 mm de diâmetro pode ser aproximado como mostra a figura. Determinar o torque requerido T que provoque uma tensão de cisalhamento máxima de 125 MPa. Se o comprimento do eixo for 1,5 m, qual será o ângulo de torção correspondente?



Problema 5.131

***5.132.** Um torque é aplicado a um eixo de raio r. Supondo que o material tenha uma relação tensão-deformação de $\tau = k\gamma^{1/6}$, onde K seja constante, determinar a máxima tensão de cisalhamento no eixo.

Problema 5.132

PROBLEMAS DE REVISÃO

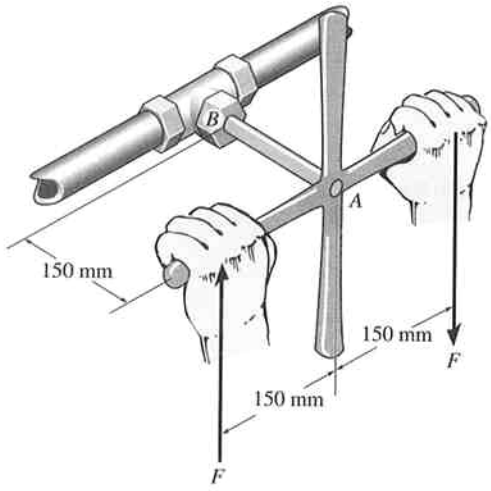
5.133. O eixo de aço inoxidável 304 tem 3 m de comprimento e diâmetro externo de 60 mm. Quando gira a 60 rad/s, transmite 30 kW de potência do motor E para o gerador G. Determinar a menor espessura do eixo se a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 150$ MPa e o eixo está impedido de torcer mais que 0,08 rad.

Problema 5.133

5.134. O eixo de aço inoxidável 304 tem 3 m de comprimento e diâmetro externo de 50 mm. Requer-se que transmita 40 kW de potência do motor E para o gerador G. Determinar a menor velocidade angular que ele pode ter se estiver impedido de torcer mais que 1,5°.

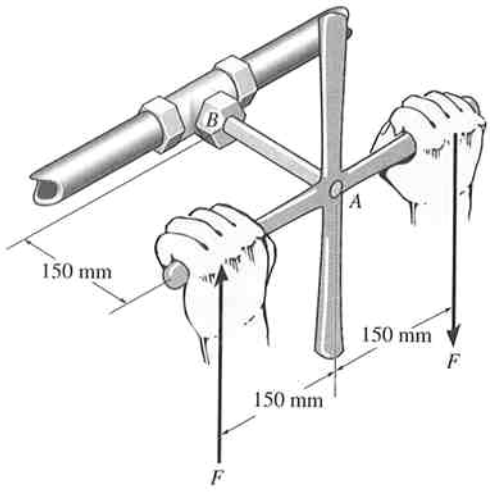
Problema 5.134

5.135. Supondo que o eixo maciço AB, ao qual está acoplado o volante da válvula, seja feito de latão C83400 e tenha diâmetro de 10 mm, determinar o binário F máximo que pode ser aplicado ao volante imediatamente antes que o material comece a falhar. Assumir $\tau_{adm} = 40$ MPa. Qual é o ângulo de torção do volante? O eixo está preso em A.



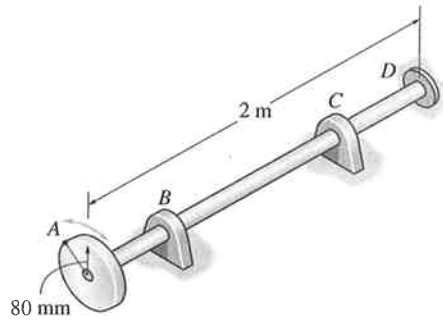
Problema 5.135

***5.136.** Supondo que o eixo maciço AB, ao qual está acoplado o volante da válvula, seja feito de latão C83400, determinar o menor diâmetro do volante de modo que o ângulo de torção não exceda 0,5° e a tensão de cisalhamento não exceda 40 MPa quando F= 25 N.



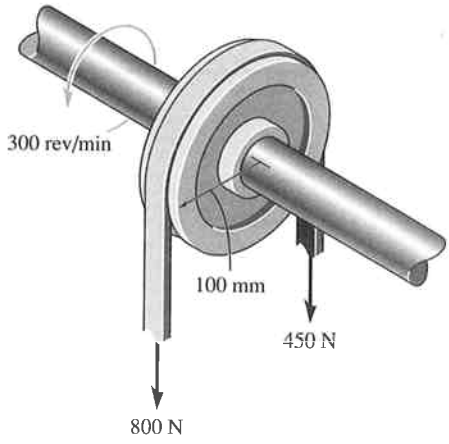
Problema 5.136

5.137. O eixo e volante rotativos são parados subitamente em D quando o mancal engripa, o que provoca oscilação nos sentidos horário e anti-horário no volante, de modo que o ponto A na borda externa do volante desloca-se de um arco de 10 mm. Determinar a tensão de cisalhamento máxima desenvolvida no eixo tubular de aço inoxidável 304 devido à oscilação. O eixo tem diâmetro interno de 25 mm e diâmetro externo de 35 mm. Os mancais em B e C lhe permitem girar livremente.



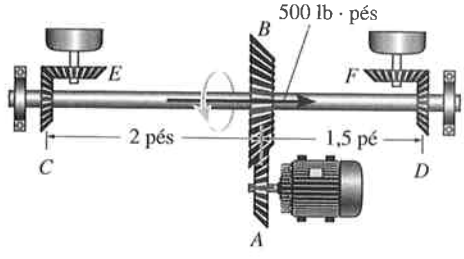
Problema 5.137

5.138. O eixo de 60 mm gira a 300 rev/min. O movimento é provocado pelas tensões desiguais de 800 N e 450 N na polia. Determinar a potência transmitida e a tensão de cisalhamento máxima desenvolvida no eixo.



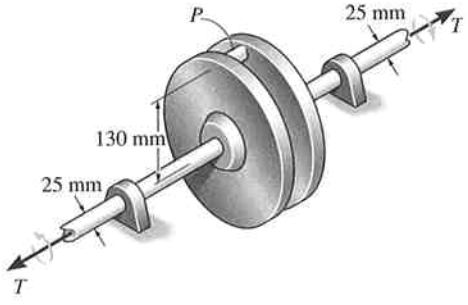
Problema 5.138

***5.139.** O motor A desenvolve um torque de 500 lb · pés na engrenagem B, aplicado ao longo da linha de centro do eixo de aço A-36 CD, que tem 2 pol de diâmetro. Esse torque deve ser transmitido aos pinhões em E e F. Se as engrenagens estiverem temporariamente fixas, qual será a tensão de cisalhamento máxima nos segmentos CB e BD do eixo? Além disso, qual será o ângulo de torção de cada um dos segmentos? Os mancais em C e D exercem apenas forças de reação no eixo.



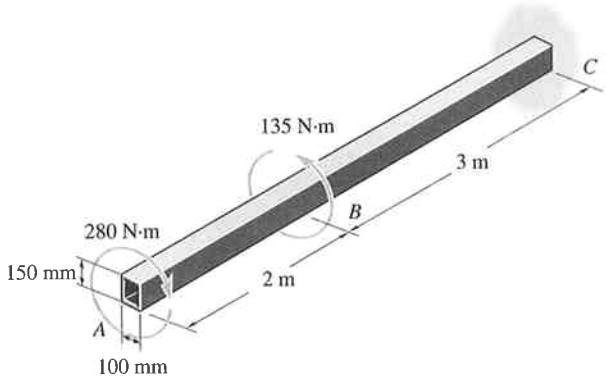
Problema 5.139

5.140. O acoplamento consiste de dois discos presos a eixos separados, cada um com diâmetro de 25 mm. Os eixos são apoiados em mancais que permitem rotação livre. A fim de limitar o torque **T** transmitido, usa-se um 'pino de cisalhamento' P para acoplar os discos. Supondo que o pino suporte uma força cortante *média* de 550 N antes de falhar, determinar o torque constante máximo **T** que pode ser transmitido de um eixo para o outro. Além disso, qual é a tensão de cisalhamento máxima em cada eixo quando o 'pino de cisalhamento' está na iminência de falhar?



Problema 5.140

5.141. O tubo de alumínio tem espessura de 5 mm e as dimensões da seção transversal externa mostradas. Determinar a tensão de cisalhamento média máxima nele desenvolvida. Se o tubo tiver comprimento de 5 m, qual será o ângulo de torção? G_{al} = 28 GPa.

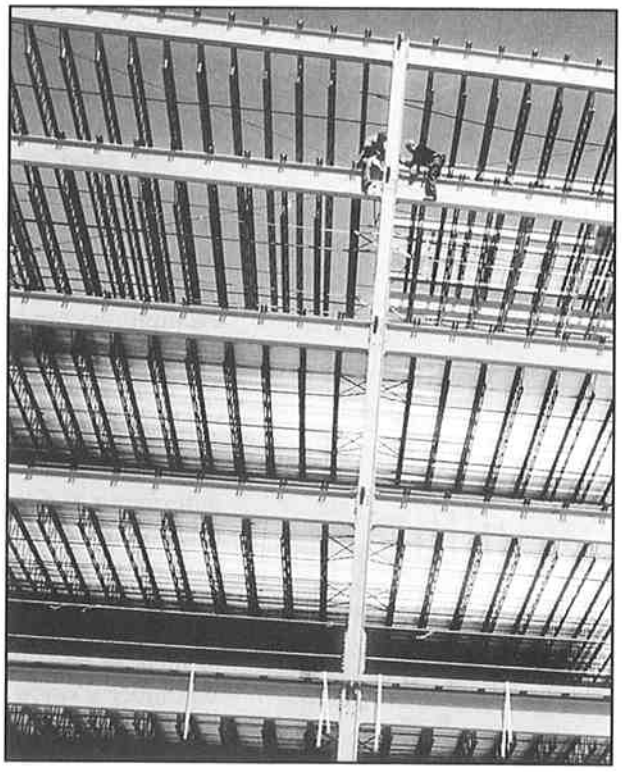


Problema 5.141

6 Flexão

Objetivos do Capítulo

Vigas e eixos são elementos estruturais e mecânicos importantes na engenharia. Neste capítulo, determinaremos os esforços provocados por flexão nesses elementos. O capítulo começa com uma discussão sobre como estabelecer os diagramas de força cortante e momento fletor para uma viga ou eixo. Como os de força normal e torque, os diagramas de força cortante e momento fletor constituem meios úteis para se determinar o maior cisalhamento e momento fletor no elemento e especificam onde seus valores máximos ocorrem. Uma vez determinado o momento interno em uma seção, podemos calcular o esforço de flexão. Consideraremos primeiro elementos retos, de seção transversal simétrica e feitos de material homogêneo linear-elástico. Discutiremos depois casos especiais envolvendo flexão assimétrica e elementos feitos de materiais compostos (ou compósitos). Serão também considerados elementos curvos, concentrações de tensão, flexão inelástica e esforços residuais.



As vigas são membros estruturais importantes usados na construção de edifícios. Seu projeto, em geral, baseia-se em sua capacidade de resistir ao esforço de flexão, assunto deste capítulo.

6.1 Diagramas de Força Cortante (Cisalhamento) e Momento Fletor

Elementos estreitos que suportam cargas aplicadas perpendicularmente ao seu eixo longitudinal são chamados ***vigas***. Em geral, as vigas são barras compridas e retas com área da seção transversal constante. Elas são classificadas conforme seus apoios. Por exemplo, uma *viga simplesmente apoiada* tem um apoio fixo em uma extremidade e está apoiada em roletes (apoio móvel) na outra (Figura 6.1), uma *viga em balanço* é engastada em uma extremidade e livre na outra; uma *viga apoiada com extremidade em balanço* tem uma ou ambas as extremidades em balanço. Certamente as vigas são consideradas o mais importante de todos os elementos estruturais. Os exemplos incluem elementos usados para apoiar os pisos dos edifícios, o tabuleiro de uma ponte ou a asa de um avião. Além disso, o eixo de um automóvel, a lança de um guindaste e mesmo muitos dos ossos humanos atuam como vigas.

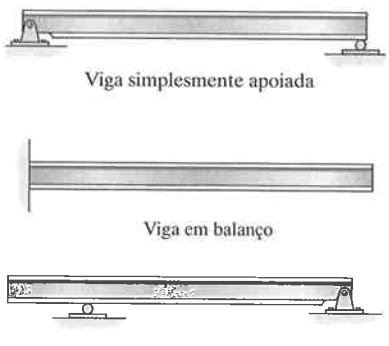


Figura 6.1

Devido às cargas aplicadas, as vigas desenvolvem força cortante (cisalhante) interna e momento fletor que, em geral, variam de ponto para ponto ao longo do eixo da viga. A fim de projetar a viga adequadamente é necessário primeiro determinar o cisalhamento e o momento máximos na viga. Um modo de fazer isso é expressar V e M como funções de uma posição arbitrária x ao

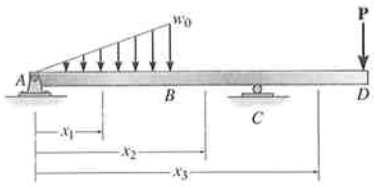


Figura 6.2

longo do eixo da viga. Essas *funções de cisalhamento e momento* são então aplicadas e representadas por gráficos denominados ***diagramas de força cortante e momento fletor***. Os valores máximos de V e M são então obtidos a partir desses gráficos. Além disso, como os diagramas de força cortante e momento fornecem informações detalhadas sobre a *variação* do cisalhamento e do momento fletor ao longo do eixo da viga, são usados freqüentemente pelos engenheiros para decidir onde colocar materiais de reforço na viga ou como definir as dimensões desta em vários pontos ao longo de seu comprimento.

Na Seção 1.2, usamos o método das seções para determinar a carga interna em um *ponto específico* do elemento. Entretanto, se tivermos de determinar V e M internos como funções de x ao longo da viga, será preciso localizar o corte imaginário a uma *distância arbitrária* x da extremidade da viga e definir V e M em termos de x. Nesse sentido, a escolha da origem e a direção positiva para qualquer x selecionado é *arbitrária*. É mais comum, porém, localizar a origem na extremidade esquerda da viga e a direção positiva da esquerda para a direita.

Em geral, as funções de cisalhamento interno e momento fletor obtidas em função de x são *descontínuas* ou seu declive é descontínuo nos pontos em que a carga distribuída muda ou onde estão aplicadas forças concentradas ou conjugados. Por essa razão, tais funções devem ser determinadas para *cada região* da viga localizada *entre* quaisquer duas descontinuidades da carga. Por exemplo, as coordenadas x_1, x_2 e x_3 têm de ser usadas para descrever a variação de V e M em todo o comprimento da viga da Figura 6.2. Essas coordenadas são válidas *apenas* nas regiões de A a B, no caso de x_1, de B a C no caso de x_2 e de C a D no caso de x_3.

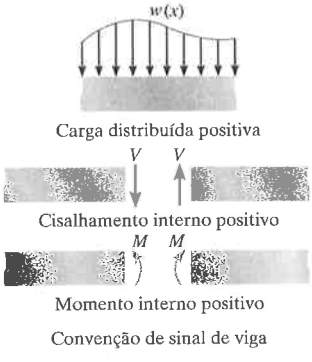


Figura 6.3

Convenção de Sinal de Viga. Antes de apresentar um método para determinar o cisalhamento e o momento fletor como funções de x e depois relacionar as funções (diagramas de força cortante e de momento fletor), é necessário estabelecer uma *convenção de sinal* para definir a força cortante interna 'negativa' e 'positiva' e o momento fletor. Apesar de a escolha da convenção de sinal ser arbitrária, usaremos a convenção geralmente adotada na prática da engenharia e mostrada na Figura 6.3. As *direções positivas* são as seguintes: a *carga distribuída* atua sobre a viga *no sentido de cima para baixo*; a *força cortante* interna provoca rotação no *sentido horário* do segmento de viga sobre o qual atua; e o *momento* interno provoca *compressão* nas *fibras superiores* do segmento tal que flete o segmento de modo que ele retém água. As cargas opostas a essas direções são consideradas negativas.

PONTOS IMPORTANTES

- *Vigas* são elementos retos compridos que suportam carga perpendicular ao seu eixo longitudinal. São classificadas de acordo com a maneira como são apoiadas: por exemplo, simplesmente apoiada, em balanço ou apoiada com extremidade em balanço.
- Para projetar adequadamente a viga, é importante conhecer a *variação* do cisalhamento e do momento fletor ao longo de seu eixo, a fim de determinar os pontos em que esses valores são máximos.
- Estabelecendo uma convenção de sinal para cisalhamento e momento fletor positivos, o cisalhamento e o momento fletor na viga são determinados em função de sua posição x e esses valores relacionados para formar os diagramas de força cortante e momento fletor.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

Os diagramas de força cortante e momento fletor de uma viga são construídos por meio do seguinte procedimento.

Reações de Apoio.

- Determinar todas as forças reativas e conjugados que atuam sobre a viga e desdobrar em componentes todas as forças que atuam perpendicularmente e paralela ao eixo da viga.

Funções de Cisalhamento e Momento Fletor.

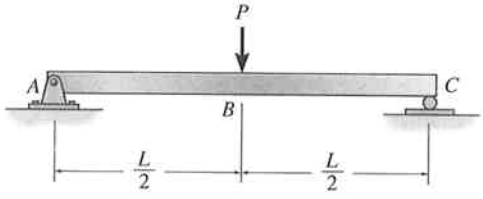
- Especificar coordenadas separadas x com origem na *extremidade esquerda* da viga e compreendidas nas regiões entre forças concentradas e/ou conjugados ou onde não haja descontinuidade da carga distribuída.
- Secionar a viga perpendicular a seu eixo a cada distância x e desenhar o diagrama de corpo livre de um dos segmentos. Certificar-se de que **V** e **M** sejam mostrados atuando no sentido positivo, de acordo com a convenção de sinal mostrada na Figura 6.3.
- A força cortante é obtida somando as forças perpendiculares ao eixo da viga.
- O momento é obtido somando os momentos em torno da extremidade secionada do segmento.

Diagramas de Força Cortante e Momento Fletor.

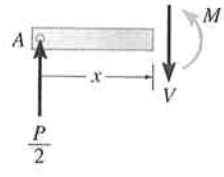
- Esquematizar o diagrama de força cortante (V *versus* x) e o diagrama de momento fletor (M *versus* x). Se os valores numéricos das funções que descrevem V e M forem *positivos*, serão desenhados acima do eixo x, ao passo que os valores negativos serão desenhados abaixo do eixo.
- Em geral, é conveniente mostrar os diagramas de força cortante e momento fletor diretamente abaixo do diagrama de corpo livre da viga.

EXEMPLO 6.1

Desenhar os diagramas de força cortante (ou cisalhante) e momento fletor da viga mostrada na Figura 6.4*a*.



(a)



(b)

SOLUÇÃO

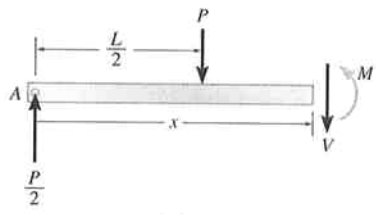
Reações de Apoio. As reações de apoio foram determinadas na Figura 6.4*d*.

Funções de Cisalhamento e Momento Fletor. A viga foi secionada a uma distância arbitrária x do apoio A, estendendo-se pela região AB; o diagrama de corpo livre do segmento esquerdo é mostrado na Figura 6.4*b*. As incógnitas **V** e **M** são indicadas atuando no *sentido positivo* na face direita do segmento de acordo com a convenção de sinal estabelecida. Aplicando as equações de equilíbrio, temos:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad V = \frac{P}{2} \tag{1}$$

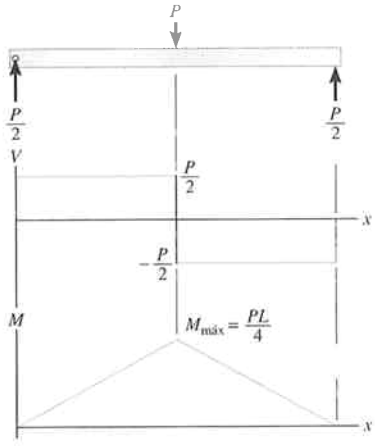
$$\circlearrowleft + \Sigma M = 0; \qquad M = \frac{P}{2}x \tag{2}$$

O diagrama de corpo livre do segmento esquerdo da viga, o qual se estende por uma distância x na região BC, é mostrado na Figura 6.4*c*. Como sempre, **V** e **M** são mostrados atuando no sentido positivo. Então:



(c)

Figura 6.4



(d)

Figura 6.4

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad \frac{P}{2} - P - V = 0$$

$$V = -\frac{P}{2} \tag{3}$$

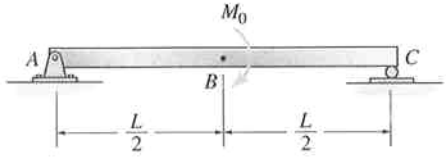
$$\circlearrowleft^{+} \Sigma M = 0; \qquad M + P\left(x - \frac{L}{2}\right) - \frac{P}{2}x = 0$$

$$M = \frac{P}{2}(L - x) \tag{4}$$

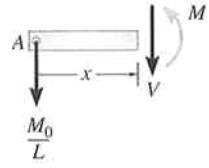
O diagrama de cisalhamento (ou força cortante) representa esquematicamente as equações 1 e 3; o diagrama de momento representa esquematicamente as equações 2 e 4 (Figura 6.4*d*). Essas equações podem ser verificadas em parte, como se observa que $dV/dx = -w$ e $dM/dx = V$ em cada caso. (Essas relações serão desenvolvidas na próxima seção como equações 6.1 e 6.2.)

EXEMPLO 6.2

Desenhar os diagramas de força cortante (ou cisalhante) e momento fletor da viga mostrada na Figura 6.5*a*.

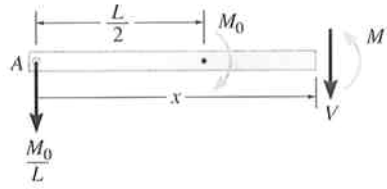


(a)



(b)

SOLUÇÃO



(c)

Reações de Apoio. As reações de apoio foram determinadas na Figura 6.5*d*.

Funções de Cisalhamento e Momento Fletor. Este problema é semelhante ao exemplo anterior; porém, devem ser usadas duas coordenadas x para expressar o cisalhamento e o momento na viga em todo o seu comprimento. Para o segmento da região AB (Figura 6.5*b*), temos:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad V = -\frac{M_0}{L}$$

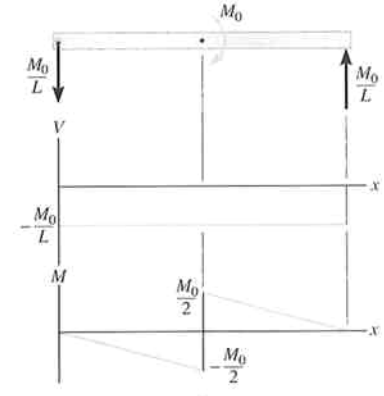
$$\circlearrowleft^{+} \Sigma M = 0; \qquad M = -\frac{M_0}{L}x$$

E, para o segmento da região BC (Figura 6.5*c*), temos:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad V = -\frac{M_0}{L}$$

$$\circlearrowleft^{+} \Sigma M = 0; \qquad M = M_0 - \frac{M_0}{L}x$$

$$M = M_0\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$



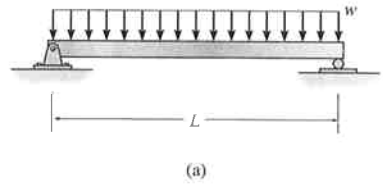
(d)

Figura 6.5

Diagramas de Força Cortante e Momento Fletor. Quando as funções anteriores são desenhadas, são obtidos os diagramas de força cortante e momento mostrados na Figura 6.5*d*. Nesse caso, observe que o cisalhamento é constante em todo o comprimento da viga; ou seja, não é afetado pelo conjugado $\mathbf{M}_0$ que atua no centro da viga. Da mesma maneira que uma força cria um salto no diagrama de força cortante (Exemplo 6.1), o conjugado cria um salto no diagrama de momento.

EXEMPLO 6.3

Desenhar os diagramas de força cortante (ou cisalhante) e momento fletor da viga mostrada na Figura 6.6*a*.

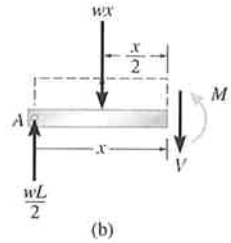


(a)

SOLUÇÃO

Reações de Apoio. As reações de apoio foram calculadas na Figura 6.6*c*.

Funções de Cisalhamento e Momento Fletor. O diagrama de corpo livre do segmento esquerdo da viga é mostrado na Figura 6.6*b*. A carga nele distribuída é representada pela sua força resultante somente *depois* que o segmento for isolado como um diagrama de corpo livre. Como o segmento tem comprimento x, a *grandeza* da *força resultante* é wx. Essa força atua através do centróide da área que compreende a carga distribuída a uma distância $x/2$ da extremidade direita. Aplicando as duas equações de equilíbrio, temos:



(b)

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad \frac{wL}{2} - wx - V = 0$$

$$V = w\left(\frac{L}{2} - x\right) \tag{1}$$

$$\circlearrowleft^{+} \Sigma M = 0; \qquad -\left(\frac{wL}{2}\right)x + (wx)\left(\frac{x}{2}\right) + M = 0$$

$$M = \frac{w}{2}(Lx - x^2) \tag{2}$$

Esses resultados de V e M poderão ser comprovados caso se observe que $dV/dx = -w$. O valor de fato é correto, visto que w positivo atua de cima para baixo. Observe também que $dM/dx = V$.

Diagramas de Força Cortante e Momento Fletor. Os diagramas de força cortante e momento mostrados na Figura 6.6*c* são obtidos esquematizando-se graficamente as equações 1 e 2. O ponto de *cisalhamento nulo* é encontrado pela Equação 1:

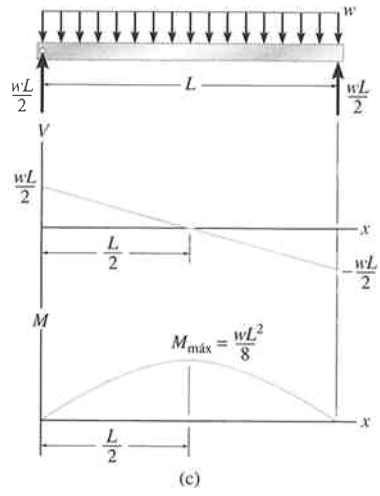
$$V = w\left(\frac{L}{2} - x\right) = 0$$

$$x = \frac{L}{2}$$

Pelo diagrama de momento fletor, esse valor de x representa o ponto da viga em que ocorre o *momento máximo*, visto que, pela Equação 6.2, o declive $V = 0 = dM/dx$. Pela Equação 2, temos:

$$M_{\text{máx}} = \frac{w}{2}\left[L\left(\frac{L}{2}\right) - \left(\frac{L}{2}\right)^2\right]$$

$$= \frac{wL^2}{8}$$

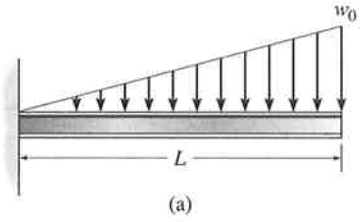


(c)

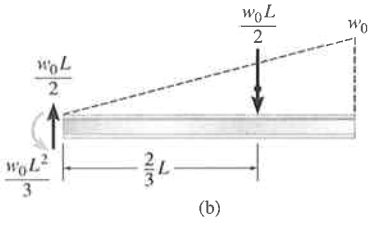
Figura 6.6

EXEMPLO 6.4

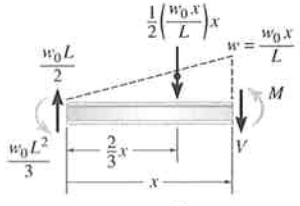
Desenhar os diagramas de força cortante (ou cisalhante) e momento fletor da viga mostrada na Figura 6.7*a*.



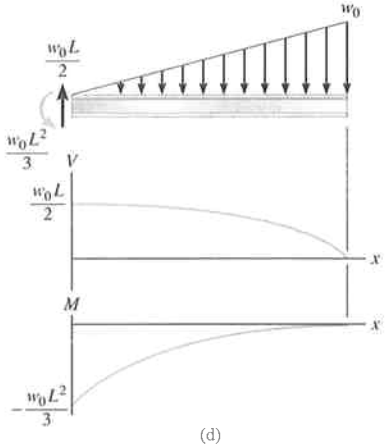
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 6.7

SOLUÇÃO

Reações de Apoio. A carga distribuída é substituída pela sua força resultante, e as reações foram determinadas como mostrado na Figura 6.7*b*.

Funções de Cisalhamento e Momento Fletor. O diagrama de corpo livre de um segmento da viga de comprimento x é mostrado na Figura 6.7*c*. Observe que a intensidade da carga triangular na seção é obtida por proporção, ou seja, $w/x = w_0/L$ ou $w = w_0 x/L$. Conhecendo-se a intensidade da carga, a resultante da carga distribuída é determinada pela área sob o diagrama (Figura 6.7*c*). Assim,

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad \frac{w_0 L}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{w_0 x}{L}\right)x - V = 0$$

$$V = \frac{w_0}{2L}(L^2 - x^2) \tag{1}$$

$$\circlearrowleft^{+} \Sigma M = 0; \qquad \frac{w_0 L^2}{3} - \frac{w_0 L}{2}(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{w_0 x}{L}\right) x\left(\frac{1}{3}x\right) + M = 0$$

$$M = \frac{w_0}{6L}(-2L^3 + 3L^2 x - x^3) \tag{2}$$

Esses resultados podem ser verificados aplicando-se as equações 6.1 e 6.2, isto é:

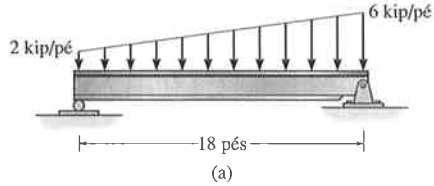
$$w = -\frac{dV}{dx} = -\frac{w_0}{2L}(0 - 2x) = \frac{w_0 x}{L} \qquad \text{OK}$$

$$V = \frac{dM}{dx} = \frac{w_0}{6L}(-0 + 3L^2 - 3x^2) = \frac{w_0}{2L}(L^2 - x^2) \qquad \text{OK}$$

Diagramas de Força Cortante e Momento Fletor. Os gráficos das equações 1 e 2 são mostrados na Figura 6.7*d*.

EXEMPLO 6.5

Desenhar os diagramas de força cortante (ou cisalhante) e momento fletor da viga mostrada na Figura 6.8*a*.



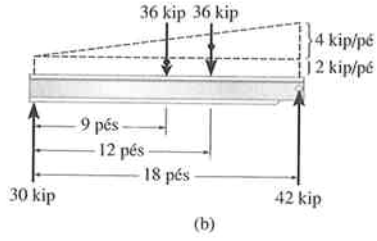
(a)

Figura 6.8

SOLUÇÃO

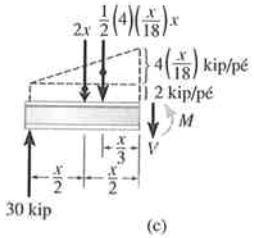
Reações de Apoio. A carga distribuída é dividida em cargas componentes triangular e retangular, e essas cargas são então substituídas por suas forças resultantes. As reações foram determinadas como mostrado no diagrama de corpo livre da viga (Figura 6.8*b*).

Funções de Cisalhamento e Momento Fletor. O diagrama de corpo livre do segmento esquerdo é mostrado na Figura 6.8*c*. Como anteriormente, a carga trapezoidal é substituída por distribuições retangular e triangular. Observe que a intensidade da carga triangular na seção é encontrada por proporção. A força resultante e a localização de cada carga distribuída também são mostradas. Aplicando as equações de equilíbrio, temos:



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 30 \text{ kip} - (2 \text{ kip/pé})x - \frac{1}{2}(4 \text{ kip/pé})\left(\frac{x}{18 \text{ pés}}\right)x - V = 0$$

$$V = \left(30 - 2x - \frac{x^2}{9}\right) \text{kip} \tag{1}$$



$$\circlearrowleft + \Sigma M = 0;$$

$$-30 \text{ kip}(x) + (2 \text{ kip/pé})\, x\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}(4 \text{ kip/pé})\left(\frac{x}{18 \text{ pés}}\right) x\left(\frac{x}{3}\right) + M = 0$$

$$M = \left(30x - x^2 - \frac{x^3}{27}\right) \text{kip} \cdot \text{pés} \tag{2}$$

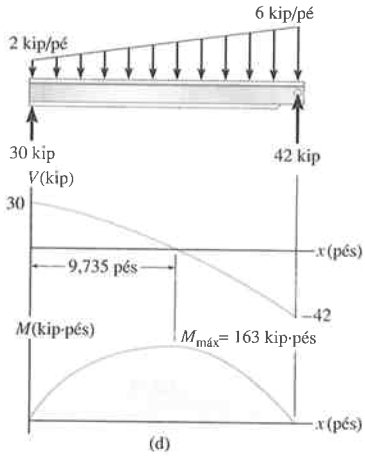


Figura 6.8

Podemos comprovar a equação 2 se observarmos que $dM/dx = V$, isto é, a Equação 1. Além disso, $w = -dV/dx = 2 + \frac{2}{9}x$. Essa equação comprova-se, visto que, quando $x = 0$, $w = 2$ kip/pé e, quando $x = 18$ pés, $w = 6$ kip/pé (Figura 6.8*a*).

Diagramas de Força Cortante e Momento Fletor. As equações 1 e 2 estão esquematizadas graficamente na Figura 6.8*d*. Como o ponto de momento máximo ocorre quando $dM/dx = V = 0$, então, pela Equação 1:

$$V = 0 = 30 - 2x - \frac{x^2}{9}$$

Escolhendo a raiz positiva:

$$x = 9{,}735 \text{ pés}$$

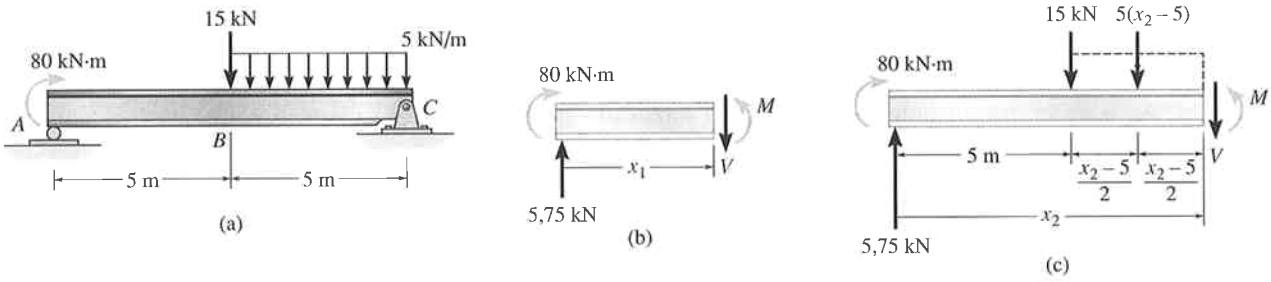
Assim, pela equação 2:

$$M_{máx} = 30(9{,}735) - (9{,}735)^2 - \frac{(9{,}735)^3}{27}$$

$$= 163 \text{ kip} \cdot \text{pés}$$

EXEMPLO 6.6

Desenhar os diagramas de força cortante (ou cisalhante) e momento fletor da viga mostrada na Figura 6.9*a*.



SOLUÇÃO

Reações de Apoio. As reações nos apoios foram determinadas e estão mostradas no diagrama de corpo livre da viga (Figura 6.9*d*).

Funções de Cisalhamento e Momento Fletor. Como há descontinuidade da carga distribuída e também carga concentrada no centro da viga, devemos considerar duas regiões de x a fim de descrever as funções de cisalhamento e momento fletor para toda a viga.

$0 \leq x_1 < 5$ m (Figura 6.9*b*):

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad 5{,}75 \text{ kN} - V = 0$$

$$V = 5{,}75 \text{ kN} \tag{1}$$

$$\circlearrowleft^{+} \Sigma M = 0; \qquad -80 \text{ kN} \cdot \text{m} - 5{,}75 \text{ kN}\, x_1 + M = 0$$

$$M = (5{,}75x_1 + 80) \text{ kN} \cdot \text{m} \tag{2}$$

$5 \text{ m} < x_2 \leq 10$ m (Figura 6.9*c*):

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 5{,}75 \text{ kN} - 15 \text{ kN} - 5 \text{ kN/m}(x_2 - 5 \text{ m}) - V = 0$$

$$V = (15{,}75 - 5x_2) \text{ kN} \tag{3}$$

$$\circlearrowleft^{+} \Sigma M = 0; \qquad -80 \text{ kN} \cdot \text{m} - 5{,}75 \text{ kN}\, x_2 + 15 \text{ kN}(x_2 - 5 \text{ m}) + 5 \text{ kN/m}(x_2 - 5 \text{ m})\left(\frac{x_2 - 5 \text{ m}}{2}\right) + M = 0$$

$$M = (-2{,}5x_2^2 + 15{,}75x_2 + 92{,}5) \text{ kN} \cdot \text{m} \tag{4}$$

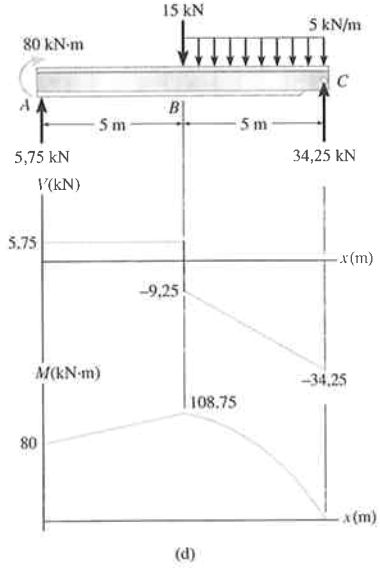


Figura 6.9

Podemos verificar esses resultados parcialmente aplicando $w = -dV/dx$ e $V = dM/dx$. Além disso, quando $x_1 = 0$, as equações 1 e 2 dão $V = 5{,}75$ kN e $M = 80$ kN · m; quando $x_2 = 10$ m, as equações 3 e 4 dão $V = -34{,}25$ kN e $M = 0$. Esses valores são verificados com as reações de apoio mostradas no diagrama de corpo livre (Figura 6.9*d*).

Diagramas de Força Cortante e Momento Fletor. As equações de 1 a 4 estão esquematizadas graficamente na Figura 6.9*d*.

6.2 MÉTODO GRÁFICO PARA CONSTRUIR OS DIAGRAMAS DE FORÇA CORTANTE (CISALHAMENTO) E MOMENTO FLETOR

Nos casos em que a viga esteja sujeita a *várias* cargas diferentes, determinar V e M como funções de x e depois esquematizar graficamente essas equações é cansativo. Nesta seção discutimos um método mais simples para construir os diagramas de força cortante e momento — um método baseado em duas relações infinitesimais que existem entre carga distribuída, cisalhamento e momento.

Como se vê, a falha da mesa ocorreu no braço de apoio do lado direito. O diagrama de momento fletor da carga da mesa indicaria que esse era o ponto de momento interno máximo.

Regiões de Carga Distribuída. Com o objetivo de generalizar, consideremos a viga mostrada na Figura 6.10*a*, submetida a um carregamento arbitrário. O diagrama de corpo livre de um pequeno segmento Δx da viga é mostrado na Figura 6.10*b*. Uma vez que esse segmento foi escolhido em uma posição x onde não há carga concentrada ou conjugado, os resultados a serem obtidos *não* se aplicarão aos pontos de carga concentrada.

Observe que todas as cargas mostradas no segmento atuam na direção positiva de acordo com a convenção de sinal estabelecida (Figura 6.3). Além disso, tanto a força cortante resultante interna quanto o momento interno que atuam sobre a face direita do segmento devem sofrer uma pequena alteração finita, a fim de se manter o segmento em equilíbrio. A carga distribuída foi substituída pela força resultante $w(x)\,\Delta x$ que atua a uma distância fracionária $k(\Delta x)$ a partir da extremidade direita, onde $0 < k < 1$ [por exemplo, se $w(x)$ for *uniforme*, $k = \frac{1}{2}$]. Aplicando as duas equações de equilíbrio ao segmento, temos:

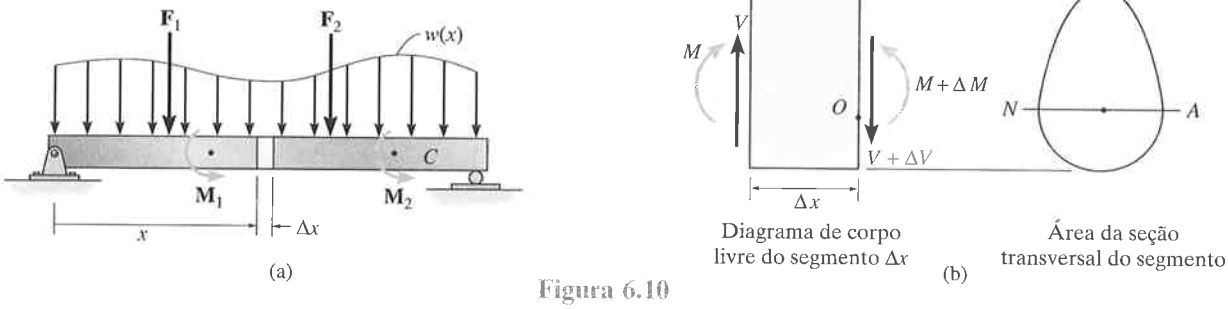


Figura 6.10

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad V - w(x)\,\Delta x - (V + \Delta V) = 0$$

$$\Delta V = -w(x)\,\Delta x$$

$$\circlearrowleft^{+} \Sigma M_O = 0; \qquad -V\,\Delta x - M + w(x)\,\Delta x[k(\Delta x)] + (M + \Delta M) = 0$$

$$\Delta M = V\,\Delta x - w(x)\,k(\Delta x)^2$$

Dividindo-se por Δx e calculando-se o limite quando $\Delta x \to 0$, as duas equações anteriores tornam-se:

$$\frac{dV}{dx} = -w(x)$$

declive do diagrama de cisalhamento em cada ponto = −intensidade da carga distribuída em cada ponto (6.1)

$$\frac{dM}{dx} = V$$

declive do diagrama de momento em cada ponto = cisalhamento em cada ponto (6.2)

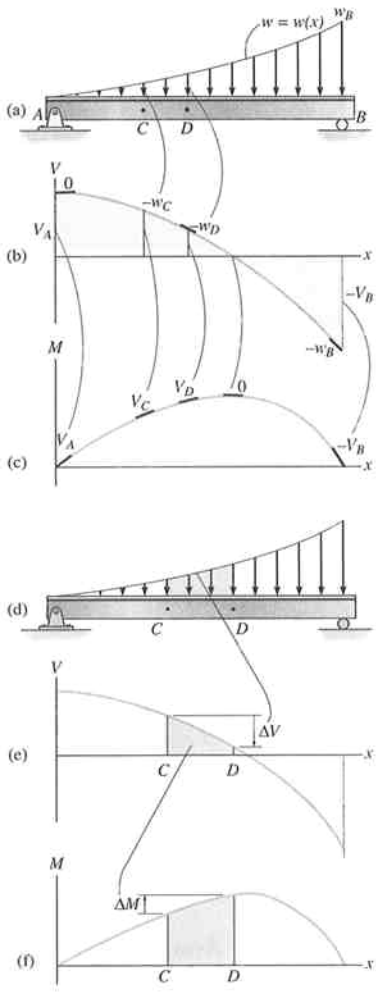


Figura 6.11

As duas equações oferecem um meio conveniente para obter rapidamente os diagramas de força cortante e momento de uma viga. A Equação 6.1 diz que, em determinado ponto do diagrama de força cortante, o *declive* é igual à intensidade negativa da carga distribuída. Consideremos, por exemplo, a viga da Figura 6.11*a*. A carga distribuída é positiva e aumenta de zero até w_B. Portanto, o diagrama de força cortante será uma curva com *declive negativo*, aumentando de zero a $-w_B$. Os declives específicos $w_A = 0$, $-w_C$, $-w_D$ e $-w_B$ são mostrados na Figura 6.11*b*.

De maneira similar, a Equação 6.2 diz que em determinado ponto o *declive* do diagrama de momento é igual à força cortante. Observe que o diagrama de força cortante da Figura 6.11*b* começa em $+V_A$, decresce para zero, torna-se negativo e decresce para $-V_B$. O diagrama de momento terá então um declive inicial de $+V_A$, que decresce para zero; assim, o declive torna-se negativo e decresce para $-V_B$. Os declives específicos V_A, V_C, V_D, 0 e $-V_B$ são mostrados na Figura 6.11*c*.

As equações 6.1 e 6.2 também podem ser reescritas sob a forma $dV = -w(x)dx$ e $dM = Vdx$. Observando que $w(x)dx$ e $V\,dx$ representam áreas infinitesimais sob a carga distribuída e o diagrama de força cortante, respectivamente, podemos integrar as áreas entre quaisquer dois pontos C e D da viga (Figura 6.11*d*) e escrever:

$$\Delta V = -\int w(x)\,dx$$

mudança de força cortante = −área sob a carga distribuída (6.3)

$$\Delta M = \int V(x)\,dx$$

mudança de momento = área sob o diagrama de força cortante (6.4)

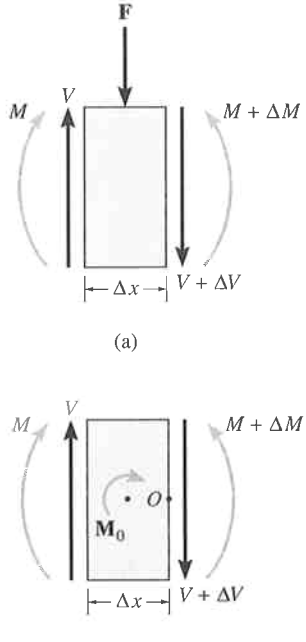


Figura 6.12

A Equação 6.3 diz que a *mudança de força cortante* entre os pontos C e D é igual à *área* (negativa) sob a curva da carga distribuída entre esses dois pontos (Figura 6.11*d*). De modo semelhante, pela Equação 6.4, a mudança de momento entre C e D (Figura 6.11*f*) é igual à área sob o diagrama de força cortante na região de C a D.

Como dissemos antes, as equações anteriores não se aplicam em pontos onde atuam força concentrada ou conjugados.

Regiões de Força Concentrada e Momento Fletor. O diagrama de corpo livre do pequeno segmento mostrado na Figura 6.10*a*, visualizado sob uma das forças, aparece na Figura 6.12*a*. Pode-se observar que é necessário equilíbrio de forças.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad V - F - (V + \Delta V) = 0$$

$$\Delta V = -F \tag{6.5}$$

Assim, quando **F** atua *de cima para baixo* sobre a viga, ΔV é *negativo* de modo que a força cortante 'salta' *para baixo*. Da mesma maneira, se **F** atua *para cima*, o 'salto' (ΔV) será *para cima*.

Pela Figura 6.12*b*, o equilíbrio de momento requer que a mudança de momento seja:

$$\circlearrowleft^{+} \Sigma M_O = 0; \qquad M + \Delta M - M_0 - V\,\Delta x - M = 0$$

Fazendo $\Delta x \rightarrow 0$, temos:

$$\Delta M = M_0 \tag{6.6}$$

Nesse caso, se $\mathbf{M}_0$ for aplicado *no sentido horário*, ΔM será *positivo*, de modo que o diagrama de momento 'saltará' *para cima*. De maneira semelhante, quando $\mathbf{M}_0$ atuar no *sentido anti-horário*, o 'salto' (ΔM) será *para baixo*.

A Tabela 6.1 ilustra a aplicação das equações 6.1, 6.2, 6.5 e 6.6 em alguns casos comuns de carregamento. Nenhum desses resultados deve ser memorizado; em vez disso, devem ser *estudados cuidadosamente* para que você fique bem informado sobre como os diagramas de força cortante e momento são construídos com base no conhecimento da *variação de declive* da carga e do diagrama de força cortante, respectivamente. Valem a pena o tempo e o esforço gastos para autotestar sua compreensão dos conceitos, analisando as colunas de força cortante e momento da tabela e, depois, tentando reconstruir os diagramas com base no carregamento.

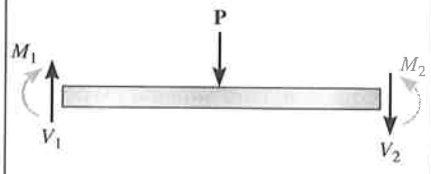
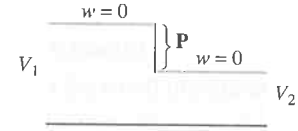
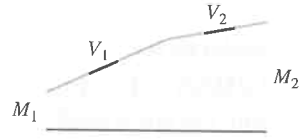
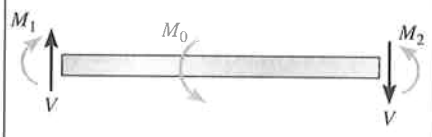
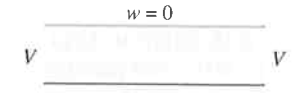
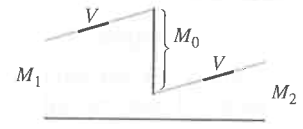
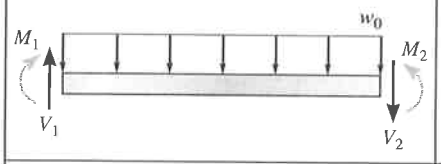
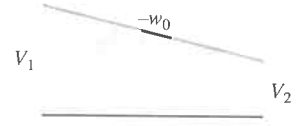
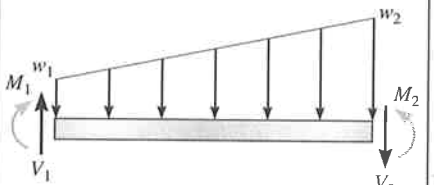
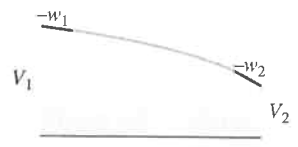
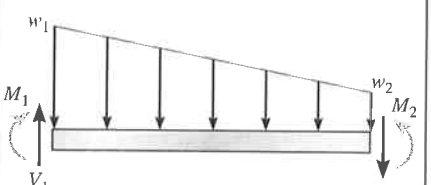
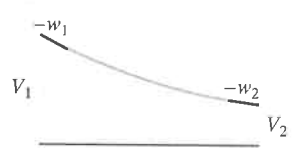
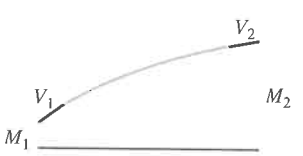
Carga	Diagrama de Força Cortante $\frac{dV}{dx} = -w$	Diagrama de Momento $\frac{dM}{dx} = V$
	 A força **P** de cima para baixo faz V 'saltar' para baixo de V_1 para V_2.	 O declive constante muda de V_1 para V_2.
	 Não há mudança na força cortante visto que o declive $w = 0$.	 Declive positivo constante. $\mathbf{M}_0$ no sentido anti-horário faz M 'saltar' para baixo.
	 Declive negativo constante.	Declive positivo que diminui de V_1 para V_2.
	 Declive negativo que aumenta de $-w_1$ para $-w_2$.	Declive positivo que diminui de V_1 para V_2.
	 Declive negativo que diminui de $-w_1$ para $-w_2$.	 Declive positivo que diminui de V_1 para V_2.

Tabela 6.1

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

O procedimento a seguir oferece um método para construir os diagramas de força cortante e momento de uma viga com base nas relações entre carga distribuída, cisalhamento e momento.

Reações de Apoio.

- Determinar as reações de apoio e desdobrar as forças que atuam sobre a viga em seus componentes perpendicular e paralelo ao eixo da viga.

Diagrama de Força Cortante.

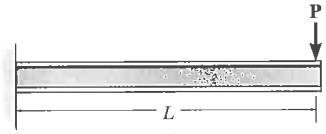
- Estabelecer os eixos V e x e construir um gráfico com os valores conhecidos do cisalhamento nas duas *extremidades* da viga.
- Como $dV/dx = -w$, o *declive* do *diagrama de força cortante* em qualquer ponto é igual à intensidade (negativa) da *carga distribuída* no ponto. Observe que w é positiva quando atua de cima para baixo.
- Se o valor numérico do cisalhamento tiver de ser determinado em um ponto, pode-se encontrar esse valor usando tanto o método das seções e a equação de equilíbrio da força como a equação $\Delta V = -\int w(x)$, a qual expressa que a *mudança do cisalhamento* entre dois pontos quaisquer é igual à *área (negativa) sob o diagrama de carga* entre os dois pontos.
- Como $w(x)$ deve ser *integrada* para se obter ΔV, então se $w(x)$ for uma curva de grau n, $V(x)$ será uma curva de grau $n + 1$; por exemplo, se $w(x)$ for uniforme, $V(x)$ será linear.

Diagrama de Momento Fletor.

- Estabelecer os eixos M e x e construir um gráfico com os valores conhecidos do momento nas *extremidades* da viga.
- Como $dM/dx = V$, o *declive* do diagrama de momento fletor em qualquer ponto é igual ao *cisalhamento* no ponto.
- No ponto em que o cisalhamento é nulo, $dM/dx = 0$ e, portanto, será um ponto de momento máximo ou mínimo.
- Se o valor numérico do momento tiver de ser determinado em um ponto, pode-se encontrar esse valor usando tanto o método das seções e a equação de equilíbrio do momento como a equação $\Delta M = \int V(x)\,dx$, a qual expressa que a *mudança de momento* entre dois pontos quaisquer é igual à *área sob o diagrama de força cortante* entre os dois pontos.
- Como $V(x)$ deve ser *integrada* para se obter ΔM, então se $V(x)$ for uma curva de grau n, $M(x)$ será uma curva de grau $n + 1$; por exemplo, se $V(x)$ for linear, $M(x)$ será parabólica.

EXEMPLO 6.7

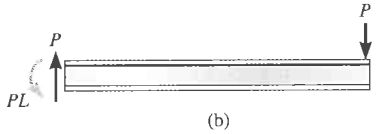
Desenhar os diagramas de força cortante (ou cisalhante) e momento fletor para a viga da Figura 6.13*a*.



(a)

SOLUÇÃO

Reações de Apoio. As reações estão mostradas no diagrama de corpo livre da Figura 6.13*b*.



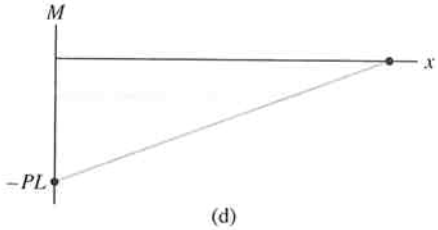
(b)

Figura 6.13

Diagrama de Força Cortante. De acordo com a convenção de sinal (Figura 6.3), em $x = 0$, $V = +P$ e, em $x = L$, $V = +P$. Esses pontos estão mostrados na Figura 6.13*b*. Como $w = 0$ (Figura 6.13*a*), o *declive* do diagrama de força cortante será nulo ($dV/dx = -w = 0$) em todos os pontos e, portanto, uma reta horizontal unirá as extremidades.

(c)

Diagrama de Momento fletor. Em $x = 0$, $M = -PL$ e, em $x = L$, $M = 0$ (Figura 6.13*d*). O diagrama de força cortante indica que o cisalhamento é constante positivo e, portanto, o *declive* do diagrama de momento será *constante positivo*, $dM/dx = V = +P$ para todos os pontos. Logo, os pontos das extremidades serão conectados por uma reta de declive positivo como mostrado na Figura 6.13*d*.



(d)

Figura 6.13

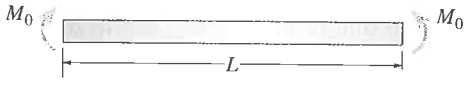
EXEMPLO 6.8

Desenhar os diagramas de força cortante (ou cisalhante) e momento fletor para a viga da Figura 6.14*a*.

(a)

SOLUÇÃO

Reações de Apoio. A reação no apoio engastado é mostrada no diagrama de corpo livre (Figura 6.14*b*).



(b)

Diagrama de Força Cortante. A força cortante $V = 0$ em cada extremidade é montada primeiro (Figura 6.14*c*). Como não há carga distribuída na viga, o diagrama de força cortante terá *declive* nulo em todos os pontos. Portanto, uma reta horizontal unirá as extremidades, indicando que a força cortante é nula ao longo de toda a viga.

(c)

Figura 6.14

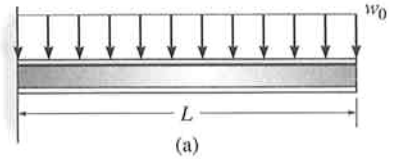
Diagrama de Momento Fletor. O momento M_0 nas extremidades da viga é montado primeiro (Figura 6.14*d*). Pelo diagrama de força cortante, o *declive* do diagrama de momento será nulo, visto que $V = 0$. Portanto, uma reta horizontal unirá os pontos extremos como mostrado.

(d)

Figura 6.14

EXEMPLO 6.9

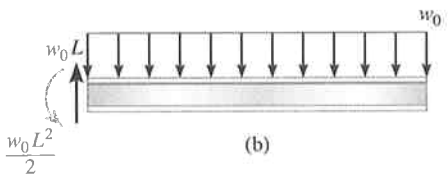
Desenhar os diagramas de força cortante (ou cisalhante) e momento fletor para a viga mostrada na Figura 6.15*a*.



(a)

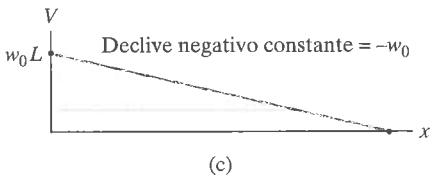
SOLUÇÃO

Reações de Apoio. As reações no apoio engastado são mostradas no diagrama de corpo livre (Figura 6.15*b*).



(b)

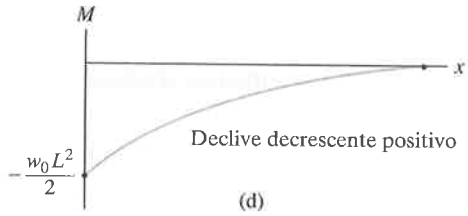
Diagrama de Força Cortante. A força cortante em cada extremidade é montada primeiro (Figura 6.15*c*). A carga distribuída na viga é constante positiva e, assim, o *declive* do diagrama de força cortante será constante negativo ($dV/dx = -w_0$). Isso requer uma reta com declive negativo unindo os pontos extremos.



(c)

Figura 6.15

Diagrama de Momento Fletor. O momento em cada extremidade é montado primeiro (Figura 6.15*d*). O diagrama de força cortante indica que V é positivo e decresce de w_0L até zero; desse modo, o diagrama de momento deve começar com um declive positivo de w_0L e decrescer a zero. Explicitamente, como o diagrama de força cortante é uma reta com declive, o diagrama de momento será *parabólico*, com declive decrescente como mostra a figura.

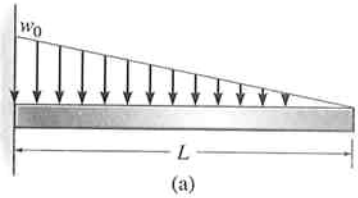


(d)

Figura 6.15

EXEMPLO 6.10

Desenhar os diagramas de força cortante (ou cisalhante) e momento fletor para a viga mostrada na Figura 6.16*a*.

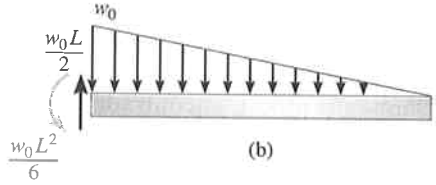


(a)

Figura 6.16

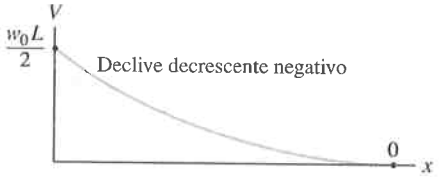
SOLUÇÃO

Reações de Apoio. As reações no apoio engastado foram calculadas e estão mostradas no diagrama de corpo livre (Figura 6.16*b*).



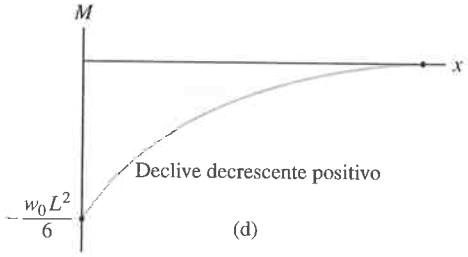
(b)

Diagrama de Força Cortante. A força cortante em cada extremidade é montada primeiro (Figura 6.16*c*). A carga distribuída na viga é positiva, mas decrescente. Portanto, o *declive* do diagrama de força cortante será *decrescente negativo*. Em $x = 0$ o declive começa em $-w_0$ e vai a zero em $x = L$. Como a carga é *linear*, o diagrama de força cortante será uma *parábola* com declive decrescente negativo.



(c)

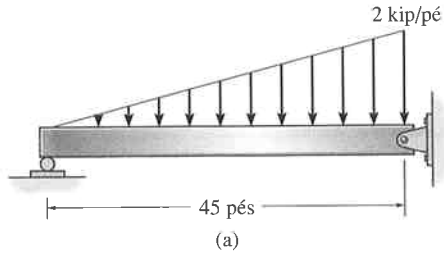
Diagrama de Momento Fletor. O momento em cada extremidade é montado primeiro (Figura 6.16*d*). Pelo diagrama, V é positivo, mas decresce de $w_0 L/2$, em $x = 0$, para zero em $x = L$. A curva do diagrama de momento com esse comportamento de declive é uma função *cúbica* de x, como mostra a figura.



(d)

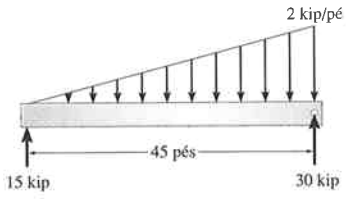
EXEMPLO 6.11

Desenhar os diagramas de força cortante (ou cisalhante) e momento fletor para a viga da Figura 6.17*a*.

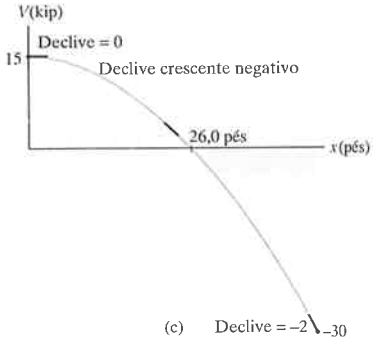


(a)

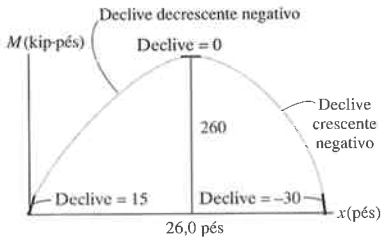
Figura 6.17



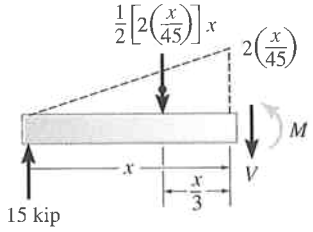
(b)



(c)



(d)



(e)

SOLUÇÃO

Reações de Apoio. As reações foram determinadas e são mostradas no diagrama de corpo livre (Figura 6.17*b*).

Diagrama de Força Cortante. Os pontos extremos $x = 0$, $V = +15$ e $x = 45$, $V = -30$ são montados primeiro (Figura 6.17*c*). Pelo comportamento da carga distribuída, o *declive* do diagrama de força cortante varia de zero em $x = 0$ até -2 em $x = 45$. Como resultado, o diagrama de força cortante será uma parábola com a forma mostrada.

O ponto de cisalhamento nulo é encontrado aplicando-se o método das seções a um segmento da viga de comprimento x (Figura 6.17*e*). É necessário $V = 0$, de modo que:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 15 \text{ kip} - \frac{1}{2}\left[2 \text{ kip/pé}\left(\frac{x}{45 \text{ pés}}\right)\right]x = 0; \qquad x = 26{,}0 \text{ pés}$$

Diagrama de Momento Fletor. Os pontos das extremidades $x = 0$, $M = 0$ e $x = 45$, $M = 0$ são montados primeiro (Figura 6.17*d*). Pelo comportamento do diagrama de força cortante, o declive do diagrama de momento começa em $+15$, depois torna-se *decrescente positivo* até alcançar zero em 26,0 pés. Torna-se então *crescente negativo* alcançando -30 em $x = 45$ pés. Nesse caso, o diagrama de momento é uma função cúbica de x. Por quê?

Observe que o momento máximo ocorre em $x = 26{,}0$, visto que $dM/dx = V = 0$ nesse ponto. Pelo diagrama de corpo livre da Figura 6.17*e*, temos:

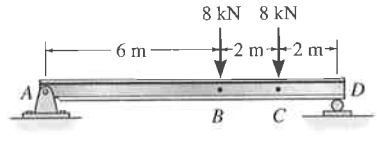
$$\circlearrowleft^+ \Sigma M = 0;$$

$$-15 \text{ kip}(26{,}0 \text{ pés}) + \frac{1}{2}\left[2 \text{ kip/pé}\left(\frac{26{,}0 \text{ pés}}{45 \text{ pés}}\right)\right](26{,}0 \text{ pés})\left(\frac{26{,}0 \text{ pés}}{3}\right) + M = 0$$

$$M = 260 \text{ kip} \cdot \text{pés}$$

EXEMPLO 6.12

Desenhar os diagramas de força cortante (ou cisalhante) e momento fletor para a viga mostrada na Figura 6.18*a*.



(a)

Figura 6.18

SOLUÇÃO

Reações de Apoio. As reações foram determinadas e estão indicadas no diagrama de corpo livre (Figura 6.18*b*).

Diagrama de Força Cortante. Em $x = 0$, $V_A = +4{,}8$ kN e, em $x = 10$, $V_D = -112$ kN (Figura 6.18*c*). Nos pontos intermediários entre cada força o *declive* do diagrama de força cortante será zero. Por quê? Daí se conclui que a força cortante mantém seu valor de +4,8 até o ponto B. Em B ela se torna *descontínua*, visto que há uma *força concentrada* de 8 kN. O valor da força cortante à direita de B é determinado fazendo-se um corte na viga nesse ponto (Figura 6.18*e*), onde, para o equilíbrio, $V = -3{,}2$ kN. Usar o método das seções e mostrar que o diagrama 'salta' novamente em C, como mostrado, e fecha com o valor −11,2 kN em D.

Nota-se que, com base na Equação 6.5, $\Delta V = -F$, o diagrama de força cortante também é construído 'seguindo a carga' no diagrama de corpo livre. Começando em A, a força de 48 kN atua para cima, de modo que $V = +4{,}8$ kN. Não há carga distribuída entre A e B, de modo que a força cortante permanece constante ($dV/dx = 0$). Em B a força de 8 kN é para baixo, de modo que a força cortante cai 8 kN, de +4,8 kN para −3,2 kN. A força cortante é constante entre B e C (não há carga distribuída), depois em C cai outros 8 kN para −11,2 kN. Finalmente, sem carga distribuída entre C e D, termina com −11,2 kN.

Diagrama de Momento Fletor. O momento é nulo nas extremidades da viga (Figura 6.18*d*). O *declive* do diagrama de momento é constante, de valor +4,8, de A para B. Por quê? O valor do momento em B é determinado pela estática (Figura 6.18*c*), ou calculando-se a área sob o diagrama de força cortante entre A e B, ou seja, $\Delta M_{AB} = (4{,}8\text{ kN})(6\text{ m}) = 28{,}8\text{ kN}\cdot\text{m}$. Como $M_A = 0$, então $M_B = M_A + \Delta M_{AB} = 0 + 28{,}8\text{ kN}\cdot\text{m} = 28{,}8\text{ kN}\cdot\text{m}$. A partir do ponto B, o declive do diagrama de momento é −3,2 até alcançar o ponto C. Novamente o valor do momento é obtido pela estática ou determinando-se a área sob o diagrama de força cortante entre B e C, ou seja, $\Delta M_{BC} = (-3{,}2\text{ kN})(2\text{ m}) = -6{,}4\text{ kN}\cdot\text{m}$, de modo que $M_C = 28{,}8\text{ kN}\cdot\text{m} - 6{,}4\text{ kN}\cdot\text{m} = 22{,}4\text{ kN}\cdot\text{m}$. Continuando dessa maneira, verifica-se que o fechamento ocorre em D.

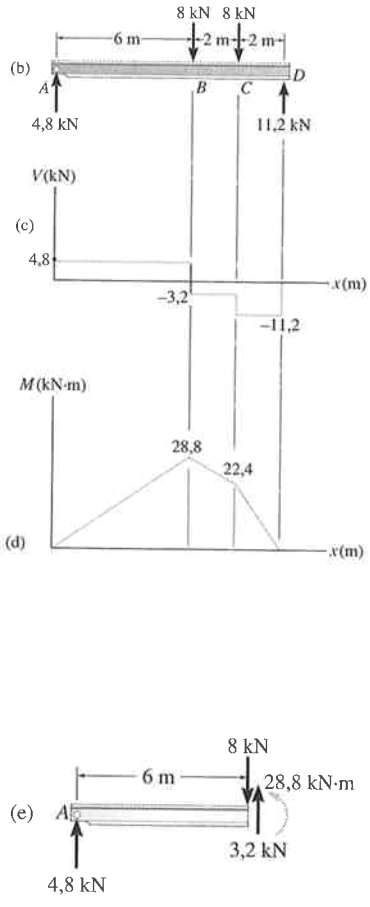


Figura 6.18

EXEMPLO 6.13

Desenhar os diagramas de força cortante (ou cisalhante) e momento fletor para a viga em balanço mostrada na Figura 6.19*a*.

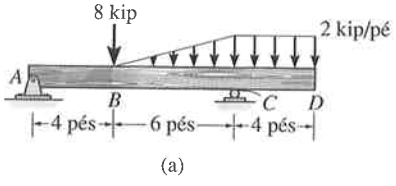


Figura 6.19

SOLUÇÃO

Reações de Apoio. O diagrama de corpo livre com as reações de apoio calculadas é mostrado na Figura 6.19*b*.

Diagrama de Força Cortante. Como sempre, começamos representando as forças cortantes das extremidades $V_A = +4{,}40$ kip e $V_D = 0$ (Figura 6.19*c*). O diagrama de força cortante tem declive *zero* de A a B. Depois cai para −3,60 kip. Em seguida, tem declive *crescente negativo*. A força cortante em C pode ser determinada pela área sob o diagrama de carga, $V_C = V_B + \Delta V_{BC} = -3{,}60$ kip

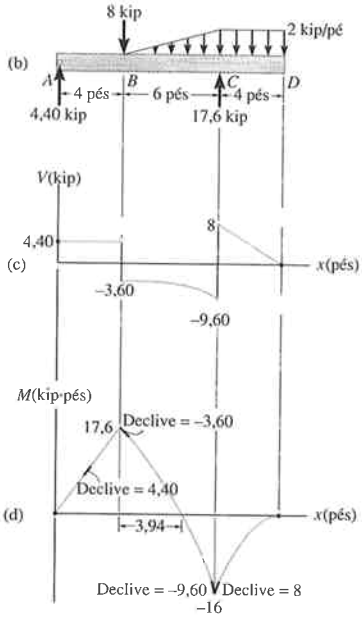


Figura 6.19

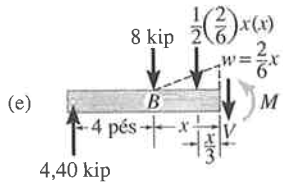


Figura 6.19

$-(1/2)(6 \text{ pés})(2 \text{ kip/pé}) = -9{,}60$ kip. Depois aumenta em 17,6 kip, indo para 8 kip. Finalmente, de C para D, o declive do diagrama de força cortante será *constante, porém negativo*, até que atinge o valor zero em D.

Diagrama de Momento Fletor. Os momentos das extremidades $M_A = 0$ e $M_D = 0$ são montados primeiro (Figura 6.19*d*). Estudar o diagrama e observar como os declives e, portanto, as várias curvas são definidas pelo diagrama de força cortante usando-se $dM/dx = V$. Verificar os valores dos picos usando o método das seções e a estática, ou calculando as áreas adequadas sob o diagrama de força cortante para determinar a mudança de momento entre dois pontos. Em particular, o ponto de momento nulo é determinado definindo-se M em função de x, onde, por conveniência, x estende-se *do* ponto B até a região BC (Figura 6.19*e*). Então:

$$\circlearrowleft + \Sigma M = 0;$$

$$-4{,}40 \text{ kip}(4 \text{ pés} + x) + 8 \text{ kip}(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{2 \text{ kip/pé}}{6 \text{ pés}}\right)x(x)\left(\frac{x}{3}\right) + M = 0$$

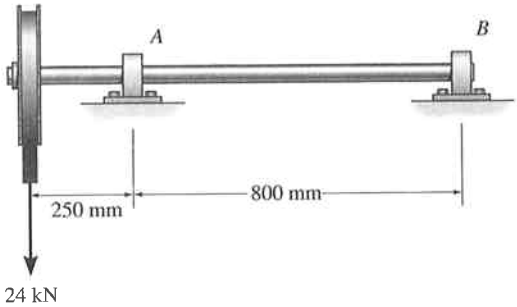
$$M = \left(-\frac{1}{18}x^3 - 3{,}60x + 17{,}6\right) \text{kip} \cdot \text{pés} = 0$$

$$x = 3{,}94 \text{ pés}$$

Revisando os diagramas, vemos que, devido ao processo de integração na região AB, a carga é nula, a força cortante é constante e o momento é linear; na região BC a carga é linear, a força cortante é parabólica e o momento é cúbico; e, para a região CD, a carga é constante, a força cortante é linear e o momento é parabólico. Recomenda-se resolver os exemplos 6.1 a 6.6 também segundo esse método.

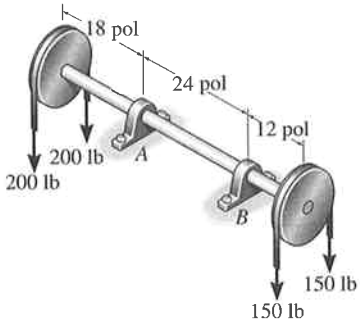
PROBLEMAS

6.1. Desenhar os diagramas de força cortante e momento para o eixo. Os mancais em A e B exercem apenas reações verticais sobre o eixo.



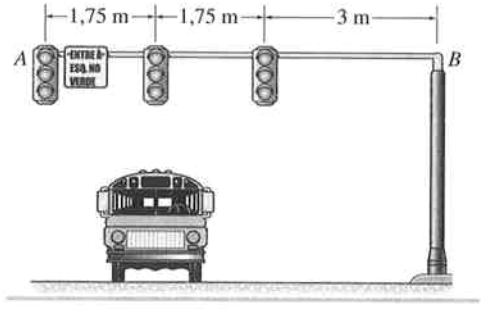
Problema 6.1

6.2. O eixo está submetido às cargas provocadas pelas correias que passam sobre as duas polias. Desenhar os diagramas de força cortante e momento. Os mancais em A e B exercem apenas reações verticais sobre o eixo.



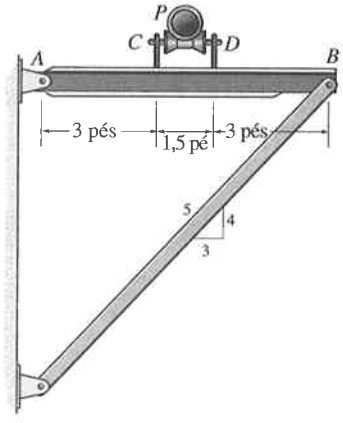
Problema 6.2

6.3. Os três semáforos têm, cada um, massa de 10 kg e o tubo em balanço AB tem massa de 1,5 kg/m. Desenhar os diagramas de força cortante e momento para o tubo. Desprezar a massa do farol.



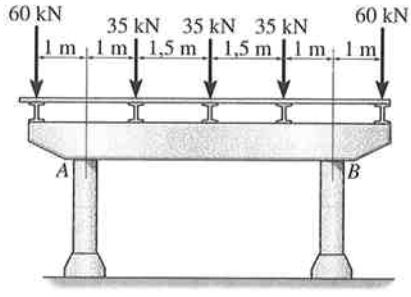
Problema 6.3

***6.4.** O tubo de vapor P repousa sobre o rolete guia CD, que permite sua expansão térmica. Desenhar os diagramas de força cortante e momento para a viga AB supondo que o tubo pese 800 lb. Os mancais de apoio em C e D exercem apenas forças verticais sobre a viga.



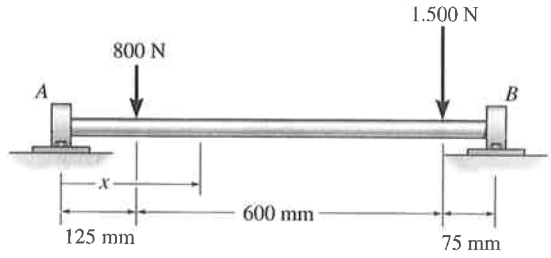
Problema 6.4

6.5. O encontro de concreto armado é usado para apoiar as longarinas da plataforma de uma ponte. Desenhar seus diagramas de força cortante e momento quando ele é submetido às cargas da longarina mostradas. Supor que as colunas A e B exercem apenas reações verticais sobre o encontro.



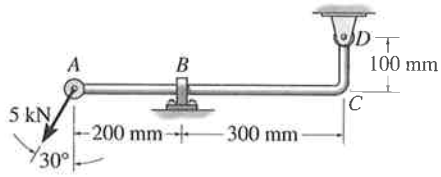
Problema 6.5

6.6. Desenhar os diagramas de força cortante e momento para o eixo. Os mancais em A e B exercem apenas reações verticais sobre ele. Expressar também a força cortante e o momento em função de x na região 125 mm $< x <$ 725 mm.



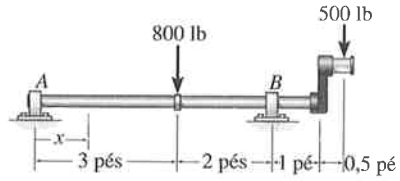
Problema 6.6

6.7. Desenhar os diagramas de força cortante e momento para o segmento ABC da haste. A extremidade A está submetida a uma força de 5 kN. *Dica*: as reações no pino D devem ser substituídas pela carga equivalente em C no eixo da haste. O mancal em B exerce somente força vertical sobre a haste.



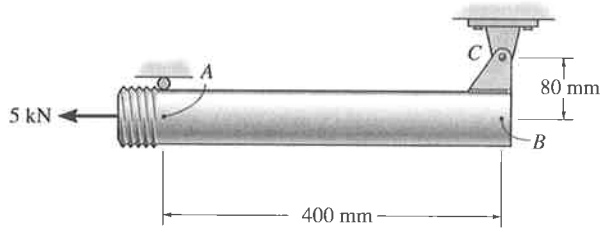
Problema 6.7

***6.8.** Desenhar os diagramas de força cortante e momento para o eixo e determinar a força cortante e o momento em todo o eixo em função de x. Os mancais em A e B exercem apenas reações verticais sobre o eixo.



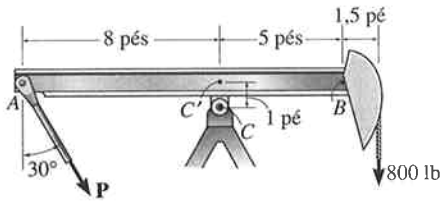
Problema 6.8

6.9. Desenhar os diagramas de força cortante e momento para o tubo. A extremidade rosqueada está submetida a uma força horizontal de 5 kN. *Dica*: as reações no pino C devem ser substituídas pela carga equivalente em B no eixo do tubo.



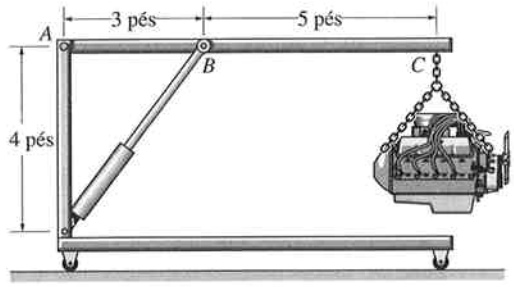
Problema 6.9

6.10. A viga oscilante da unidade de bombeamento de petróleo está submetida a uma força de tração de 800 lb. Determinar a força **P** no braço Pitman e as reações no pino C. Depois desenhar os diagramas de força cortante e momento para a porção AB da viga. *Dica*: as reações em C devem ser substituídas pela carga equivalente no ponto C' no eixo da viga.



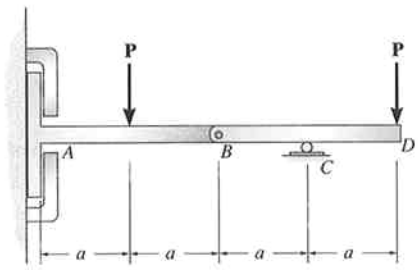
Problema 6.10

6.11. O guindaste de motores é usado para suportar o motor que tem peso de 1.200 lb. Desenhar os diagramas de força cortante e momento da lança ABC quando ela está na posição horizontal mostrada.



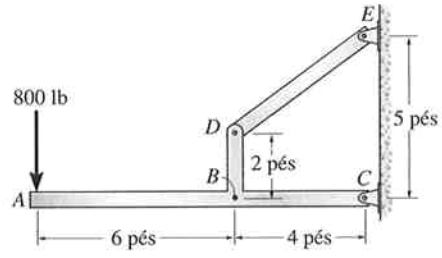
Problema 6.11

***6.12.** Desenhar os diagramas de força cortante e momento da viga composta. Ela é apoiada por uma chapa lisa em A que desliza na ranhura e, assim, não suporta força vertical, apesar de suportar momento e carga axial.



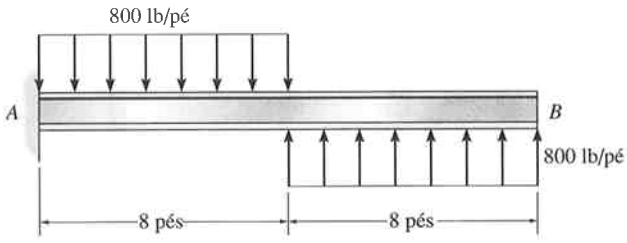
Problema 6.12

6.13. A viga em balanço foi fabricada com o braço de prolongamento BD. Desenhar os diagramas de força cortante e momento da viga ABC. Supondo que ela suporte uma carga de 800 lb. *Dica*: a carga no tirante DE deve ser substituída pelas cargas equivalentes no ponto B da viga.



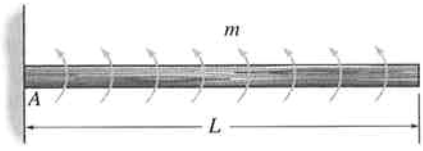
Problema 6.13

6.14. Desenhar os diagramas de força cortante e momento para a viga.



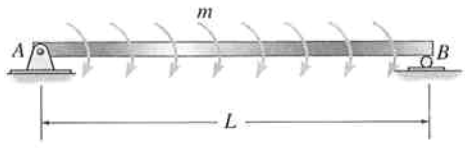
Problema 6.14

6.15. A viga está submetida ao momento uniformemente distribuído m (momento/comprimento). Desenhar seus diagramas de força cortante e momento.



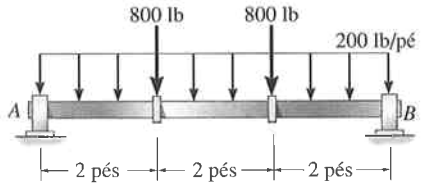
Problema 6.15

***6.16.** A viga está submetida ao momento uniformemente distribuído m (momento/comprimento). Desenhar seus diagramas de força cortante e momento.



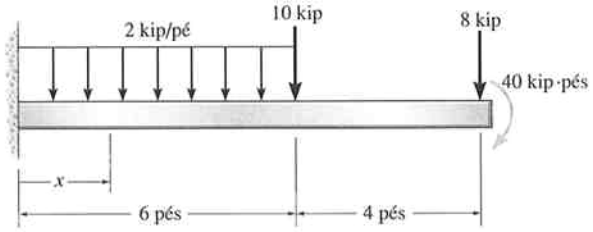
Problema 6.16

6.17. Desenhar os diagramas de força cortante e momento para a viga. Os mancais em A e B exercem apenas reações verticais sobre ela.



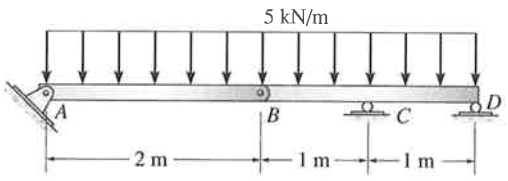
Problema 6.17

6.18. Desenhar os diagramas de força cortante e momento para a viga e determinar a força cortante e o momento para toda a viga em função de x.



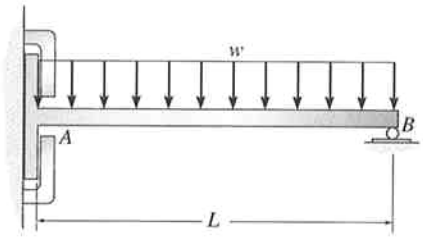
Problema 6.18

6.19. Desenhar os diagramas de força cortante e momento para a viga composta.



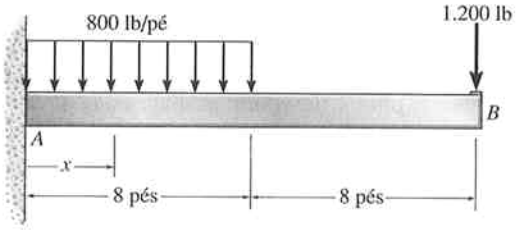
Problema 6.19

***6.20.** Desenhar os diagramas de força cortante e momento para a viga. Ela é apoiada por uma chapa lisa em A que desliza na ranhura e, assim, não suporta força vertical, apesar de suportar momento e carga axial.



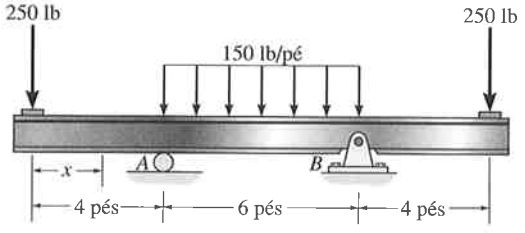
Problema 6.20

6.21. Desenhar os diagramas de força cortante e momento para a viga e determinar a força cortante e o momento em toda a viga em função de x.



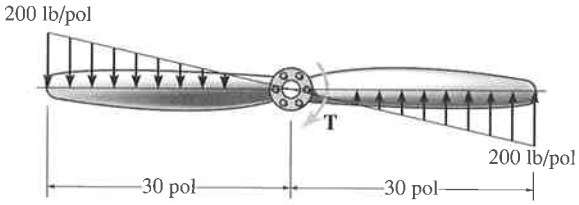
Problema 6.21

6.22. Desenhar os diagramas de força cortante e momento para a viga e determinar a força cortante e o momento em toda a viga em função de x.



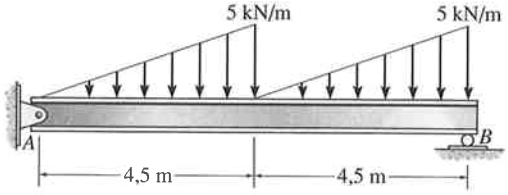
Problema 6.22

6.23. Determinar o torque de equilíbrio T que atua sobre a hélice e depois desenhar os diagramas de força cortante e momento da hélice.



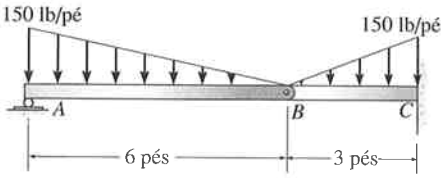
Problema 6.23

***6.24.** Desenhar os diagramas de força cortante e momento para a viga.



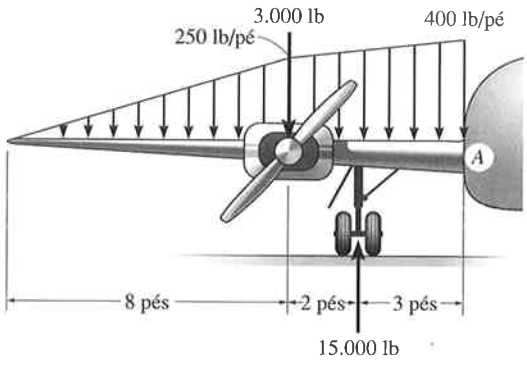
Problema 6.24

6.25. Desenhar os diagramas de força cortante e momento para a viga composta.



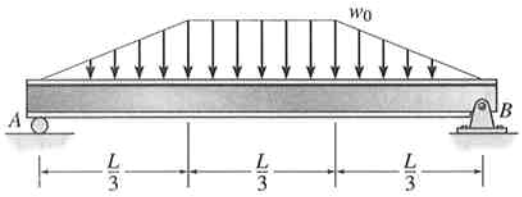
Problema 6.25

6.26. O peso morto ao longo da linha de centro da asa do avião é mostrado. Supondo que a asa esteja presa na fuselagem em A, determinar as reações em A e depois desenhar os diagramas de força cortante e momento da asa.



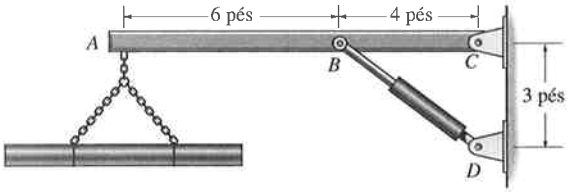
Problema 6.26

6.27. Desenhar os diagramas de força cortante e momento para a viga.



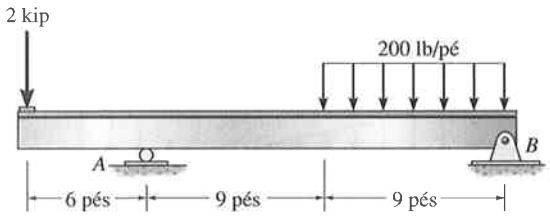
Problema 6.27

***6.28.** A lança ABC tem peso de 30 lb/pé e é usada para levantar carga de 2.000 lb. Desenhar seus diagramas de força cortante e momento quando ela está na posição horizontal mostrada.



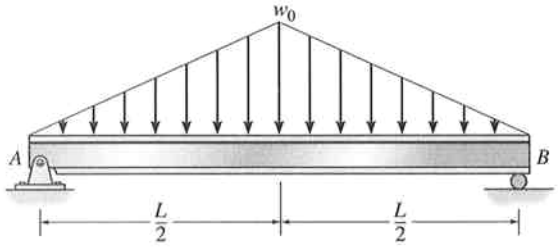
Problema 6.28

6.29. A viga T está sujeita à carga mostrada. Desenhar os diagramas de força cortante e momento.



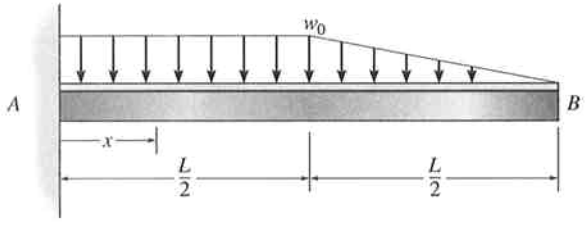
Problema 6.29

6.30. Desenhar os diagramas de força cortante e momento para a viga.



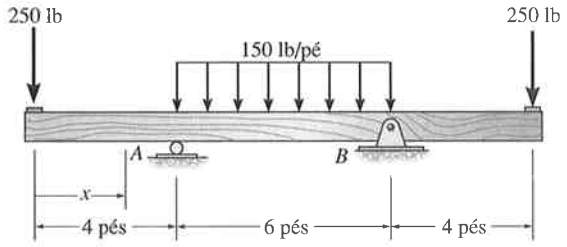
Problema 6.30

6.31. Desenhar os diagramas de força cortante e momento para a viga e determinar a força cortante e o momento em função de x.



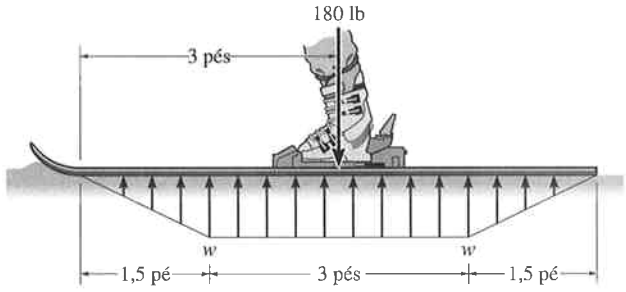
Problema 6.31

***6.32.** Desenhar os diagramas de força cortante e momento da viga de madeira e determinar a força cortante e o momento em toda a viga em função de x.



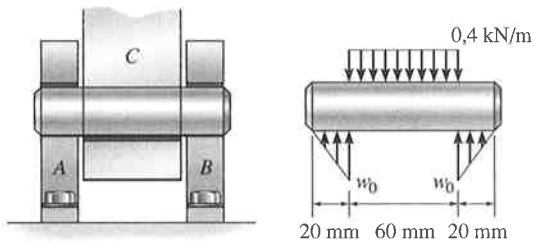
Problema 6.32

6.33. O esqui suporta o peso de 180 lb de um homem. Se a carga da neve em sua superfície inferior for trapezoidal como mostrado, determinar a intensidade w e depois desenhar os diagramas de força cortante e momento para o esqui.



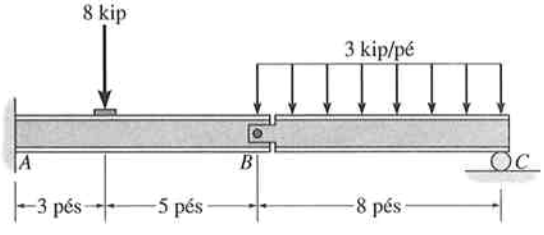
Problema 6.33

6.34. O pino liso é apoiado por duas chapas A e B e sujeito a uma carga de compressão de 0,4 kN/m provocada pela barra C. Determinar a intensidade da carga distribuída w_0 das chapas sobre o pino e desenhar os diagramas de força cortante e momento para o pino.



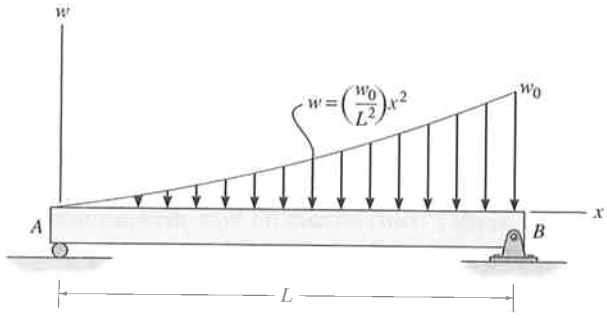
Problema 6.34

6.35. Desenhar os diagramas de força cortante e momento para a viga. Os dois segmentos estão acoplados em B.



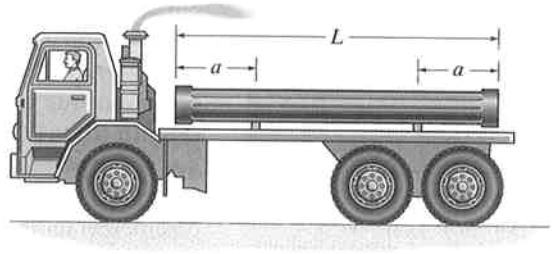
Problema 6.35

*6.36. Desenhar os diagramas de força cortante e momento para a viga.



Problema 6.36

6.37. O caminhão é usado para transportar um pilar de concreto. Supondo que o pilar tenha peso uniforme w (força/comprimento), determinar a colocação dos apoios a distâncias iguais a das extremidades, de modo que o momento fletor máximo absoluto no pilar seja o menor possível. Desenhar também os diagramas de força cortante e momento para o pilar.



Problema 6.37

6.3 DEFORMAÇÃO POR FLEXÃO DE UM MEMBRO RETO

Nesta seção discutiremos as deformações que ocorrem quando uma viga prismática, feita de material homogêneo, é submetida à flexão. A discussão ficará limitada a vigas com área da seção transversal simétrica em relação a um eixo, nas quais o momento fletor é aplicado em torno de um eixo perpendicular ao eixo de simetria, como mostrado na Figura 6.20. O comportamento de membros com seções transversais assimétricas ou feitos de vários materiais diferentes baseia-se em observações semelhantes e será discutido separadamente, em seções posteriores.

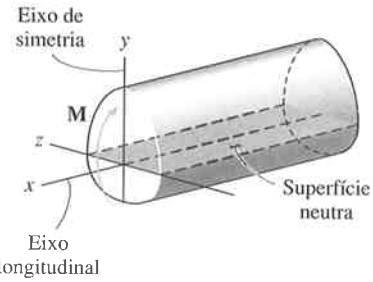
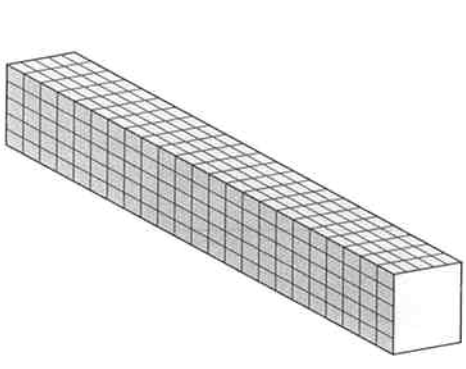


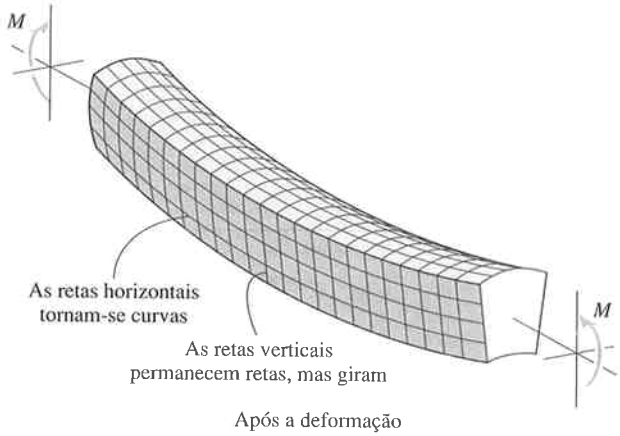
Figura 6.20

Usando um material altamente deformável tal como a borracha, podemos ilustrar fisicamente o que acontece quando um membro prismático reto é submetido a um momento fletor. Consideremos, por exemplo, a barra sem deformação da Figura 6.21*a*, que tem seção transversal quadrada e está marcada com uma grade de retas longitudinais e transversais. Quando é aplicado um momento fletor, ele tende a distorcer as retas no padrão mostrado na Figura 6.21*b*. Como se vê, as retas longitudinais tornam-se *curvas* e as retas transversais *permanecem retas*, mas sofrem *rotação*.



Antes da deformação

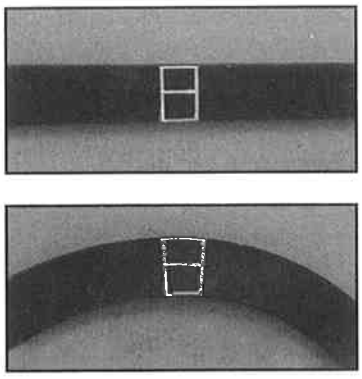
(a)



Após a deformação

(b)

Figura 6.21



Observar a distorção das retas devido à flexão da barra de borracha. A reta superior estica-se, a inferior comprime-se e a central permanece com o mesmo comprimento. Além disso, as retas verticais giram, ainda que permaneçam retas.

O comportamento de qualquer barra deformável sujeita a momento fletor faz o material da parte inferior esticar-se e o da parte superior comprimir-se. Conseqüentemente, entre as duas regiões deve existir uma superfície, chamada *superfície neutra*, na qual as fibras longitudinais do material não sofrem mudança de comprimento (Figura 6.20).

Com base nessas observações estabeleceremos as três hipóteses seguintes em relação à maneira como a tensão deforma o material. Primeiro, o *eixo longitudinal* x, que fica na superfície neutra (Figura 6.22*a*), *não* sofre qualquer *mudança de comprimento*. Em vez disso, o momento tenderá a deformar a viga de modo que a reta *torna-se uma curva* localizada no plano de simetria x–y (Figura 6.22*b*). Segundo, todas as ***seções transversais*** da viga ***permanecem planas*** e perpendiculares ao eixo longitudinal durante a deformação. E, terceiro, qualquer *deformação* da *seção transversal* em seu próprio plano, como observado na Figura 6.21*b*, será *desprezada*. Em particular, o eixo z, localizado no plano da seção transversal e em torno do qual a seção transversal gira, é chamado *eixo neutro* (Figura 6.22*b*). Sua localização será determinada na próxima seção.

A fim de mostrar como a distorção deformará o material, isolaremos um segmento da viga localizado à distância x ao longo do comprimento da viga e com espessura não-deformada Δx (Figura 6.22*a*). Esse elemento, removido da viga, é mostrado em vista lateral nas posições não-deformada e deformada na Figura 6.23. Observe que qualquer segmento de reta Δx localizado na superfície neutra não muda de comprimento, enquanto qualquer segmento de reta Δs localizado a uma distância arbitrária y acima da superfície neutra contrai-se e torna-se $\Delta s'$ após a deformação. Por definição, a deformação normal ao longo de Δs é determinada pela Equação 2.2, ou seja:

$$\epsilon = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s}$$

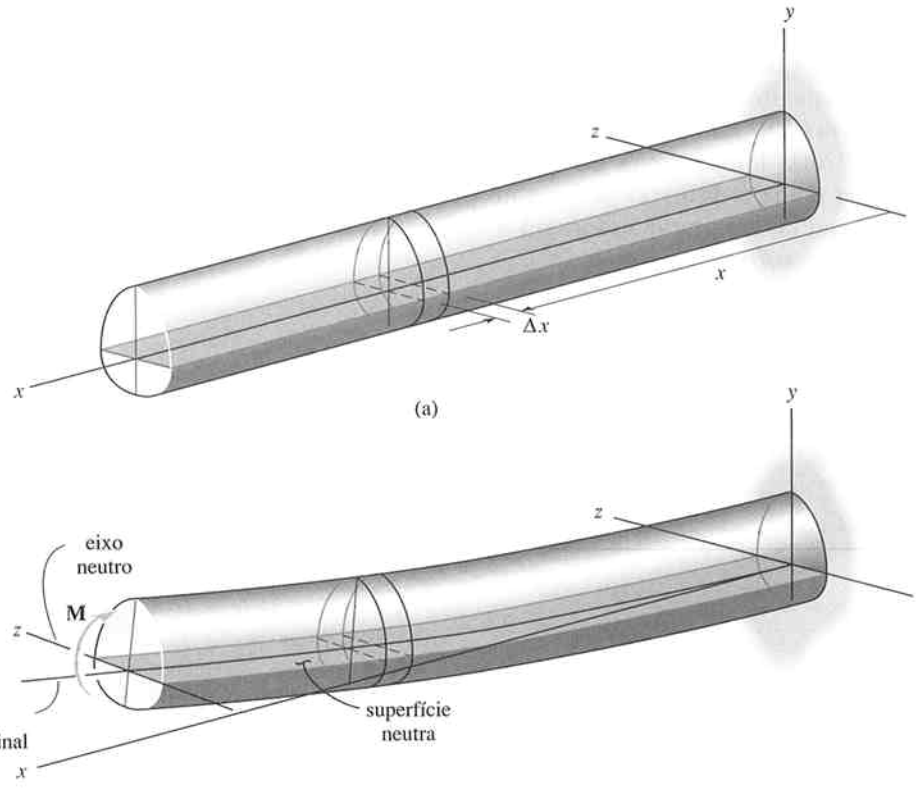


Figura 6.22

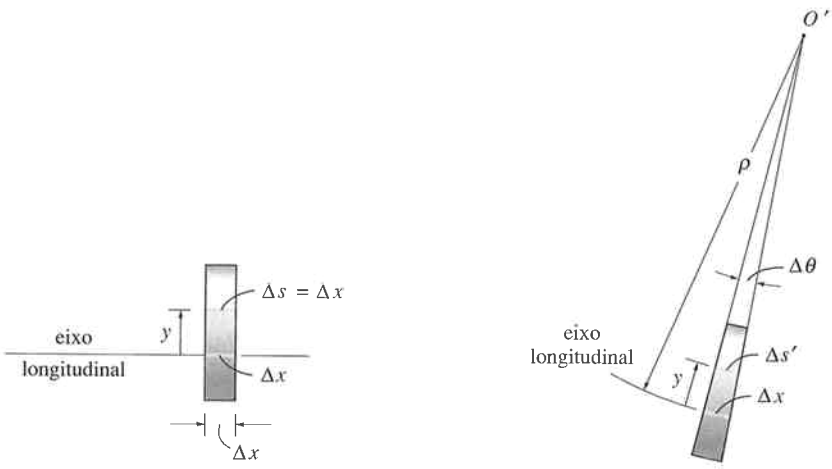


Figura 6.23

Representaremos agora a deformação em termos da ordenada y do segmento e do raio de curvatura ρ do eixo longitudinal do elemento. Antes da deformação, $\Delta s = \Delta x$ (Figura 6.23*a*). Após a deformação, Δx tem raio de curvatura ρ, com centro de curvatura no ponto O' (Figura 6.23*b*). Como $\Delta\theta$ define o ângulo entre os lados da seção transversal do elemento, $\Delta x = \Delta s = \rho\,\Delta\theta$. Da mesma maneira, o comprimento deformado de Δs torna-se $\Delta s' = (\rho - y)\,\Delta\theta$. Substituindo pela equação anterior, obtemos:

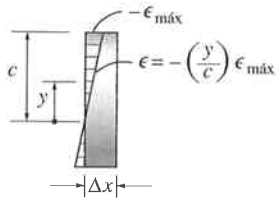
$$\epsilon = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{(\rho - y)\,\Delta\theta - \rho\,\Delta\theta}{\rho\,\Delta\theta}$$

ou

$$\epsilon = -\frac{y}{\rho} \tag{6.7}$$

Esse resultado importante indica que a deformação normal longitudinal de qualquer elemento da viga depende de sua localização y na seção transversal e do raio de curvatura do eixo longitudinal da viga nesse ponto. Em outras palavras, para qualquer seção transversal específica, a ***deformação normal longitudinal varia linearmente*** com y a partir do eixo neutro. Ocorre contração $(-\epsilon)$ nas fibras localizadas acima do eixo neutro $(+y)$, enquanto ocorre alongamento $(+\epsilon)$ nas fibras localizadas abaixo do eixo $(-y)$. A variação da deformação na seção transversal é mostrada na Figura 6.24. Aqui, a deformação máxima ocorre na fibra mais externa, localizada à distância c do eixo neutro. É possível usar a Equação 6.7, visto que $\epsilon_{máx} = c/\rho$; então, por divisão:

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_{máx}} = \frac{-y/\rho}{c/\rho}$$



Distribuição da deformação normal

Figura 6.24

De modo que:

$$\epsilon = -\left(\frac{y}{c}\right)\epsilon_{máx} \tag{6.8}$$

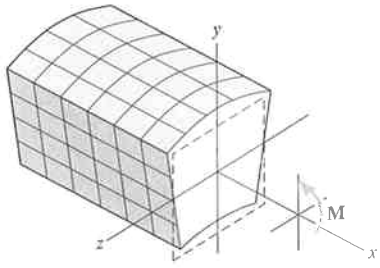
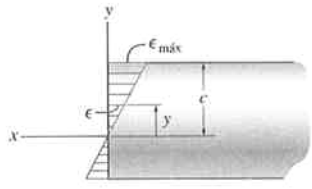


Figura 6.25

Essa deformação normal depende apenas das hipóteses estabelecidas em relação à *deformação*. Desde que seja aplicado somente um momento à viga, é razoável supor adicionalmente que o momento provoca *tensão normal apenas* na direção longitudinal ou de x. Todos os outros componentes da tensão normal e de cisalhamento são nulos, visto que a superfície da viga está livre de qualquer outra carga. É esse estado uniaxial de tensão que faz com que o material tenha o componente ϵ_x ($\sigma_x = E\epsilon_x$) da deformação normal longitudinal, definido pela Equação 6.8. Além disso, pelo coeficiente de Poisson, *também* deve haver os componentes da deformação associados $\epsilon_y = -\nu\epsilon_x$ e $\epsilon_z = -\nu\epsilon_x$, que deformam o plano da área da seção transversal, apesar de termos desprezado essas deformações. Tais deformações, no entanto, fazem com que as *dimensões da seção transversal* tornem-se menores abaixo do eixo neutro e maiores acima dele. Por exemplo: se a viga tiver seção transversal quadrada, na verdade ela deformará como mostrado na Figura 6.25.

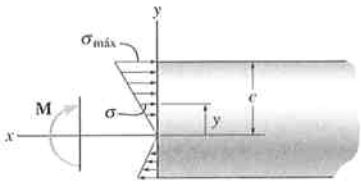
6.4 FÓRMULA DA FLEXÃO

Nesta seção desenvolveremos uma equação que relaciona a distribuição de tensão longitudinal de uma viga ao momento fletor resultante interno que atua na seção transversal dessa viga. Para isso, vamos supor que o material comporta-se de maneira linear-elástica de modo que a lei de Hooke a ele se aplica, isto é, $\sigma = E\epsilon$. Uma ***variação linear da deformação normal*** (Figura 6.26*a*) deve ser a conseqüência de uma ***variação linear na tensão normal*** (Figura 6.26*b*). Então, como a variação da deformação, σ varia de zero no eixo neutro do elemento a um valor máximo, $\sigma_{máx}$, à distância c mais afastada do eixo neutro. Devido à proporcionalidade dos triângulos (Figura 6.26*b*), ou usando a lei de Hooke, $\sigma = E\epsilon$, e a Equação 6.8, podemos escrever:



Variação da deformação normal (vista lateral)

(a)



Variação da tensão de flexão (vista lateral)

(b)

Figura 6.26

$$\sigma = -\left(\frac{y}{c}\right)\sigma_{máx} \tag{6.9}$$

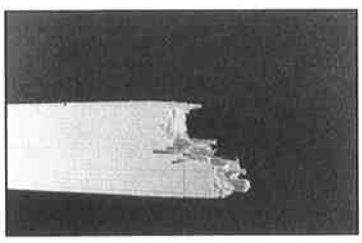
Essa equação representa a distribuição de tensão sobre a área da seção transversal. A convenção de sinal estabelecida é significativa nesse caso. No caso de **M** positivo, que atua na direção $+z$, valores positivos de y resultam em valores negativos para σ, ou seja, em uma tensão de compressão, visto que atua na direção negativa de x. De modo similar, valores negativos de y resultam em valores positivos ou valores de tração para σ. Se um elemento de volume do material for selecionado em um ponto específico da seção transversal, apenas as tensões normais de tração ou compressão atuarão sobre ele. O elemento localizado em $+y$, por exemplo, é mostrado na Figura 6.26*c*.

Podemos localizar a posição do eixo neutro na seção transversal satisfazendo a condição de que a *força resultante* produzida pela distribuição de tensão sobre a seção transversal deve ser igual a *zero*. Observando que a força $dF = \sigma\, dA$ atua sobre o elemento arbitrário dA na Figura 6.26*c*, requer-se que:

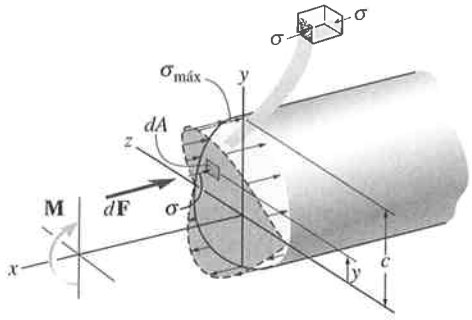
$$F_R = \Sigma F_x; \qquad 0 = \int_A dF = \int_A \sigma\, dA$$

$$= \int_A -\left(\frac{y}{c}\right)\sigma_{máx}\, dA$$

$$= \frac{-\sigma_{máx}}{c}\int_A y\, dA$$



Este corpo-de-prova de madeira falhou na flexão porque suas fibras foram esmagadas na parte superior e destacadas na parte inferior.



Variação da tensão de flexão

(c)

Figura 6.26

Como $\sigma_{máx}/c$ é diferente de zero, então:

$$\int_A y\, dA = 0 \tag{6.10}$$

Em outras palavras, o primeiro momento da área da seção transversal do elemento deve ser nulo. Essa condição só é satisfeita se o *eixo neutro* também for o *eixo horizontal* de simetria da seção transversal.[1] Conseqüentemente, uma vez determinado o centróide da seção transversal, a localização do eixo neutro será conhecida.

Podemos determinar a tensão na viga pelo requisito de que o momento interno resultante M seja igual ao momento produzido pela distribuição de tensão em torno do eixo neutro. O momento de $d\mathbf{F}$ em torno do eixo neutro, na Figura 6.26*c*, é $dM = y\, dF$. Esse momento é *positivo* visto que, pela regra da mão direita, o polegar está direcionado no sentido positivo do eixo z quando os dedos são fechados no sentido da rotação provocada por $d\mathbf{M}$. Como $dF = \sigma\, dA$, usando a Equação 6.9, temos para toda a seção:

$$(M_R)_z = \Sigma M_z;\ M = \int_A y\, dF = \int_A y\, (\sigma\, dA) = \int_A y \left(\frac{y}{c}\,\sigma_{máx}\right) dA$$

ou

$$M = \frac{\sigma_{máx}}{c}\int_A y^2\, dA \tag{6.11}$$

Aqui a integral representa o *momento de inércia* da área da seção transversal calculado em torno do eixo neutro. Usamos I como símbolo desse valor. Portanto, a Equação 6.11 pode ser resolvida em $\sigma_{máx}$ e escrita de forma geral como:

$$\boxed{\sigma_{máx} = \frac{Mc}{I}} \tag{6.12}$$

Onde:

$\sigma_{máx}$ = tensão normal máxima no elemento, que ocorre no ponto da área da seção transversal *mais afastado* do eixo neutro

M = momento interno resultante, determinado pelo método das seções e pelas equações de equilíbrio, e calculado em torno do eixo neutro da seção transversal

I = momento de inércia da área da seção transversal calculado em torno do eixo neutro

c = distância perpendicular do eixo neutro ao ponto mais afastado desse eixo, no qual $\sigma_{máx}$ atua

[1] Lembrar que a localização $\bar{y}$ do centróide da área da seção transversal é definida pela equação $\bar{y} = \int y\, dA / \int dA$. Se $\int y\, dA = 0$, então $\bar{y} = 0$ e, assim, o centróide localiza-se no eixo de referência (neutro). Consultar o Apêndice A.

Como $\sigma_{máx}/c = -\sigma/y$ (Equação 6.9), a tensão normal na distância intermediária y pode ser determinada por uma equação semelhante à 6.12. Temos:

$$\sigma = -\frac{My}{I} \tag{6.13}$$

Observe que o sinal negativo é necessário, pois está de acordo com o estabelecido para os eixos x, y e z. Pela regra da mão direita, M é positivo ao longo do eixo $+z$, y é positivo para cima e, portanto, σ deve ser negativo (compressão), uma vez que atua na direção negativa de x (Figura 6.26*c*).

Qualquer uma das duas equações anteriores é denominada ***fórmula da flexão***. Ela é usada para determinar a tensão normal em um membro reto, com seção transversal simétrica em relação a um eixo, e no qual o momento seja aplicado no sentido perpendicular àquele eixo. Apesar de termos suposto que o membro seja prismático, podemos, na maioria dos projetos de engenharia, também usar a fórmula da flexão para determinar a tensão normal nos membros que tenham *pequena conicidade*. Por exemplo: de acordo com a análise matemática baseada na teoria da elasticidade, um membro com uma seção transversal retangular e comprimento inclinado de 15° terá tensão máxima real cerca de 5,4% *menor* que a calculada pela fórmula da flexão.

PONTOS IMPORTANTES

- A seção transversal de uma viga reta *permanece plana* quando a viga se deforma devido à flexão, o que provoca esforço de tração em um lado da viga e esforço de compressão no outro. O *eixo neutro* é submetido a *tensão nula*.
- Devido à deformação, a *deformação longitudinal* varia *linearmente* de zero no eixo neutro a um máximo nas fibras externas da viga. Desde que o material seja homogêneo e a lei de Hooke a ele se aplique, a *tensão* também variará de maneira *linear* em toda a seção transversal.
- No caso de material linear-elástico, o eixo passa pelo *centróide* da área da seção transversal. Essa conclusão baseia-se no fato de que a força normal resultante que atua sobre a seção transversal deve ser nula.
- A fórmula da flexão baseia-se no requisito de que o momento resultante na seção transversal é igual ao momento produzido pela distribuição da tensão normal linear em torno do eixo neutro.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

A fim de aplicar a fórmula da flexão sugere-se o seguinte procedimento.

Momento Interno.

- Cortar o membro no ponto em que a flexão ou a tensão normal deva ser determinada e obter o momento interno M na seção. O eixo do centróide ou o eixo neutro da seção transversal deve ser conhecido, uma vez que M *deve* ser calculado em torno desse eixo.
- Se o esforço de flexão máximo absoluto tiver de ser determinado, desenhar o diagrama de momento a fim de determinar o momento máximo da viga.

Propriedade da Seção.

- Determinar o momento de inércia da área da seção transversal em torno do eixo neutro. Os métodos usados para o cálculo são discutidos no Apêndice A, e a tabela com a lista dos valores de I para diversas formas consta no final do livro.

Tensão Normal.

- Especificar a distância y medida perpendicularmente ao eixo neutro até o ponto em que a tensão normal deva ser determinada. Aplicar então a equação $\sigma = -My/I$, ou usar $\sigma_{máx} = Mc/I$ se a tensão de flexão máxima tiver de ser calculada. Ao substituir os dados, certificar-se de que as unidades sejam consistentes.
- A tensão atua em uma direção tal que a força criada por ela no ponto contribui com um momento em torno do eixo neutro, na mesma direção do momento interno **M** (Figura 6.26*c*). Dessa maneira, pode-se desenhar a distribuição de tensão que atua sobre toda a seção transversal ou pode-se isolar um elemento de volume do material e usá-lo para representar graficamente a tensão normal no ponto.

EXEMPLO 6.14

Uma viga tem seção transversal retangular e está submetida à distribuição de tensão mostrada na Figura 6.27*a*. Determinar o momento interno **M** na seção provocado pela distribuição de tensão (*a*) usando a fórmula da flexão e (*b*) determinando a resultante da distribuição de tensão por meio de princípios básicos.

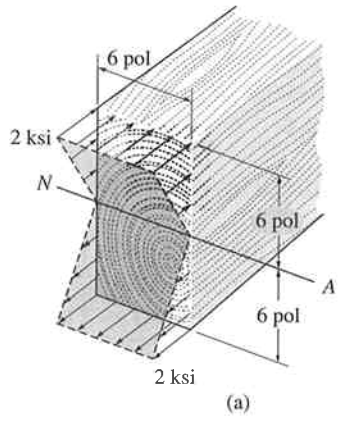


Figura 6.27

SOLUÇÃO

Parte (a). A fórmula da flexão é $\sigma_{máx} = Mc/I$. Pela Figura 6.27*a*, $c = 6$ pol e $\sigma_{máx} = 2$ ksi. O eixo neutro é definido pela reta NA, porque a tensão é nula ao longo dessa reta. Como a seção transversal tem forma retangular, o momento de inércia da área em torno de NA é determinado pela fórmula do retângulo dada no início do livro, isto é:

$$I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}(6 \text{ pol})(12 \text{ pol})^3 = 864 \text{ pol}^4$$

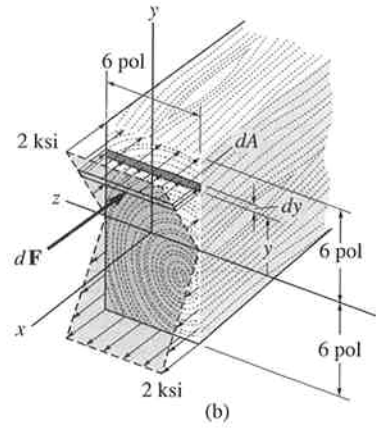
Portanto:

$$\sigma_{máx} = \frac{Mc}{I}; \qquad 2 \text{ kip/pol}^2 = \frac{M(6 \text{ pol})}{864 \text{ pol}^4}$$

$$M = 288 \text{ kip} \cdot \text{pol} = 24 \text{ kip} \cdot \text{pés} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Parte (b). Mostraremos primeiro que a força resultante da distribuição de tensão é nula. Como mostrado na Figura 6.27*b*, a tensão que atua sobre a faixa arbitrária do elemento $dA = (6 \text{ pol})$, localizada a uma distância y do eixo neutro, é:

$$\sigma = \left(\frac{-y}{6 \text{ pol}}\right)(2 \text{ kip/pol}^2)$$

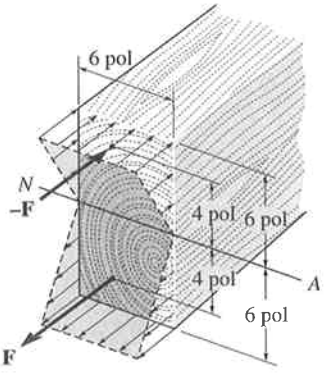


A força criada por tal tensão é $dF = \sigma\, dA$ e, assim, para toda a seção transversal:

$$F_R = \int_A \sigma\, dA = \int_{-6 \text{ pol}}^{6 \text{ pol}} \left[\left(\frac{-y}{6 \text{ pol}}\right)(2 \text{ kip/pol}^2)\right](6 \text{ pol})\, dy$$

$$= (-1 \text{ kip/pol}^2)\, y^2 \Big|_{-6 \text{ pol}}^{+6 \text{ pol}} = 0$$

O momento resultante da distribuição de tensão em torno do eixo neutro (eixo z) deve ser igual a M. Como a intensidade do momento de $d\mathbf{F}$ em torno desse eixo é $dM = y\, dF$, e $d\mathbf{M}$ é *sempre positiva* (Figura 6.27*b*), então para toda a área:



(c)

Figura 6.27

$$M = \int_A y\,dF = \int_{-6\text{ pol}}^{6\text{ pol}} y\left[\left(\frac{-y}{6\text{ pol}}\right)(2\text{ kip/pol}^2)\right](6\text{ pol})\,dy$$

$$= \left(\frac{2}{3}\text{ kip/pol}^2\right) y^3 \Big|_{-6\text{ pol}}^{+6\text{ pol}}$$

$$= 288\text{ kip} \cdot \text{pol} = 24\text{ kip} \cdot \text{pés} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

O resultado anterior *também* pode ser obtido sem a integração. A força resultante de cada uma das duas distribuições de tensão *triangulares* da Figura 6.27*c* é graficamente equivalente ao *volume* contido em cada distribuição de tensão. Assim, cada volume é:

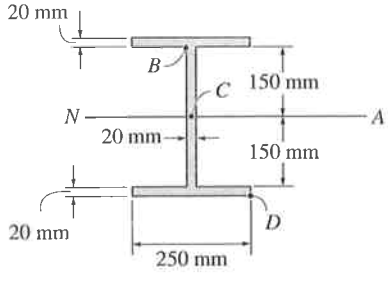
$$F = \frac{1}{2}(6\text{ pol})(2\text{ kip/pol}^2)(6\text{ pol}) = 36\text{ kip}$$

Essas forças, que formam um conjugado, atuam na mesma direção que as tensões de cada distribuição (Figura 6.27*c*). Além disso, atuam através do *centróide* de cada volume, isto é, $\frac{1}{3}(6\text{ pol}) = 2$ pol a partir da parte superior e da parte inferior da viga. Então a distância entre eles é de 8 pol, como mostrado. O momento conjugado é, portanto:

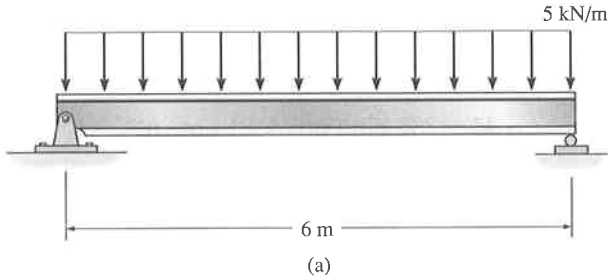
$$M = 36\text{ kip}\ (8\text{ pol}) = 288\text{ kip} \cdot \text{pol} = 24\text{ kip} \cdot \text{pés} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

EXEMPLO 6.15

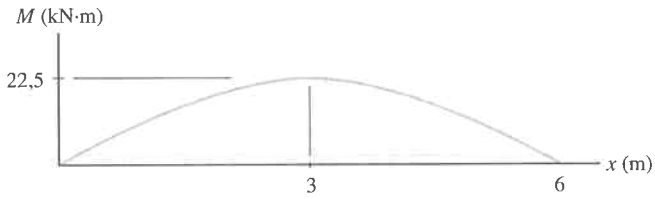
A viga simplesmente apoiada da Figura 6.28*a* tem a área da seção transversal mostrada na Figura 6.28*b*. Determinar a tensão de flexão máxima absoluta na viga e desenhar a distribuição de tensão na seção transversal nessa localização.



(b)



(a)



(c)

Figura 6.28

SOLUÇÃO

Momento Interno Máximo. O momento interno máximo na viga, $M = 22{,}5$ kN · m, ocorre no centro como mostrado no diagrama de momento fletor (Figura 6.28*c*). Consultar o Exemplo 6.3.

Propriedade da Seção. Devido à simetria, o centróide C e, portanto, o eixo neutro passam a meia altura da viga (Figura 6.28*b*). A área é subdividida nas três partes mostradas e o momento de inércia de cada parte é calculado em torno do eixo neutro pelo teorema do eixo paralelo. (Consultar a Equação A.5 do Apêndice A.) Trabalhando em metros, temos:

$$\begin{aligned} I &= \Sigma(\bar{I} + Ad^2) \\ &= 2\left[\frac{1}{12}(0{,}25\text{ m})(0{,}020\text{ m})^3 + (0{,}25\text{ m})(0{,}020\text{ m})(0{,}160\text{ m})^2\right] \\ &\quad + \left[\frac{1}{12}(0{,}020\text{ m})(0{,}300\text{ m})^3\right] \\ &= 301{,}3(10^{-6})\text{ m}^4 \end{aligned}$$

Tensão de Flexão. Segundo a fórmula da flexão, com $c = 170$ mm, a tensão de flexão máxima absoluta é:

$$\sigma_{máx} = \frac{Mc}{I}; \qquad \sigma_{máx} = \frac{22{,}5\text{ kN}\cdot\text{m}(0{,}170\text{ m})}{301{,}3(10^{-6})\text{ m}^4} = 12{,}7\text{ MPa} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Na Figura 6.28*d* a distribuição de tensão é mostrada em duas e três dimensões. Observe como a tensão em cada ponto da seção transversal desenvolve uma força que contribui com um momento $d\mathbf{M}$ em torno do eixo neutro com a mesma direção de $\mathbf{M}$. Especificamente no ponto B, $y_B = 150$ mm e, assim:

$$\sigma_B = \frac{My_B}{I}; \qquad \sigma_B = \frac{22{,}5\text{ kN}\cdot\text{m}\,(0{,}150\text{ m})}{301{,}3(10^{-6})\text{ m}^4} = 11{,}2\text{ MPa}$$

A tensão normal que atua sobre os elementos do material localizados nos pontos B e D é mostrada na Figura 6.28*e*.

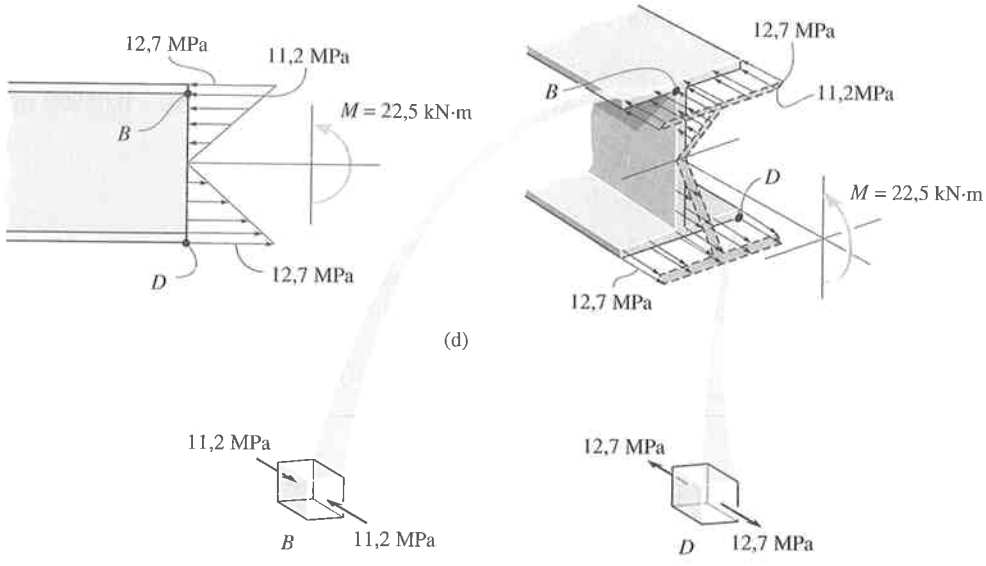
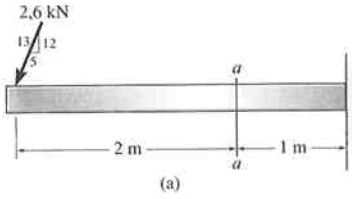


Figura 6.28

EXEMPLO 6.16

A viga mostrada na Figura 6.29*a* tem área da seção transversal com perfil em forma de U (Figura 6.29*b*). Determinar a tensão de flexão máxima que ocorre na seção *a–a* da viga.

SOLUÇÃO



(a)

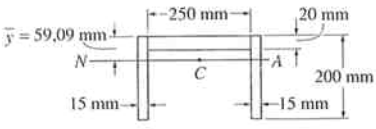
Momento Interno. Aqui, as reações do apoio da viga não precisam ser determinadas. Em vez disso, pelo método das seções, o segmento à esquerda da seção *a–a* pode ser usado (Figura 6.29*c*). Observe que a força axial interna resultante **N** passa através do centróide da seção transversal. Compreenda também que o *momento interno resultante deve ser calculado em torno do eixo neutro* da seção *a–a*.

Para determinar a localização do eixo neutro, subdivide-se a área da seção *a–a* em três partes como mostra a Figura 6.29*b*. Como o eixo neutro passa pelo centróide, temos, usando a Equação A.2 do Apêndice A:

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} A}{\Sigma A} = \frac{2[0{,}100\ \text{m}](0{,}200\ \text{m})(0{,}015\ \text{m}) + [0{,}010\ \text{m}](0{,}02\ \text{m})(0{,}250\ \text{m})}{2(0{,}200\ \text{m})(0{,}015\ \text{m}) + 0{,}020\ \text{m}(0{,}250\ \text{m})}$$

$$= 0{,}05909\ \text{m} = 59{,}09\ \text{mm}$$

Essa dimensão é mostrada na Figura 6.29*c*.



(b)

Aplicando a equação do momento na condição de equilíbrio em torno do eixo neutro, temos:

$$\circlearrowleft^{+} \Sigma M_{EN} = 0; \qquad 2{,}4\ \text{kN}(2\ \text{m}) + 1{,}0\ \text{kN}(0{,}05909\ \text{m}) - M = 0$$

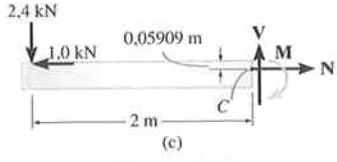
$$M = 4{,}859\ \text{kN} \cdot \text{m}$$

Propriedade da Seção. O momento de inércia em torno do eixo neutro é determinado aplicando-se o teorema dos eixos paralelos aplicado a cada uma das três partes da área da seção transversal. Trabalhando em metros, temos:

$$I = \left[\frac{1}{12}(0{,}250\ \text{m})(0{,}020\ \text{m})^3 + (0{,}250\ \text{m})(0{,}020\ \text{m})(0{,}05909\ \text{m} - 0{,}010\ \text{m})^2\right]$$

$$+ 2\left[\frac{1}{12}(0{,}015\ \text{m})(0{,}200\ \text{m})^3 + (0{,}015\ \text{m})(0{,}200\ \text{m})(0{,}100\ \text{m} - 0{,}05909\ \text{m})^2\right]$$

$$= 42{,}26(10^{-6})\ \text{m}^4$$



(c)

Figura 6.29

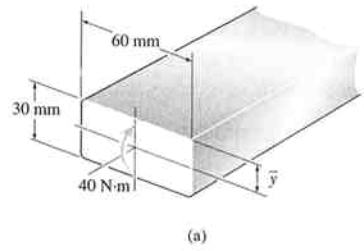
Tensão de Flexão Máxima. A tensão de flexão máxima ocorre nos pontos mais afastados do eixo neutro. Ou seja, na parte inferior da viga, $c = 0{,}200\ \text{m} - 0{,}05909\ \text{m} = 0{,}1409\ \text{m}$. Desse modo:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I} = \frac{4{,}859\ \text{kN} \cdot \text{m}(0{,}1409\ \text{m})}{42{,}26(10^{-6})\ \text{m}^4} = 16{,}2\ \text{MPa} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Mostrar que na parte superior da viga a tensão de flexão é $\sigma' = 6{,}79$ MPa. Observe que, além do efeito de flexão, a força normal $N = 1$ kN e a força de cisalhamento $V = 2{,}4$ kN também contribuem com esforço adicional na seção transversal. A superposição de todos esses efeitos será discutida em um capítulo posterior.

EXEMPLO 6.17

O elemento de seção transversal retangular (Figura 6.30*a*) foi projetado para resistir a um momento de 40 N · m. A fim de aumentar sua resistência e rigidez, propõe-se acrescentar duas pequenas nervuras na sua parte inferior (Figura 6.30*b*). Determinar a tensão normal máxima no elemento para ambos os casos.



(a)

SOLUÇÃO

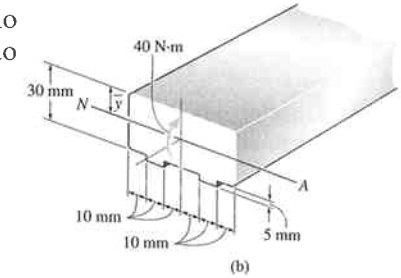
Sem Nervuras. O eixo neutro está no centro da seção transversal (Figura 6.30*a*), de modo que $\bar{y} = c = 15$ mm = 0,015 m. Assim:

$$I = \frac{1}{12} bh^3 = \frac{1}{12} (0{,}06 \text{ m})(0{,}03 \text{ m})^3 = 0{,}135(10^{-6}) \text{ m}^4$$

Portanto, a tensão normal máxima é:

$$\sigma_{máx} = \frac{Mc}{I} = \frac{(40 \text{ N} \cdot \text{m})(0{,}015 \text{ m})}{0{,}135(10^{-6}) \text{ m}^4} = 4{,}44 \text{ MPa} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Com Nervuras. Pela Figura 6.30*b*, segmentando-se a área no retângulo principal maior e os dois retângulos inferiores (nervuras), a localização $\bar{y}$ do centróide e do eixo neutro é determinada como segue:



(b)

Figura 6.30

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} A}{\Sigma A}$$

$$= \frac{[0{,}015 \text{ m}](0{,}030 \text{ m})(0{,}060 \text{ m}) + 2[0{,}0325 \text{ m}](0{,}005 \text{ m})(0{,}010 \text{ m})}{(0{,}03 \text{ m})(0{,}060 \text{ m}) + 2(0{,}005 \text{ m})(0{,}010 \text{ m})}$$

$$= 0{,}01592 \text{ m}$$

Esse valor não representa c. O valor de c é:

$$c = 0{,}035 \text{ m} - 0{,}01592 \text{ m} = 0{,}01908 \text{ m}$$

Segundo o teorema dos eixos paralelos, o momento de inércia em torno do eixo neutro é:

$$I = \left[\frac{1}{12} (0{,}060 \text{ m})(0{,}030 \text{ m})^3 + (0{,}060 \text{ m})(0{,}030 \text{ m})(0{,}01592 \text{ m} - 0{,}015 \text{ m})^2\right]$$

$$+ 2\left[\frac{1}{12} (0{,}010 \text{ m})(0{,}005 \text{ m})^3 + (0{,}010 \text{ m})(0{,}005 \text{ m})(0{,}0325 \text{ m} - 0{,}01592 \text{ m})^2\right]$$

$$= 0{,}1642(10^{-6}) \text{ m}^4$$

Portanto, a tensão normal máxima é:

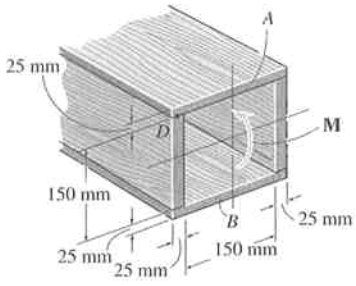
$$\sigma_{máx} = \frac{Mc}{I} = \frac{40 \text{ N} \cdot \text{m}(0{,}01908 \text{ m})}{0{,}1642 (10^{-6}) \text{ m}^4} = 4{,}65 \text{ MPa} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Esse resultado surpreendente indica que o acréscimo de nervuras à seção transversal *aumenta* a tensão normal em vez de diminuí-la e, por essa razão, a iniciativa deve ser descartada.

PROBLEMAS

6.38. A viga está submetida a um momento M. Determinar a porcentagem desse momento resistida pelas tensões que atuam sobre as tábuas superior e inferior, A e B, da viga.

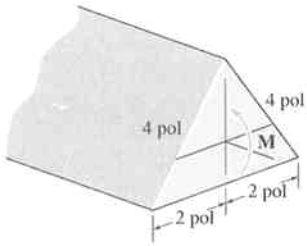
6.39. Determinar o momento M que deve ser aplicado à viga a fim de criar um esforço de compressão de $\sigma_D = 30$ MPa no ponto D. Desenhar também a distribuição de tensão que atua sobre a seção transversal e calcular a tensão máxima desenvolvida na viga.



Problemas 6.38/6.39

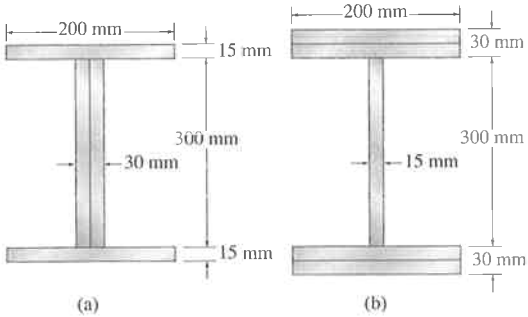
***6.40.** Um elemento tem a seção transversal triangular mostrada. Determinar o maior momento interno M que pode ser aplicado sobre ela sem exceder as tensões admissíveis de tração e compressão, $(\sigma_{adm})_t = 22$ ksi e $(\sigma_{adm})_c = 15$ ksi, respectivamente.

6.41. Um elemento tem a seção transversal triangular mostrada. Supondo que seja aplicado o momento $M = 800$ lb · pés a essa seção, determinar as tensões máximas de tração e de compressão no elemento. Desenhar também a vista tridimensional da distribuição de tensão que atua sobre a seção transversal.



Problemas 6.40/6.41

6.42. Foram propostas duas soluções para o projeto de uma viga. Determinar qual delas suportará um momento $M = 150$ kN · m com o menor esforço de flexão. Qual é esse esforço? Com que porcentagem ele é mais eficiente?



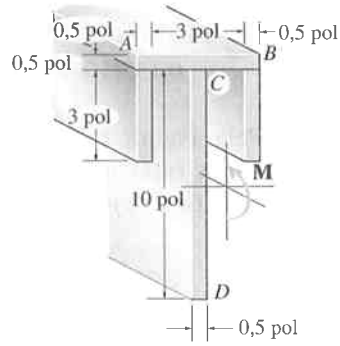
Problema 6.42

6.43. Determinar o momento M que produzirá uma tensão máxima de 10 ksi na seção transversal.

***6.44.** Determinar a tensão de flexão máxima de tração e compressão na viga se ela estiver submetida a um momento $M = 4$ kip · pés.

6.45. Determinar a força resultante que as tensões de flexão produzem na chapa superior horizontal do flange AB da viga, supondo que $M = 4$ kip · pés.

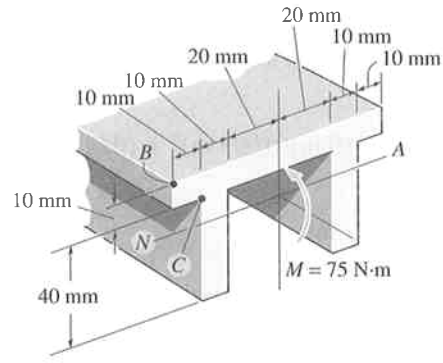
6.46. Determinar a força resultante que as tensões de flexão produzem na alma CD da viga, supondo que $M = 4$ kip · pés.



Problemas 6.43/6.44/6.45/6.46

6.47. A peça de máquina de alumínio está sujeita a um momento $M = 75$ N · m. Determinar a tensão de flexão criada nos pontos B e C da seção transversal. Desenhar os resultados em um elemento de volume localizado em cada um desses pontos.

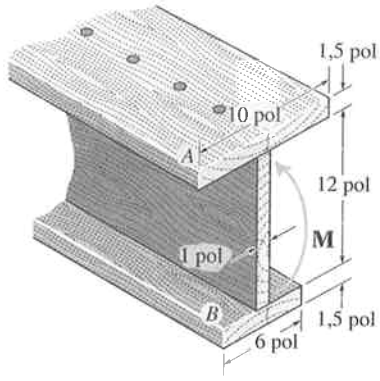
***6.48.** A peça de máquina de alumínio está sujeita a um momento $M = 75$ N · m. Determinar os esforços de flexão máximos de tração e de compressão na peça.



Problemas 6.47/6.48

6.49. A viga é feita de três tábuas pregadas como mostrado. Supondo que o momento que atua sobre a seção transversal seja $M = 1$ kip · pé, determinar a tensão de flexão máxima na viga. Desenhar a vista tridimensional da distribuição de tensão que atua sobre a seção transversal.

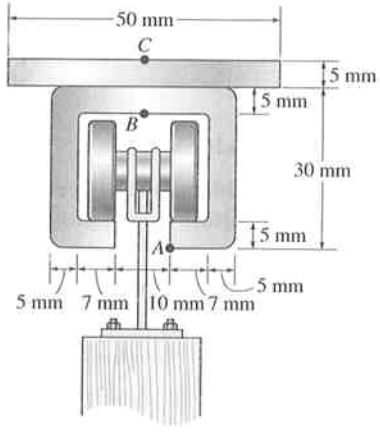
6.50. Determinar a força resultante que as tensões de flexão produzem na tábua superior A da viga, supondo que $M = 1$ kip · pé.



Problemas 6.49/6.50

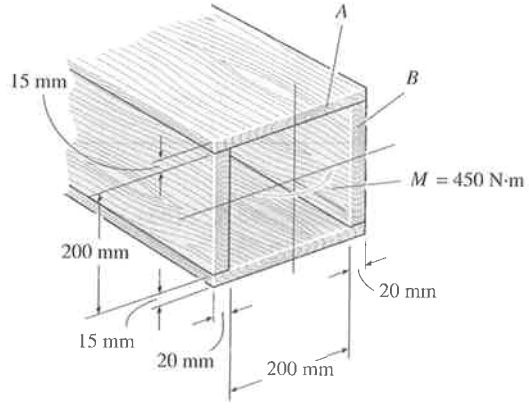
6.51. O suporte em C é usado como trilho para um transportador. Supondo que o momento máximo no suporte seja $M = 30$ N · m, determinar a tensão de flexão nos pontos A, B e C.

***6.52.** O suporte em C é usado como trilho para um transportador. Supondo que a tensão de flexão admissível para o material seja $\sigma_{adm} = 175$ MPa, determinar o momento fletor máximo a que o suporte resiste.



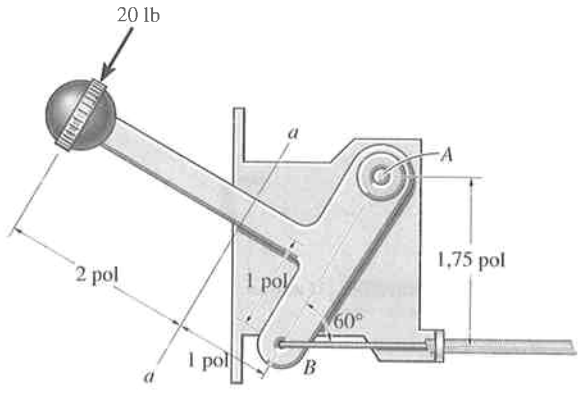
Problemas 6.51/6.52

6.53. Uma viga é construída com quatro peças de madeira coladas como mostrado. Supondo que o momento que atua sobre a seção transversal seja $M = 450$ N · m, determinar a força resultante que a tensão de flexão produz sobre a tábua superior A e na tábua lateral B.



Problema 6.53

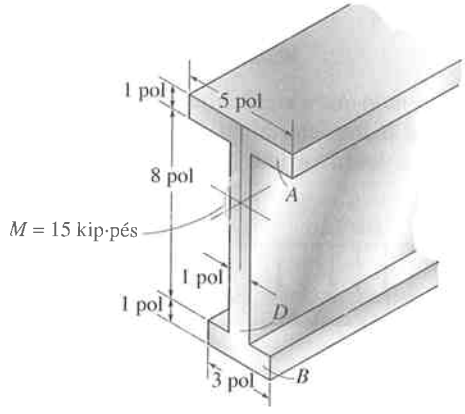
6.54. A alavanca de controle é usada em um cortador de grama autotransportado. Determinar a tensão de flexão máxima na seção a–a da alavanca se for aplicada uma força de 20 lb na maçaneta. A alavanca é apoiada pelo pino em A e o arame em B. A seção a–a é quadrada, de 0,25 pol de lado.



Problema 6.54

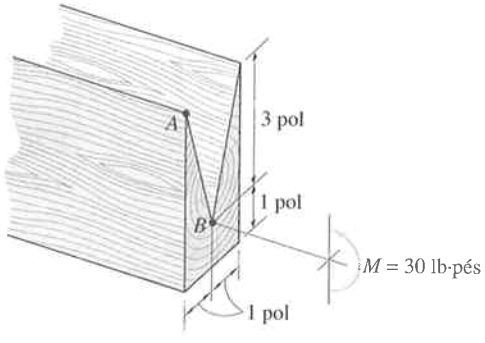
6.55. A viga está sujeita a um momento de 15 kip · pés. Determinar a força resultante que a tensão produz nos flanges superior A e inferior B. Calcular também a tensão máxima desenvolvida na viga.

***6.56.** A viga está sujeita a um momento de 15 kip · pés. Determinar a porcentagem do momento resistida pela alma da viga D.



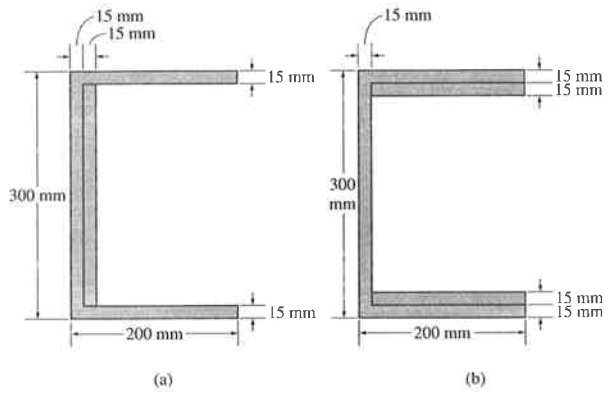
Problemas 6.55/6.56

6.57. A viga está sujeita a um momento $M = 30$ lb · pés. Determinar a tensão de flexão que atua sobre os pontos A e B. Desenhar também a vista tridimensional da distribuição de tensão que atua sobre toda a área da seção transversal.



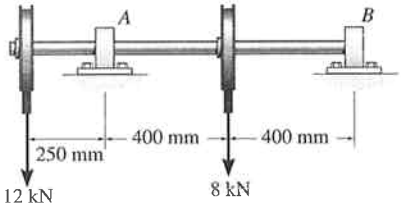
Problema 6.57

6.58. Foram propostas duas soluções para o projeto de uma viga. Determinar qual delas suportará um momento $M = 150$ kN · m com o menor esforço de flexão. Qual é esse esforço? Com que porcentagem ele é mais eficiente?



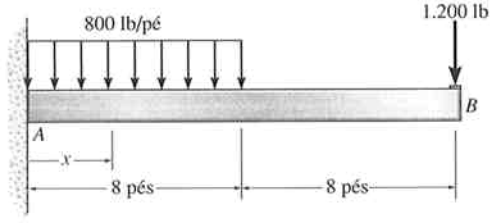
Problema 6.58

6.59. Supondo que o eixo tenha diâmetro de 50 mm, determinar a tensão de flexão máxima absoluta nele desenvolvida.



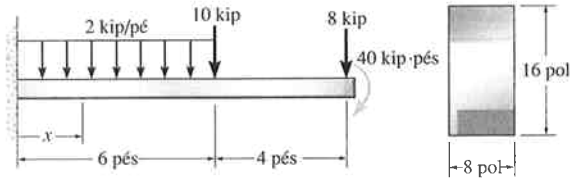
Problema 6.59

***6.60.** Supondo que a viga tenha seção transversal quadrada de 9 pol de lado, determinar a tensão de flexão máxima absoluta nela desenvolvida.



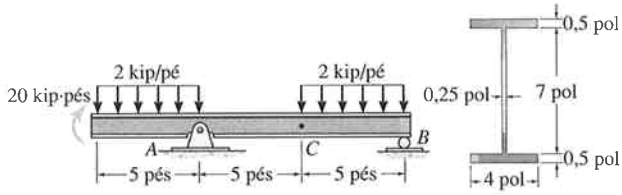
Problema 6.60

6.61. Supondo que a viga tenha seção transversal retangular com 8 pol de lado e 16 pol de altura, determinar a tensão de flexão máxima absoluta nela desenvolvida.



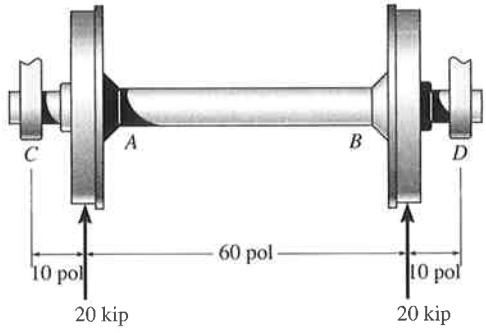
Problema 6.61

6.62. Supondo que a viga tenha a seção transversal mostrada, determinar a tensão de flexão máxima absoluta nela desenvolvida.



Problema 6.62

6.63. O eixo do vagão está sujeito a cargas na roda de 20 kip. Supondo que esteja for apoiado em dois mancais em C e D, determinar a tensão de flexão máxima desenvolvida no centro do eixo, onde o diâmetro é de 5,5 pol.



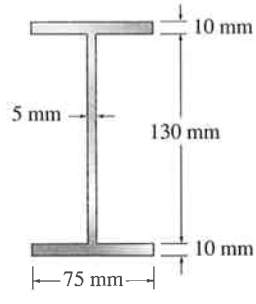
Problema 6.63

***6.64.** Se a viga do Problema 6.27 tiver seção transversal retangular de largura b e altura h, qual será a tensão de flexão máxima absoluta nela desenvolvida?

6.65. Se a viga composta do Problema 6.19 tiver seção transversal quadrada, qual será sua dimensão a supondo que a tensão de flexão admissível seja $\sigma_{adm} = 150$ MPa?

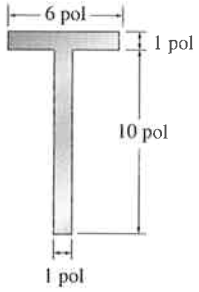
6.66. Se a viga composta do Problema 6.25 tiver seção transversal quadrada, quais serão a largura e a altura requeridas a, supondo que a tensão de flexão admissível para o material seja $\sigma_{adm} = 1{,}50$ ksi.

6.67. Determinar a tensão de flexão máxima absoluta na viga. A seção transversal é mostrada.



Problema 6.67

***6.68.** Determinar a tensão de flexão máxima absoluta na viga T do Problema 6.29. A seção transversal da viga é mostrada.



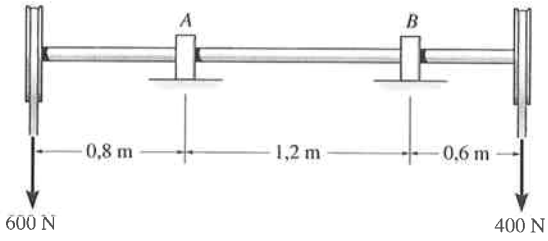
Problema 6.68

6.69. Supondo que a viga do Problema 6.17 tenha seção transversal retangular, determinar a altura h e a largura b requeridas se $h = 2b$. A tensão de flexão admissível para o material é $\sigma_{adm} = 24$ ksi.

6.70. Supondo que a viga do Problema 6.17 seja um tubo com diâmetro externo de 3 pol, determinar seu diâmetro interno se a tensão de flexão admissível para o material for $\sigma_{adm} = 24$ ksi.

6.71. Determinar a tensão de flexão máxima absoluta no eixo de 30 mm de diâmetro que está submetido a forças concentradas. As buchas nos apoios A e B suportam apenas forças verticais.

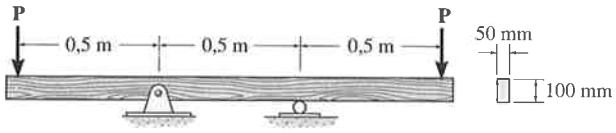
***6.72.** Determinar o menor diâmetro admissível do eixo submetido a forças concentradas. As buchas nos apoios A e B suportam apenas forças verticais e a tensão de flexão admissível é $\sigma_{adm} = 160$ MPa.



Problemas 6.71/6.72

6.73. A viga tem seção transversal retangular como mostrado. Determinar a maior carga P que pode ser suportada em suas extremidades em balanço, de modo que a tensão de flexão na viga não exceda $\sigma_{adm} = 10$ MPa.

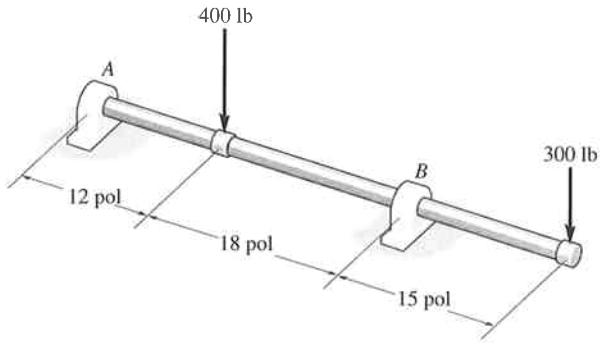
6.74. A viga tem a seção transversal mostrada. Se $P = 1{,}5$ kN, determinar a tensão de flexão máxima nela desenvolvida. Desenhar a distribuição de tensão que atua sobre a seção transversal.



Problemas 6.73/6.74

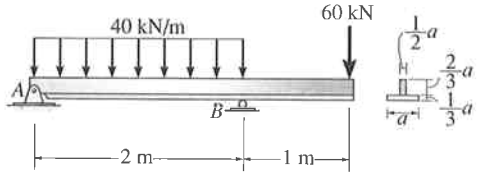
6.75. Determinar a tensão de flexão máxima absoluta no eixo de 1,5 pol de diâmetro que está submetido a forças concentradas. As buchas nos apoios A e B suportam apenas forças verticais.

***6.76.** Determinar o menor diâmetro admissível do eixo submetido a forças concentradas. As buchas nos apoios A e B suportam apenas forças verticais e a tensão de flexão admissível é $\sigma_{adm} = 22$ ksi.



Problemas 6.75/6.76

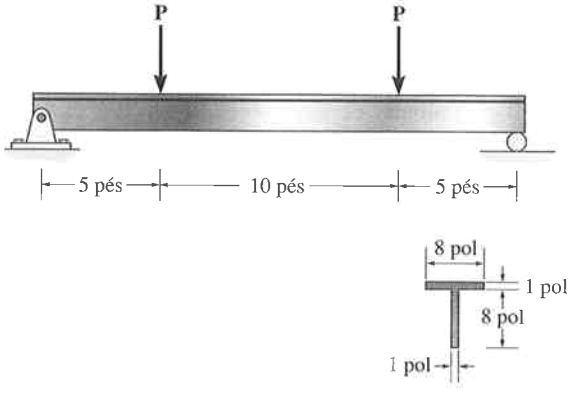
6.77. A viga está submetida ao carregamento mostrado. Determinar a dimensão a requerida da seção transversal se a tensão de flexão do material for $\sigma_{adm} = 150$ MPa.



Problemas 6.76/6.77

6.78. Determinar a intensidade da carga máxima **P** que pode ser aplicada à viga, supondo que ela seja feita de material com tensão de flexão admissível $(\sigma_{adm})_c = 12$ ksi na compressão e $(\sigma_{adm})_t = 22$ ksi na tração.

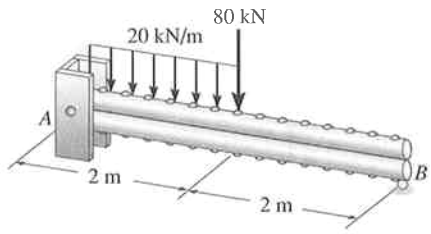
6.79. Determinar a intensidade da carga máxima **P** que pode ser aplicada à viga, supondo que ela seja feita de material com tensão de flexão admissível $(\sigma_{adm})_c = 16$ ksi na compressão e $(\sigma_{adm})_t = 18$ ksi na tração.



Problemas 6.78/6.79

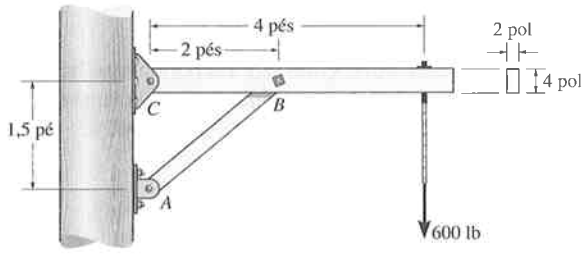
***6.80.** As duas hastes de aço são parafusadas ao longo de seu comprimento e suportam o carregamento mostrado. Supor que o apoio de A seja um pino e o de B seja um rolete. Determinar o diâmetro requerido de cada uma das hastes se a tensão de flexão admissível for $\sigma_{adm} = 130$ MPa.

6.81. Resolver o Problema 6.80 se as hastes forem giradas 90° de modo que ambas repousem nos apoios de A (pino) e B (rolete).



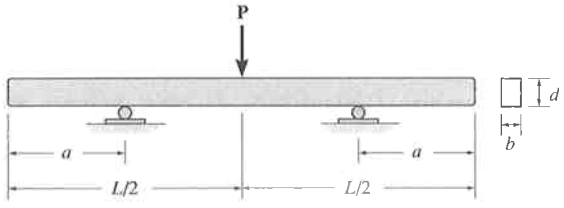
Problemas 6.80/6.81

6.82. O suporte *CD* da mão-francesa suporta o cabo com um peso de 600 lb. Determinar a tensão de flexão máxima absoluta no suporte, supondo que *A*, *B* e *C* tenham apoio de pinos.



Problema 6.82

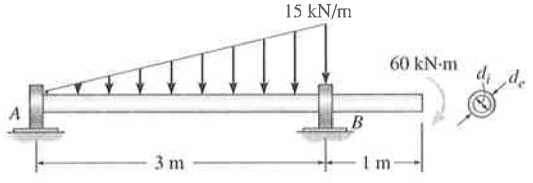
6.83. A viga está submetida à carga **P** em seu centro. Determinar a distância *a* dos apoios de modo que a tensão de flexão máxima absoluta na viga seja a maior possível. Qual é a tensão?



Problema 6.83

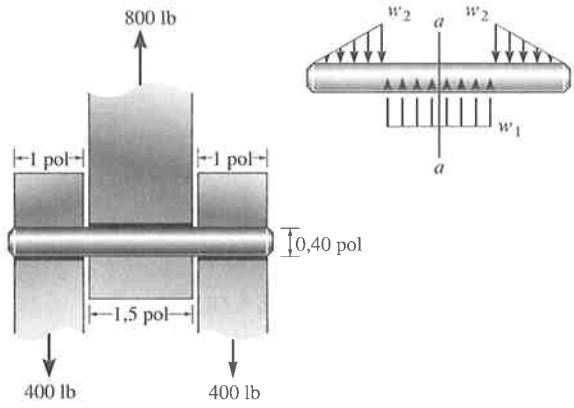
***6.84.** Determinar a tensão de flexão máxima absoluta no eixo tubular se $d_i = 160$ mm e $d_e = 200$ mm.

6.85. O eixo tubular deve ter seção transversal tal que seus diâmetros interno e externo estejam na proporção $d_i = 0{,}8\, d_e$. Determinar essas dimensões se a tensão de flexão admissível for $\sigma_{adm} = 155$ MPa.



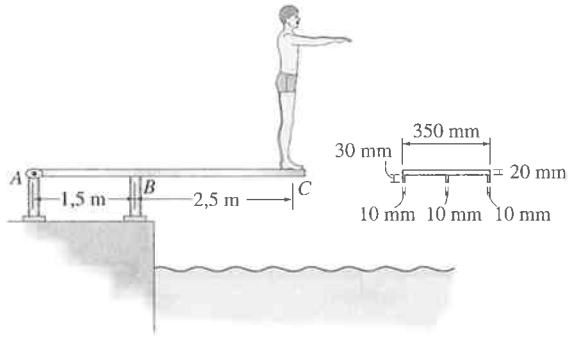
Problemas 6.84/6.85

6.86. O pino é usado para acoplar os três elos. Devido ao desgaste, a carga é distribuída nas partes superior e inferior como mostrado no diagrama de corpo livre. Supondo que o diâmetro do pino seja 0,40 pol, determinar a tensão de flexão máxima na área da seção transversal no centro da seção *a–a*. Para solucionar o problema é preciso determinar primeiro as intensidades das cargas w_1 e w_2.



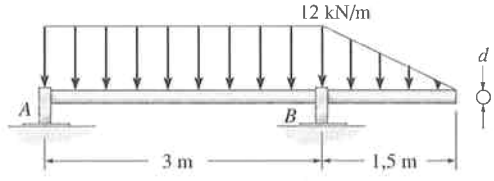
Problema 6.86

6.87. O homem tem massa de 78 kg e está imóvel na extremidade do trampolim. Supondo que a tábua tenha a seção transversal mostrada, determinar a deformação normal máxima nela desenvolvida. O módulo de elasticidade do material é $E = 125$ GPa. Supor também que *A* é um pino e *B* é um rolete.



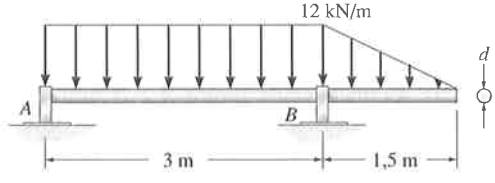
Problema 6.87

***6.88.** A haste é apoiada sobre mancais lisos em *A* e *B* que exercem apenas reações verticais sobre o eixo. Se $d = 90$ mm, determinar a tensão de flexão máxima absoluta na viga e desenhar a distribuição de tensão que atua sobre a seção transversal.



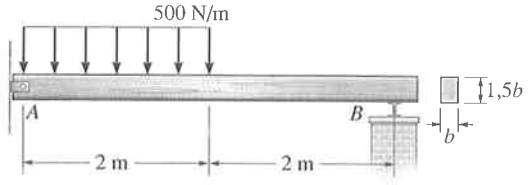
Problema 6.88

6.89. A haste é apoiada sobre mancais lisos em *A* e *B* que exercem apenas reações verticais sobre o eixo. Determinar seu menor diâmetro *d* se a tensão de flexão admissível for $\sigma_{adm} = 189$ MPa.



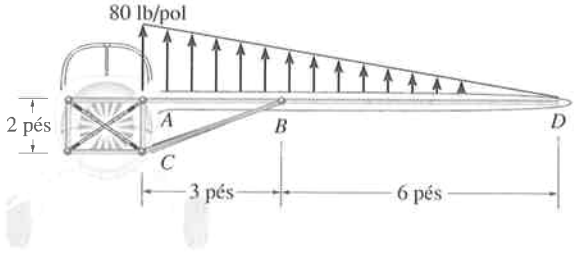
Problema 6.89

6.90. A viga de madeira tem seção transversal na qual b = 60 mm. Determinar a tensão de flexão máxima absoluta na viga e desenhar a distribuição de tensão que atua sobre a seção transversal.



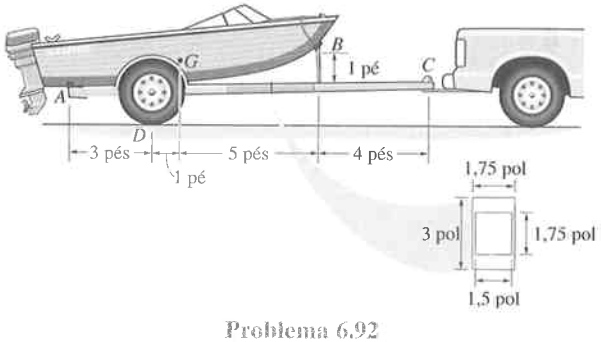
Problema 6.90

6.91. A longarina da asa ABD de um avião leve é feita de alumínio 2014-T6 e tem área da seção transversal de 1,27 pol, largura de 3 pol e momento de inércia em relação ao eixo neutro de 2,68 pol^4. Qual será a tensão de flexão máxima absoluta na longarina se a carga prevista for como a mostrada? Supor que A, B e C são pinos. O acoplamento é feito ao longo do eixo longitudinal central da longarina.



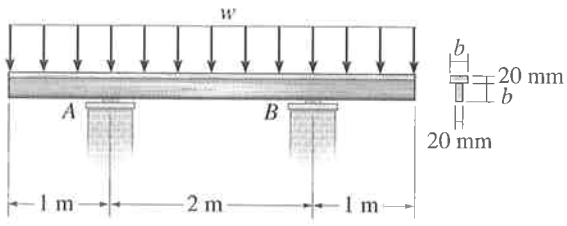
Problema 6.91

***6.92.** O barco tem peso de 2.300 lb e centro de gravidade em G. Supondo que repouse no reboque no contato liso A e esteja preso por pino em B, determinar a tensão de flexão máxima absoluta desenvolvida no suporte principal do reboque. Considerar o suporte uma viga-caixão com as dimensões mostradas e acoplada por pino em C.



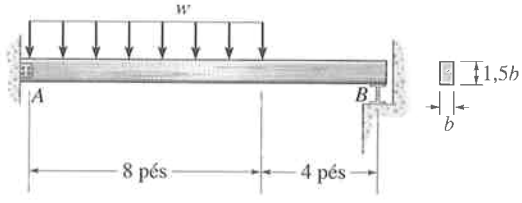
Problema 6.92

6.93. Qual a carga uniforme máxima admissível w que pode ser suportada pela viga de fibra de vidro, se b = 125 mm e a tensão de flexão admissível para o material é σ_{adm} = 13 MPa?



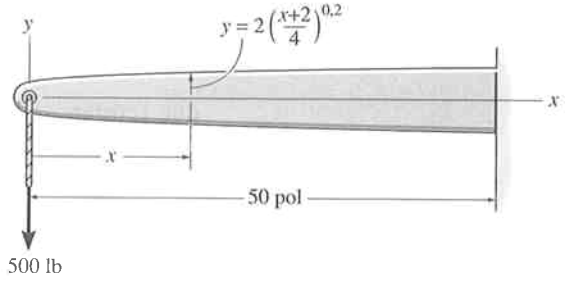
Problema 6.93

6.94. A viga de madeira está submetida a uma carga uniforme w = 200 lb/pé. Se a tensão de flexão admissível para o material for σ_{adm} = 1,40 ksi, qual dimensão b a seção transversal precisará ter? Supor que o apoio em A é um pino e em B, um rolete.



Problema 6.94

6.95. A viga em balanço tem espessura de 4 pol e largura variável descrita pela função $y = 2[(x + 2)/4]^{0,2}$, onde x é dado em polegadas. Determinar a tensão de flexão máxima no centro da viga.



Problema 6.95

6.5 FLEXÃO ASSIMÉTRICA

Ao desenvolver a fórmula da flexão, impusemos a condição de que a área da seção transversal fosse *simétrica* em relação a um eixo perpendicular ao eixo neutro; além disso, o momento interno resultante **M** deveria atuar ao longo desse mesmo eixo neutro. Esse é o caso das seções em T ou U mostradas na

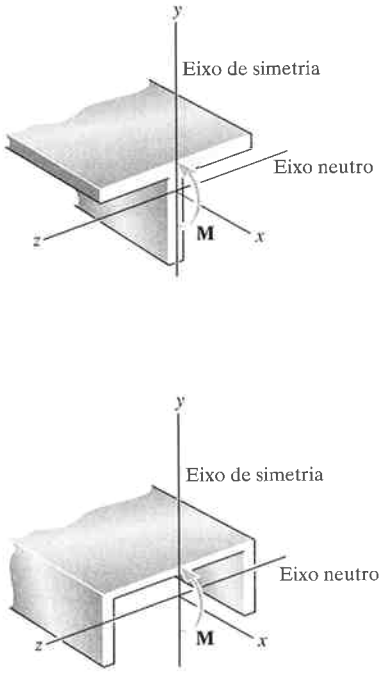


Figura 6.31

Figura 6.31. Todavia, tais condições são desnecessárias e aqui vamos mostrar que a fórmula da flexão também pode ser aplicada tanto a uma viga com área da seção transversal de qualquer formato como a uma viga que tenha momento interno resultante atuando em qualquer direção.

Momento Aplicado ao Longo do Eixo Principal. Consideremos que a seção transversal da viga tenha um perfil assimétrico como a da Figura 6.32*a*. Como na Seção 6.4, o sistema de coordenadas mão direita x, y, z é estabelecido de tal maneira que a origem encontra-se no centróide C da seção transversal e o momento interno resultante **M** atua ao longo do eixo $+z$. A distribuição de tensão que atua sobre toda a área da seção transversal precisa ter força resultante nula, momento interno resultante em torno do eixo y nulo e momento interno resultante em torno do eixo z igual a **M**.[2] Essas três condições podem ser expressas matematicamente considerando-se a força que atua sobre o elemento infinitesimal dA localizado em $(0, y, z)$ (Figura 6.32*a*). Essa força é $dF = \sigma\, dA$ e temos, portanto:

$$F_R = \Sigma F_x; \qquad 0 = \int_A \sigma\, dA \tag{6.14}$$

$$(M_R)_y = \Sigma M_y; \qquad 0 = \int_A z\sigma\, dA \tag{6.15}$$

$$(M_R)_z = \Sigma M_z; \qquad M = \int_A -y\sigma\, dA \tag{6.16}$$

Como mostrado na Seção 6.4, a Equação 6.14 é satisfeita, uma vez que o eixo z passa pelo *centróide* da área da seção transversal. Além disso, como o eixo z representa o *eixo neutro* da seção transversal, a deformação normal variará linearmente de zero, no eixo neutro, ao máximo em um ponto localizado à maior distância, $y = c$, da coordenada y do eixo neutro (Figura 6.32*b*). Desde que o material comporte-se de maneira linear-elástica, a distribuição de tensão normal sobre a seção transversal *também* será linear, de modo que $\sigma = -(y/c)\sigma_{máx}$ (Figura 6.32*c*). Quando se substitui essa equação pela 6.16 e integra-se, obtém-se a fórmula da flexão $\sigma_{máx} = Mc/I$. Se a substituímos pela Equação 6.15, obtemos:

$$0 = \frac{-\sigma_{máx}}{c} \int_A yz\, dA$$

que requer:

$$\int_A yz\, dA = 0$$

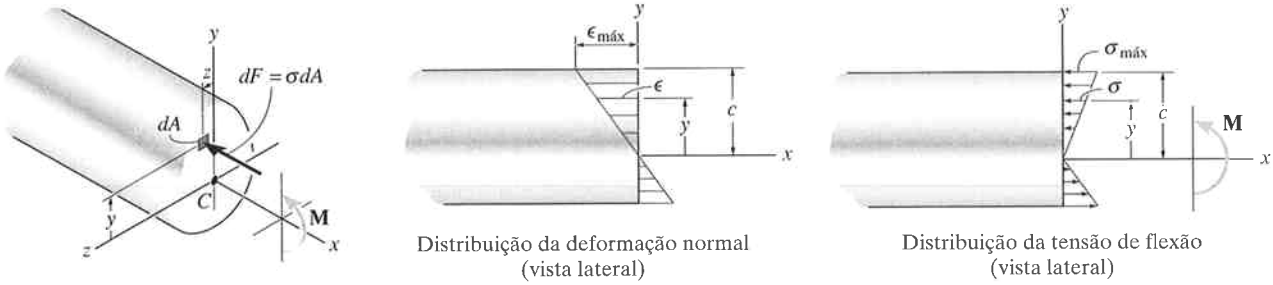
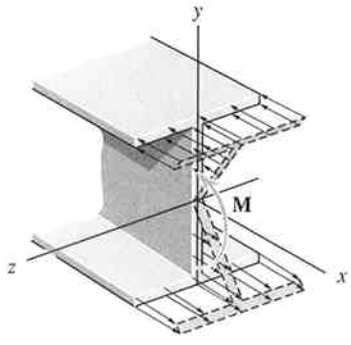


Figura 6.32

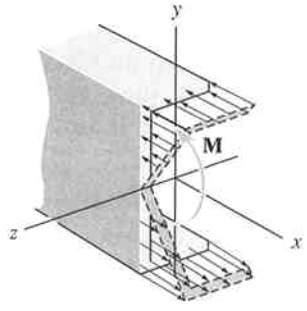
[2] A condição de que os momentos em torno do eixo y sejam nulos não foi considerada na Seção 6.4, uma vez que a distribuição flexão-tensão era *simétrica* em relação ao eixo y e, assim, tal distribuição de tensão automaticamente produzia momento nulo em torno do eixo y. Ver a Figura 6.26*c*.

Essa integral é chamada ***produto de inércia*** da área. Como indicado no Apêndice A, ela na verdade será nula caso os eixos y e z sejam escolhidos como ***eixos de inércia principais*** da área. Em uma área de formato arbitrário, pode-se sempre determinar a orientação dos eixos principais usando tanto as equações de transformação de inércia como o círculo de inércia de Mohr, como explicado no Apêndice A, Seções A.4 e A.5. No entanto, se a área tiver um eixo de simetria, os ***eixos principais*** poderão ser estabelecidos facilmente ***uma vez que são sempre orientados ao longo do eixo de simetria e perpendicularmente a ele.***

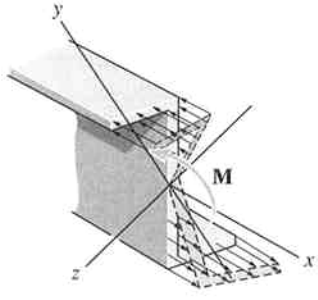
Resumindo, as equações 6.14 a 6.16 serão sempre satisfeitas, independentemente da direção do momento **M** aplicado. Como exemplo, consideremos os elementos mostrados na Figura 6.33. Em cada caso, y e z estabelecem que a origem dos eixos principais de inércia da seção transversal localiza-se no centróide da área. Nas Figuras 6.33*a* e 6.33*b*, os eixos principais são localizados por simetria; nas Figuras 6.33*c* e 6.33*d*, sua orientação é determinada pelos métodos do Apêndice A. Como **M** é aplicado em torno de um dos eixos principais (eixo z), a distribuição de tensão é determinada pela fórmula da flexão, $\sigma = My/I_z$, e mostrada para cada caso.



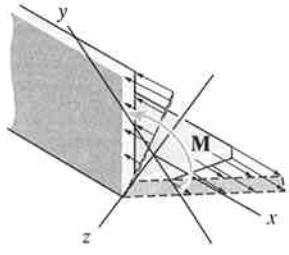
(a)



(b)



(c)



(d)

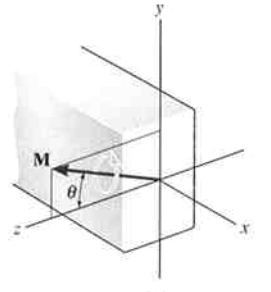
Figura 6.33

Momento Aplicado Arbitrariamente. Algumas vezes um elemento é carregado de tal modo que o momento interno resultante não atua em torno de um dos eixos principais da seção transversal. Quando isso ocorre, o momento deve ser primeiro desdobrado em componentes direcionados ao longo dos eixos principais. A fórmula da flexão é usada então para determinar a tensão normal sobre cada momento componente. Finalmente, usando o princípio da superposição, podemos determinar a tensão normal resultante.

Para tal, consideremos que a viga tenha seção transversal retangular e esteja sujeita ao momento **M** (Figura 6.34*a*). Nesse caso, **M** forma um ângulo θ com o eixo *principal* z. Suponhamos que θ seja positivo quando está direcionado do eixo $+z$ para o eixo $+y$, como mostrado. Desdobrando **M** em componentes, ao longo dos eixos z e y, temos $M_z = M \cos\theta$ e $M_y = M \operatorname{sen}\theta$, respectivamente. Cada um desses componentes é mostrado separadamente nas seções tranversais das Figuras 6.34*b* e 6.34*c*. As distribuições normal-tensão que **M** e seus componentes $\mathbf{M}_z$ e $\mathbf{M}_y$ produzem são mostradas nas Figuras 6.34*d*, 6.34*e* e 6.34*f*, respectivamente. Aqui se assume que $(\sigma_x)_{máx} > (\sigma'_x)_{máx}$. Por inspeção, as tensões máximas de tração e compressão $[(\sigma_x)_{máx} + (\sigma'_x)_{máx}]$ ocorrem em dois cantos opostos da seção transversal (Figura 6.34*d*).

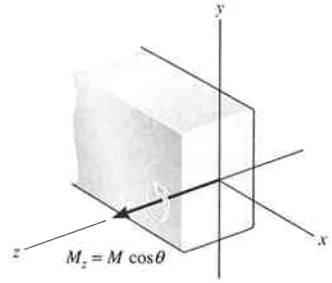
Aplicando a fórmula da flexão a cada momento componente nas Figuras 6.34*b* e 6.34*c*, podemos expressar a tensão normal resultante em qualquer ponto da seção transversal (Figura 6.34*d*), em termos gerais, como:

$$\sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \tag{6.17}$$



(a)

=



(b)

Figura 6.34

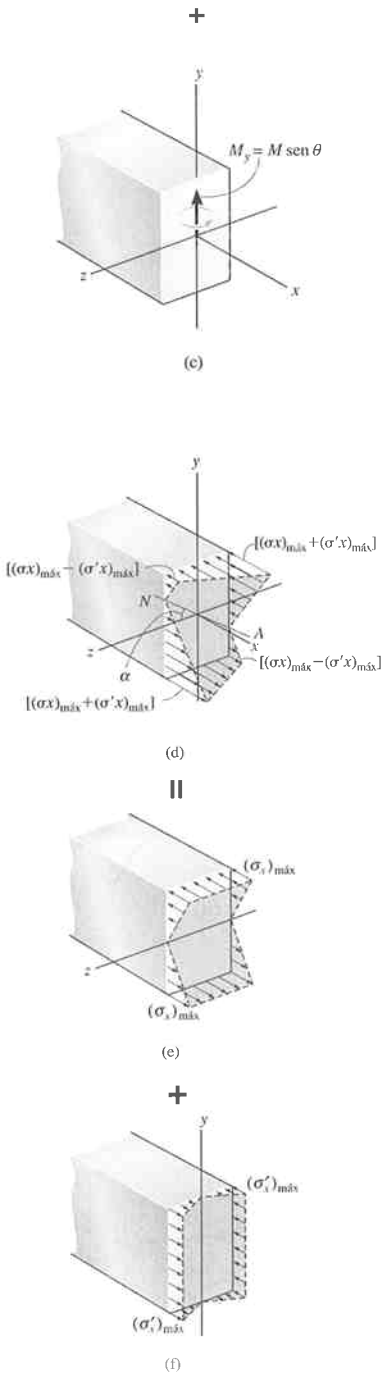


Figura 6.34

onde:

σ = tensão normal no ponto

y, z = coordenadas do ponto medidas nos eixos x, y, z, as quais se originam no centróide da área da seção transversal e formam um sistema de coordenadas mão direita; o eixo x é direcionado para fora da seção transversal, e os eixos y e z representam, respectivamente, os eixos principais do momento de inércia mínimo e máximo da área

M_y, M_z = componentes do momento interno resultante direcionados ao longo dos eixos principais y e z; são positivos se direcionados ao longo dos eixos $+y$ e $+z$; caso contrário, são negativos — ou dito de outra maneira, $M_y = M \operatorname{sen} \theta$ e $M_z = M \cos \theta$, onde θ é positivo no sentido do eixo $+z$ para o eixo $+y$

I_y, I_z = *momentos de inércia principais* calculados, respectivamente, em torno dos eixos y e z. Consultar o Apêndice A.

Como observado anteriormente, quando se aplica essa equação é *muito importante* que os eixos x, y e z formem um sistema mão direita e que os sinais algébricos apropriados sejam atribuídos aos momentos componentes e às coordenadas. A tensão resultante será de *tração* se for *positiva* e de *compressão* se *negativa*.

Orientação do Eixo Neutro. O ângulo α do eixo neutro na Figura 6.34*d* é determinado aplicando-se a Equação 6.17 com $\sigma = 0$, uma vez que, por definição, nenhuma tensão normal atua sobre o eixo neutro. Temos:

$$y = \frac{M_y I_z}{M_z I_y} z$$

Como $M_z = M \cos \theta$ e $M_y = M \operatorname{sen} \theta$, então:

$$y = \left(\frac{I_z}{I_y} \operatorname{tg} \theta\right) z \tag{6.18}$$

Essa é a equação da reta que define o eixo neutro da seção transversal. Como o declive dessa reta é $\alpha = y/z$, então:

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{I_z}{I_y} \operatorname{tg} \theta} \tag{6.19}$$

Essa expressão mostra que na *flexão assimétrica* o ângulo θ, que define a direção do momento **M** (Figura 6.34*a*), *não é igual* a α, o ângulo que define a inclinação do eixo neutro (Figura 6.34*d*), a menos que $I_z = I_y$. Em vez disso, se, como na Figura 6.34*a*, o *eixo y* for escolhido como eixo principal do momento de inércia *mínimo*, e o *eixo z* for escolhido como eixo principal do momento de inércia *máximo*, de modo que $I_y < I_z$, então pela Equação 6.19 poderemos concluir que o ângulo α, medido como positivo no sentido do eixo $+z$ para o eixo $+y$, localiza-se *entre* a reta de ação de **M** e o eixo y, isto é, $\theta \leq \alpha \leq 90°$.

PONTOS IMPORTANTES

- A fórmula da flexão é aplicada somente quando a flexão ocorre em torno de eixos que representam os *eixos de inércia principais* da seção transversal. Esses eixos têm origem no centróide e são direcionados ao longo do eixo de simetria, se houver um, e perpendicularmente a ele.
- Se aplicado em torno de algum eixo arbitrário, o momento deve ser desdobrado em componentes ao longo de cada eixo principal. Assim, a tensão em determinado ponto será calculada pela superposição da tensão que cada componente do momento provoca.

EXEMPLO 6.18

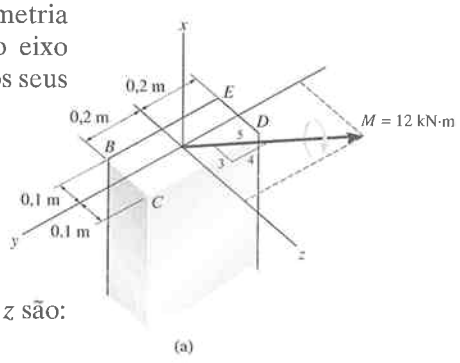
A seção transversal retangular mostrada na Figura 6.35*a* está submetida a um momento fletor $M = 12\ \text{kN} \cdot \text{m}$. Determinar a tensão normal desenvolvida em cada canto da seção e especificar a direção do eixo neutro.

SOLUÇÃO

Componentes do Momento Interno. Por inspeção, vê-se que os eixos y e z representam os eixos de inércia principais, uma vez que são eixos de simetria da seção transversal. Conforme requerido, definimos o *eixo z* como o eixo principal do momento de inércia *máximo*. O momento foi desdobrado nos seus componentes y e z, onde:

$$M_y = -\frac{4}{5}(12\ \text{kN} \cdot \text{m}) = -9{,}60\ \text{kN} \cdot \text{m}$$

$$M_z = \frac{3}{5}(12\ \text{kN} \cdot \text{m}) = 7{,}20\ \text{kN} \cdot \text{m}$$



(a)

Figura 6.35

Propriedades da Seção. Os momentos de inércia em torno dos eixos y e z são:

$$I_y = \frac{1}{12}(0{,}4\ \text{m})(0{,}2\ \text{m})^3 = 0{,}2667(10^{-3})\ \text{m}^4$$

$$I_z = \frac{1}{12}(0{,}2\ \text{m})(0{,}4\ \text{m})^3 = 1{,}067(10^{-3})\ \text{m}^4$$

Tensão de Flexão. Assim:

$$\sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

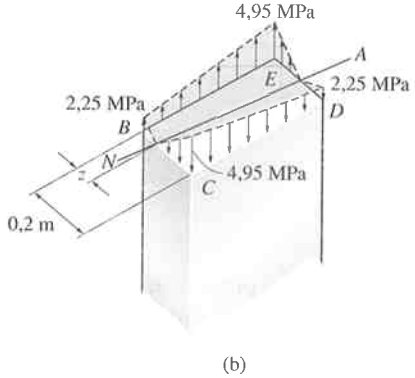
$$\sigma_B = -\frac{7{,}20(10^3)\ \text{N} \cdot \text{m}(0{,}2\ \text{m})}{1{,}067(10^{-3})\ \text{m}^4} + \frac{-9{,}60(10^3)\ \text{N} \cdot \text{m}(-0{,}1\ \text{m})}{0{,}2667(10^{-3})\ \text{m}^4} = 2{,}25\ \text{MPa}$$ ***Resposta***

$$\sigma_C = -\frac{7{,}20(10^3)\ \text{N} \cdot \text{m}(0{,}2\ \text{m})}{1{,}067(10^{-3})\ \text{m}^4} + \frac{-9{,}60(10^3)\ \text{N} \cdot \text{m}(0{,}1\ \text{m})}{0{,}2667(10^{-3})\ \text{m}^4} = -4{,}95\ \text{MPa}$$ ***Resposta***

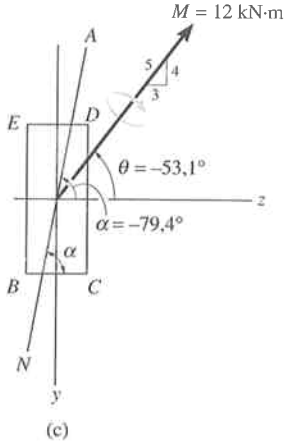
$$\sigma_D = -\frac{7{,}20(10^3)\ \text{N} \cdot \text{m}(-0{,}2\ \text{m})}{1{,}067(10^{-3})\ \text{m}^4} + \frac{-9{,}60(10^3)\ \text{N} \cdot \text{m}(0{,}1\ \text{m})}{0{,}2667(10^{-3})\ \text{m}^4} = -2{,}25\ \text{MPa}$$ ***Resposta***

$$\sigma_E = -\frac{7{,}20(10^3)\ \text{N} \cdot \text{m}(-0{,}2\ \text{m})}{1{,}067(10^{-3})\ \text{m}^4} + \frac{-9{,}60(10^3)\ \text{N} \cdot \text{m}(-0{,}1\ \text{m})}{0{,}2667(10^{-3})\ \text{m}^4} = 4{,}95\ \text{MPa}$$ ***Resposta***

A distribuição de tensão normal resultante foi desenhada com base nesses valores (Figura 6.35*b*). Como a superposição se aplica, a distribuição é linear conforme mostrado.



(b)



(c)

Direção do Eixo Neutro. A localização z do eixo neutro (EN) (Figura 6.35*b*) pode ser estabelecida por proporção. Ao longo da borda BC, é preciso que:

$$\frac{2{,}25 \text{ MPa}}{z} = \frac{4{,}95 \text{ MPa}}{(0{,}2 \text{ m} - z)}$$
$$0{,}450 - 2{,}25z = 4{,}95z$$
$$z = 0{,}0625 \text{ m}$$

Da mesma maneira, essa também é a distância de D ao eixo neutro na Figura 6.35*b*.

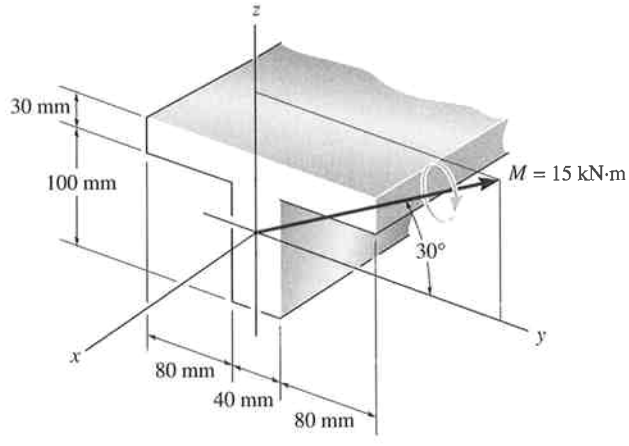
Podemos também estabelecer a direção do EN por meio da Equação 6.19, usada para especificar o ângulo α que o eixo faz com z ou com o eixo principal *máximo*. De acordo com a nossa convenção de sinal, θ deve ser medido do eixo $+z$ para o eixo $+y$. Por comparação, na Figura 6.35*c*, $\theta = -\text{tg}^{-1}\frac{4}{3} = -53{,}1°$ (ou $\theta = +306{,}9°$). Assim:

$$\text{tg } \alpha = \frac{I_z}{I_y} \text{ tg } \theta$$
$$\text{tg } \alpha = \frac{1{,}067(10^{-3}) \text{ m}^4}{0{,}2667(10^{-3}) \text{ m}^4} \text{ tg}(-53{,}1°)$$
$$\alpha = -79{,}4° \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Esse resultado é mostrado na Figura 6.35*c*. Usando o valor de z calculado anteriormente, verificar que se obtém a mesma resposta pela geometria da seção transversal.

EXEMPLO 6.19

A viga em T está submetida ao momento fletor de 15 kN · m como mostra a Figura 6.36*a*. Determinar a tensão normal máxima na viga e a direção do eixo neutro.



(a)

SOLUÇÃO

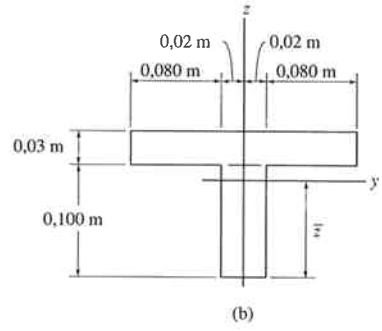
Componentes do Momento Interno. Os eixos y e z são eixos de inércia principais. Por quê? Pela Figura 6.36*a*, ambos os componentes do momento são positivos. Temos:

$$M_y = (15\ \text{kN} \cdot \text{m}) \cos 30° = 12{,}99\ \text{kN} \cdot \text{m}$$
$$M_z = (15\ \text{kN} \cdot \text{m}) \operatorname{sen} 30° = 7{,}50\ \text{kN} \cdot \text{m}$$

Propriedades da Seção. Em relação à Figura 6.36*b*, trabalhando com unidades métricas, temos:

$$\bar{z} = \frac{\Sigma \tilde{z} A}{\Sigma A} = \frac{[0{,}05\ \text{m}](0{,}100\ \text{m})(0{,}04\ \text{m}) + [0{,}115\ \text{m}](0{,}03\ \text{m})(0{,}200\ \text{m})}{(0{,}100\ \text{m})(0{,}04\ \text{m}) + (0{,}03\ \text{m})(0{,}200\ \text{m})}$$

$$= 0{,}0890\ \text{m}$$



(b)

Usando o teorema dos eixos paralelos do Apêndice A, $I = \bar{I} + Ad^2$, os momentos de inércia principais são, portanto:

$$I_z = \frac{1}{12}(0{,}100\ \text{m})(0{,}04\ \text{m})^3 + \frac{1}{12}(0{,}03\ \text{m})(0{,}200\ \text{m})^3 = 20{,}53(10^{-6})\text{m}^4$$

$$I_y = \left[\frac{1}{12}(0{,}04\ \text{m})(0{,}100\ \text{m})^3 + (0{,}100\ \text{m})(0{,}04\ \text{m})(0{,}0890\ \text{m} - 0{,}05\ \text{m})^2\right]$$
$$+ \left[\frac{1}{12}(0{,}200\ \text{m})(0{,}03\ \text{m})^3 + (0{,}200\ \text{m})(0{,}03\ \text{m})(0{,}115\ \text{m} - 0{,}0890\ \text{m})^2\right]$$
$$= 13{,}92(10^{-6})\ \text{m}^4$$

Tensão de Flexão Máxima. Os componentes do momento são mostrados na Figura 6.36*c*. Por inspeção, o maior esforço de *tração* ocorre no ponto *B*, visto que por superposição ambos os componentes do momento criam esforço de tração. Da mesma maneira, o maior esforço de *compressão* ocorre no ponto *C*. Então,

$$\sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

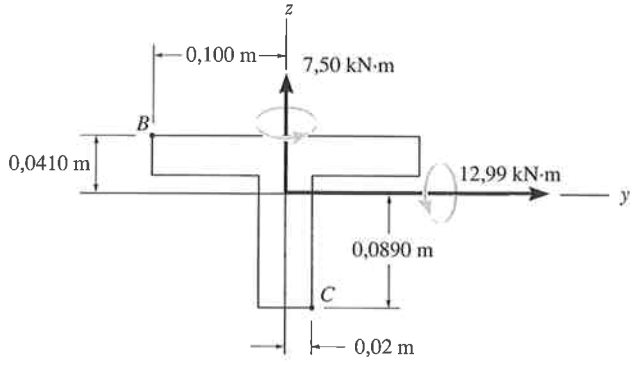
$$\sigma_B = -\frac{7{,}50\ \text{kN} \cdot \text{m}\ (-0{,}100\ \text{m})}{20{,}53(10^{-6})\ \text{m}^4} + \frac{12{,}99\ \text{kN} \cdot \text{m}(0{,}0410\ \text{m})}{13{,}92(10^{-6})\ \text{m}^4}$$

$$= 74{,}8\ \text{MPa}$$

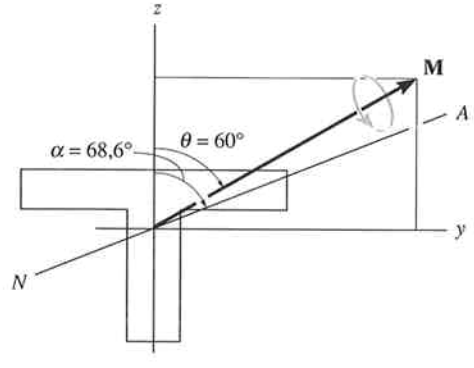
$$\sigma_C = -\frac{7{,}50\ \text{kN} \cdot \text{m}\ (0{,}020\ \text{m})}{20{,}53(10^{-6})\ \text{m}^4} + \frac{12{,}99\ \text{kN} \cdot \text{m}\ (-0{,}0890\ \text{m})}{13{,}92(10^{-6})\ \text{m}^4}$$

$$= -90{,}4\ \text{MPa}$$ ***Resposta***

Por comparação, a maior tensão normal é, portanto, de compressão e ocorre no ponto *C*.



(c)



(d)

Figura 6.36

Direção do Eixo Neutro. Ao aplicar a Equação 6.19 é importante assegurar-se de que os ângulos α e θ sejam definidos corretamente. Como já dito, y deve representar o eixo de momento de inércia principal *mínimo* e z, o eixo de momento de inércia principal *máximo*. Esses eixos estão posicionados apropriadamente aqui, visto que $I_y < I_z$. De acordo com tal configuração, θ e α são positivos no sentido do eixo $+z$ para o eixo $+y$. Portanto, pela Figura 6.36*a*, $\theta = +60°$. Assim:

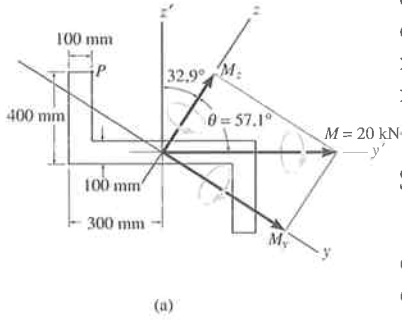
$$\text{tg } \alpha = \left(\frac{20{,}53(10^{-6})\ \text{m}^4}{13{,}92(10^{-6})\ \text{m}^4} \right) \text{tg } 60°$$

$$\alpha = 68{,}6° \qquad \textit{Resposta}$$

O eixo neutro é mostrado na Figura 6.36*d*. Como esperado, localiza-se entre o eixo y e a linha de ação de **M**.

EXEMPLO 6.20

A seção em Z mostrada na Figura 6.37*a* está submetida ao momento fletor $M = 20$ kN · m. De acordo com os métodos do Apêndice A (consultar os exemplos A.4 ou A.5), os eixos principais y e z estão orientados como mostrado, de modo tal que representam os momentos de inércia principais mínimo e máximo, $I_y = 0{,}960(10^{-3})\ \text{m}^4$ e $I_z = 7{,}54(10^{-3})\ \text{m}^4$, respectivamente. Determinar a tensão normal no ponto P e a direção do eixo neutro.



(a)

SOLUÇÃO

Para se usar a Equação 6.19, é importante que o eixo z seja o eixo principal do momento de inércia *máximo*, pois a maior parte da área está distante daquele eixo.

Componentes do Momento Interno. Pela Figura 6.37*a*:

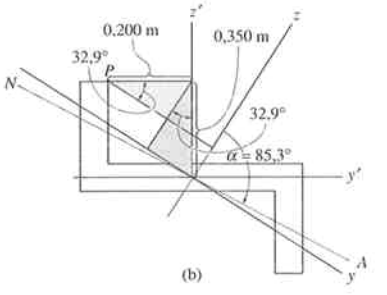
$$M_y = 20\ \text{kN} \cdot \text{m sen } 57{,}1° = 16{,}79\ \text{kN} \cdot \text{m}$$

$$M_z = 20\ \text{kN} \cdot \text{m cos } 57{,}1° = 10{,}86\ \text{kN} \cdot \text{m}$$

Tensão de Flexão. As coordenadas y e z do ponto P devem ser determinadas primeiro. Observe que as coordenadas y' e z' de P são $(-0{,}2\ \text{m}, 0{,}35\ \text{m})$. Usando os triângulos sombreados da construção mostrada na Figura 6.37*b*, temos:

$$y_P = -0{,}35 \text{ sen } 32{,}9° - 0{,}2 \text{ cos } 32{,}9° = -0{,}3580\ \text{m}$$

$$z_P = 0{,}35 \text{ cos } 32{,}9° - 0{,}2 \text{ sen } 32{,}9° = 0{,}1852\ \text{m}$$



(b)

Figura 6.37

Aplicando a Equação 6.17, temos:

$$\sigma_P = -\frac{M_z\, y_P}{I_z} + \frac{M_y\, z_P}{I_y}$$

$$= -\frac{(10{,}86\ \text{kN} \cdot \text{m})(-0{,}3580\ \text{m})}{7{,}54(10^{-3})\ \text{m}^4} + \frac{(16{,}79\ \text{kN} \cdot \text{m})(0{,}1852\ \text{m})}{0{,}960(10^{-3})\ \text{m}^4}$$

$$= 3{,}76\ \text{MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

Direção do Eixo Neutro. O ângulo $\theta = 57{,}1°$ é mostrado na Figura 6.37*a*. Assim:

$$\text{tg } \alpha = \left[\frac{7{,}54(10^{-3})\ \text{m}^4}{0{,}960(10^{-3})\ \text{m}^4} \right] \text{tg } 57{,}1°$$

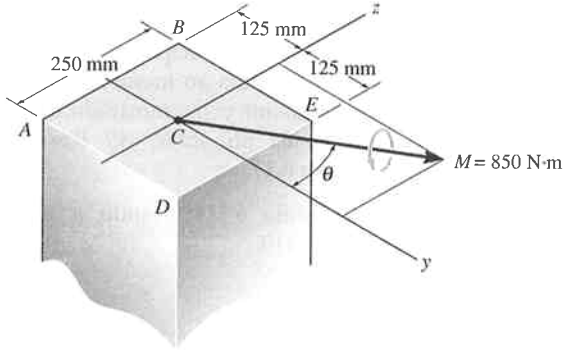
$$\alpha = 85{,}3° \qquad \textit{Resposta}$$

A Figura 6.37*b* mostra onde está o eixo neutro.

PROBLEMAS

***6.96.** O elemento tem seção transversal quadrada e está sujeito ao momento resultante $M = 850$ N · m como mostrado. Determinar a tensão de flexão em cada canto e desenhar a distribuição de tensão produzida por **M**. Assumir que $\theta = 45°$.

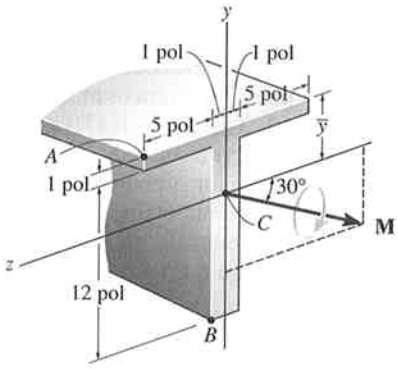
6.97. O elemento tem seção transversal quadrada e está sujeito ao momento resultante $M = 850$ N · m como mostrado. Determinar a tensão de flexão em cada canto e desenhar a distribuição de tensão produzida por **M**. Assumir $\theta = 30°$.



Problemas 6.96/6.97

6.98. Determinar a intensidade máxima do momento fletor **M** de modo que a tensão de flexão no elemento não exceda 24 ksi. A localização $\bar{y}$ do centróide C deve ser determinada.

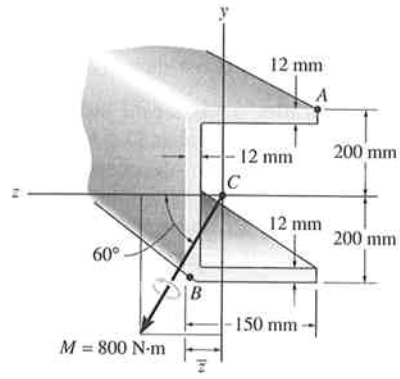
6.99. O momento que atua sobre a seção transversal da viga T tem intensidade $M = 15$ kip · pés e a direção mostrada. Determinar a tensão de flexão nos pontos A e B. A localização $\bar{y}$ do centróide C deve ser determinada.



Problemas 6.98/6.99

***6.100.** Se o momento interno que atua sobre a seção transversal do suporte tem intensidade M = 800 N · m e a direção mostrada, qual é a tensão de flexão nos pontos A e B? A localização $\bar{z}$ do centróide C da área da seção transversal do suporte deve ser determinada. Especificar também a orientação do eixo neutro.

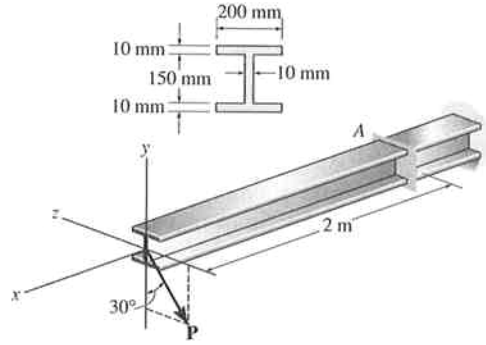
6.101. O momento resultante que atua sobre a seção transversal do suporte de alumínio tem intensidade M = 800 N · m e a direção mostrada. Determinar a tensão de flexão máxima no suporte. A localização $\bar{y}$ do centróide C da área da seção transversal do suporte deve ser determinada. Especificar também a orientação do eixo neutro.



Problemas 6.100/6.101

6.102. A viga de aço duplo em T e em balanço está sujeita à força concentrada **P** em sua extremidade. Determinar a máxima intensidade da força de modo que a tensão de flexão desenvolvida na seção A não exceda $\sigma_{adm} = 180$ MPa.

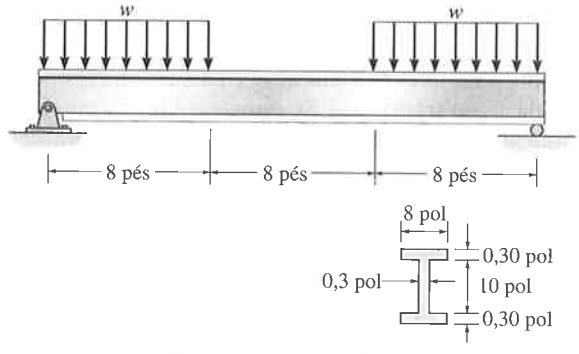
6.103. A viga de aço duplo em T e em balanço está sujeita à força concentrada $P = 600$ N em sua extremidade. Determinar a tensão de flexão máxima desenvolvida na seção A da viga.



Problemas 6.102/6.103

***6.104.** A viga de aço tem a área da seção transversal mostrada. Determinar a máxima intensidade de carga distribuída w que ela pode suportar, de modo que a tensão de flexão não exceda $\sigma_{máx} = 22$ ksi.

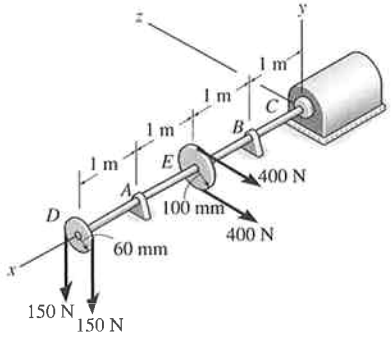
6.105. A viga de aço tem a área da seção transversal mostrada. Se $w = 5$ kip/pé, determinar a tensão de flexão máxima absoluta na viga.



Problemas 6.104/6.105

6.106. Como mostrado, o eixo de 30 mm de diâmetro está submetido às cargas vertical e horizontal das duas polias. Ele é apoiado por dois mancais em A e B que não oferecem resistência a cargas axiais. Além disso, supõe-se que o acoplamento do motor em C não lhe ofereça qualquer apoio. Determinar a tensão de flexão máxima desenvolvida no eixo.

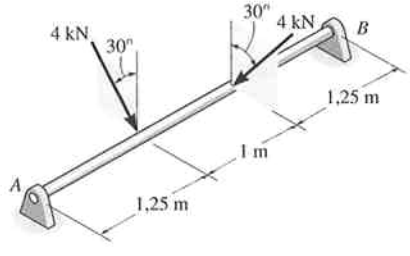
6.107. Como mostrado, o eixo está submetido às cargas vertical e horizontal das duas polias D e E. Ele é apoiado por dois mancais em A e B que não oferecem resistência a carga axial. Além disso, supõe-se que o acoplamento do motor em C não lhe ofereça qualquer apoio. Qual diâmetro o eixo d precisará ter se a tensão de flexão admissível para o material for $\sigma_{adm} = 180$ MPa.



Problemas 6.106/6.107

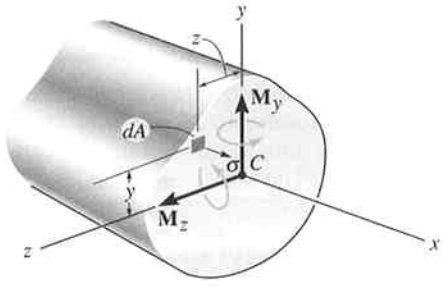
***6.108.** O eixo de aço de 65 mm de diâmetro está submetido a duas cargas que atuam nas direções mostradas. Se os mancais em A e B não exercerem força axial sobre o eixo, qual será a tensão de flexão máxima absoluta nele desenvolvida?

6.109. O eixo de aço está submetido a duas cargas que atuam nas direções mostradas. Se os mancais em A e B não exercerem força axial sobre o eixo, qual diâmetro ele precisará ter, supondo que a tensão de flexão admissível seja $\sigma_{adm} = 180$ MPa?



Problemas 6.108/6.109

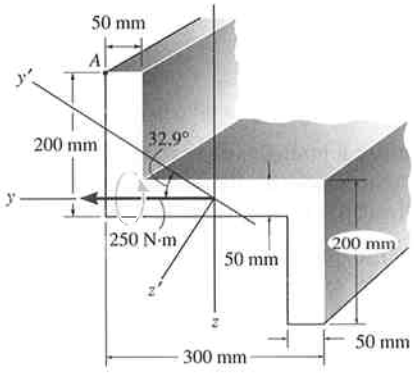
6.110. Consideremos o caso geral de uma viga prismática submetida aos componentes de momento fletor $\mathbf{M}_y$ e $\mathbf{M}_z$, como mostrado, e na qual os eixos x, y, z passam através do centróide da seção transversal. Se o material for linear-elástico, a tensão normal na viga será uma função linear da localização, tal que $\sigma = a + by + cz$. Usando as condições de equilíbrio $0 = \int_A \sigma\, dA$, $M_y = \int_A z\sigma dA$, $M_z = \int_A - y\sigma\, dA$, determinar as constantes a, b e c e mostrar que a tensão normal também pode ser dada pela equação $\sigma = [-(M_z I_y + M_y I_{yz})y + (M_y I_z + M_z I_{yz})\, z]/(I_y I_z - I_{yz}^2)$, cujos momentos e produtos de inércia são definidos no Apêndice A.



Problema 6.110

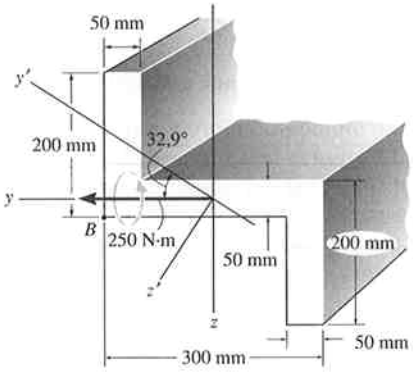
6.111. De acordo com as técnicas descritas no Apêndice A (exemplos A.5 ou A.6), a seção Z tem os momentos de inércia principais $I_{y'} = 0{,}060(10^{-3})$ m^4 e $I_{z'} = 0{,}471(10^{-3})$ m^4, calculados em torno dos eixos de inércia principais y' e z', respectivamente. Se a seção for submetida ao momento $M = 250$ N · m direcionado horizontalmente como mostrado, qual será a tensão de flexão produzida no ponto A? Resolver o problema usando a Equação 6.17.

***6.112.** Resolver o Problema 6.111 usando a equação desenvolvida no Problema 6.110.



Problemas 6.111/6.112

6.113. De acordo com as técnicas descritas no Apêndice A (exemplos A.5 ou A.6), a seção Z tem os momentos de inércia principais, $I_{y'} = 0{,}060(10^{-3})$ m^4 e $I_{z'} = 0{,}471(10^{-3})$ m^4, calculados em torno dos eixos de inércia principais y' e z', respectivamente. Se a seção for submetida ao momento $M = 250$ N · m direcionado horizontalmente como mostrado, qual será a tensão de flexão produzida no ponto B? Resolver o problema usando a Equação 6.17.



Problema 6.113

*6.6 VIGAS COMPOSTAS

As vigas construídas com dois ou mais materiais são chamadas ***vigas compostas***. Os exemplos incluem as feitas de madeira com tiras de aço nas partes inferior ou superior (Figura 6.38*a*) ou, mais comumente, as vigas de concreto reforçadas com barras de aço (Figura 6.38*b*). Os engenheiros projetam vigas desse modo propositadamente, a fim de criar um modo mais eficiente de suportar as cargas aplicadas. Por exemplo: foi mostrado na Seção 3.3 que o concreto é excelente para suportar o esforço de compressão, mas resiste pouco ao de tração. As barras de aço mostradas na Figura 6.38*b* foram colocadas na zona de tensão da seção transversal da viga, a fim de resistir aos esforços de tração que resultam do momento **M**.

Como foi desenvolvida para vigas de material homogêneo, a fórmula da flexão não pode ser aplicada diretamente para determinar a tensão normal em uma viga composta. Entretanto, nesta seção, desenvolveremos um método para 'transformar' a seção transversal, de modo que ela pareça ser feita de um único material. Uma vez processada a modificação, a fórmula da flexão pode então ser usada para analisar a tensão.

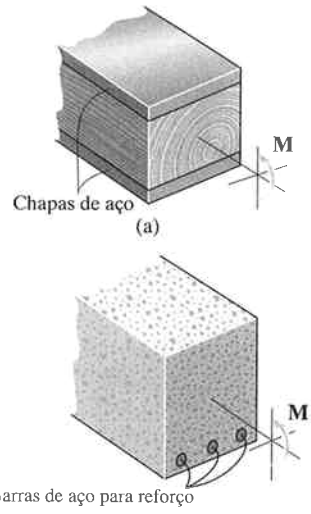


Figura 6.38

Para explicar como aplicar o *método da seção transformada*, consideremos a viga composta feita de dois materiais, 1 e 2, com as seções transversais mostradas na Figura 6.39*a*. Se for aplicado um momento fletor nessa viga, assim como ocorre na viga homogênea, a área total da seção transversal *permanecerá plana* após a flexão e, portanto, as deformações normais variarão linearmente de zero no eixo neutro ao máximo no material mais afastado desse eixo (Figura 6.39*b*). Desde que o material tenha comportamento linear-elástico, a lei de Hooke aplica-se e assim, em qualquer ponto, a tensão normal no material 1 será determinada por $\sigma = E_1\epsilon$. Da mesma forma, a distribuição de tensão no material 2 será encontrada por $\sigma = E_2\epsilon$. Obviamente, se o material 1 for mais *rígido* que o 2 — por exemplo, aço *versus* borracha —, a maior parte da carga será suportada por ele, visto que $E_1 > E_2$. Supondo que esse seja o caso, a distribuição de tensão terá a aparência mostrada nas figuras 6.39*c* ou 6.39*d*. Observe o salto na tensão que ocorre na junção dos materiais. Aqui a *deformação* é a *mesma*, mas, como o módulo de elasticidade ou rigidez dos materiais muda subitamente, a tensão também muda. Para localizar o eixo neutro e determinar a tensão máxima na viga, com base nessa distribuição de tensão, usamos o procedimento de tentativa e erro. Isso requer a satisfação de duas condições: a distribuição de tensão deve produzir uma força resultante nula na seção transversal, e o momento da distribuição de tensão em torno do eixo neutro deve ser igual a **M**.

O modo mais simples de satisfazer a essas duas condições, no entanto, é transformar a viga, de modo que ela pareça ser feita de um *único material*. Por exemplo: se a viga consistir inteiramente do material 2 menos rígido, a seção transversal terá a aparência mostrada na Figura 6.39*e*. Nesse caso, a altura h da viga permanecerá a *mesma*, uma vez que a distribuição da deformação mostrada na Figura 6.39*b* deve ser preservada. Entretanto, a porção superior da viga se alargará a fim de suportar uma carga *equivalente* à suportada pelo material 1, mais rígido (Figura 6.39*d*). A largura necessária é determinada considerando-se a força $d\mathbf{F}$ que atua na área $dA = dz\,dy$ da viga (Figura 6.39*a*). A força é $dF = \sigma\,dA = (E_1\epsilon)dz\,dy$. Por outro lado, se a largura de um *elemento correspondente* de altura dy na Figura 6.39*e* for $n\,dz$, então $dF' = \sigma'\,dA' = (E_2\epsilon)n\,dz\,dy$. Calculando essas forças, de modo que produzam o mesmo momento em torno do eixo z, temos:

$$E_1\epsilon\,dz\,dy = E_2\epsilon n\,dz\,dy$$

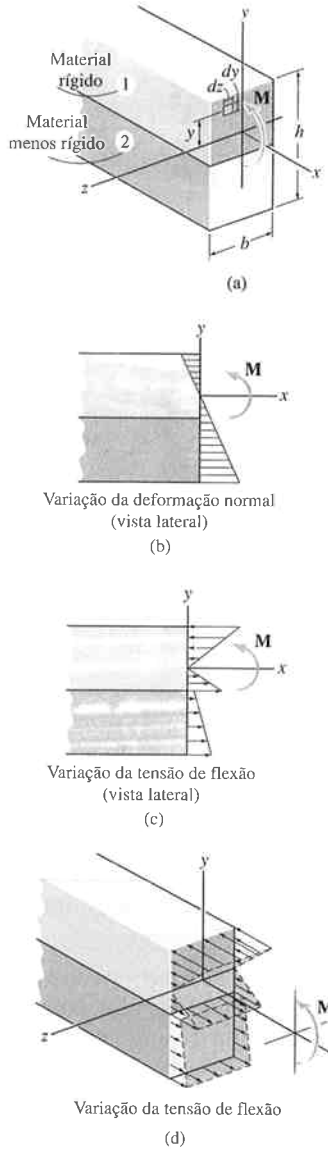
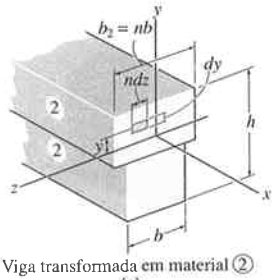
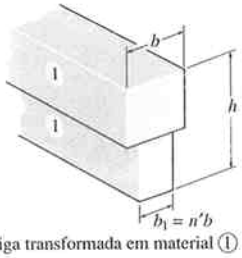


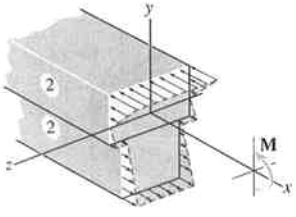
Figura 6.39



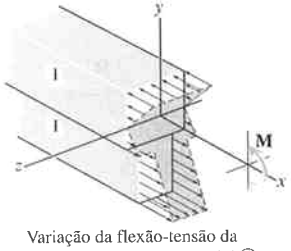
Viga transformada em material ②
(e)



Viga transformada em material ①
(f)



Variação da flexão-tensão da viga transformada em material ②
(g)



Variação da flexão-tensão da viga transformada em material ①
(h)

Figura 6.39

ou

$$n = \frac{E_1}{E_2} \tag{6.20}$$

O número adimensional n é chamado ***fator de transformação***. Ele indica que a seção transversal de largura b na viga original (Figura 6.39*a*) deve ser aumentada para a largura $b_2 = nb$ na região em que o material 1 está sendo transformado em material 2 (Figura 6.39*e*). De maneira similar, se o material 2, menos rígido, for transformado no material 1, mais rígido, a seção transversal terá a aparência da Figura 6.39*f*. Aqui a largura do material 2 mudou para $b_1 = n'b$, onde $n' = E_2/E_1$. Observe que nesse caso o fator de transformação n' deve ser *menor que um*, uma vez que $E_1 > E_2$. Em outras palavras, precisamos de menos material mais rígido para suportar um dado momento.

Uma vez que a viga foi transformada em uma viga de material *único*, a distribuição de tensão normal sobre a seção transversal transformada será linear, como mostrado nas figuras 6.39*g* ou 6.39*h*. Conseqüentemente, o centróide (eixo neutro) e o momento de inércia da área transformada podem ser determinados e a fórmula da flexão aplicada da maneira usual, para determinar a tensão em cada ponto da viga transformada. Perceba que a tensão na viga transformada é equivalente à tensão no *mesmo material* da viga verdadeira. Para o *material transformado*, no entanto, a tensão encontrada na seção transformada tem de ser multiplicada pelo fator de transformação n (ou n'), visto que a área do material transformado, $dA' = n\,dz\,dy$, é n vezes a área do material verdadeiro $dA = dz\,dy$. Ou seja:

$$dF = \sigma\,dA = \sigma'\,dA'$$

$$\sigma\,dz\,dy = \sigma' n\,dz\,dy$$

$$\sigma = n\sigma' \tag{6.21}$$

Os exemplos 6.21 e 6.22 ilustram numericamente a aplicação do método da seção transformada.

PONTOS IMPORTANTES

- *Vigas compostas* são feitas de materiais diferentes a fim de suportar eficientemente a carga. A aplicação da fórmula da flexão requer que o material seja homogêneo e, desse modo, a seção transversal da viga deve ser transformada, de maneira que pareça feita de um único material. Só assim pode-se usar a fórmula para calcular a tensão de flexão.
- O *fator de transformação* é uma relação entre os módulos dos diferentes materiais que compõem a viga. Usado como multiplicador, converte as dimensões da seção transversal da viga composta naquelas pertencentes a uma viga feita de um único material, de modo que esta viga tenha a mesma resistência da viga composta. O material rígido é, assim, substituído por maior quantidade de material mais mole e vice-versa.
- Uma vez determinada a tensão na seção transformada, ela deve ser multiplicada pelo fator de transformação para se obter a tensão na viga verdadeira.

EXEMPLO 6.21

Uma viga composta é feita de madeira e reforçada com uma tira de aço em sua parte inferior. Ela tem a seção transversal mostrada na Figura 6.40*a*. Se for submetida ao momento fletor $M = 20$ kN · m, qual será a tensão normal nos pontos B e C? Adotar $E_{mad} = 12$ GPa e $E_{aço} = 200$ GPa.

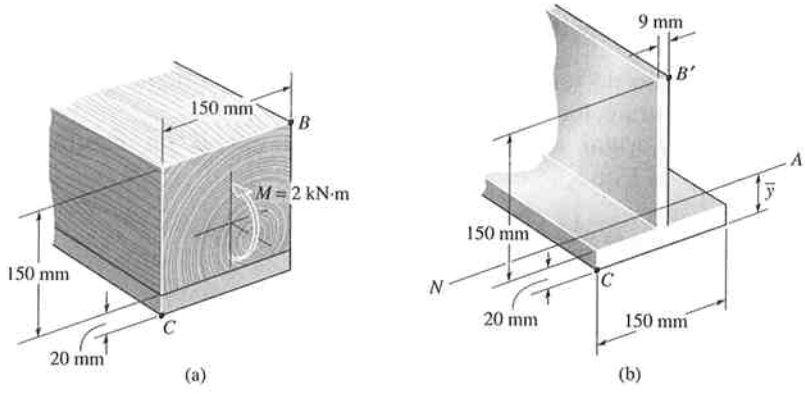


Figura 6.40

SOLUÇÃO

Propriedades da Seção. Apesar de a escolha ser arbitrária, nesse caso vamos transformar a seção em uma feita inteiramente de aço. Como o aço tem maior rigidez que a madeira ($E_{aço} > E_{mad}$), a largura da madeira deve ser *diminuída* para uma largura equivalente ao aço. Portanto, n deve ser menor que um. Por ser esse o caso, $n = E_{mad}/E_{aço}$, de modo que:

$$b_{aço} = nb_{mad} = \frac{12 \text{ GPa}}{200 \text{ GPa}} (150 \text{ mm}) = 9 \text{ mm}$$

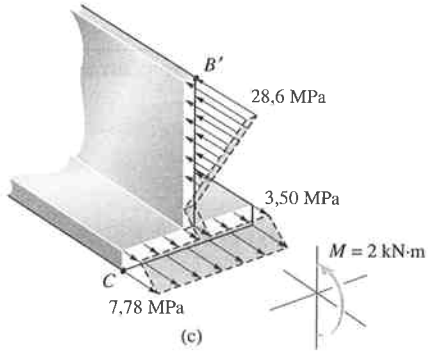
A seção transformada é mostrada na Figura 6.40*b*.

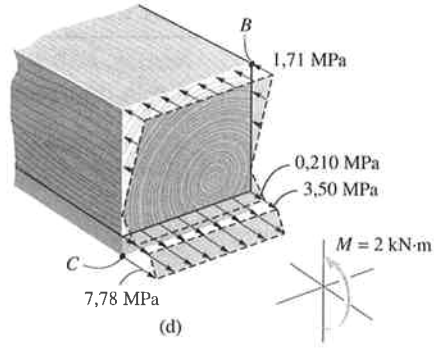
A localização do centróide (eixo neutro), calculada a partir de um eixo de referência localizado na parte *inferior* da seção, é:

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} A}{\Sigma A} = \frac{[0{,}01 \text{ m}](0{,}02 \text{ m})(0{,}150 \text{ m}) + [0{,}095 \text{ m}](0{,}009 \text{ m})(0{,}150 \text{ m})}{0{,}02 \text{ m}(0{,}150 \text{ m}) + 0{,}009 \text{ m}(0{,}150 \text{ m})} = 0{,}03638 \text{ m}$$

O momento de inércia em torno do eixo neutro é, portanto:

$$I_{EN} = \left[\frac{1}{12}(0{,}150 \text{ m})(0{,}02 \text{ m})^3 + (0{,}150 \text{ m})(0{,}02 \text{ m})(0{,}03638 \text{ m} - 0{,}01 \text{ m})^2\right] + \left[\frac{1}{12}(0{,}009 \text{ m})(0{,}150 \text{ m})^3 + (0{,}009 \text{ m})(0{,}150 \text{ m})(0{,}095 \text{ m} - 0{,}03638 \text{ m})^2\right] = 9{,}358(10^{-6}) \text{ m}^4$$





Tensão Normal. Aplicando a fórmula da flexão, temos que a tensão normal em B' e C é:

$$\sigma_{B'} = \frac{2\text{ kN} \cdot \text{m}(0{,}170\text{ m} - 0{,}03638\text{ m})}{9{,}358(10^{-6})\text{ m}^4} = 28{,}6\text{ MPa}$$

$$\sigma_C = -\frac{2\text{ kN} \cdot \text{m}(0{,}03638\text{ m})}{9{,}358(10^{-6})\text{ m}^4} = 7{,}78\text{ MPa} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

A distribuição de tensão normal na seção transformada (toda de aço) é mostrada na Figura 6.40*c*.

A tensão normal na madeira, localizada em B na Figura 6.40*a*, é determinada pela Equação 6.21; ou seja,

$$\sigma_B = n\sigma_{B'} = \frac{12\text{ GPa}}{200\text{ GPa}}(28{,}56\text{ MPa}) = 1{,}71\text{ MPa} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Usando esses conceitos, mostrar que a tensão normal no aço e na madeira no ponto em que estão em contato é $\sigma_{aço} = 3{,}50$ MPa e $\sigma_{mad} = 0{,}210$ MPa, respectivamente. A distribuição de tensão normal na viga verdadeira é mostrada na Figura 6.40*d*.

EXEMPLO 6.22

A fim de reforçar a viga de aço, colocou-se entre seus flanges uma tábua de carvalho como mostra a Figura 6.41*a*. Se a tensão normal admissível do aço é $(\sigma_{\text{adm}})_{aço} = 24$ ksi e da madeira $(\sigma_{\text{adm}})_{mad} = 3$ ksi, qual momento fletor máximo a viga pode suportar, com e sem o reforço? $E_{aço} = 29(10^3)$ ksi, $E_{mad} = 1{,}60(10^3)$ ksi. O momento de inércia da viga de aço é $I_z = 20{,}3\text{ pol}^4$, e sua área da seção transversal é $A = 8{,}79\text{ pol}^2$.

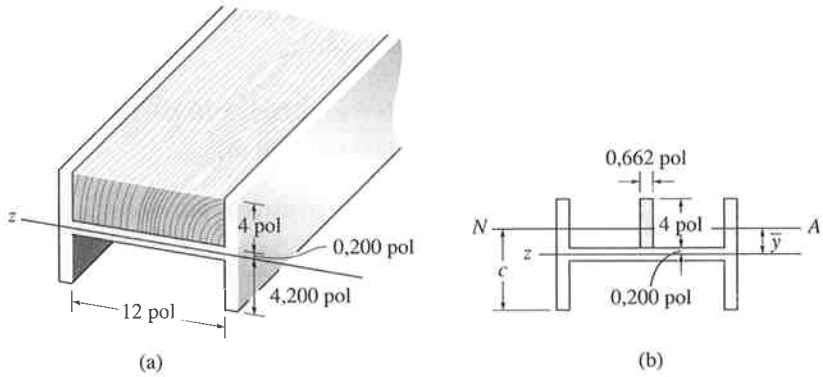


Figura 6.41

SOLUÇÃO

Sem a Tábua. Nesse caso, o eixo neutro coincide com o eixo z. A aplicação direta da fórmula da flexão à viga de aço dá:

$$(\sigma_{\text{adm}})_{aço} = \frac{Mc}{I_z}$$

$$24\text{ kip/pol}^2 = \frac{M(4{,}200\text{ pol})}{20{,}3\text{ pol}^4}$$

$$M = 116\text{ kip} \cdot \text{pol} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Com a Tábua. Como agora temos uma viga composta, devemos transformar a seção em um material único. Será mais fácil transformar a madeira em uma quantidade equivalente de aço. Para fazer isso, $n = E_{mad}/E_{aço}$. Por quê? Assim, a largura da quantidade de aço equivalente é:

$$b_{aço} = nb_{mad} = \frac{1{,}60(10^3)\text{ ksi}}{29(10^3)\text{ ksi}}(12\text{ pol}) = 0{,}662\text{ pol}$$

A seção transformada é mostrada na Figura 6.41*b*. O eixo neutro está em:

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} A}{\Sigma A} = \frac{[0](8{,}79\text{ pol}^2) + [2{,}20\text{ pol}](4\text{ pol})(0{,}662\text{ pol})}{8{,}79\text{ pol}^2 + 4(0{,}662\text{ pol}^2)}$$

$$= 0{,}5093\text{ pol}$$

O momento de inércia em torno do eixo neutro é:

$$I = [20{,}3\text{ pol}^4 + (8{,}79\text{ pol}^2)(0{,}5093\text{ pol})^2] + \left[\frac{1}{12}(0{,}662\text{ pol})(4\text{ pol})^3 + (0{,}662\text{ pol})(4\text{ pol})(2{,}200\text{ pol} - 0{,}5093\text{ pol})^2\right]$$

$$= 33{,}68\text{ pol}^4$$

A tensão normal máxima no aço ocorre na parte *inferior* da viga (Figura 6.41*b*). Aqui $c = 4{,}200\text{ pol} + 0{,}5093\text{ pol} = 4{,}7093\text{ pol}$. O momento máximo baseado na tensão admissível para o aço é, então:

$$(\sigma_{adm})_{aço} = \frac{Mc}{I}$$

$$24\text{ kip/pol}^2 = \frac{M(4{,}7093\text{ pol})}{33{,}68\text{ pol}^4}$$

$$M = 172\text{ kip} \cdot \text{pol}$$

A tensão normal máxima na madeira ocorre no topo da viga (Figura 6.41*b*). Aqui $c' = 4{,}20\text{ pol} - 0{,}5093\text{ pol} = 3{,}6907\text{ pol}$. Como $\sigma_{mad} = n\sigma_{aço}$, o momento máximo baseado na tensão admissível para a madeira é:

$$(\sigma_{adm})_{mad} = n\frac{M'c'}{I}$$

$$3\text{ kip/pol}^2 = \left[\frac{1{,}60(10^3)\text{ ksi}}{29(10^3)\text{ ksi}}\right]\frac{M'(3{,}6907\text{ pol})}{33{,}68\text{ pol}^4}$$

$$M' = 496\text{ kip} \cdot \text{pol}$$

O momento máximo é limitado pela tensão admissível no aço. Então, por comparação:

$$M = 172\text{ kip} \cdot \text{pol} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Observe também que, ao usar a tábua como reforço, conseguimos que a resistência da viga ao momento aumente 48%.

*6.7 VIGAS DE CONCRETO ARMADO

Todas as vigas submetidas a flexão pura devem resistir aos esforços de tração e compressão. O concreto, entretanto, é muito suscetível a fraturas quando está sob tensão e, portanto, por si só não seria adequado para resistir a um momento fletor.[3] A fim de contornar essa deficiência, os engenheiros

[3] A inspeção de seu diagrama particular de tensão-deformação (Figura 3.11) revela que o concreto pode ser 12,5 vezes mais resistente na compressão que na tração.

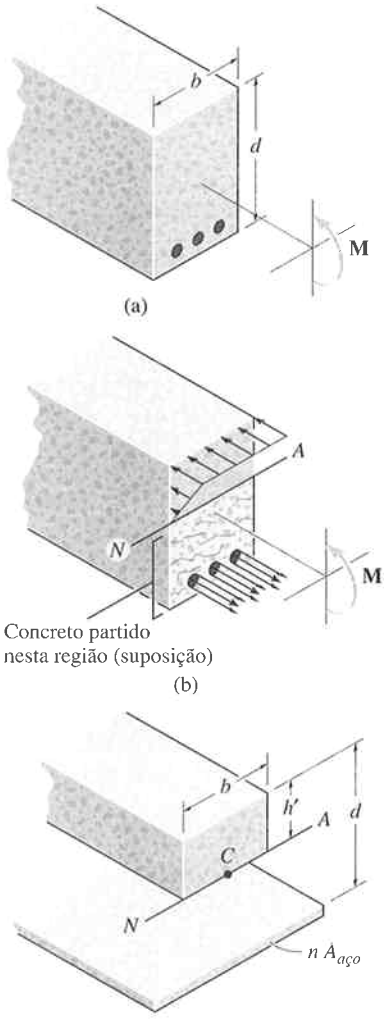


Figura 6.42

colocam barras de aço para reforço no interior da viga de concreto, no local em que o material sofre tensão (Figura 6.42*a*). Para melhores resultados, as barras são colocadas o mais longe possível do eixo neutro da viga, de modo que o momento criado pelas forças nelas desenvolvidas seja maior em torno do eixo neutro. Por outro lado, é preciso cobrir as barras com concreto, para protegê-las contra corrosão ou perda de resistência no caso de incêndio. No projeto, a capacidade do concreto para suportar carga de tração é desprezada, uma vez que sua possível fratura é imprevisível. Como conseqüência, supõe-se que a distribuição da tensão normal que atua sobre a área da seção transversal de uma viga de concreto armado tenha a aparência mostrada na Figura 6.42*b*.

Para analisar a tensão, precisamos localizar o eixo neutro e determinar a tensão máxima no aço e no concreto. Assim, a área do aço $A_{aço}$ é primeiro transformada em área equivalente de concreto, por meio do fator de transformação $n = E_{aço}/E_c$. Essa relação, que dá $n > 1$, foi escolhida porque é necessária uma quantidade de concreto 'maior' para substituir o aço. A área transformada é $nA_{aço}$, e a seção transformada tem a aparência mostrada na Figura 6.42*c*. Aqui d representa a distância do topo da viga até o aço (transformado), b é a largura da viga e h' é a distância, ainda desconhecida, do topo da viga até o eixo neutro. Podemos obter h' usando o fato de que o centróide C da área da seção transversal da seção transformada fica no eixo neutro (Figura 6.42*c*). Portanto, em relação ao eixo neutro, o momento das duas áreas, $\Sigma \tilde{y}A$, deve ser nulo, visto que $\bar{y} = \Sigma \tilde{y}A/\Sigma A = 0$. Então:

$$bh'\left(\frac{h'}{2}\right) - nA_{aço}(d - h') = 0$$

$$\frac{b}{2}h'^2 + nA_{aço}h' - nA_{aço}d = 0$$

Uma vez obtido h' por meio dessa equação quadrática, a solução prossegue da maneira usual para se obter a tensão na viga.

EXEMPLO 6.23

A viga de concreto armado tem a área da seção transversal mostrada na Figura 6.43*a*. Se ela for submetida ao momento fletor $M = 60$ kip · pés, qual será a tensão normal em cada barra de aço e a tensão normal máxima no concreto? Adotar $E_{aço} = 29(10^3)$ ksi e $E_c = 3{,}6(10^3)$ ksi.

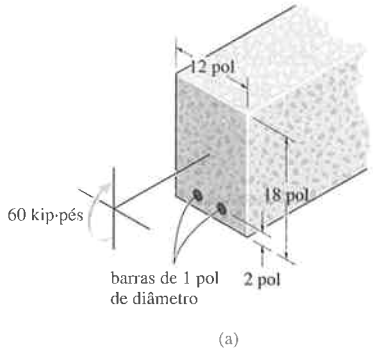


Figura 6.43

SOLUÇÃO

Como a viga é feita de concreto, na análise que se segue desprezamos sua resistência a esforço de tração.

Propriedades da Seção. A área total do aço $A_{aço} = 2[\pi(0{,}5 \text{ pol})^2] = 1{,}571 \text{ pol}^2$ será transformada em uma área de concreto equivalente (Figura 6.43*b*). Nesse caso,

$$A' = nA_{aço} = \frac{29(10^3) \text{ ksi}}{3{,}6(10^3) \text{ ksi}}(1{,}571 \text{ pol}^2) = 12{,}65 \text{ pol}^2$$

O centróide deve se localizar no eixo neutro. Assim, $\Sigma \tilde{y}A = 0$, ou:

$$12 \text{ pol}(h')\frac{h'}{2} - 12{,}65 \text{ pol}^2 (16 \text{ pol} - h') = 0$$

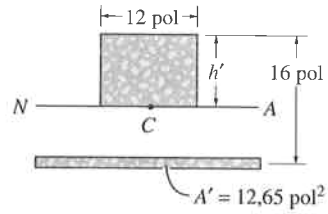
$$h'^2 + 2{,}11h' - 33{,}7 = 0$$

Calculando a raiz positiva:

$$h' = 4{,}85 \text{ pol}$$

Com esse valor de h', o momento de inércia da seção transformada, calculado em torno do eixo neutro, é:

$$I = [\frac{1}{12}(12 \text{ pol})(4{,}85 \text{ pol})^3 + 12 \text{ pol}(4{,}85 \text{ pol})(\frac{4{,}85 \text{ pol}}{2})^2]$$
$$+ 12{,}65 \text{ pol}^2(16 \text{ pol} - 4{,}85 \text{ pol})^2$$
$$= 2.029 \text{ pol}^4$$



(b)

Tensão Normal. Aplicando a fórmula da flexão à seção transformada, temos que a tensão normal máxima no concreto é:

$$(\sigma_c)_{máx} = \frac{[60 \text{ kip} \cdot \text{pés}(12 \text{ pol/pé})](4{,}85 \text{ pol})}{2.029 \text{ pol}^4} = 1{,}72 \text{ ksi}$$ ***Resposta***

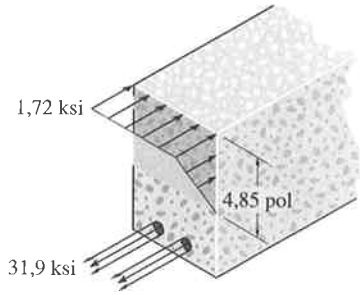
A tensão normal resistida pela tira de 'concreto', que substituiu o aço, é:

$$\sigma'_c = \frac{[60 \text{ kip} \cdot \text{pés}(12 \text{ pol/pé})](16 \text{ pol} - 4{,}85 \text{ pol})}{2.029 \text{ pol}^4} = 3{,}96 \text{ ksi}$$

A tensão normal em cada barra de reforço é, portanto:

$$\sigma_{aço} = n\sigma'_c = \left(\frac{29(10^3) \text{ ksi}}{3{,}6(10^3) \text{ ksi}}\right)3{,}96 \text{ ksi} = 31{,}9 \text{ ksi}$$ ***Resposta***

A distribuição de tensão normal é mostrada graficamente na Figura 6.43*c*.

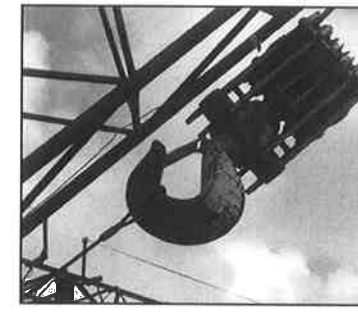


(c)

Figura 6.43

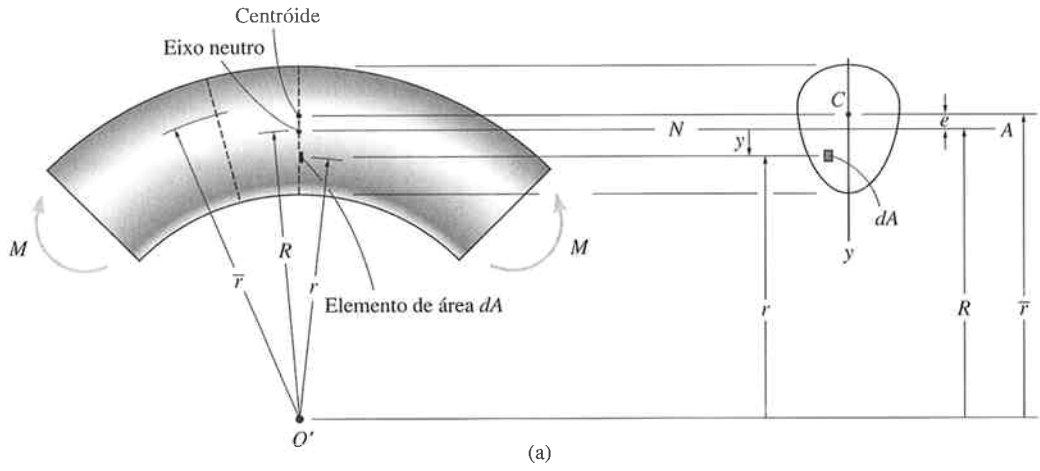
* 6.8 VIGAS CURVAS

A fórmula da flexão só se aplica a elementos prismáticos *retos*, pois, como mostrado, em um elemento assim a deformação normal varia linearmente a partir do eixo neutro. Se o elemento for *curvo*, no entanto, essa hipótese é inexata e, logo, devemos desenvolver outra equação que descreva a distribuição de tensão. Nesta seção consideraremos a análise de uma *viga curva*, isto é, um elemento que tem eixo curvo e está sujeito a flexão. Exemplos típicos incluem ganchos e elos de correntes. Em todos os casos, os elementos não são delgados; em vez disso, têm curva acentuada e as dimensões da seção transversal são grandes quando comparadas com seus raios de curvatura.


A tensão de flexão neste gancho de guindaste é estimada pela fórmula da viga curva.

A análise a ser considerada supõe que a área da seção transversal seja constante e tenha eixo de simetria perpendicular à direção do momento aplicado **M** (Figura 6.44*a*). Além disso, o material deve ser homogêneo e isotrópico e comportar-se de maneira linear-elástica quando a carga é aplicada. Como no caso de uma viga reta, admitiremos também, para a viga curva, que as *seções transversais* do elemento *permaneçam planas* após a aplicação do momento. Por fim, qualquer distorção da seção transversal dentro de seu próprio plano será desprezada.

Para realizar a análise, são identificados na Figura 6.44*a* três raios que partem do centro de curvatura O' do elemento. São eles: $\bar{r}$, que indica a localização conhecida do *centróide* da área da seção transversal; R, que indica a localização ainda não especificada do *eixo neutro*; e r, que localiza o *ponto arbitrário* ou elemento de área dA na seção transversal. Observe que o eixo neutro localiza-se no interior da seção transversal, uma vez que o momento **M** cria compressão nas fibras superiores e tensão nas fibras inferiores da viga e, por definição, o eixo neutro é uma reta de tensão e deformação nulas.



(a)

Figura 6.44

Se isolarmos um segmento infinitesimal da viga (Figura 6.44*b*), a tensão tenderá a deformar o material até que a seção transversal gire um ângulo $\delta\theta/2$. A deformação normal ϵ na tira arbitrária do material, localizada em r, será então determinada. A tira tem comprimento original $r\ d\theta$ (Figura 6.44*b*). Devido às rotações $\delta\theta/2$, no entanto, sua mudança total de comprimento será $\delta\theta(R - r)$. Conseqüentemente,

$$\epsilon = \frac{\delta\theta(R - r)}{r\ d\theta}$$

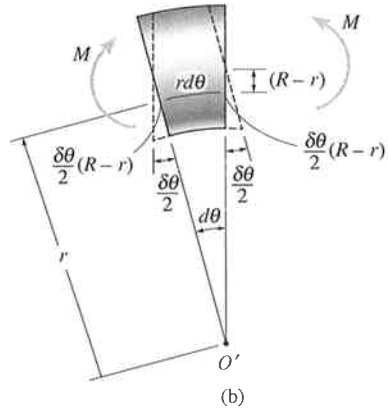
Definindo $k = \delta\theta/d\theta$, que é constante para qualquer elemento, temos:

$$\epsilon = k\left(\frac{R - r}{r}\right)$$

Ao contrário do que ocorre com as vigas retas, pode-se ver aqui que a ***deformação normal*** é uma função não-linear de r; na verdade ela varia de ***maneira hiperbólica***. Isso ocorre apesar de a seção transversal da viga permanecer plana após a deformação. Como o momento faz o material comportar-se elasticamente, a lei de Hooke aplica-se e, portanto, a tensão, em função da localização, será:

$$\sigma = Ek\left(\frac{R - r}{r}\right) \tag{6.22}$$

Essa variação também é hiperbólica e, como agora foi definida, podemos determinar a localização do eixo neutro e relacionar a distribuição de tensão ao momento interno resultante M.



(b)

Para se obter a localização R do eixo neutro, é preciso que a força interna resultante provocada pela distribuição de tensão que atua sobre a seção transversal seja nula, isto é:

$$F_R = \Sigma F_x; \qquad \int_A \sigma \, dA = 0$$

$$\int_A Ek\left(\frac{R-r}{r}\right) dA = 0$$

Como Ek e R são constantes, temos:

$$R\int_A \frac{dA}{r} - \int_A dA = 0$$

Resolvendo em R temos:

$$R = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{r}} \tag{6.23}$$

Onde:

R = localização do eixo neutro, especificada a partir do centro de curvatura O' do elemento
A = área da seção transversal do elemento
r = posição arbitrária do elemento de área dA na seção transversal, especificada a partir do centro de curvatura O' do elemento

A integral da Equação 6.23 pode ser avaliada para várias geometrias de seção transversal. Os resultados de algumas seções transversais comuns estão relacionados na Tabela 6.2.

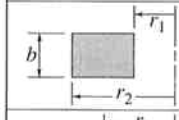
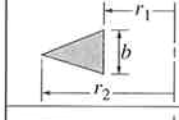
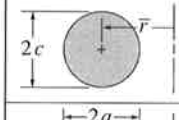
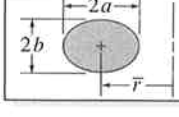
Forma	Área	$\int_A \frac{dA}{r}$
	$b(r_2 - r_1)$	$b \ln \frac{r_2}{r_1}$
	$\frac{b}{2}(r_2 - r_1)$	$\frac{b\, r_2}{(r_2 - r_1)}\left(\ln \frac{r_2}{r_1}\right) - b$
	πc^2	$2\pi\left(\bar{r} - \sqrt{\bar{r}^2 - c^2}\right)$
	πab	$\frac{2\pi b}{a}\left(\bar{r} - \sqrt{\bar{r}^2 - a^2}\right)$

Tabela 6.2

Para que possamos relacionar a distribuição de tensão ao momento fletor resultante, o momento interno resultante precisa ser igual ao momento da distribuição de tensão calculado em torno do eixo neutro. Pela Figura 6.44*a*, a tensão σ, que atua sobre o elemento de área dA e localiza-se a uma distância y do eixo neutro, cria uma força $dF = \sigma \, dA$ no elemento e um momento em torno do eixo neutro $dM = y\,(\sigma \, dA)$. Esse momento é positivo, uma vez que, pela regra da mão direita, possui a mesma direção de **M**. Requer-se para toda a seção transversal que $M = \int y\sigma \, dA$.

Como $y = R - r$ e σ é definido pela Equação 6.22, temos:

$$M = \int_A (R - r)Ek\left(\frac{R - r}{r}\right) dA$$

Expandindo e lembrando que Ek e R são constantes, temos:

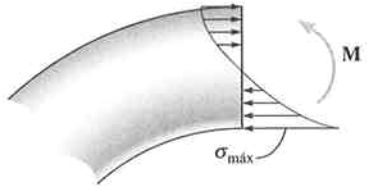
$$M = Ek\left(R^2 \int_A \frac{dA}{r} - 2R \int_A dA + \int_A r\, dA\right)$$

A primeira integral equivale a A/R como determinado pela Equação 6.23; a segunda representa simplesmente a área da seção transversal A. Entendendo-se que a localização do centróide da seção transversal é determinada por $\bar{r} = \int r\, dA/A$, a terceira integral pode ser substituída por $\bar{r}A$. Assim, podemos escrever:

$$M = EkA(\bar{r} - R)$$

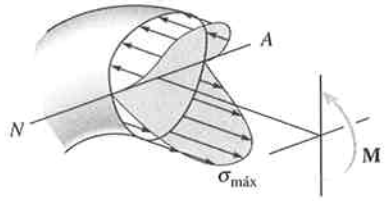
Resolvendo em Ek pela Equação 6.22, substituindo pela equação acima e resolvendo em σ, temos:

$$\sigma = \frac{M(R - r)}{Ar(\bar{r} - R)} \tag{6.24}$$

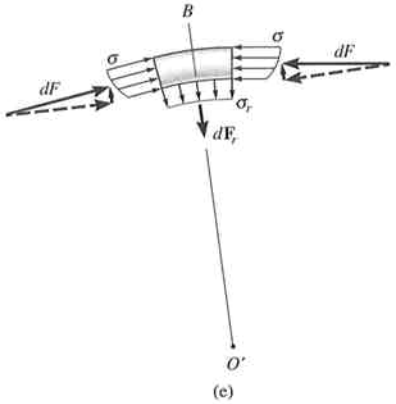


Variação da tensão de flexão (vista lateral)

(c)



(d)



(e)

Figura 6.44

Onde:

σ = tensão normal no membro
M = momento interno determinado pelo método das seções e pelas equações de equilíbrio e calculado em torno do eixo neutro da seção transversal; esse momento é *positivo* se tende a aumentar o raio de curvatura do elemento, ou seja, tende a balancear o elemento
A = área da seção transversal do elemento
R = distância entre o centro de curvatura e o eixo neutro, determinada pela Equação 6.23
$\bar{r}$ = distância entre o centro de curvatura e o centróide da área da seção transversal
r = distância entre o centro de curvatura e o ponto em que a tensão σ deve ser determinada

Pela Figura 6.44*a*, $y = R - r$ ou $r = R - y$. Além disso, a distância constante e muito pequena $e = \bar{r} - R$. Quando esses valores são substituídos pela Equação 6.24, também podemos escrever:

$$\sigma = \frac{My}{Ae(R - y)} \tag{6.25}$$

As duas últimas equações representam duas formas da chamada *fórmula da viga curva*, que, analogamente à fórmula da flexão, pode ser usada para determinar a distribuição de tensão normal em um elemento curvo. Essa distribuição, como mencionamos antes, é hiperbólica; um exemplo é mostrado nas figuras 6.44*c* e 6.44*d*. Como a tensão atua no sentido da circunferência da viga, é chamada, algumas vezes, de ***tensão circunferencial***. Deve-se compreender, entretanto, que, devido à curvatura da viga, essa tensão circunferencial cria um componente correspondente de ***tensão radial***, assim chamado porque atua na direção radial. Para mostrar como ele se desenvolve, consideremos o diagrama de corpo livre mostrado na Figura 6.44*e*, que representa um segmento superior do elemento infinitesimal da Figura 6.44*b*. Nesse caso, a tensão radial

σ_r é necessária, uma vez que cria a força dF_r, essencial para equilibrar os componentes das forças circunferenciais dF, que atuam ao longo da reta $O'B$.

Algumas vezes as tensões radiais nos elementos curvos tornam-se significativas, especialmente se o elemento for feito de chapas finas e tiver, por exemplo, a forma de I. Nesse caso, a tensão radial pode tornar-se tão grande quanto a circunferencial e, conseqüentemente, o elemento deve ser projetado para resistir a ambos os esforços. Na maioria dos casos, porém, esses esforços podem ser desprezados, especialmente se a seção transversal do elemento for *maciça*. Nesse caso, a fórmula da viga curva fornece resultados muito próximos daqueles determinados tanto por experimentos como pela análise matemática baseada na teoria da elasticidade.

Em geral, a fórmula da viga curva é usada quando a curvatura do elemento é muito pronunciada, como no caso de ganchos e anéis. No entanto, se o raio de curvatura é maior do que cinco vezes a largura do elemento, usa-se a *fórmula da flexão* para determinar a tensão. Especificamente, no caso de seções retangulares nas quais essa relação é igual a 5, a tensão normal máxima, quando determinada pela fórmula da flexão, será cerca de 7% *menor* que seu valor determinado pela fórmula da viga curva. O erro diminui ainda mais quando a relação entre o raio de curvatura e a largura é maior que 5.[4]

PONTOS IMPORTANTES

- A *fórmula da viga curva* deve ser usada para determinar a tensão circunferencial em uma viga quando o raio de curvatura for menor do que cinco vezes a largura da viga.
- Devido à curvatura da viga, a deformação normal na viga *não* varia linearmente com a largura como no caso de uma viga reta. Como resultado, o eixo neutro não passa pelo centróide da seção transversal.
- O componente da tensão radial provocado pela flexão em geral é desprezado, especialmente se a seção transversal for maciça e não for feita de chapas finas.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

Sugere-se o seguinte procedimento para aplicar a fórmula da viga curva.

Propriedades da Seção

- Determinar a área da seção transversal A e a localização do centróide, $\bar{r}$, medida a partir do centro de curvatura.
- Calcular a localização do eixo neutro, R, usando a Equação 6.23 ou a Tabela 6.2. Se a área da seção transversal consistir de n partes 'compostas', calcular $\int dA/r$ para *cada parte*. Depois, pela Equação 6.23, para toda a seção, $R = \Sigma A/\Sigma (\int dA/r)$. Em todos os casos, $R < \bar{r}$.

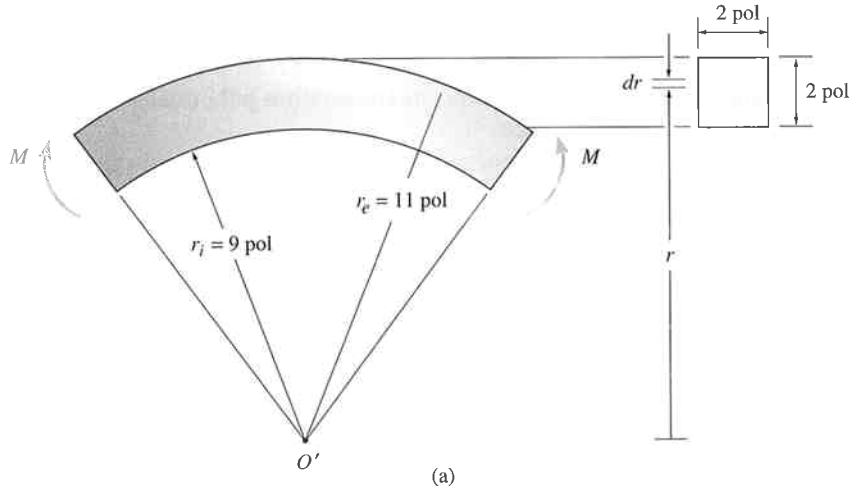
Tensão Normal

- A tensão normal localizada em um ponto r distante do centro de curvatura é determinada pela Equação 6.24. Se a distância y ao ponto tiver sido medida a partir do eixo neutro, calcular $e = \bar{r} - R$ e usar a Equação 6.25.
- Como $\bar{r} - R$ geralmente produz um número *muito pequeno*, é melhor calcular $\bar{r}$ e R com casas decimais suficientes, de modo que a subtração dê um número e com, pelo menos, três algarismos significativos.
- Se a tensão for positiva, será de tração; se negativa, de compressão.
- Fazer o gráfico da distribuição de tensão sobre toda a seção transversal ou isolar um elemento de volume do material e usá-lo para representar a tensão que atua sobre o ponto da seção transversal em que a tensão tem de ser calculada.

[4] Ver, como exemplo, Boresi, A. P. *et al.*, *Advanced Mechanics of Materials*, 3. ed., p. 333, 1978, John Wiley & Sons, Nova York.

EXEMPLO 6.24

Uma barra de aço de seção transversal retangular tem a forma de um arco circular como mostra a Figura 6.45*a*. Supondo que a tensão normal admissível seja $\sigma_{adm} = 20$ ksi, determinar o momento fletor máximo M que pode ser aplicado à barra. Qual seria esse valor se a barra fosse reta?



(a)

Figura 6.45

SOLUÇÃO

Momento Interno. Como M tende a aumentar o raio de curvatura da barra, é positivo.

Propriedades da Seção. A localização do eixo neutro é determinada pela Equação 6.23. Pela Figura 6.45*a*, temos:

$$\int_A \frac{dA}{r} = \int_{9\text{ pol}}^{11\text{ pol}} \frac{(2\text{ pol})\,dr}{r} = (2\text{ pol})\ln r\Big|_{9\text{ pol}}^{11\text{ pol}} = 0{,}40134\text{ pol}$$

Naturalmente, esse mesmo resultado é obtido pela Tabela 6.2. Assim:

$$R = \frac{A}{\displaystyle\int_A \frac{dA}{r}} = \frac{(2\text{ pol})(2\text{ pol})}{0{,}40134\text{ pol}} = 9{,}9666\text{ pol}$$

Deve-se observar que, por meio dos cálculos anteriores, R deve ser determinado com várias casas decimais para garantir que $(\bar{r} - R)$ apresente precisão para, pelo menos, três algarismos significativos.

Não se sabe se a tensão normal atinge seu máximo no topo ou na parte inferior da barra; assim, devemos calcular o momento M separadamente para cada caso. Como a tensão normal no topo da barra é de compressão, $\sigma = -20$ ksi.

$$\sigma = \frac{M(R - r_e)}{Ar_e(\bar{r} - R)}$$

$$-20\text{ kip/pol}^2 = \frac{M(9{,}9666\text{ pol} - 11\text{ pol})}{(2\text{ pol})(2\text{ pol})(11\text{ pol})(10\text{ pol} - 9{,}9666\text{ pol})}$$

$$M = 28{,}5\text{ kip} \cdot \text{pol}$$

De modo similar, a tensão normal na parte inferior da viga será de tração, assim $\sigma = +20$ ksi. Portanto:

$$\sigma = \frac{M(R - r_i)}{Ar_i(\bar{r} - R)}$$

$$20 \text{ kip/pol}^2 = \frac{M(9{,}9666 \text{ pol} - 9 \text{ pol})}{(2 \text{ pol})(2 \text{ pol})(9 \text{ pol})(10 \text{ pol} - 9{,}9666 \text{ pol})}$$

$$M = 24{,}9 \text{ kip} \cdot \text{pol} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Por comparação, o momento máximo que pode ser aplicado é 24,9 kip · pol e, assim, a tensão normal máxima ocorre na parte inferior da barra. A tensão de compressão no topo da barra é, então:

$$\sigma = \frac{24{,}9 \text{ kip} \cdot \text{pol}(9{,}9666 \text{ pol} - 11 \text{ pol})}{(2 \text{ pol})(2 \text{ pol})(11 \text{ pol})(10 \text{ pol} - 9{,}9666 \text{ pol})}$$

$$= -17{,}5 \text{ ksi}$$

A distribuição de tensão é mostrada na Figura 6.45*b*.
Se a barra fosse reta:

$$\sigma = \frac{Mc}{I}$$

$$20 \text{ kip/in}^2 = \frac{M(1 \text{ pol})}{\frac{1}{12}(2 \text{ pol})(2 \text{ pol})^3}$$

$$M = 26{,}7 \text{ kip} \cdot \text{pol} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

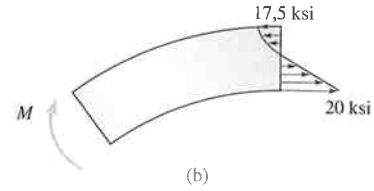
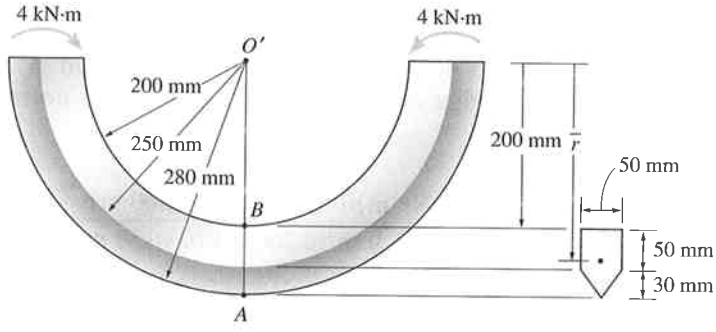


Figura 6.45

Esse resultado apresenta um erro de cerca de 7% em relação ao valor exato determinado anteriormente.

EXEMPLO 6.25

A barra curva tem a área da seção transversal mostrada na Figura 6.46*a*. Se estiver submetida a momentos fletores de 4 kN · m, qual será a tensão normal máxima nela desenvolvida?



(a)

Figura 6.46

SOLUÇÃO

Momento Interno. Cada seção da barra está submetida ao mesmo momento interno resultante de 4 kN · m. Como esse momento tende a diminuir o raio de curvatura da barra, é negativo. Assim, $M = -4$ kN · m.

Propriedades da Seção. Consideramos aqui a seção transversal composta de um retângulo e de um triângulo. A área total da seção transversal é:

$$\Sigma A = (0{,}05\text{ m})^2 + \frac{1}{2}(0{,}05\text{ m})(0{,}03\text{ m}) = 3{,}250(10^{-3})\text{ m}^2$$

A localização do centróide é determinada em relação ao centro de curvatura, ponto O' (Figura 6.46*a*).

$$\bar{r} = \frac{\Sigma \bar{r} A}{\Sigma A}$$

$$= \frac{[0{,}225\text{ m}](0{,}05\text{ m})(0{,}05\text{ m}) + [0{,}260\text{ m}]\frac{1}{2}(0{,}050\text{ m})(0{,}030\text{ m})}{3{,}250(10^{-3})\text{ m}^2}$$

$$= 0{,}23308\text{ m}$$

Podemos calcular $\int_A dA/r$ para cada parte usando a Tabela 6.2. Para o retângulo:

$$\int_A \frac{dA}{r} = 0{,}05\text{ m}\left(\ln\frac{0{,}250\text{ m}}{0{,}200\text{ m}}\right) = 0{,}011157\text{ m}$$

E para o triângulo:

$$\int_A \frac{dA}{r} = \frac{(0{,}05\text{ m})(0{,}280\text{ m})}{(0{,}280\text{ m} - 0{,}250\text{ m})}\left(\ln\frac{0{,}280\text{ m}}{0{,}250\text{ m}}\right) - 0{,}05\text{ m} = 0{,}0028867\text{ m}$$

Assim, a localização do eixo neutro é determinada por:

$$R = \frac{\Sigma A}{\Sigma\int_A dA/r} = \frac{3{,}250(10^{-3})\text{ m}^2}{0{,}011157\text{ m} + 0{,}0028867\text{ m}} = 0{,}23142\text{ m}$$

Observe que $R < \bar{r}$, como esperado. Além disso, os cálculos foram feitos com precisão suficiente de modo que $(\bar{r} - R) = 0{,}23308\text{ m} - 0{,}23142\text{ m} = 0{,}00166\text{ m}$ tem agora aproximação de três algarismos significativos.

Tensão Normal. A tensão normal máxima ocorre tanto em A como em B. Aplicando a fórmula da viga curva para calcular a tensão normal em B, $r_B = 0{,}200$ m, temos:

$$\sigma_B = \frac{M(R - r_B)}{Ar_B(\bar{r} - R)} = \frac{(-4\text{ kN}\cdot\text{m})(0{,}23142\text{ m} - 0{,}200\text{ m})}{3{,}2500(10^{-3})\text{ m}^2(0{,}200\text{ m})(0{,}00166\text{ m})}$$

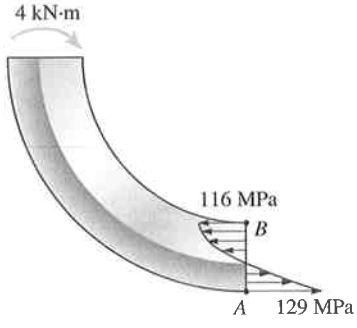
$$= -116\text{ MPa}$$

No ponto A, $r_A = 0{,}280$ m e a tensão normal é:

$$\sigma_A = \frac{M(R - r_A)}{Ar_A(\bar{r} - R)} = \frac{(-4\text{ kN}\cdot\text{m})(0{,}23142\text{ m} - 0{,}280\text{ m})}{3{,}2500(10^{-3})\text{ m}^2(0{,}280\text{ m})(0{,}00166\text{ m})}$$

$$= 129\text{ MPa}$$ ***Resposta***

Por comparação, a tensão normal máxima está em A. Uma representação bidimensional da distribuição de tensão é mostrada na Figura 6.46*b*.



(b)

Figura 6.46

6.9 CONCENTRAÇÕES DE TENSÃO

A fórmula da flexão, $\sigma_{máx} = Mc/I$, é usada para determinar a distribuição de tensão nas regiões de um elemento em que a área da seção transversal seja constante ou ligeiramente cônica. Se a seção transversal muda subitamente, no entanto, as distribuições de tensão normal e de deformação na seção tornam-se *não-lineares* e são obtidas somente por meio de experimentos ou, em alguns casos, por meio de análise matemática baseada na teoria da elasticidade. Descontinuidades comuns incluem entalhes na superfície dos elementos (Figura 6.47*a*), furos para passagem de peças de fixação ou outros itens (Figura 6.47*b*), ainda mudanças bruscas nas dimensões externas da seção transversal (Figura 6.47*c*). A tensão normal *máxima* em cada uma dessas descontinuidades ocorre na seção feita na *menor* área da seção transversal.

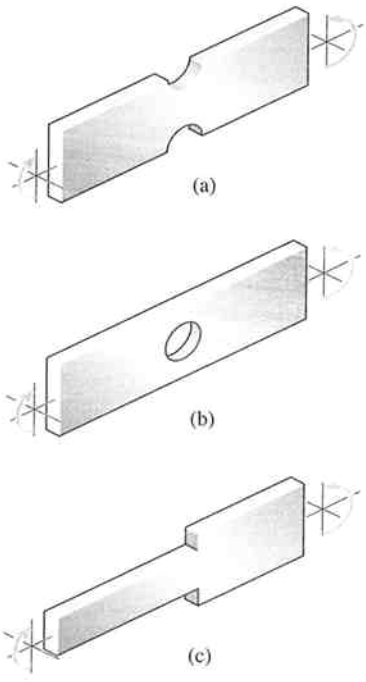


Figura 6.47

No projeto, geralmente é importante conhecer a tensão normal máxima desenvolvida nessas seções, e não a própria distribuição de tensão. Como nos casos anteriores, de barras com carga axial e eixos com carga de torção, obtemos a tensão normal máxima devida à flexão usando um fator de concentração de esforço K. Por exemplo, a Figura 6.48 atribui valores de K para uma barra plana com mudança na seção transversal usando curvas de concordância. Para usar o gráfico é necessário apenas calcular as relações geométricas w/r e r/h e, depois encontrar o valor correspondente de K para uma geometria em particular. Uma vez obtido K, a tensão de flexão máxima é determinada por:

$$\sigma_{máx} = K\frac{Mc}{I} \tag{6.26}$$

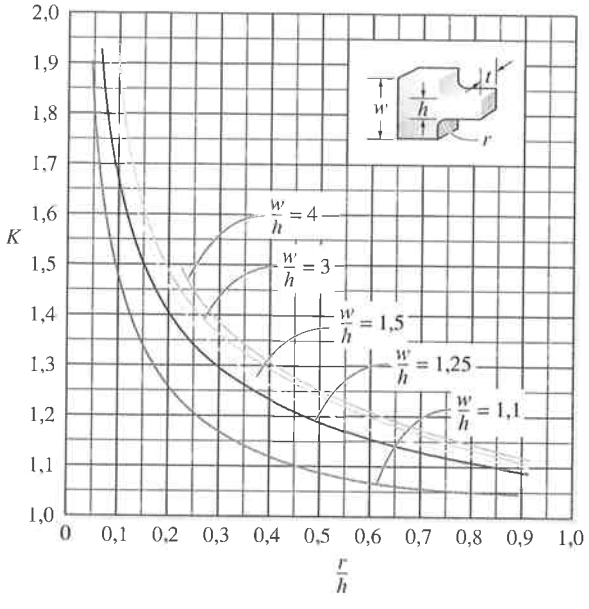


Figura 6.48

Aqui a fórmula da flexão é aplicada à *menor* área da seção transversal, uma vez que $\sigma_{máx}$ ocorre na base da curva de concordância (Figura 6.49). De maneira similar, a Figura 6.50 é usada se a descontinuidade consistir de sulcos ou entalhes circulares.

Como a carga axial e a torção, a concentração de tensão pela flexão deve ser considerada sempre que se projetam elementos feitos de materiais frágeis ou sujeitos a fadigas ou cargas cíclicas. Perceba, também, que os fatores de concentração de tensão aplicam-se somente quando o material está sujeito a

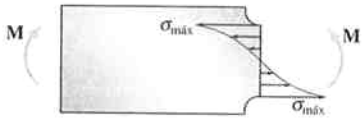


Figura 6.49

Responsáveis por trincas, as concentrações de tensão provocadas por flexão ocorrem nos cantos vivos da verga desta janela.

comportamento elástico. Se o momento aplicado provocar escoamento, como ocorre com os materiais dúcteis, a tensão será redistribuída por todo o elemento e a tensão máxima encontrada será *menor* que a determinada quando se usam os fatores de concentração de tensão. Esse fenômeno será mais bem discutido na próxima seção.

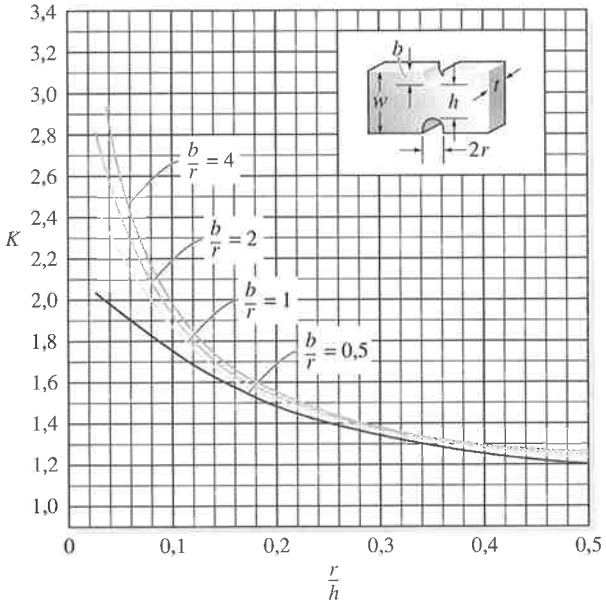


Figura 6.50

PONTOS IMPORTANTES

- As concentrações de tensão em elementos sujeitos a flexão ocorrem nos pontos de mudança da seção transversal, como entalhes e furos, porque neles a tensão e a deformação tornam-se não-lineares. Quanto mais severa a mudança, maior a concentração de tensão.
- Para projeto ou análise não é necessário saber a distribuição de tensão exata em torno da mudança de seção transversal. A tensão normal máxima ocorre na *menor* área da seção transversal. Pode-se obter essa tensão usando um fator de concentração de tensão, K, que é determinado por experimento e função apenas da geometria do elemento.
- Normalmente, a concentração de tensão em um material dúctil sujeito a um momento estático não precisa ser considerada no projeto; entretanto, se o material é *frágil* ou sujeito a *fadiga*, as concentrações de tensão tornam-se importantes.

EXEMPLO 6.26

A transição na área da seção transversal da barra de aço é obtida usando-se curvas de concordância como mostra a Figura 6.51*a*. Se a barra estiver submetida a um momento fletor de 5 kN · m, qual será a tensão normal máxima desenvolvida no aço? O limite de escoamento é σ_E = 500 MPa.

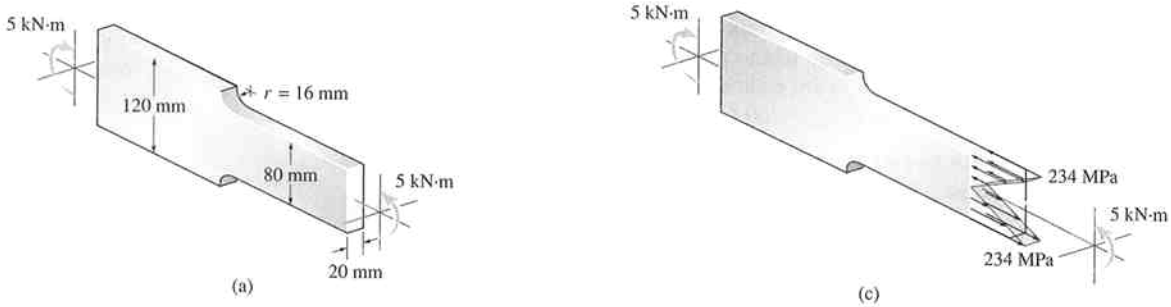
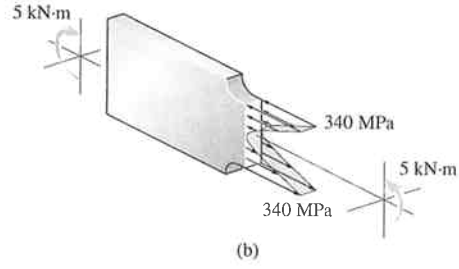


Figura 6.51

SOLUÇÃO

O momento cria a maior tensão na base da curva de concordância, onde a área da seção transversal é a menor. O fator de concentração de tensão é determinado na Figura 6.48. Pela geometria da barra, temos $r = 16$ mm, $h = 80$ mm, $w = 120$ mm. Então:

$$\frac{r}{h} = \frac{16 \text{ mm}}{80 \text{ mm}} = 0{,}2 \qquad \frac{w}{h} = \frac{120 \text{ mm}}{80 \text{ mm}} = 1{,}5$$



Esses valores resultam em $K = 1{,}45$.
Aplicando a Equação 6.26, temos:

$$\sigma_{máx} = K\frac{Mc}{I} = (1{,}45)\frac{(5 \text{ kN} \cdot \text{m})(0{,}04 \text{ m})}{[\frac{1}{12}(0{,}020 \text{ m})(0{,}08 \text{ m})^3]} = 340 \text{ MPa}$$

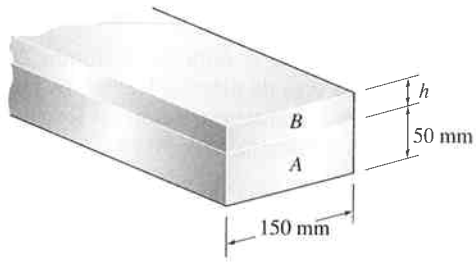
Esse resultado indica que o aço permanece elástico visto que a tensão é menor que o limite de escoamento (500 MPa).

A distribuição de tensão normal, não-linear, é mostrada na Figura 6.51*b*. Compreenda, porém, que, pelo princípio de Saint-Venant (Seção 4.1), esses esforços localizados arrefecem e tornam-se lineares quando nos afastamos uma distância de 80 mm ou mais para a direita da zona de transição. Nesse caso, a fórmula da flexão resulta em $\sigma_{máx} = 234$ MPa (Figura 6.51*c*). Observe também que a escolha de um raio de concordância maior reduzirá significativamente $\sigma_{máx}$, uma vez que, à medida que r cresce na Figura 6.48, K decresce.

PROBLEMAS

6.114. A viga composta é feita de (*A*) alumínio 6061-T6 e (*B*) latão C83400. Determinar a dimensão h da tira de latão de modo que o eixo neutro da viga localize-se na junção dos dois metais. Qual o momento máximo suportado pela viga se a tensão de flexão admissível para o alumínio for $(\sigma_{adm})_{al} = 128$ MPa e para o latão $(\sigma_{adm})_{latão} = 35$ MP?

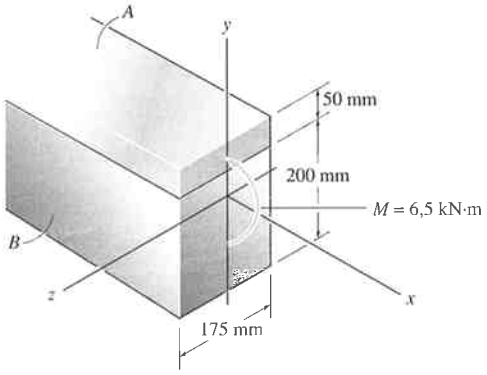
6.115. A viga composta é feita de (*A*) alumínio 6061-T6 e (*B*) latão C83400. Supondo que $h = 40$ mm, determinar o momento máximo que pode ser aplicado à viga se a tensão de flexão admissível para o alumínio for $(\sigma_{adm})_{al} = 128$ MP e para o latão $(\sigma_{adm})_{latão} = 35$ MPa.



Problemas 6.114/6.115

***6.116.** A viga composta é feita de (*A*) aço unido a (*B*) latão e tem a seção transversal mostrada. Se for submetida ao momento $M = 6{,}5$ kN · m, qual será a tensão de flexão máxima no latão e no aço? Além disso, qual a tensão em cada material na junção entre eles? $E_{latão} = 100$ GPa, $E_{aço} = 200$ GPa.

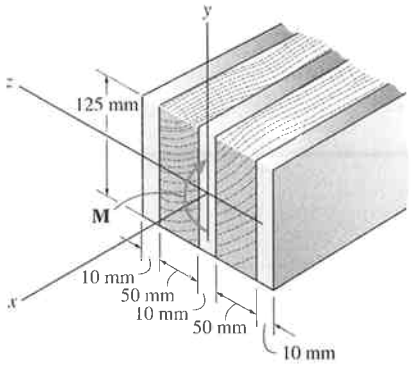
6.117. A viga composta é feita de (*A*) aço unido a (*B*) latão e tem a seção transversal mostrada. Se a tensão de flexão admissível para o aço for $(\sigma_{adm})_{aço} = 180$ MPa e para o latão $(\sigma_{adm})_{latão} = 60$ MPa, qual momento máximo M poderá ser aplicado à viga? $E_{latão} = 100$ GPa, $E_{aço} = 200$ GPa.



Problemas 6.116/6.117

6.118. A viga composta consiste em um núcleo de abeto Douglas e três placas de aço A-36. Se a tensão de flexão admissível para a madeira for $(\sigma_{adm})_{madeira} = 20$ MPa e para o aço $(\sigma_{adm})_{aço} = 130$ MPa, qual momento máximo poderá ser aplicado à viga?

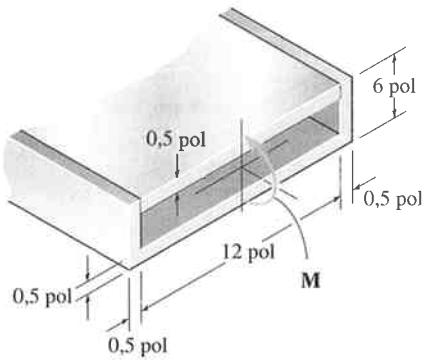
6.119. Resolver o Problema 6.118 supondo que o momento seja aplicado em torno do eixo *y* em vez de em torno do eixo *z* como mostrado.



Problemas 6.118/6.119

***6.120.** A placa superior é feita de alumínio 2014-T6 e usada para reforçar a viga de plástico Kevlar 49. Determinar a tensão máxima sobre o alumínio e sobre o Kevlar se a viga for submetida a um momento $M = 900$ lb · pés.

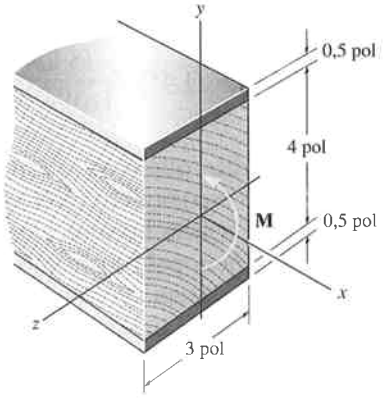
6.121. A placa superior feita de alumínio 2014-T6 é usada para reforçar a viga de plástico Kevlar 49. Se a tensão de flexão admissível para o alumínio for $(\sigma_{adm})_{al} = 40$ ksi e para o Kevlar $(\sigma_{adm})_k = 8$ ksi, qual momento máximo M poderá ser aplicado à viga?



Problemas 6.120/6.121

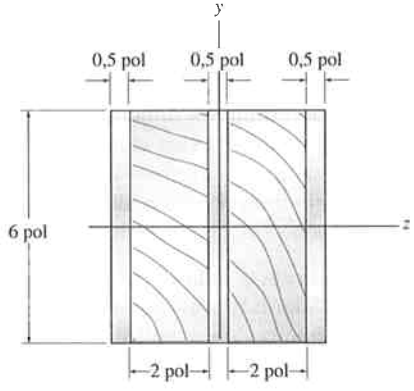
6.122. Uma viga de abeto do Canadá é reforçada com tiras de aço A-36 nas partes superior e inferior como mostrado. Determinar a tensão máxima desenvolvida na madeira e no aço se a viga for submetida a um momento fletor $M = 8$ kip · pés. Desenhar a distribuição de tensão que atua sobre a seção transversal.

6.123. Uma viga de abeto do Canadá é reforçada com tiras de aço A-36 nas partes superior e inferior como mostrado. Determinar o momento fletor M que ela pode suportar se $(\sigma_{adm})_{aço} = 22$ ksi e $(\sigma_{adm})_{mad} = 2{,}0$ ksi.



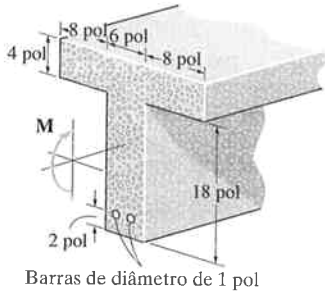
Problemas 6.122/6.123

***6.124.** Uma viga de abeto Douglas é reforçada com tiras de aço A-36 no centro e nos lados. Determinar a tensão máxima desenvolvida na madeira e no aço se a viga for submetida a um momento fletor $M_z = 7{,}50$ kip · pés. Desenhar a distribuição de tensão que atua sobre a seção transversal.



Problema 6.124

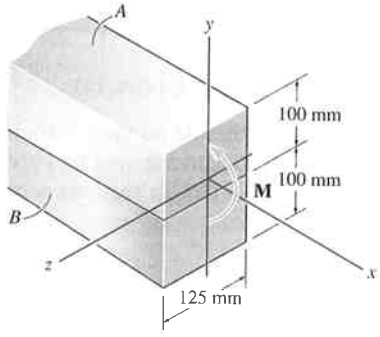
6.125. A viga de concreto armado está reforçada por duas barras de aço. Se o esforço de tração admissível para o aço for $(\sigma_{aço})_{adm} = 40$ ksi e o esforço de compressão admissível para o concreto $(\sigma_c)_{adm} = 3$ ksi, qual momento máximo M poderá ser aplicado à seção? Supor que o concreto não suporta esforço de tração. $E_{aço} = 29(10^3)$ ksi, $E_c = 3{,}8(10^3)$ ksi.



Problema 6.125

6.126. A viga composta é feita de (A) aço A-36 unido a (B) latão C83400 e tem a seção transversal mostrada. Se for submetida a um momento $M = 6{,}5$ kN · m, qual será a tensão máxima no latão e no aço? Além disso, qual a tensão em cada material na junção entre eles?

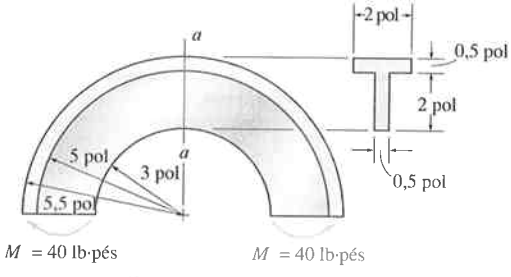
6.127. A viga composta é feita de (A) aço A-36 unido a (B) latão C83400 e tem a seção transversal mostrada. Se a tensão de flexão admissível para o aço for $(\sigma_{adm})_{aço} = 180$ MPa e para o latão $(\sigma_{adm})_{latão} = 60$ MPa, qual o momento máximo M poderá ser aplicado à viga?



Problemas 6.126/6.127

***6.128.** A viga curva está submetida a um momento $M = 40$ lb · pés. Determinar a tensão de flexão máxima nela desenvolvida. Desenhar também a vista bidimensional da distribuição de tensão que atua sobre a seção a–a.

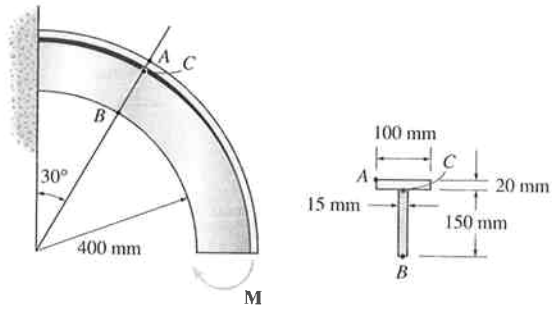
6.129. A viga curva é feita de um material com tensão de flexão admissível $\sigma_{adm} = 24$ ksi. Determinar o momento máximo M que pode ser aplicado à viga.



Problemas 6.128/6.129

6.130. A viga curva está submetida a um momento fletor $M = 900$ N · m como mostrado. Determinar as tensões nos pontos A e B e mostrar a tensão em um elemento de volume localizado em cada um desses pontos.

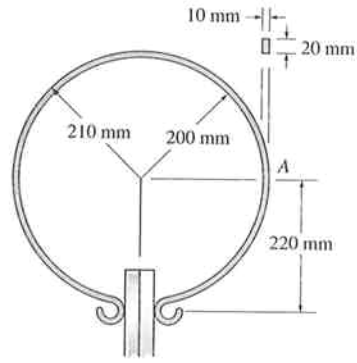
6.131. A viga curva está submetida a um momento fletor $M = 900$ N · m. Determinar a tensão no ponto C.



Problemas 6.130/6.131

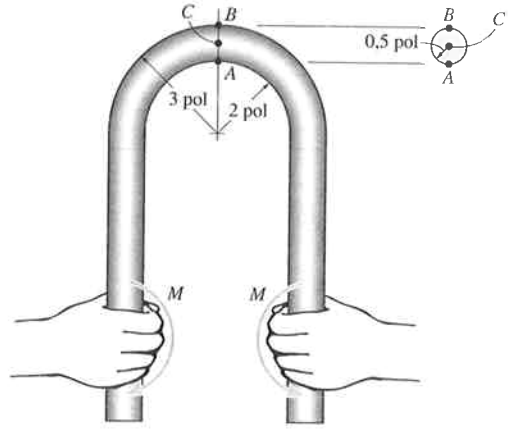
***6.132.** A braçadeira circular de mola produz uma força de compressão de 3 N sobre as placas. Determinar a tensão de flexão máxima produzida sobre a mola em A. A mola tem seção transversal retangular.

6.133. Determinar a força de compressão máxima que a braçadeira de mola poderá exercer sobre as placas se a tensão de flexão admissível para a braçadeira for $\sigma_{adm} = 4$ MPa.



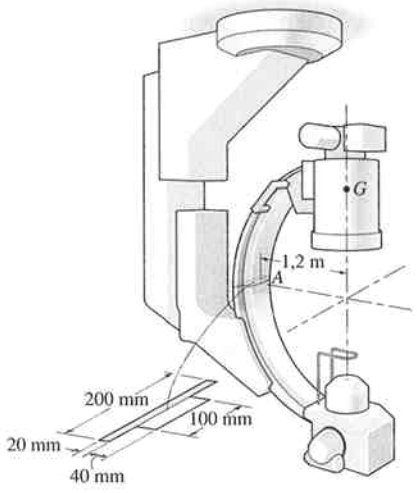
Problemas 6.132/6.133

6.134. A haste de aço tem seção transversal circular. Se ela for presa em suas extremidades e for desenvolvido um conjugado $M = 12$ lb · pol em cada apoio, determinar a tensão que atuará nos pontos A e B e no centróide C.



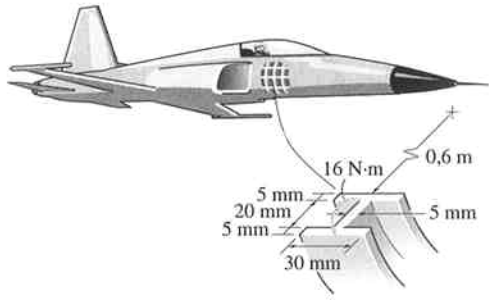
Problema 6.134

6.135. O braço em C preso no teto é usado para apoiar a câmera de raio X usada para diagnóstico médico. Se a câmera tiver massa de 150 kg, com centro de massa em G, qual será a tensão de flexão máxima na seção A?



Problema 6.135

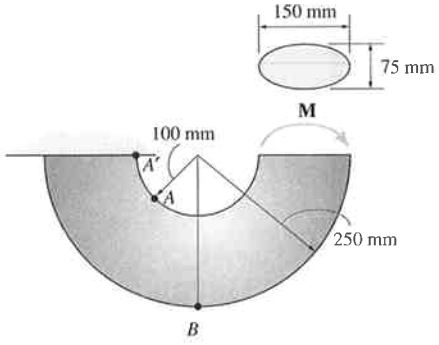
***6.136.** Durante o vôo, a nervura curva do avião a jato está sujeita a um momento previsto $M = 16$ N · m na seção. Determinar a tensão de flexão máxima na nervura nessa seção e desenhar a vista bidimensional da distribuição de tensão.



Problema 6.136

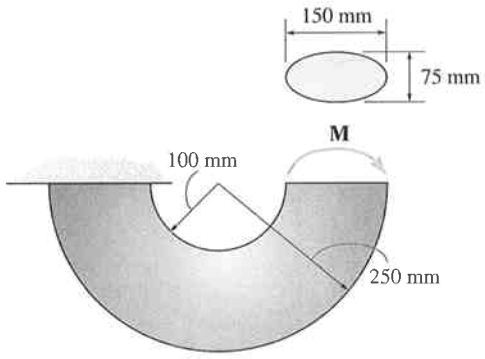
6.137. Para a viga curva da Figura 6.44*a*, mostrar que, quando o raio de curvatura tende a infinito, a fórmula da viga curva (Equação 6.24) reduz-se à fórmula da flexão (Equação 6.13).

6.138. O elemento tem seção transversal elíptica. Se estiver submetido ao momento $M = 100$ N · m, qual será a tensão nos pontos A e B? A tensão no ponto A', localizado próximo à parede, é a mesma que em A? Explicar.



Problema 6.138

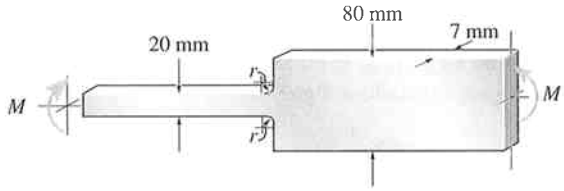
6.139. O elemento tem seção transversal elíptica. Se sua tensão de flexão admissível for $\sigma_{adm} = 125$ MPa, qual momento máximo poderá ser aplicado a ele?



Problema 6.139

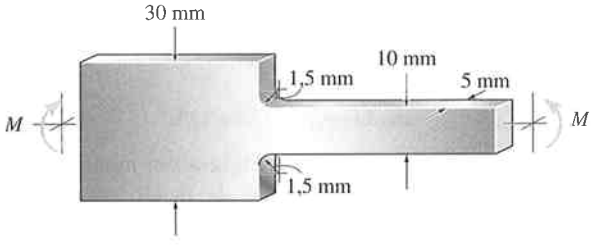
***6.140.** A barra está submetida ao momento $M = 40$ N · m. Determinar o menor raio r das curvas de concordância de modo que a tensão de flexão admissível $\sigma_{adm} = 124$ MPa não seja excedida.

6.141. A barra está submetida a um momento $M = 17{,}5$ N · m. Se $r = 5$ mm, qual a tensão de flexão máxima no material?



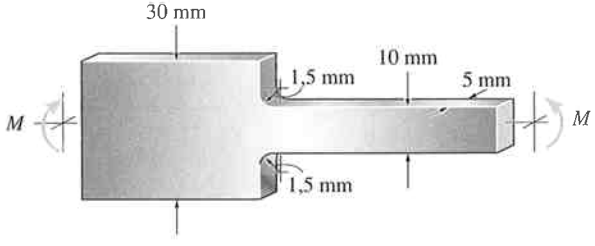
Problemas 6.140/6.141

6.142. A barra está submetida ao momento $M = 20$ N · m. Determinar a tensão de flexão máxima na barra e desenhar, aproximadamente, como a tensão varia na seção crítica.



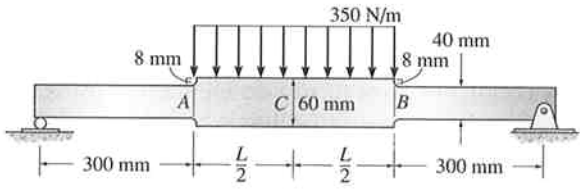
Problema 6.142

6.143. A tensão de flexão admissível para a barra é $\sigma_{adm} = 175$ MPa. Determinar o momento máximo M que pode ser aplicado.



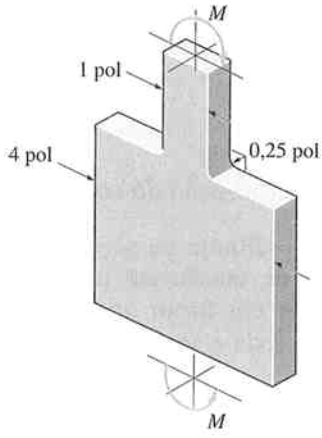
Problema 6.143

***6.144.** Determinar o comprimento L da parte central da barra de modo que a tensão de flexão máxima nas seções A, B e C seja a mesma. A barra tem espessura de 10 mm.



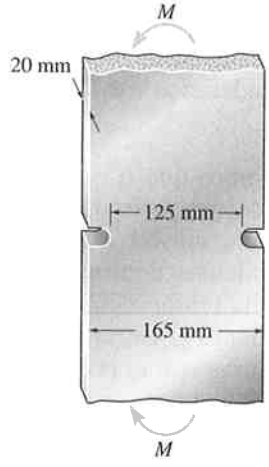
Problema 6.144

6.145. A barra tem espessura de 0,5 pol e está submetida a um momento de 60 lb · pés. Determinar a tensão de flexão máxima nela desenvolvida.



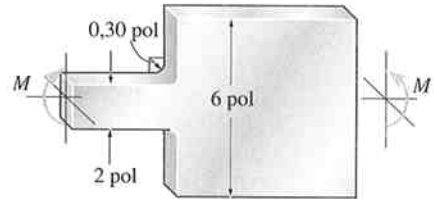
Problema 6.145

6.146. A placa simétrica com entalhes está sujeita a flexão. Se o raio de cada entalhe for $r = 10$ mm e o momento aplicado $M = 2$ kN · m, qual será a tensão de flexão máxima nela desenvolvida?



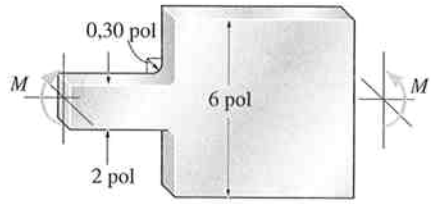
Problema 6.146

6.147. A barra tem espessura de 0,5 pol e é feita de um material com tensão de flexão admissível $\sigma_{adm} = 20$ ksi. Determinar o momento máximo M que pode ser aplicado.



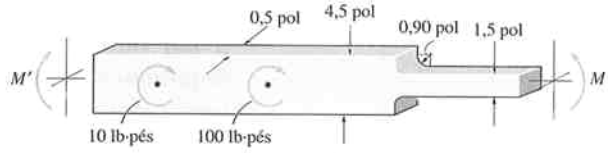
Problema 6.147

***6.148.** A barra tem espessura de 0,5 pol e está submetida a um momento de 600 lb · pés. Determinar a tensão de flexão máxima nela desenvolvida.



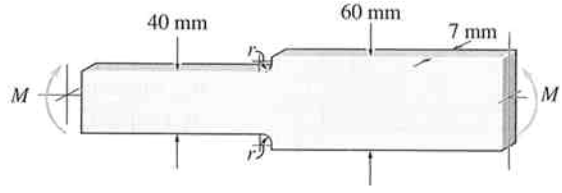
Problema 6.148

6.149. A barra está submetida a quatro conjugados. Se $M = 180$ lb · pés e $M' = 70$ lb · pés, qual a tensão de flexão máxima desenvolvida na barra?



Problema 6.149

6.150. A barra está submetida a um momento $M = 153$ N · m. Determinar o menor raio r das curvas de concordância de modo que a tensão de flexão admissível $\sigma_{adm} = 120$ MPa não seja excedida.



Problema 6.150

*6.10 FLEXÃO INELÁSTICA

As equações para determinar a tensão normal provocada pela flexão, desenvolvidas anteriormente, são válidas apenas se o material comporta-se de maneira linear-elástica. Se o momento aplicado provocar *escoamento* do material, deve-se então usar uma análise plástica para determinar a distribuição de tensão. No entanto, as três condições para flexão de elementos retos, tanto no caso elástico como no plástico, devem ser satisfeitas.

Distribuição da Deformação Normal Linear. Com base em condições geométricas, mostramos na Seção 6.3 que as deformações normais que se desenvolvem no material variam sempre *linearmente*, de zero, no eixo neutro da seção transversal, até o máximo no ponto mais afastado desse eixo neutro.

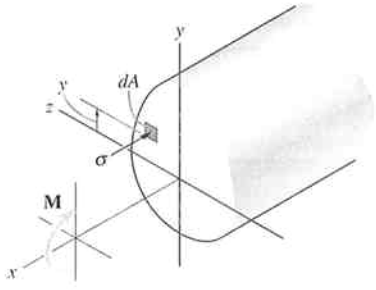


Figura 6.52

A Força Resultante é Nula. Como somente um momento interno resultante atua sobre a seção transversal, a força resultante provocada pela distribuição de tensão deve ser nula. E, uma vez que σ cria uma força sobre a área dA de $dF = \sigma\, dA$ (Figura 6.52), para toda a área da seção transversal A temos:

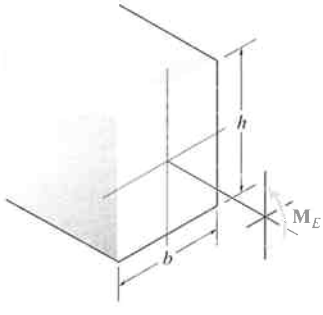
$$F_R = \Sigma F_x; \qquad \int_A \sigma\, dA = 0 \tag{6.27}$$

Essa equação nos permite obter a *localização do eixo neutro*.

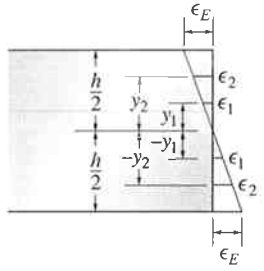
Momento Resultante. O momento resultante na seção deve equivaler ao momento provocado pela distribuição de tensão em torno do eixo neutro. Como o momento da força $dF = \sigma\, dA$ em torno do eixo neutro é $dM = y(\sigma\, dA)$, o somatório dos resultados em toda a seção transversal (Figura 6.52) resulta em:

$$(M_R)_z = \Sigma M_z; \qquad M = \int_A y\,(\sigma\, dA) \tag{6.28}$$

Essas condições de geometria e carregamento serão usadas agora para mostrar como determinar a distribuição de tensão em uma viga submetida a um momento interno resultante que provoca escoamento do material. Suporemos, ao longo da discussão, que o material tem o *mesmo* diagrama tensão-deformação tanto sob tração como sob compressão. Para simplificar, começaremos considerando que a viga tenha área da seção transversal com dois eixos de simetria; nesse caso, um retângulo de altura h e largura b, como o mostrado na Figura 6.53*a*. Serão considerados três casos de carregamento que têm interesse especial.



(a)



Distribuição de deformação (vista lateral)

(b)

Figura 6.53

Momento Elástico Máximo. Suponhamos que o momento aplicado $M = M_E$ seja suficiente apenas para produzir deformações de escoamento nas fibras superiores e inferiores da viga, conforme mostra a Figura 6.53*b*. Como a distribuição de deformação é linear, podemos determinar a distribuição de tensão correspondente usando o diagrama tensão-deformação (Figura 6.53*c*). Vemos aqui que a deformação de escoamento ϵ_E causa o limite de escoamento σ_E, enquanto as deformações intermediárias ϵ_1 e ϵ_2 provocam as tensões σ_1 e σ_2, respectivamente. Quando essas tensões, e outras como elas, têm seus gráficos montados nos pontos $y = h/2, y = y_1, y = y_2$ etc., dá-se a distribuição de tensão da Figura 6.53*d* ou da Figura 6.53*e*. Evidentemente, a linearidade da tensão é conseqüência da lei de Hooke.

Agora que a distribuição de tensão foi estabelecida, podemos verificar se a Equação 6.27 foi satisfeita. Para isso, calcularemos primeiro a força resultante de cada uma das duas partes da distribuição de tensão (Figura 6.53*e*).

Geometricamente, isso equivale a calcular os *volumes* dos dois blocos triangulares. Como mostrado, a seção transversal superior do elemento está submetida à compressão, enquanto a seção transversal inferior está submetida à tração. Temos:

$$T = C = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\,\sigma_E\right)b = \frac{1}{4}\,bh\sigma_E$$

Como **T** é igual mas oposta a **C**, a Equação 6.27 é satisfeita e, de fato, o eixo neutro passa através do centróide da área da seção transversal.

O momento elástico máximo M_E é determinado pela Equação 6.28, que o declara equivalente ao momento da tensão de distribuição em torno do eixo neutro. Para aplicar essa equação geometricamente, temos de determinar os momentos criados por **T** e **C** em torno do eixo neutro (Figura 6.53*e*). Como cada força atua através do centróide do volume do seu bloco de tensão triangular associado, temos:

$$\begin{aligned} M_E &= C\left(\frac{2}{3}\right)\frac{h}{2} + T\left(\frac{2}{3}\right)\frac{h}{2} = 2\left(\frac{1}{4}\,bh\,\sigma_E\right)\left(\frac{2}{3}\right)\frac{h}{2} \\ &= \frac{1}{6}\,bh^2\sigma_E \end{aligned} \tag{6.29}$$

Naturalmente, esse mesmo resultado pode ser obtido de maneira mais direta pela fórmula da flexão, ou seja, $\sigma_E = M_E(h/2)/[bh^3/12]$, ou $M_E = bh^2\sigma_E/6$.

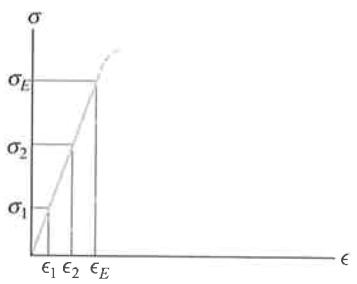
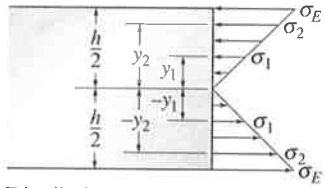


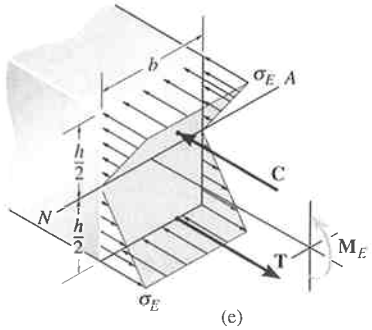
Diagrama tensão-deformação (região elástica)

(c)



Distribuição de tensão (vista lateral)

(d)



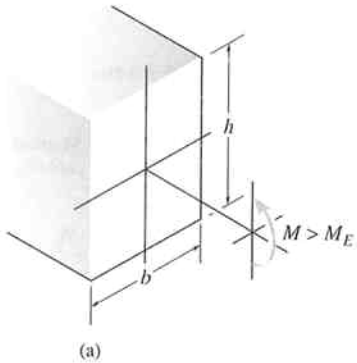
(e)

Figura 6.53

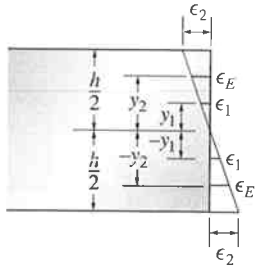
Momento Plástico. Alguns materiais, tais como o aço, tendem a exibir comportamento elástico perfeitamente plástico quando a tensão no material excede σ_E. Consideremos, por exemplo, o elemento da Figura 6.54*a*. Se o momento interno $M > M_E$, o material nas partes superior e inferior da viga começa a escoar, o que causa uma redistribuição de tensão sobre a seção transversal até que o momento interno M requerido seja desenvolvido. Se a distribuição da deformação normal assim produzida for como a mostrada na Figura 6.54*b*, a distribuição de tensão normal correspondente será determinada pelo diagrama tensão-deformação da mesma maneira que no caso elástico. Usando esse diagrama para o material mostrado na Figura 6.54*c*, temos que as deformações ϵ_1, ϵ_E, ϵ_2, ϵ_3 correspondem, respectivamente, às tensões σ_1, σ_E, σ_E, σ_E. Quando essas e outras tensões são esquematizadas na seção transversal, obtemos a distribuição de tensão mostrada na Figura 6.54*d* ou na 6.54*e*. Nesse caso, os 'blocos' de esforços de compressão e tração são retangulares ou triangulares, com os seguintes volumes:

$$T_1 = C_1 = \frac{1}{2}\,y_E\sigma_E b$$

$$T_2 = C_2 = \left(\frac{h}{2} - y_E\right)\sigma_E b$$



(a)



Distribuição de deformação (vista lateral)

(b)

Figura 6.54

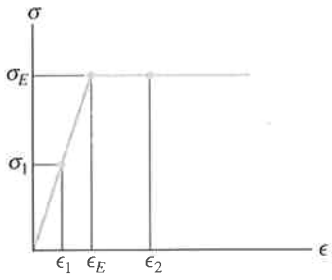
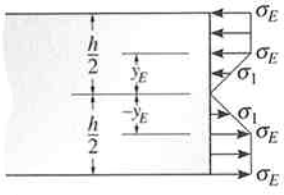


Diagrama tensão-deformação (região elastoplástica)

(c)



Distribuição de tensão (vista lateral)

(d)

Devido à simetria, a Equação 6.27 é satisfeita e o eixo neutro passa através do centróide da seção transversal como mostrado. O momento aplicado M pode ser relacionado ao limite de escoamento σ_E por meio da Equação 6.28. Pela Figura 6.54*e*, requer-se que:

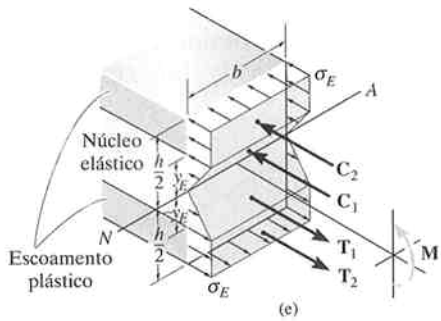
$$M = T_1\left(\frac{2}{3}y_E\right) + C_1\left(\frac{2}{3}y_E\right) + T_2\left[y_E + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y_E\right)\right] + C_2\left[y_E + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y_E\right)\right]$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}y_E\sigma_E b\right)\left(\frac{2}{3}y_E\right) + 2\left[\left(\frac{h}{2} - y_E\right)\sigma_E b\right]\left[\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + y_E\right)\right]$$

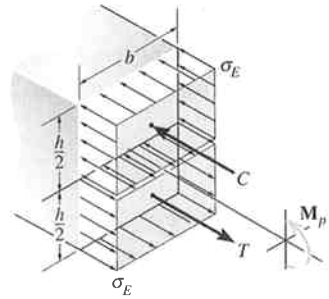
$$= \frac{1}{4}bh^2\sigma_E\left(1 - \frac{4}{3}\frac{y_E^2}{h}\right)$$

Ou, usando a Equação 6.29:

$$M = \frac{3}{2}M_{YE}\left(1 - \frac{4}{3}\frac{y_E^2}{h^2}\right) \tag{6.30}$$



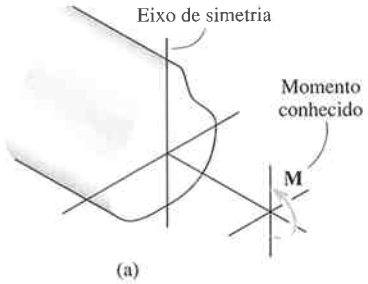
(e)



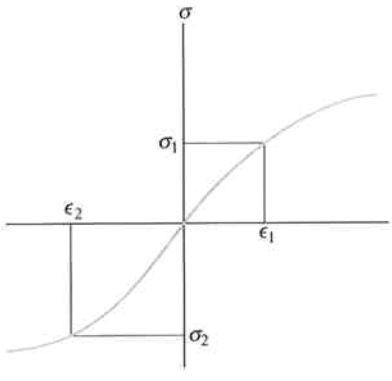
Momento plástico

(f)

Figura 6.54



(a)



(b)

Figura 6.55

A análise da Figura 6.54*e* revela que **M** produz duas zonas de escoamento plástico e um núcleo elástico no elemento. A fronteira entre eles está a uma distância $\pm y_E$ do eixo neutro. À medida que **M** cresce em intensidade, y_E tende a zero. Isso tornaria o material inteiramente plástico, caso em que a distribuição de tensão teria a aparência mostrada na Figura 6.54*f*. Pela Equação 6.30 com $y_E = 0$, ou determinando os momentos dos 'blocos' de tensão em torno do eixo neutro, podemos escrever o valor limitante como:

$$M_p = \frac{1}{4}bh^2\sigma_E \tag{6.31}$$

Usando a Equação 6.29, temos:

$$M_p = \frac{3}{2}M_E \tag{6.32}$$

Esse momento é denominado ***momento plástico***. Seu valor é único apenas para a seção retangular mostrada na Figura 6.54*f*, visto que a análise depende da geometria da seção transversal.

As vigas usadas em estruturas metálicas às vezes são projetadas para resistir a um momento plástico. Nesse caso, os códigos em geral relacionam uma propriedade de projeto da viga chamada ***fator forma***. O fator forma é definido como a relação

$$k = \frac{M_p}{M_E} \tag{6.33}$$

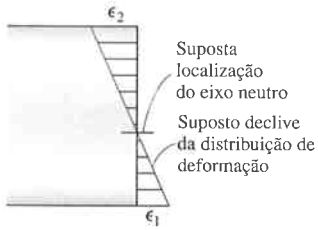
Esse valor especifica a quantidade adicional de momento que uma viga pode suportar além de seu momento elástico máximo. Por exemplo: pela Equação 6.32, uma viga de seção transversal retangular tem fator forma $k = 1{,}5$. Podemos, portanto, concluir que a seção suportará 50% mais momento fletor além de seu momento elástico máximo quando se tornará totalmente plástica.

Momento Resistente Consideremos o caso mais geral de uma viga com seção transversal simétrica apenas em relação ao eixo vertical, na qual o momento é aplicado em torno do eixo horizontal (Figura 6.55*a*). Suporemos que o material exibe endurecimento por deformação (encruamento) e que seus diagramas tensão-deformação de tração e compressão sejam diferentes (Figura 6.55*b*).

Se o momento **M** produz escoamento da viga, o difícil será determinar a localização do eixo neutro *e* a deformação máxima produzida na viga. Isso porque a seção transversal é assimétrica em torno do eixo horizontal e o comportamento tensão-deformação do material é assimétrico na tração e na compressão. Para resolver o problema, usa-se um método de tentativa e erro que requer os seguintes passos:

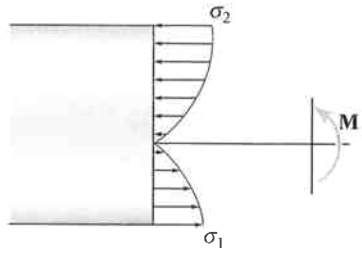
1. Para um dado momento **M**, *supor* a localização do eixo neutro e o declive da distribuição de deformação 'linear' (Figura 6.55*c*).
2. Estabelecer graficamente a distribuição de tensão na seção transversal do elemento, usando a curva σ–ϵ para representar os valores da tensão correspondentes aos valores da deformação. A distribuição de tensão resultante (Figura 6.55*d*) terá a mesma forma da curva σ–ϵ.
3. Determinar os volumes compreendidos pelos 'blocos' de tensões de tração e compressão. (Como aproximação, isso pode exigir a divisão de cada bloco em regiões compostas.) A Equação 6.27 exige que os volumes dos blocos sejam *iguais*, uma vez que representam a força de tração resultante **T** e a força de compressão resultante **C** na seção (Figura 6.55*e*). Se tais forças forem desiguais deve ser feito um ajuste da *localização* do eixo neutro (ponto de *deformação nula*) e o processo repetido até que a Equação 6.27 seja satisfeita ($T = C$).
4. Uma vez que $T = C$, os momentos produzidos por **T** e **C** podem ser calculados em torno do eixo neutro. Nesse caso os braços de momento de **T** e **C** são medidos do eixo neutro para os *centróides dos volumes* definidos pelas distribuições de tensão (Figura 6.55*e*). A Equação 6.28 exige que $M = Ty' + Cy''$. Se ela não for satisfeita, o *declive* da *distribuição de deformação* deve ser ajustado e os cálculos de T e C e do momento repetidos até que se obtenha concordância aproximada.

Como era de esperar, esse processo de cálculo, é cansativo; felizmente, não acontece com muita freqüência na prática da engenharia. A maioria das vigas é simétrica em relação a dois eixos e feita de materiais que, supõe-se, têm diagramas de tensão-deformação de tração e compressão similares. Quando isso ocorre, o eixo neutro passa através do centróide da seção transversal e o processo para relacionar a distribuição de tensão ao momento resultante é, portanto, simplificado.



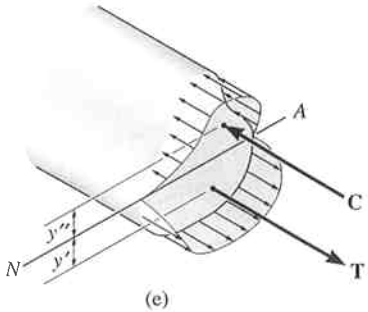
Distribuição de deformação (vista lateral)

(c)



Distribuição de tensão (vista lateral)

(d)



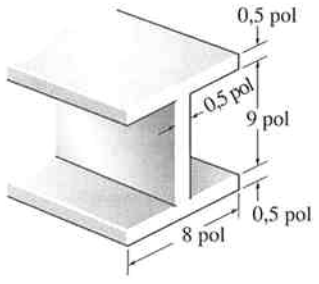
(e)

Figura 6.55

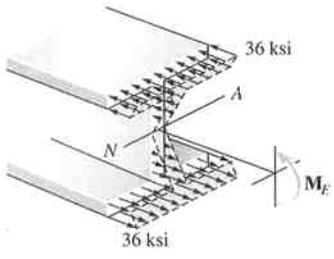
PONTOS IMPORTANTES

- A *distribuição de deformação normal* na seção transversal de uma viga baseia-se somente em considerações geométricas e sabe-se que é sempre *linear*, independentemente da carga aplicada. A distribuição de tensão normal, no entanto, deve ser determinada pelo comportamento do material ou pelo diagrama tensão/deformação, uma vez estabelecida a distribuição de deformação.
- A *localização do eixo neutro* é determinada pela condição de que a *força resultante* na seção transversal seja *nula*.
- O momento interno resultante sobre a seção transversal deve ser igual ao momento da distribuição de tensão em torno do eixo neutro.
- O comportamento perfeitamente plástico supõe que a distribuição de tensão normal é *constante* sobre a seção transversal e, assim, a viga continua a fletir-se mesmo que o momento não aumente. Esse momento é chamado de *momento plástico*.

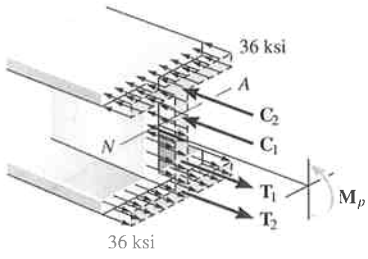
EXEMPLO 6.27



(a)



(b)



(c)

Figura 6.56

A viga em duplo T tem as dimensões mostradas na Figura 6.56*a*. Supondo que seja feita de material elástico perfeitamente plástico com limite de escoamento de tração e compressão $\sigma_E = 36$ ksi, determinar o fator forma da viga.

SOLUÇÃO

A fim de determinar o fator forma, primeiro é necessário calcular o momento elástico máximo M_E e o momento plástico M_p.

Momento Elástico Máximo. A distribuição de tensão normal do momento elástico máximo é mostrada na Figura 6.56*b*. O momento de inércia em torno do eixo neutro é:

$$I = \left[\frac{1}{12}(0{,}5\text{ pol})(9\text{ pol})^3\right] + 2\left[\frac{1}{12}(8\text{ pol})(0{,}5\text{ pol})^3 + 8\text{ pol}(0{,}5\text{ pol})(4{,}75\text{ pol})^2\right] = 211{,}0\text{ pol}^4$$

Aplicando a fórmula da flexão, temos

$$\sigma_{máx} = \frac{Mc}{I}; \qquad 36\text{ kip/pol}^2 = \frac{M_E(5\text{ pol})}{211{,}0\text{ pol}^4}$$

$$M_E = 1.519{,}5\text{ kip} \cdot \text{pol}$$

Momento Plástico. O momento plástico provoca escoamento do aço em toda a seção transversal da viga, de modo que a distribuição de tensão normal fica com a aparência mostrada na Figura 6.56*c*. Devido à simetria da área da seção transversal e como os diagramas tensão-deformação de tração e compressão são os mesmos, o eixo neutro passa pelo centróide da seção transversal. Para determinar o momento plástico, dividimos a distribuição de tensão em quatro 'blocos' retangulares compostos, sendo o volume de cada bloco igual à força por ele produzida. Portanto, temos:

$$C_1 = T_1 = 36\text{ kip/pol}^2(0{,}5\text{ pol})(4{,}5\text{ pol}) = 81\text{ kip}$$
$$C_2 = T_2 = 36\text{ kip/pol}^2(0{,}5\text{ pol})(8\text{ pol}) = 144\text{ kip}$$

Essas forças atuam através do *centróide* do volume de cada bloco. Calculando os momentos dessas forças em torno do eixo neutro, obtemos o momento plástico:

$$M_p = 2\,[(2{,}25\text{ pol})(81\text{ kip})] + 2\,[(4{,}75\text{ pol})(144\text{ kip})] = 1.732{,}5\text{ kip} \cdot \text{pol}$$

Fator Forma. Aplicando a Equação 6.33, temos:

$$k = \frac{M_p}{M_E} = \frac{1.732{,}5\text{ kip} \cdot \text{pol}}{1.519{,}5\text{ kip} \cdot \text{pol}} = 1{,}14 \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Esse valor indica que a viga em duplo T oferece uma seção eficiente para resistir a um *momento elástico*. A maior parte do momento é desenvolvida nas abas da viga, isto é, nos segmentos superior e inferior, enquanto a alma ou segmento vertical contribui muito pouco. Nesse caso particular, apenas 14% de momento adicional pode ser suportado pela viga além do que pode ser suportado elasticamente.

EXEMPLO 6.28

Uma viga em T tem as dimensões mostradas na Figura 6.57*a*. Supondo que seja feita de material elástico perfeitamente plástico com limite de escoamento de tração e compressão $\sigma_E = 250$ MPa, determinar o momento plástico a que ela pode resistir.

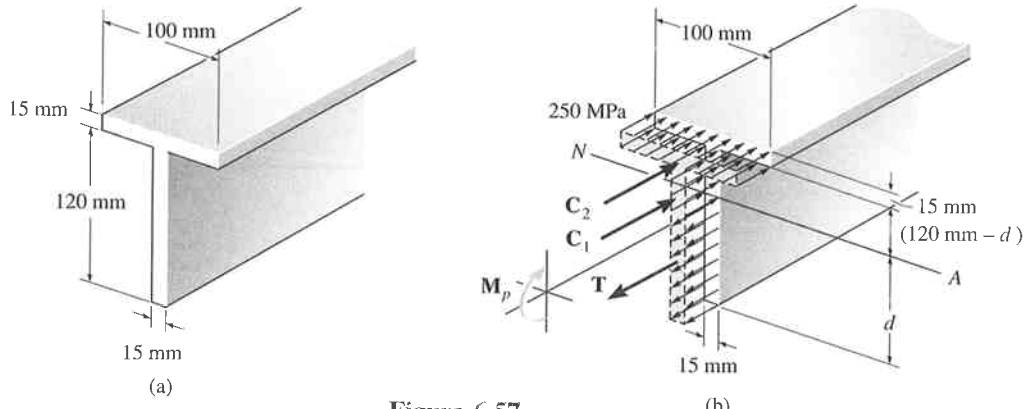


Figura 6.57

SOLUÇÃO

A distribuição de tensão 'plástica' que atua sobre a área da seção transversal é mostrada na Figura 6.57*b*. Nesse caso, a seção transversal não é simétrica em relação a um eixo horizontal e, conseqüentemente, o eixo neutro *não* passa pelo centróide dela. Para que possamos determinar a *localização* do eixo neutro d, é preciso que a distribuição de tensão produza uma força resultante nula na seção transversal. Supondo que $d \leq 120$ mm, temos:

$$\int_A \sigma\, dA = 0; \qquad T - C_1 - C_2 = 0$$

$$250 \text{ MPa}(0{,}015 \text{ m})(d) - 250 \text{ MPa}(0{,}015 \text{ m})(0{,}120 \text{ m} - d)$$

$$- 250 \text{ MPa}(0{,}015 \text{ m})(0{,}100 \text{ m}) = 0$$

$$d = 0{,}110 \text{ m} < 0{,}120 \text{ m} \qquad \text{OK}$$

De acordo com esse resultado, as forças que atuam em cada segmento são positivas, assim:

$$T = 250 \text{ MN/m}^2(0{,}015 \text{ m})(0{,}110 \text{ m}) = 412{,}5 \text{ kN}$$
$$C_1 = 250 \text{ MN/m}^2(0{,}015 \text{ m})(0{,}010 \text{ m}) = 37{,}5 \text{ kN}$$
$$C_2 = 250 \text{ MN/m}^2(0{,}015 \text{ m})(0{,}100 \text{ m}) = 375 \text{ kN}$$

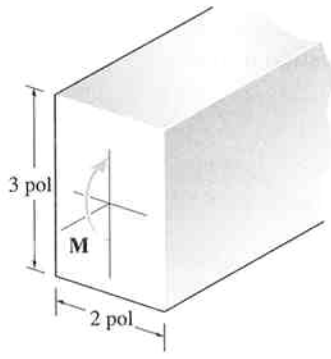
Então, o momento plástico em torno do eixo neutro é:

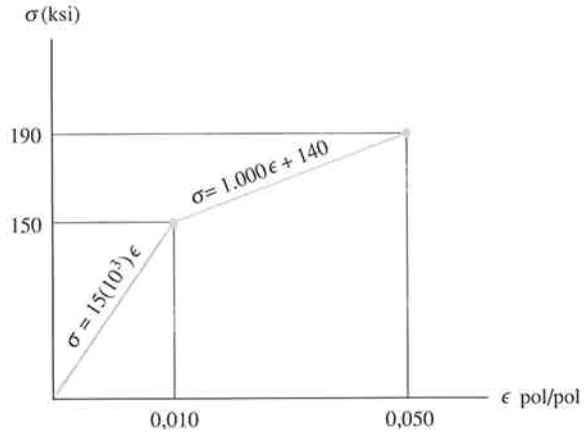
$$M_p = 412{,}5 \text{ kN}\left(\frac{0{,}110 \text{ m}}{2}\right) + 37{,}5 \text{ kN}\left(\frac{0{,}01 \text{ m}}{2}\right) + 375 \text{ kN}\left(0{,}01 \text{ m} + \frac{0{,}015 \text{ m}}{2}\right)$$

$$M_p = 29{,}4 \text{ kN} \cdot \text{m} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

EXEMPLO 6.29

A viga da Figura 6.58*a* é feita de uma liga de titânio com diagrama tensão-deformação que pode ser aproximado, em parte, por duas retas. Supondo que o comportamento do material seja o *mesmo* para tração e compressão, determinar o momento fletor que, aplicado à viga, fará com que o material das partes superior e inferior sofra uma deformação de 0,050 pol/pol.





(a)

SOLUÇÃO I

Analisando o diagrama tensão-deformação, percebe-se que o material exibe 'comportamento elastoplástico com endurecimento por deformação'. E, como a seção transversal é simétrica e os diagramas de tração-compressão $\sigma-\epsilon$ são os mesmos, conclui-se que o eixo neutro passa pelo centróide da seção transversal. A distribuição da deformação, que é sempre linear, aparece na Figura 6.58*b*. Em particular, o ponto em que ocorre a deformação elástica máxima (0,010 pol/pol) foi determinado por proporção, de modo que 0,05/1,5 pol = 0,010/y ou y = 0,3 pol.

A distribuição de tensão normal correspondente que atua sobre a seção transversal é mostrada na Figura 6.58*c*. O momento produzido por essa distribuição é calculado encontrando-se o 'volume' dos blocos de tensão. Para isso, subdividimos a distribuição em dois blocos triangulares e um bloco retangular nas regiões de tração e compressão (Figura 6.58*d*). Como a viga tem 2 pol de largura, as resultantes e suas localizações são determinadas como segue:

$$T_1 = C_1 = \frac{1}{2}(1{,}2 \text{ pol})(40 \text{ kip/pol}^2)(2 \text{ pol}) = 48 \text{ kip}$$

$$y_1 = 0{,}3 \text{ pol} + \frac{2}{3}(1{,}2 \text{ pol}) = 1{,}10 \text{ pol}$$

$$T_2 = C_2 = (1{,}2 \text{ pol})(150 \text{ kip/pol}^2)(2 \text{ pol}) = 360 \text{ kip}$$

$$y_2 = 0{,}3 \text{ pol} + \frac{1}{2}(1{,}2 \text{ pol}) = 0{,}90 \text{ pol}$$

$$T_3 = C_3 = \frac{1}{2}(0{,}3 \text{ pol})(150 \text{ ksi})(2 \text{ pol}) = 45 \text{ kip}$$

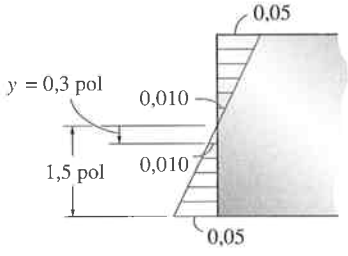
$$y_3 = \frac{2}{3}(0{,}3 \text{ pol}) = 0{,}2 \text{ pol}$$

O momento produzido por essa distribuição de tensão normal em torno do eixo neutro é, portanto,

$$M = 2\,[48 \text{ kip } (1{,}10 \text{ pol}) + 360 \text{ kip } (0{,}90 \text{ pol}) + 45 \text{ kip } (0{,}2 \text{ pol})]$$
$$= 772 \text{ kip} \cdot \text{pol}$$ ***Resposta***

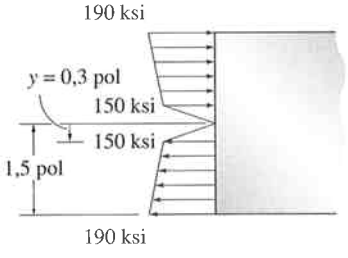
SOLUÇÃO II

Em vez de usar a técnica semigráfica anterior, também é possível calcular o momento analiticamente. Para isso, devemos expressar a distribuição de tensão da Figura 6.58*c* em função da posição y ao longo da viga. Observe que $\sigma = f(\epsilon)$ foi dado na Figura 6.58*a*. Pela Figura 6.58*b*, a deformação normal também pode



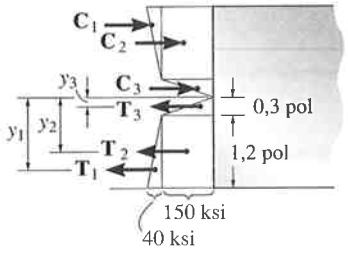
Distribuição de deformação

(b)



Distribuição de tensão

(c)



(d)

Figura 6.58

ser determinada em função da posição y pela proporção de triângulos. Isto é:

$$\epsilon = \frac{0{,}05}{1{,}5}\, y \qquad 0 \le y \le 1{,}5 \text{ pol}$$

Substituindo essa expressão pelas funções σ–ϵ mostradas na Figura 6.58*a*, temos:

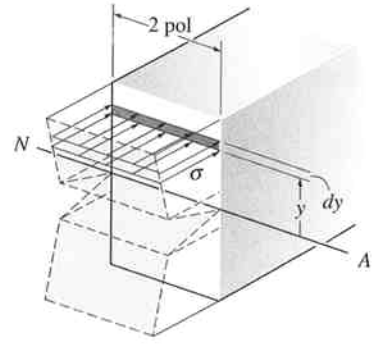
$$\sigma = 500y \qquad 0 \le y \le 0{,}3 \text{ pol} \qquad (1)$$
$$\sigma = 33{,}33y + 140 \qquad 0{,}3 \text{ pol} \le y \le 1{,}5 \text{ pol} \qquad (2)$$

Pela Figura 6.58*e*, o momento provocado por σ que atua na área da tira $dA = 2\ dy$ é:

$$dM = y\ (\sigma\ dA) = y\sigma\ (2\ dy)$$

Usando as equações 1 e 2, concluímos que o momento para toda a seção transversal é:

$$M = 2\left[2\int_0^{0,3} 500y^2\ dy + 2\int_{0,3}^{1,5} (33{,}3y^2 + 140y)\ dy\right]$$
$$= 772 \text{ kip} \cdot \text{pol} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$



(e)

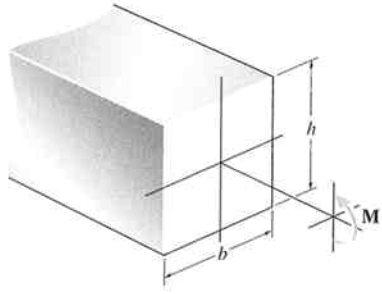
Figura 6.58

*6.11 TENSÃO RESIDUAL

Se uma viga for carregada de tal modo que seu material escoe, a retirada da carga provocará ***tensão residual***. Como as tensões residuais são importantes ao considerarmos fadiga e outros tipos de comportamento mecânico, discutiremos um método utilizado para seu cálculo quando o elemento é submetido a flexão.

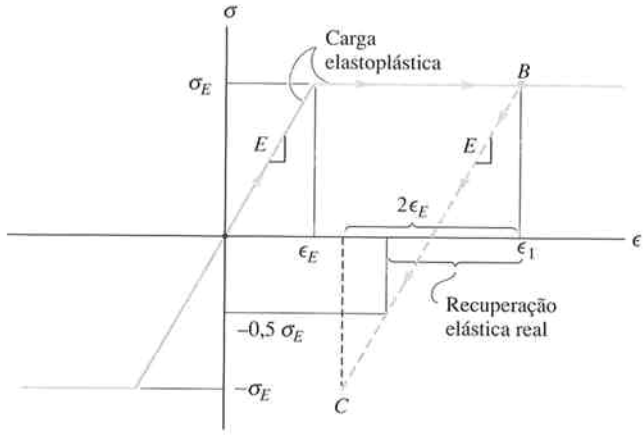
Como no caso de torção, podemos calcular a distribuição de tensão residual usando os princípios de superposição e recuperação elástica. Para explicar esse cálculo, consideremos a viga mostrada na Figura 6.59*a*, que tem seção transversal retangular e é feita de material elástico perfeitamente plástico com o mesmo diagrama tensão-deformação, tanto na tração como na compressão (Figura 6.59*b*). A aplicação do momento plástico M_p provoca uma distribuição de tensão como a idealizada na Figura 6.59*c*. Pela Equação 6.31, esse momento é:

$$M_p = \frac{1}{4}\, bh^2\sigma_E$$



(a)

Figura 6.59



(b)

Se M_p provoca deformação ϵ_1 ($>> \epsilon_E$) nas partes superior e inferior da viga, como mostrado pelo ponto B na Figura 6.59*b*, σ–ϵ, a remoção do momento fará o material recuperar elasticamente parte da deformação, seguindo o caminho tracejado BC. Como a recuperação é elástica, podemos sobrepor à distribuição de tensão na Figura 6.59*c* uma distribuição de tensão linear provocada pela aplicação do momento plástico na direção oposta (Figura 6.59*d*). Nesse caso a tensão máxima, chamada ***módulo de ruptura*** para a flexão, σ_r, é determinada pela fórmula da flexão quando a viga está carregada com momento plástico. Temos:

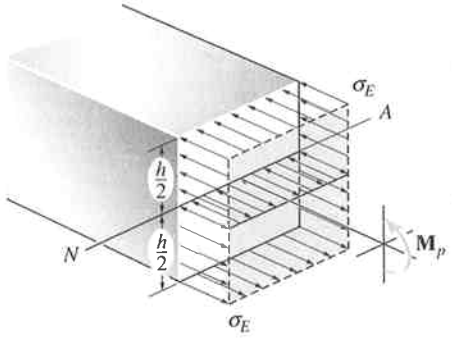
$$\sigma_{máx} = \frac{Mc}{I}; \qquad \sigma_r = \frac{M_p(\frac{1}{2}h)}{(\frac{1}{12}bh^3)} = \frac{(\frac{1}{4}bh^2\sigma_E)(\frac{1}{2}h)}{(\frac{1}{12}bh^3)}$$

$$= 1{,}5\sigma_E$$

Como se vê, aqui é possível a aplicação invertida do momento plástico por meio de uma distribuição de tensão linear, visto que a *recuperação elástica* do material nas partes superior e inferior da viga tem uma *deformação de recuperação máxima* de $2\epsilon_E$, como mostra a Figura 6.59*b*. Isso corresponde a uma tensão máxima de $2\sigma_E$ nas partes superior e inferior da viga — maior que a tensão *requerida* de $1{,}5\sigma_E$ calculada anteriormente (Figura 6.59*d*).

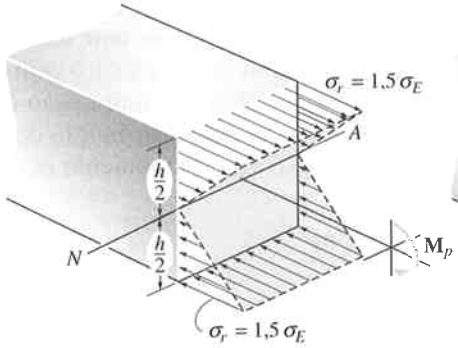
A superposição do momento plástico (Figura 6.59*c*) e sua remoção (Figura 6.59*d*) resultam na distribuição de tensão residual mostrada na Figura 6.59*e*. A título de exercício, usar os 'blocos' triangulares componentes que representam essa distribuição de tensão para mostrar que ela produz força e momento resultantes nulos no elemento, como requerido.

O exemplo a seguir ilustra numericamente a aplicação desses princípios.



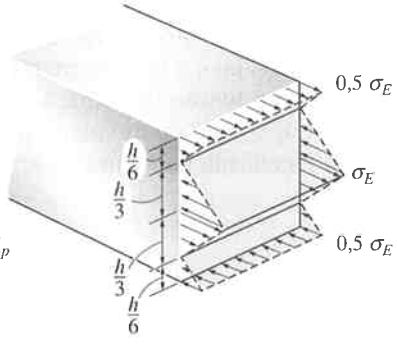
Momento plástico aplicado provocando deformação plástica

(c)



Momento plástico invertido provocando deformação elástica

(d)



Distribuição de tensão residual na viga

(e)

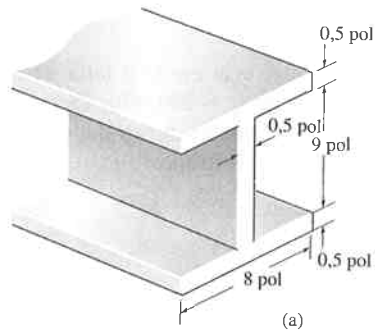
Figura 6.59

EXEMPLO 6.30

A viga em duplo T de aço mostrada na Figura 6.60*a* está submetida a um momento inteiramente plástico $\mathbf{M}_p$. Supondo que ele seja removido, determinar a distribuição de tensão residual na viga. O material é elástico perfeitamente plástico e tem limite de escoamento $\sigma_E = 36$ ksi.

SOLUÇÃO

A distribuição de tensão normal na viga provocada por $\mathbf{M}_p$ é mostrada na Figura 6.60*b*. Quando $\mathbf{M}_p$ é removido, o material responde elasticamente. Tal remoção exige a aplicação de $\mathbf{M}_p$ na direção inversa e leva, portanto, a uma distribuição de tensão que se supõe elástica, conforme mostrado na Figura 6.60*c*. O módulo de ruptura σ_r é calculado pela fórmula da flexão. Usando $M_p = 1.732{,}5 \text{ kip} \cdot \text{pol}$ e $I = 211{,}0 \text{ pol}^4$ (dados do Exemplo 6.27), temos:



(a)

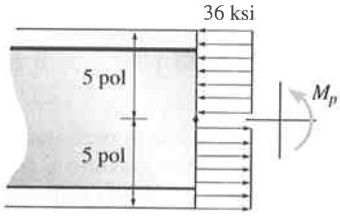
$$\sigma_{máx} = \frac{Mc}{I}; \qquad \sigma_r = \frac{1.732{,}5 \text{ kip} \cdot \text{pol}(5 \text{ pol})}{211{,}0 \text{ pol}^4} = 41{,}1 \text{ ksi}$$

Como esperado, $\sigma_r < 2\sigma_E$.

A superposição das tensões resulta na distribuição de tensão residual da Figura 6.60*d*. Observe que o ponto de tensão normal nula foi determinado por proporção; ou seja, de acordo com as figuras 6.60*b* e 6.60*c*, é preciso que:

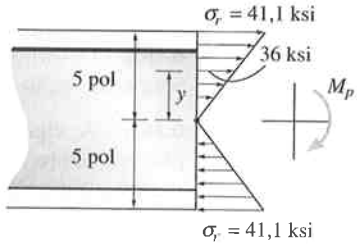
$$\frac{41{,}1 \text{ ksi}}{5 \text{ pol}} = \frac{36 \text{ ksi}}{y}$$

$$y = 4{,}38 \text{ pol}$$



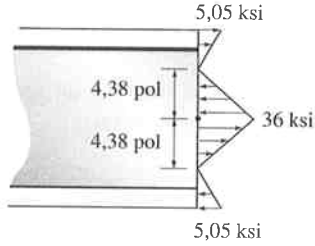
Momento plástico aplicado (vista lateral)

(b)



Momento plástico invertido (vista lateral)

(c)



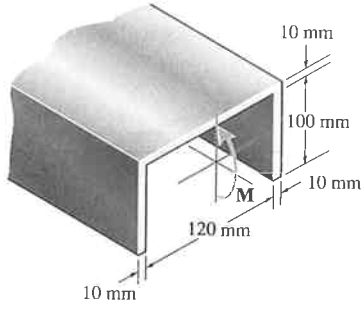
Distribuição de tensão residual

(d)

Figura 6.60

PROBLEMAS

6.151. O tirante em U é feito de um material elástico perfeitamente plástico para o qual $\sigma_E = 250$ MPa. Determinar o momento elástico máximo e o momento plástico que podem ser aplicados à seção transversal.

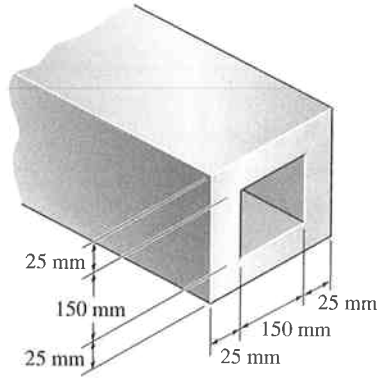


Problema 6.151

***6.152.** Uma barra de aço A-36 retangular tem largura de 1 pol e altura de 3 pol. Determinar o momento aplicado em torno do eixo horizontal que provoca escoamento de metade da barra.

6.153. Determinar o fator forma da seção transversal da viga.

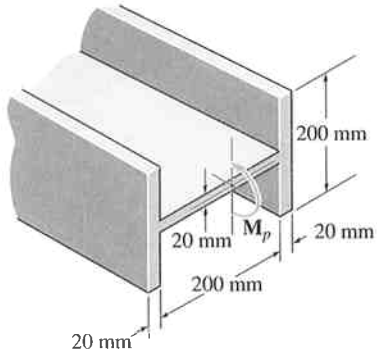
6.154. A viga-caixão é feita de um material elástico perfeitamente plástico para o qual $\sigma_E = 250$ MPa. Determinar a tensão residual nas partes superior e inferior depois que o momento plástico $\mathbf{M}_p$ é aplicado e retirado.



Problemas 6.153/6.154

6.155. Determinar o fator forma da seção transversal da viga em H.

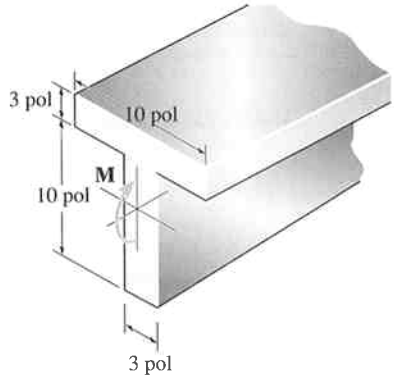
***6.156.** A viga em H é feita de um material elastoplástico para o qual $\sigma_E = 250$ MPa. Determinar a tensão residual nas partes superior e inferior depois que o momento plástico $\mathbf{M}_p$ é aplicado e retirado.



Problemas 6.155/6.156

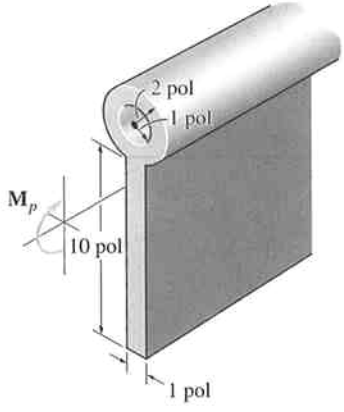
6.157. A viga em T é feita de material elástico perfeitamente plástico. Determinar o momento elástico máximo que pode ser aplicado à seção transversal. $\sigma_E = 36$ ksi.

6.158. Determinar o módulo da seção plástica e o fator forma de sua seção transversal.



Problemas 6.157/6.158

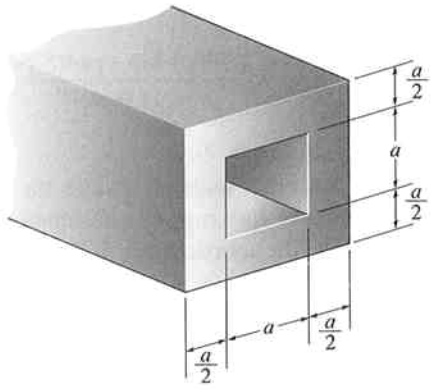
6.159. Determinar o momento plástico $\mathbf{M}_p$ que pode ser suportado por uma viga com a seção transversal mostrada. $\sigma_E = 30$ ksi.



Problema 6.159

***6.160.** Determinar o módulo da seção plástica e o fator forma do elemento, que tem seção transversal caixão.

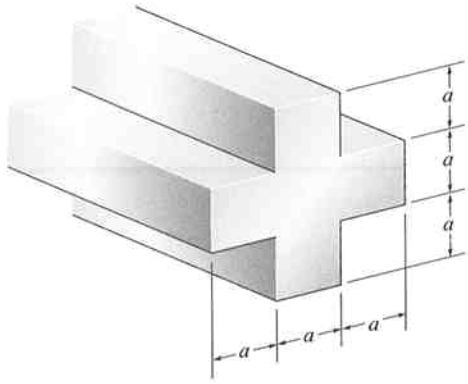
6.161. A viga-caixão é feita de material elástico perfeitamente plástico. Determinar o momento elástico máximo e o momento plástico que podem ser aplicados à seção transversal. Adotar $a = 100$ mm e $\sigma_E = 250$ MPa.



Problemas 6.160/6.161

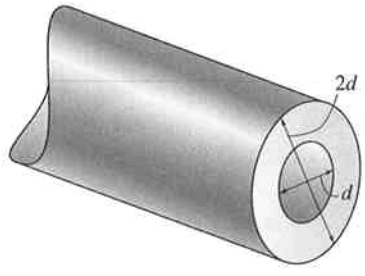
6.162. Determinar o módulo da seção plástica e o fator forma da seção transversal.

6.163. A viga é feita de material elástico perfeitamente plástico. Determinar o momento plástico máximo e o momento plástico que podem ser aplicados à seção transversal. Adotar $a = 2$ pol e $\sigma_E = 36$ ksi.



Problemas 6.162/6.163

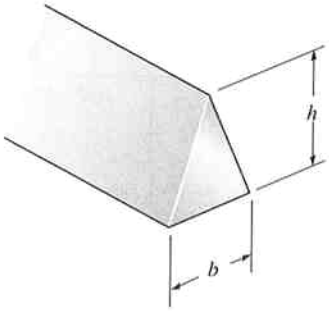
***6.164.** Determinar o módulo da seção plástica e o fator forma do elemento, que tem seção transversal tubular.



Problema 6.164

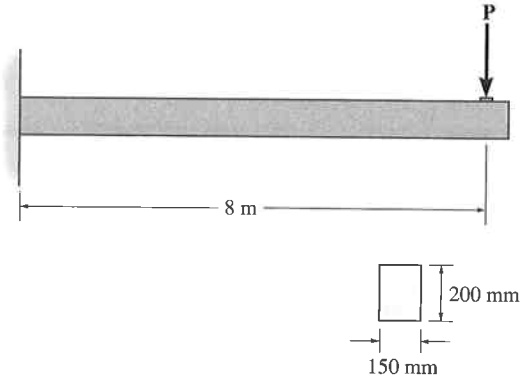
6.165. Determinar o módulo da seção plástica e o fator forma do elemento.

6.166. O elemento é feito de material elástico perfeitamente plástico para o qual $\sigma_E = 230$ MPa. Determinar o momento elástico máximo e o momento plástico que podem ser aplicados à seção transversal. Adotar $b = 50$ mm e $h = 80$ mm.



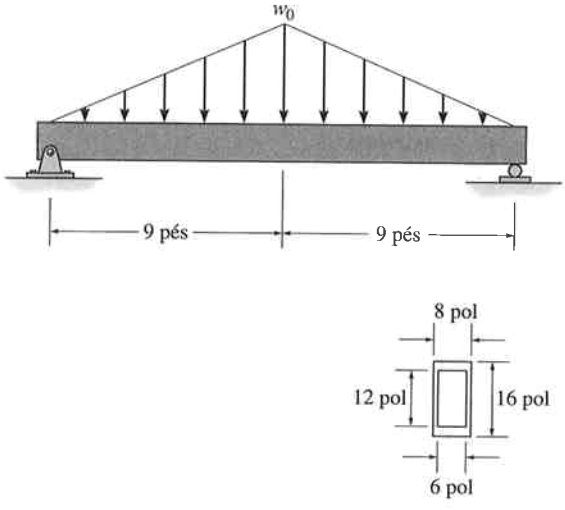
Problemas 6.165/6.166

6.167. A viga é feita de um material elastoplástico para o qual $\sigma_E = 200$ MPa. Determinar a intensidade da força **P** que faz esse momento ser (*a*) o maior momento elástico e (*b*) o maior momento plástico.



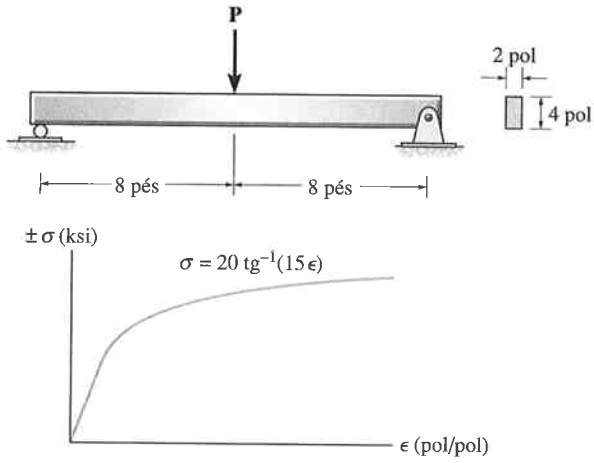
Problema 6.167

***6.168.** A viga-caixão é feita de um material elastoplástico para o qual $\sigma_E = 25$ ksi. Determinar a intensidade da carga distribuída w_0 que faz esse momento ser (*a*) o maior momento elástico e (*b*) o maior momento plástico.



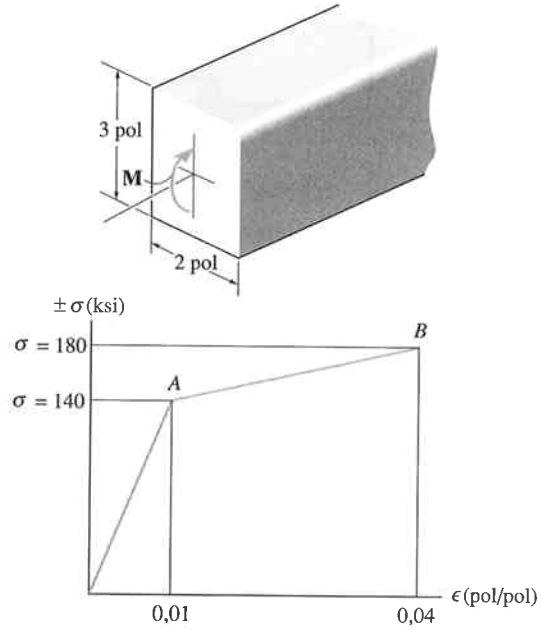
Problema 6.168

6.169. A viga é feita de um poliéster com a curva tensão-deformação mostrada. Supondo que a curva possa ser representada pela equação $\sigma = [20\,\text{tg}^{-1}(15\epsilon)]$ ksi, onde $\text{tg}^{-1}(15\epsilon)$ é dada em radianos, determinar a grandeza da força **P** que pode ser aplicada à viga sem que a deformação máxima nas fibras da seção crítica exceda $\epsilon_{máx} = 0{,}003$ pol/pol.



Problema 6.169

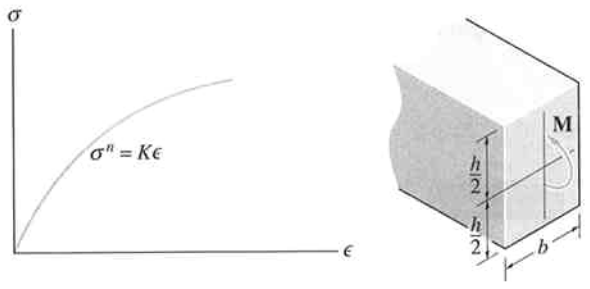
6.170. O diagrama tensão-deformação de uma liga de titânio pode ser aproximado pelas duas retas. Supondo que um tirante feito desse material seja submetido a flexão, determinar o momento a que ele resistirá se a tensão máxima atingir (*a*) σ_A e (*b*) σ_B.



Problema 6.170

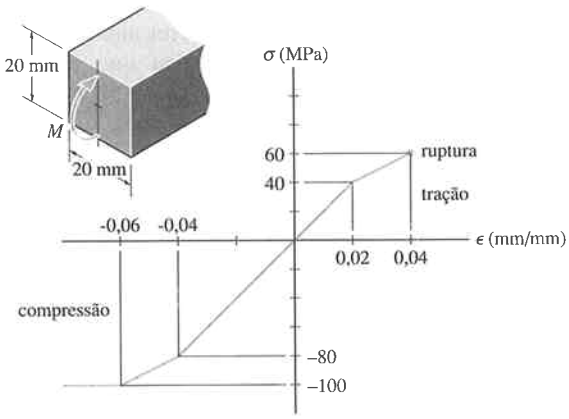
6.171. Um material tem diagrama tensão-deformação tal que na região elástica o esforço de tração ou compressão podem ser relacionados à deformação de tração ou compressão pela equação $\sigma^n = K\epsilon$, onde K e n são constantes. Supondo que o material seja submetido a um momento fletor M,

deduzir uma expressão entre a tensão máxima no material e o momento. A seção transversal tem momento de inércia I em torno de seu eixo neutro.



Problema 6.171

***6.172.** A barra de plexiglass tem uma curva de tensão-deformação que pode ser aproximada pelos segmentos de reta mostrados. Determinar o maior momento M que pode ser aplicado à barra antes que ela se rompa.

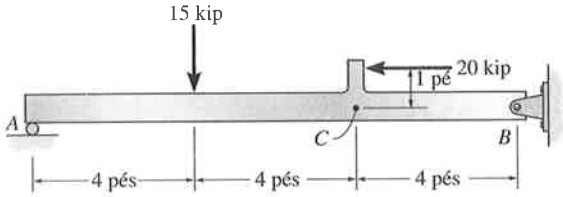


Problema 6.172

6.173. Determinar a tensão residual nas partes superior e inferior de uma viga de aço A-36 com seção transversal circular, da qual foi removido um momento inteiramente plástico. O raio da barra é de 4 pol.

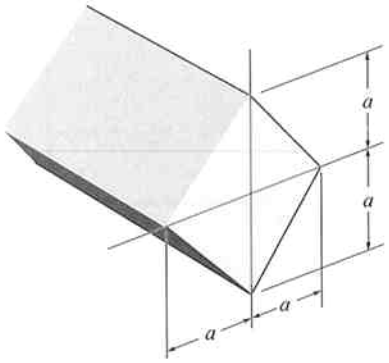
PROBLEMAS DE REVISÃO

6.174. Desenhar os diagramas de força cortante e momento para a viga. *Dica*: a carga de 20 kip deve ser substituída pelo carregamento equivalente no ponto C do eixo.



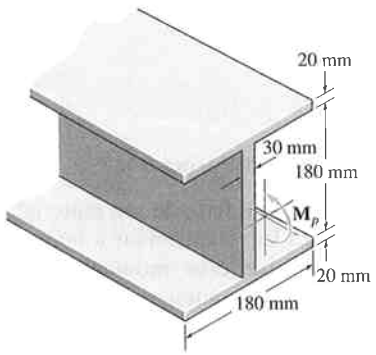
Problema 6.174

6.175. O elemento tem seção transversal quadrada. Supondo que seja feito de um material elástico perfeitamente plástico, determinar o fator forma e o módulo Z da seção plástica.



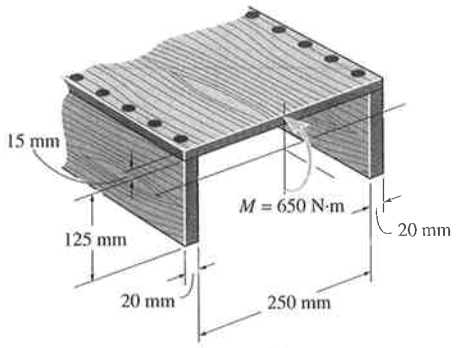
Problema 6.175

***6.176.** A viga é feita de um material elastoplástico para o qual σ_E = 250 MPa. Determinar a tensão residual nas partes superior e inferior depois que o momento plástico $\mathbf{M}_p$ é aplicado e retirado.



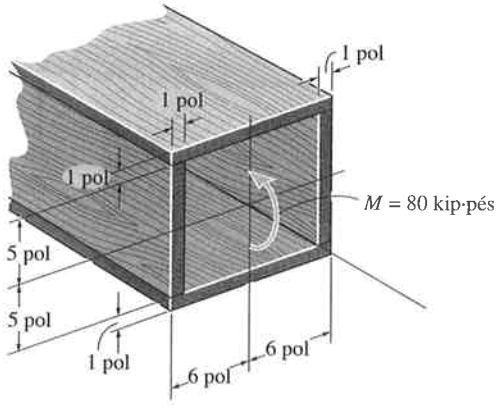
Problema 6.176

6.177. A viga é feita de três tábuas pregadas como mostrado. Determinar os esforços máximos de tração e compressão nela desenvolvidos.



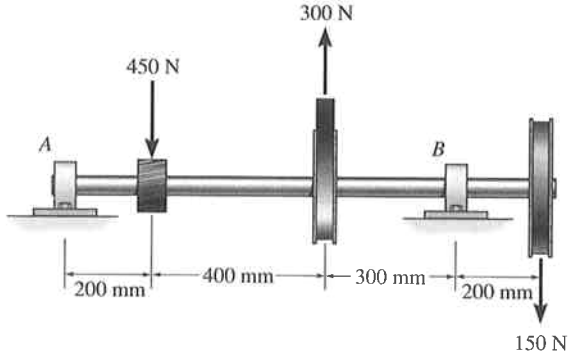
Problema 6.177

6.178. A viga é composta por quatro peças de madeira coladas, como mostrado. Supondo que o momento fletor interno seja $M = 80$ kip · pés, determinar a tensão de flexão máxima nela desenvolvida. Desenhar uma vista tridimensional da distribuição de tensão que atua sobre a seção transversal.



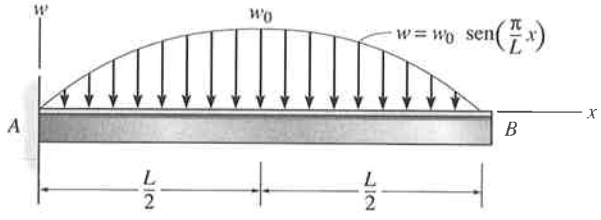
Problema 6.178

6.179. Desenhar os diagramas de força cortante e momento para o eixo, supondo que ele esteja submetido às cargas verticais da correia, engrenagem e volante. Os mancais em A e B exercem apenas reações verticais sobre ele.



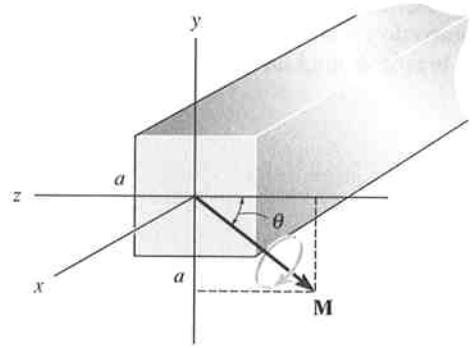
Problema 6.179

***6.180.** Desenhar os diagramas de força cortante e momento para a viga.



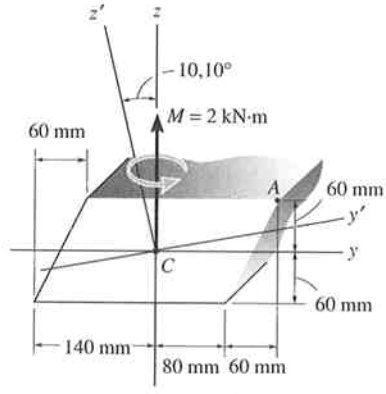
Problema 6.180

6.181. O tirante tem seção transversal quadrada a por a e está sujeito ao momento fletor **M** aplicado num ângulo θ como mostrado. Determinar a tensão de flexão máxima em termos de a, M e θ. Que ângulo θ resultará na maior tensão de flexão no tirante? Especificar a orientação do eixo neutro nesse caso.



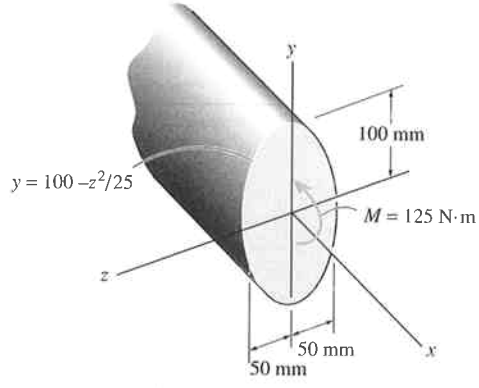
Problema 6.181

6.182. Para a seção, ($I_z = 114(10^{-6})$ m^4, $31{,}7(10^{-6})$ m^4, $I_{yz} = 15{,}1(10^{-6})$ m^4. Usando as técnicas descritas no Apêndice A, concluímos que a área da seção transversal do elemento tem momentos principais de inércia $I_{y'} = 29(10^{-6})$ m^4 e $I_{z'} = 117(10^{-6})$ m^4, calculados em torno dos eixos principais de inércia y' e z', respectivamente. Supondo que a seção esteja submetida ao momento $M = 2$ kN · m orientado como mostrado, determinar a tensão produzida no ponto A (a) usando a Equação 6.11 e (b) usando a equação desenvolvida no Problema 6.110.



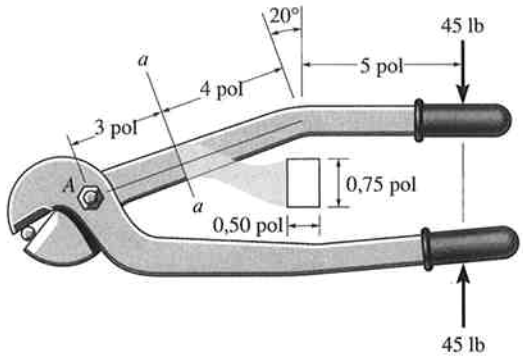
Problema 6.182

6.183. Um eixo é feito de um polímero com seção transversal parabólica. Supondo que ele resista a um momento interno $M = 125$ N · m, determinar a tensão de flexão máxima desenvolvida no material (a) usando a fórmula da flexão e (b) usando integração. Desenhar uma vista tridimensional da distribuição de tensão que atua sobre a área da seção transversal. *Dica*: o momento de inércia é determinado pela Equação A.3 do Apêndice A.



Problema 6.183

***6.184.** Determinar a tensão de flexão máxima na seção *a–a* do braço do cortador de cabo. É aplicada uma força de 45 lb nos braços. A área da seção transversal é mostrada na figura.



Problema 6.184

7 Cisalhamento Transversal

Objetivos do Capítulo

Neste capítulo desenvolveremos um método para encontrar a tensão de cisalhamento em vigas com seção transversal prismática, feitas de material homogêneo que se comporta de maneira linear-elástica. O método de análise a ser desenvolvido limita-se de certo modo a casos especiais de geometria de seção transversal. Não obstante, ele é amplamente aplicado em projetos e análises de engenharia. O conceito de fluxo de cisalhamento, bem como o de tensão de cisalhamento, será discutido para vigas e elementos de parede fina. Por fim, o capítulo abordará os centros de cisalhamento.

Os dormentes das ferrovias atuam como vigas que suportam cargas de cisalhamento transversal muito grandes. Como resultado, dormentes de madeira tendem a trincar nas extremidades, onde as cargas de cisalhamento são maiores.

7.1 Cisalhamento em Elementos Retos

Foi mostrado na Seção 6.1 que as vigas suportam em geral tanto cargas de cisalhamento como de momento fletor. O cisalhamento **V** é o resultado de uma distribuição de tensão de cisalhamento transversal que atua sobre a seção transversal da viga (Figura 7.1). Observe que, devido à propriedade complementar do cisalhamento, tensões de cisalhamento longitudinais associadas também atuam ao longo dos planos longitudinais da viga. Por exemplo: um elemento típico retirado do interior da seção transversal está sujeito tanto a tensões de cisalhamento transversais como longitudinais (Figura 7.1).

Será mais fácil ilustrar fisicamente por que a tensão de cisalhamento se desenvolve nos planos longitudinais da viga se considerarmos que esta é composta por três tábuas (Figura 7.2*a*). Se as superfícies superior e inferior de cada tábua forem lisas e as tábuas não estiverem coladas, quando aplicada a carga **P** haverá o *deslizamento* de uma tábua em relação à outra e, desse modo, a viga se refletirá como mostrado. Por outro lado, se as tábuas estiverem acopladas, as tensões de cisalhamento longitudinal entre elas impedirão o deslizamento relativo e, assim, a viga atuará como uma peça única (Figura 7.2*b*).

Como resultado da tensão de cisalhamento, desenvolvem-se deformações de cisalhamento, e estas tendem a distorcer a seção transversal de maneira bem complexa. Para mostrar essa condição, consideremos uma barra feita de material altamente deformável e marcada com uma grade de linhas horizontais e verticais (Figura 7.3*a*). Quando aplicada, a força de cisalhamento **V** tende a deformar as linhas conforme o padrão mostrado na Figura 7.3*b*. Essa distribuição não uniforme da tensão de cisalhamento sobre a seção provoca *distorção* da seção, que *não* permanece plana.

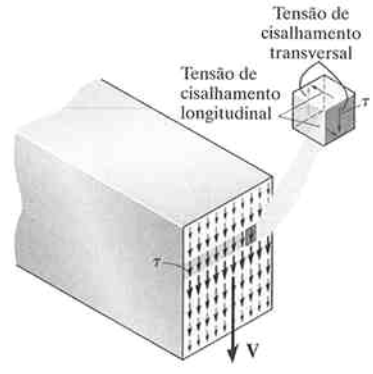
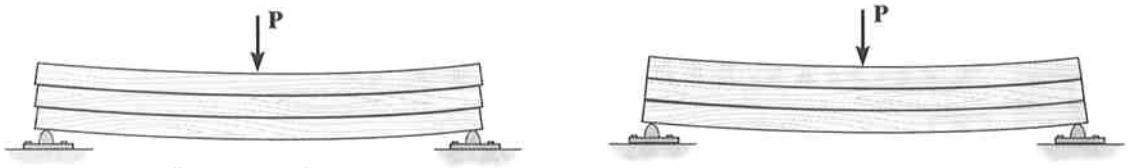


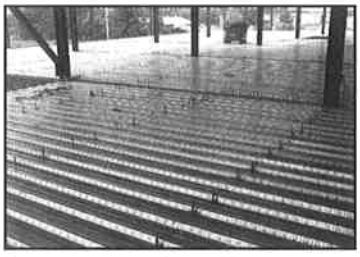
Figura 7.1



Tábuas sem acoplamento
(a)

Tábuas com acoplamento
(b)

Figura 7.2



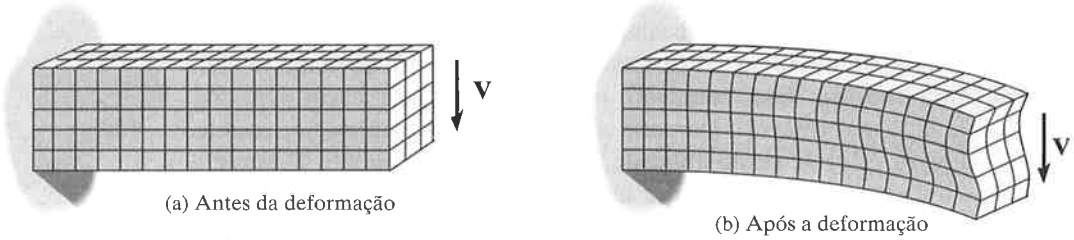
Os conectores de cisalhamento são 'soldados' neste piso metálico corrugado de forma que, quando o concreto é colocado, os conectores impedem que a laje deslize sobre a superfície do piso. Os dois materiais atuam, assim, como uma laje composta.

Lembre-se de que, ao desenvolver a fórmula da flexão, demos como certo que as seções transversais tinham de *permanecer planas* e perpendiculares ao eixo longitudinal da viga após a deformação. Apesar de essa condição ser *violada* quando a viga está submetida a flexão e cisalhamento, podemos supor, em geral, que a distorção da seção transversal descrita anteriormente é tão pequena que pode ser desprezada. Essa hipótese é particularmente verdadeira no caso, bastante comum, da *viga esbelta*, ou seja, aquela que possui largura pequena em relação ao comprimento.

Nos capítulos anteriores desenvolvemos as fórmulas de carga axial, torção e flexão determinando primeiro a distribuição de deformação, com base nas hipóteses relativas à deformação da seção transversal. No caso de cisalhamento transversal, no entanto, a distribuição da deformação por cisalhamento *não pode* ser facilmente expressa em termos matemáticos para toda a largura da viga. Por exemplo: ela não é uniforme ou linear para seções transversais retangulares como as já vistas. Portanto, a análise da tensão de cisalhamento será desenvolvida de maneira diferente da usada para estudar os carregamentos anteriores. Na verdade, desenvolveremos uma fórmula para a tensão de cisalhamento *indiretamente*, isto é, usando a fórmula da flexão e a relação entre momento fletor e força de cisalhamento ($V = dM/dx$).

7.2 FÓRMULA DO CISALHAMENTO

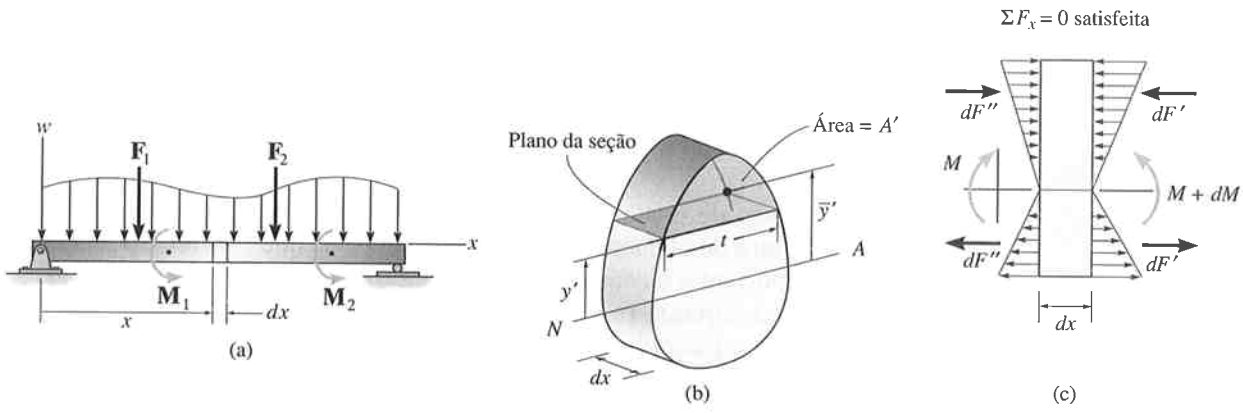
O desenvolvimento de uma relação entre a distribuição da tensão de cisalhamento que atua sobre a seção transversal de uma viga e a força cortante (ou de cisalhamento) resultante na seção baseia-se no estudo da *tensão de cisalhamento longitudinal*, bem como nos resultados da Equação 6.2 ($V = dM/dx$). Para exemplificar como essa relação é estabelecida, consideremos o *equilíbrio da força horizontal* de uma parte do elemento tirado da viga mostrada na Figura 7.4*a*, o qual aparece na Figura 7.4*b*. Um diagrama de corpo livre do *elemento* que mostra *somente* a distribuição da tensão normal que atua sobre ele é apresentado na Figura 7.4*c*. Essa distribuição é provocada pelos momentos fletores M e $M + dM$. Excluímos do diagrama de corpo livre os efeitos de V, $V + dV$ e $w(x)$, uma vez que essas cargas são verticais e, portanto, não serão incluídas no somatório da força horizontal. O elemento da Figura 7.4*c* na verdade satisfaz $\Sigma F_x = 0$, visto que a distribuição de tensão em cada lado forma apenas um conjugado e, portanto, uma força resultante nula.



(a) Antes da deformação

(b) Após a deformação

Figura 7.3



Consideremos agora o *segmento* superior do elemento, secionado a uma distância y' do eixo neutro EN e que aparece sombreado na Figura 7.4*b*. Esse segmento tem largura t na seção, e cada lado de sua seção transversal tem área A'. Como os momentos resultantes de cada lado do elemento diferem por dM, pode-se ver na Figura 7.4*d* que $\Sigma F_x = 0$ não será satisfeita, *a menos que* a tensão de cisalhamento longitudinal τ atue sobre a face inferior do segmento. Na análise a seguir, vamos supor que essa tensão de cisalhamento seja *constante* em toda a largura t da face inferior e atue sobre a área $t\,dx$. Aplicando a equação de equilíbrio das forças horizontais e usando a fórmula da flexão (Equação 6.13), temos:

$$\stackrel{+}{\leftarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad \int_{A'} \sigma'\,dA - \int_{A'} \sigma\,dA - \tau(t\,dx) = 0$$

$$\int_{A'} \left(\frac{M + dM}{I}\right) y\,dA - \int_{A'} \left(\frac{M}{I}\right) y\,dA - \tau(t\,dx) = 0$$

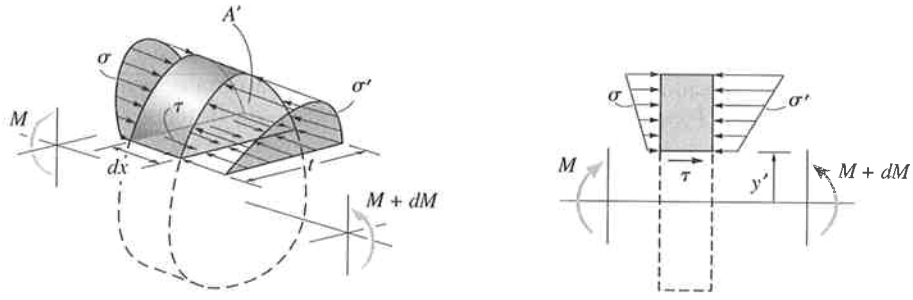
$$\left(\frac{dM}{I}\right) \int_{A'} y\,dA = \tau(t\,dx) \qquad (7.1)$$

Resolvendo em τ, obtemos:

$$\tau = \frac{1}{It}\left(\frac{dM}{dx}\right) \int_{A'} y\,dA$$

Essa equação pode ser simplificada, já que $V = dM/dx$ (Equação 6.2). Além disso, a integral representa o momento de primeira ordem da área A' em torno do eixo neutro. Observe que ele tem como símbolo Q. Como a localização do centróide da área A' é determinada por $\bar{y}' = \int_{A'} y\,dA/A'$, podemos também escrever:

$$Q = \int_{A'} y\,dA = \bar{y}'A' \qquad (7.2)$$



Vista tridimensional (d) Vista lateral

Figura 7.4

Assim, o resultado final é:

$$\tau = \frac{VQ}{It} \tag{7.3}$$

Onde:

τ = tensão de cisalhamento no ponto localizado a uma distância y' do eixo neutro do elemento (Figura 7.4*b*); supõe-se que essa tensão seja constante e, portanto, *média* ao longo da largura t do membro (Figura 7.4*d*)

V = força cortante resultante interna, determinada pelo método das seções e pelas equações de equilíbrio

I = momento de inércia de *toda* a área da seção transversal, calculado em torno do eixo neutro

t = largura da área da seção transversal do elemento medida no ponto em que τ deve ser determinado

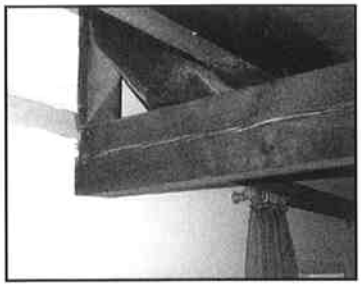
$Q = \int_{A'} y\, dA' = \bar{y}'A'$, onde A' é a parte superior (ou inferior) da área da seção transversal do elemento, definida pela seção onde t é medido, e $\bar{y}'$ é a distância até o centróide de A', medida a partir do eixo neutro

A equação anteior é denominada *fórmula do cisalhamento*. Apesar de termos considerado na demonstração apenas as tensões de cisalhamento que atuam no plano longitudinal da viga, a fórmula aplica-se igualmente para determinar a tensão de cisalhamento transversal na área da seção transversal. Isso ocorre porque as tensões de cisalhamento transversal e longitudinal são complementares e numericamente iguais.

Como a Equação 7.3 foi deduzida indiretamente da fórmula da flexão, é necessário que o material comporte-se de maneira linear-elástica e tenha o *mesmo* módulo de elasticidade tanto sob tração como sob compressão. A tensão de cisalhamento em elementos compostos, ou seja, aqueles que têm seções transversais feitas de materiais diferentes, também é obtida pela fórmula do cisalhamento. Para isso, é necessário calcular Q e I a partir da *seção transformada* do elemento, como discutido na Seção 6.6. A espessura t na fórmula, entretanto, permanece como a largura verdadeira t da seção transversal no ponto em que τ deve ser calculado.

7.3 TENSÕES DE CISALHAMENTO EM VIGAS

A fim de explicar como se aplica a fórmula do cisalhamento e também discutir algumas de suas limitações, estudaremos a seguir as distribuições da tensão de cisalhamento em alguns tipos comuns de seções transversais de vigas. Aplicações numéricas da fórmula do cisalhamento serão mostradas nos exemplos.



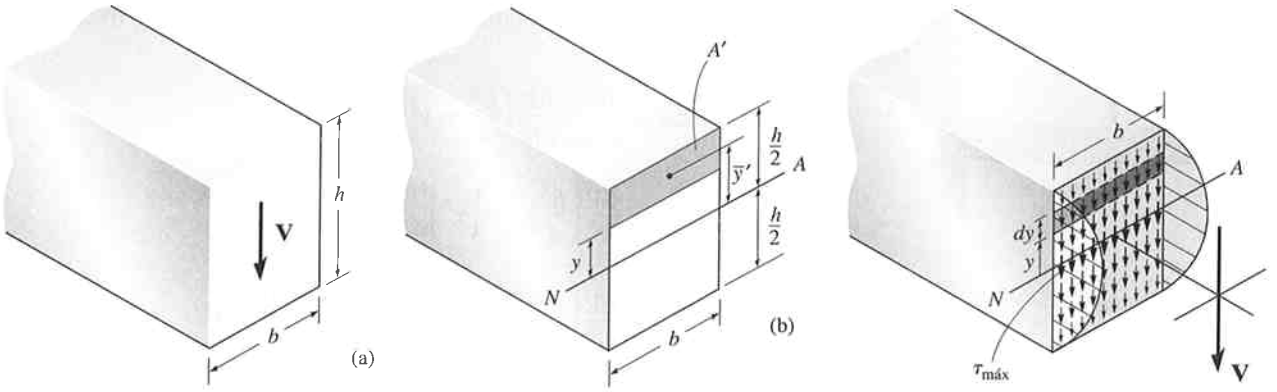
A falha típica de cisalhamento desta viga de madeira ocorreu no apoio e através do centro aproximado de sua seção transversal.

Seção Transversal Retangular. Consideremos que a viga tenha uma seção transversal retangular de largura b e altura h, como mostrado na Figura 7.5*a*. A distribuição da tensão de cisalhamento ao longo de toda a seção transversal é determinada calculando-se a tensão de cisalhamento a uma *altura arbitrária* y do eixo neutro (Figura 7.5*b*) e montando-se o gráfico da função. Nesse caso, a área sombreada escura A' será usada para calcular τ.[1] Então:

$$Q = \bar{y}'A' = \left[y + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y\right)\right]\left(\frac{h}{2} - y\right)b$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)b$$

[1] A área abaixo de y também pode ser usada $[A' = b(h/2 + y)]$, mas esse método exige um pouco mais de manipulação algébrica.



Aplicando a fórmula do cisalhamento, temos:

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{V(\frac{1}{2})[(h^2/4) - y^2]b}{(\frac{1}{12}bh^3)b}$$

ou

$$\tau = \frac{6V}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \tag{7.4}$$

O resultado indica que a distribuição da tensão de cisalhamento sobre a seção transversal é ***parabólica***. Como mostrado na Figura 7.5*c*, a intensidade varia de zero nas partes superior e inferior, $y = \pm h/2$, ao valor máximo no eixo neutro, $y = 0$. Especificamente, como a área da seção transversal é $A = bh$, em $y = 0$ temos, de acordo com a Equação 7.4:

$$\tau_{máx} = 1{,}5\frac{V}{A} \tag{7.5}$$

Esse mesmo valor de $\tau_{máx}$ pode ser obtido diretamente pela fórmula do cisalhamento, $\tau = VQ/It$, pois $\tau_{máx}$ ocorre onde Q tem o *maior* valor, uma vez que V, I e t são *constantes*. Por inspeção, Q será máximo quando se considerar a área acima (ou abaixo) do eixo neutro; isto é, $A' = bh/2$ e $\bar{y}' = h/4$. Assim:

$$\tau_{máx} = \frac{VQ}{It} = \frac{V(h/4)(bh/2)}{[\frac{1}{12}bh^3]b} = 1{,}5\frac{V}{A}$$

Por comparação, $\tau_{máx}$ é 50% maior que a tensão de cisalhamento *média* determinada pela Equação 1.7; isto é, $\tau_{méd} = V/A$.

É importante lembrar que para cada τ que atua sobre a área da seção transversal na Figura 7.5*c*, há um τ correspondente atuando no sentido longitudinal ao longo da viga. Se a viga for cortada por um plano longitudinal através de seu eixo neutro, por exemplo, então, como observado anteriormente, a *tensão de cisalhamento máxima* atuará nesse plano (Figura 7.5*d*). É essa tensão que provoca a falha de uma viga de madeira como mostra a Figura 7.6. Nesse caso, a rachadura horizontal começa a ocorrer através do eixo neutro nas extremidades, uma vez que nesses pontos as reações verticais submetem a viga a uma tensão de cisalhamento maior — e a madeira tem baixa resistência ao cisalhamento ao longo de seus grãos, orientados na direção longitudinal.

É esclarecedor mostrar que, quando a distribuição da tensão de cisalhamento (Equação 7.4) é integrada no domínio da seção transversal, produz o cisalhamento resultante V. Para isso é escolhida uma tira infinitesimal de

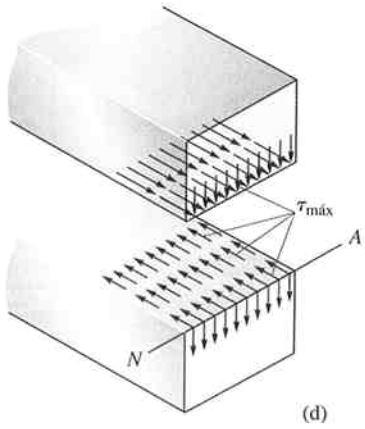


Figura 7.5

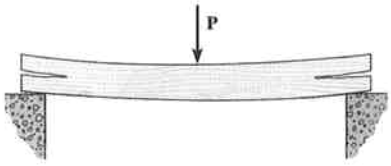


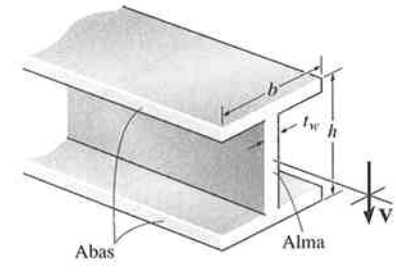
Figura 7.6

área $dA = b\ dy$ (Figura 7.5*c*) e, como τ atua uniformemente em toda a tira, temos:

$$\int_A \tau\, dA = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{6V}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) b\, dy$$

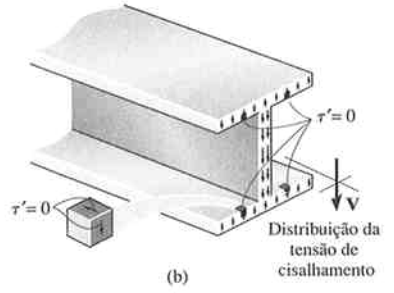
$$= \frac{6V}{h^3}\left[\frac{h^2}{4}y - \frac{1}{3}y^3\right]_{-h/2}^{h/2}$$

$$= \frac{6V}{h^3}\left[\frac{h^2}{4}\left(\frac{h}{2}+\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{h^3}{8}+\frac{h^3}{8}\right)\right] = V$$



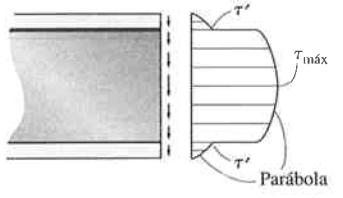
(a)

Viga de Abas Largas. Uma *viga de abas largas* consiste de duas 'abas' e uma 'alma', como mostra a Figura 7.7*a*. Por meio de uma análise semelhante à anterior, podemos determinar a distribuição da tensão de cisalhamento que atua sobre a seção transversal de uma viga assim. Os resultados estão mostrados graficamente nas figuras 7.7*b* e 7.7*c*. Como ocorre na seção retangular, a tensão de cisalhamento varia *parabolicamente* ao longo da altura da viga, visto que a seção transversal pode ser tratada como a seção retangular, inicialmente com a largura da aba superior, b, depois com a espessura da alma, t_w, e por fim com a largura da aba inferior, b. Observe que a tensão de cisalhamento varia *apenas levemente* ao longo da alma e, além disso, que a tensão de cisalhamento *salta* na junção da aba com a alma, visto que a espessura da seção transversal muda nesse ponto ou, em outras palavras, t muda na fórmula do cisalhamento. Por comparação, a alma suporta significativamente mais força cortante que as abas. Essa condição será ilustrada numericamente no Exemplo 7.2.



(b)

Limitações no Uso da Fórmula do Cisalhamento. Uma das principais hipóteses consideradas no desenvolvimento da fórmula do cisalhamento é de que a tensão de cisalhamento distribui-se *uniformemente* sobre a *largura t* da seção em que ela é determinada. Em outras palavras, a tensão de cisalhamento *média* é calculada ao longo da largura. Podemos verificar a precisão dessa hipótese comparando-a com uma análise matemática mais exata, baseada na teoria da elasticidade. A esse respeito, se a seção transversal da viga for retangular, a distribuição *real* da tensão de cisalhamento ao longo do eixo neutro, calculada pela teoria da elasticidade, variará como mostra a Figura 7.8. O valor máximo, $\tau'_{máx}$, ocorrerá nas *bordas* da seção transversal, e sua intensidade dependerá da relação b/h (largura/comprimento). Para seções com $b/h = 0{,}5$, $\tau'_{máx}$ é apenas 3% maior que a tensão de cisalhamento calculada pela fórmula do cisalhamento (Figura 7.8*a*). Entretanto, para *seções largas*, com digamos $b/h = 2$, $\tau'_{máx}$ é cerca de 40% maior que $\tau_{máx}$ (Figura 7.8*b*). O erro torna-se ainda maior à medida que a seção torna-se mais larga, ou à medida que a relação b/h aumenta. Erros dessa ordem certamente serão intoleráveis se a fórmula do cisalhamento for usada para determinar a tensão de cisalhamento na *aba* de uma viga de abas largas, como discutido anteriormente.



Intensidade da distribuição da tensão de cisalhamento (vista lateral)

(c)

Figura 7.7

Também deve ser mencionado que a fórmula do cisalhamento não oferece resultados precisos quando usada para determinar a tensão de cisalhamento na junção aba-alma de uma viga de abas largas, uma vez que se trata de um ponto de mudança súbita na seção transversal, onde ocorre, portanto, *concentração de tensão*. Além disso, as regiões internas das abas são superfícies livres (Figura 7.7*b*) e, em conseqüência, a tensão de cisalhamento em seus limites deve ser nula. Se, no entanto, a fórmula do cisalhamento for aplicada para determinar a tensão de cisalhamento nessas superfícies, o valor de τ' assim obtido *não* será nulo (Figura 7.7*c*). Felizmente, essas limitações quanto à aplicação da fórmula do cisalhamento às abas de uma viga de abas largas não são importantes na prática da engenharia. Os engenheiros, mais freqüentemente, calculam apenas a *tensão de cisalhamento máxima média*, que ocorre no eixo neutro, em que a relação b/h (largura/

comprimento) é *muito pequena* e, portanto, o resultado fica muito próximo da tensão de cisalhamento máxima *real*, como explicado anteriormente.

Outra limitação importante no uso da fórmula do cisalhamento é ilustrada na Figura 7.9*a*, que mostra uma viga com seção irregular ou contorno não retangular. Se aplicarmos a fórmula do cisalhamento para determinar a tensão de cisalhamento (média) τ ao longo da reta AB, ela será orientada como mostra a Figura 7.9*b*. Consideremos agora um elemento do material retirado do ponto B da superfície, tal que uma de suas faces está localizada na superfície externa da viga (Figura 7.9*c*). Nesse caso, a tensão de cisalhamento calculada τ na face frontal do elemento foi desdobrada nos componentes τ' e τ''. Por inspeção, o componente τ' deve ser igual a zero, visto que seu componente longitudinal τ', que atua na superfície do contorno livre de tensão, deve ser nulo. Portanto, para satisfazer essa condição, a tensão de cisalhamento que atua sobre o elemento de contorno deve ser tangente ao contorno. A distribuição da tensão de cisalhamento ao longo da reta AB seria então orientada como mostra a Figura 7.9*d*. Devido à maior inclinação das tensões de cisalhamento em A e B, a tensão de cisalhamento máxima ocorrerá nesses pontos. Os valores específicos da tensão de cisalhamento são obtidos por meio dos princípios da teoria da elasticidade. Observe, no entanto, que podemos aplicar a fórmula do cisalhamento para obter a tensão de cisalhamento que atua em cada linha da Figura 7.9*a*. Nesse caso, as retas interceptam as tangentes ao contorno da seção transversal em *ângulos retos* e, como mostrado na Figura 7.9*e*, a tensão de cisalhamento transversal é vertical e constante ao longo de cada reta.

Resumindo os pontos apresentados, a fórmula do cisalhamento não oferece resultados precisos quando aplicada a elementos com seção transversal *curta* ou *larga*, ou a pontos em que a seção transversal muda subitamente. Tampouco deve ser aplicada a uma seção que intercepta o limite do elemento em ângulo diferente de 90°. Em vez disso, nesses casos, a tensão de cisalhamento deve ser determinada por meio de métodos mais avançados, baseados na teoria da elasticidade.

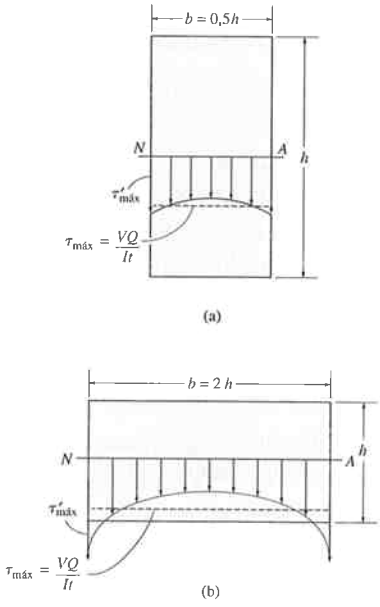


Figura 7.8

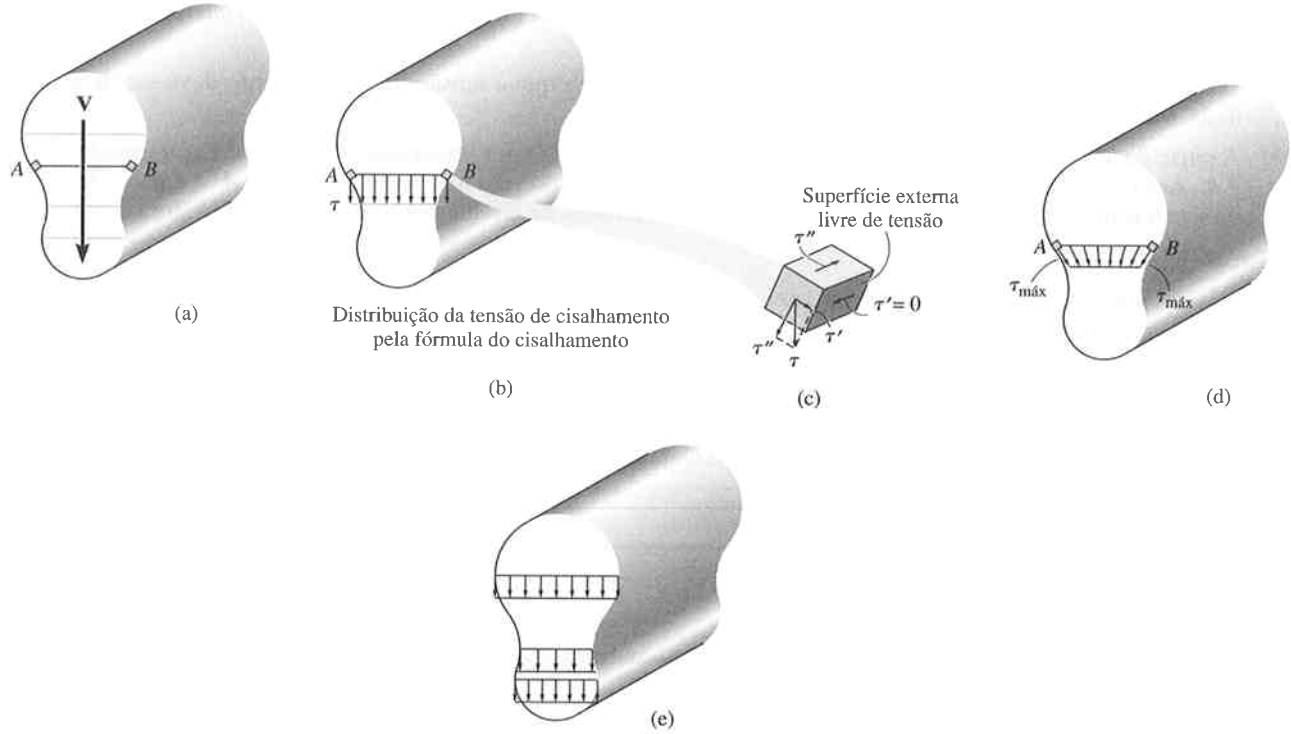


Figura 7.9

PONTOS IMPORTANTES

- As forças cortantes (ou de cisalhamento) nas vigas provocam distribuições da *deformação por cisalhamento não-lineares* sobre a seção transversal, o que por sua vez gera *distorção*.
- Devido à sua propriedade complementar, a tensão de cisalhamento desenvolvida em uma viga atua tanto na seção transversal como nos planos longitudinais.
- Para desenvolver a *fórmula do cisalhamento*, considerou-se o equilíbrio da força horizontal da tensão de cisalhamento longitudinal, bem como as distribuições das tensões de flexão que atuam em dada parcela de um segmento infinitesimal da viga.
- A fórmula do cisalhamento é usada em elementos prismáticos retos feitos de material homogêneo com comportamento linear-elástico. Além disso, a força cortante interna resultante deve ser orientada ao longo de um eixo de simetria da área da seção transversal.
- Em uma viga de seção transversal retangular, a *tensão de cisalhamento varia parabolicamente* de acordo com o comprimento. A tensão de cisalhamento máxima ocorre ao longo do eixo neutro.
- A fórmula do cisalhamento não deve ser usada para determinar a tensão de cisalhamento de seções transversais curtas ou largas, tampouco nos pontos de mudança súbita da seção transversal ou em um ponto de contorno inclinado.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

Sugere-se o seguinte procedimento para aplicar a fórmula do cisalhamento.

Cisalhamento Interno.

- Secionar o elemento perpendicularmente ao seu eixo no ponto em que a tensão de cisalhamento deve ser determinada e, em seguida, obter o cisalhamento interno **V** na seção.

Propriedades da Seção.

- Determinar a localização do eixo neutro e o momento de inércia I de *toda a área da seção transversal* em torno desse eixo.
- Traçar uma seção horizontal imaginária através do ponto em que a tensão de cisalhamento deve ser determinada. Medir a largura t da área nessa seção.
- A parte da área acima ou abaixo dessa seção é A'. Determinar Q por integração, $Q = \int_{A'} y\, dA'$, ou usando $Q = \overline{y}'A'$. Aqui, $\overline{y}'$ é a distância do centróide de A', medida a partir do eixo neutro. Obervar que A' é a parte da área da seção transversal do elemento 'mantida nele' pelas tensões de cisalhamento longitudinais (Figura 7.4*d*).

Tensão de Cisalhamento.

- Usando um conjunto de unidades consistente, substituir os dados na fórmula do cisalhamento e calcular a tensão de cisalhamento τ.
- É aconselhável estabelecer a direção apropriada da tensão de cisalhamento transversal τ em um elemento de volume do material, localizado no ponto em que ela será calculada. Isso pode ser feito levando-se em conta que τ atua sobre a seção transversal na mesma direção de **V**. A partir desta, as tensões de cisalhamento correspondentes que atuam sobre os outros três planos do elemento podem ser estabelecidas.

EXEMPLO 7.1

A viga mostrada na Figura 7.10*a* é feita de madeira e está submetida a uma força cortante resultante interna $V = 3$ kip. (*a*) Determinar a tensão de cisalhamento no ponto P e (*b*) calcular a tensão de cisalhamento máxima na viga.

SOLUÇÃO

Parte (a)

Propriedades da Seção. O momento de inércia da área da seção transversal calculado em torno do eixo neutro é:

$$I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}(4\text{ pol})(5\text{ pol})^3 = 41{,}7\text{ pol}^4$$

Traça-se uma reta horizontal pelo ponto P da seção e, assim, delimita-se a área parcial A', que aparece sombreada na Figura 7.10*b*. Então:

$$Q = \bar{y}'A' = \left[0{,}5\text{ pol} + \frac{1}{2}(2\text{ pol})\right](2\text{ pol})(4\text{ pol}) = 12\text{ pol}^3$$

Tensão de Cisalhamento. A força cortante na seção é $V = 3$ kip. Aplicando a fórmula do cisalhamento, temos:

$$\tau_P = \frac{VQ}{It} = \frac{(3\text{ kip})(12\text{ pol}^3)}{(41{,}7\text{ pol}^4)(4\text{ pol})} = 0{,}216\text{ ksi} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Como contribui para V, τ_p age para baixo em P na seção transversal. Conseqüentemente, um elemento de volume do material nesse ponto teria tensões de cisalhamento atuando sobre ele como mostra a Figura 7.10*c*.

Parte (b)

Propriedades da Seção. A tensão de cisalhamento máxima ocorre no eixo neutro, visto que t é constante e Q é a maior neste caso. Temos, para a área sombreada escura A' da Figura 7.10*d*:

$$Q = \bar{y}'A' = \left[\frac{2{,}5\text{ pol}}{2}\right](4\text{ pol})(2{,}5\text{ pol}) = 12{,}5\text{ pol}^3$$

Tensão de Cisalhamento. Aplicando a fórmula do cisalhamento, temos:

$$\tau_{máx} = \frac{VQ}{It} = \frac{(3\text{ kip})(12{,}5\text{ pol}^3)}{(41{,}7\text{ pol}^4)(4\text{ pol})} = 0{,}225\text{ ksi} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Observe que isso equivale a:

$$\tau_{máx} = 1{,}5\frac{V}{A} = 1{,}5\,\frac{3\text{ kip}}{(4\text{ pol})(5\text{ pol})} = 0{,}225\text{ ksi} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

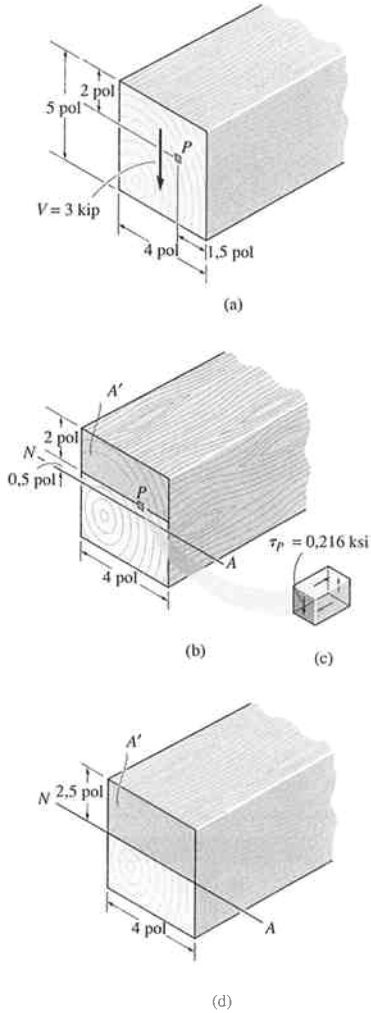
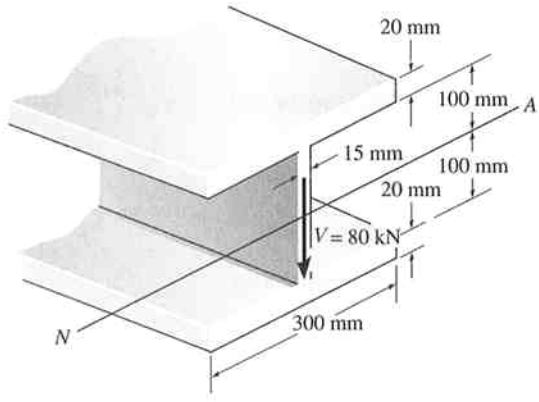


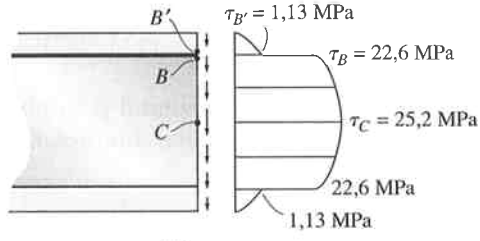
Figura 7.10

EXEMPLO 7.2

Uma viga de abas largas tem as dimensões mostradas na Figura 7.11*a*. Supondo que ela seja submetida a uma força cortante $V = 80$ kN, (*a*) traçar o gráfico da distribuição da tensão de cisalhamento que atua sobre a área de sua seção transversal e (*b*) determinar a força cortante a que a alma resiste.



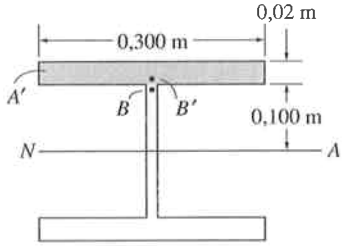
(a)



(b)

SOLUÇÃO

Parte (a). A distribuição da tensão de cisalhamento será parabólica e variará como mostrado na Figura 7.11*b*. Devido à simetria, apenas as tensões de cisalhamento nos pontos B', B e C precisam ser calculadas. Para obter mais valores, devemos determinar primeiro o momento de inércia da área da seção transversal em torno do eixo neutro. Trabalhando em metros, temos:



(c)

Figura 7.11

$$I = \left[\frac{1}{12}(0{,}015\text{ m})(0{,}200\text{ m})^3\right] + 2\left[\frac{1}{12}(0{,}300\text{ m})(0{,}02\text{ m})^3 + (0{,}300\text{ m})(0{,}02\text{ m})(0{,}110\text{ m})^2\right]$$

$$= 155{,}6(10^{-6})\text{ m}^4$$

Para o ponto B', $t_{B'} = 0{,}300$ m, e A' é a área sombreada escura mostrada na Figura 7.11*c*. Assim:

$$Q_{B'} = \bar{y}'A' = [0{,}110\text{ m}](0{,}300\text{ m})(0{,}02\text{ m}) = 0{,}660(10^{-3})\text{ m}^3$$

De modo que:

$$\tau_{B'} = \frac{VQ_{B'}}{It_{B'}} = \frac{80\text{ kN}(0{,}660(10^{-3})\text{ m}^3)}{155{,}6(10^{-6})\text{ m}^4(0{,}300\text{ m})} = 1{,}13\text{ MPa}$$

Para o ponto B, $t_B = 0{,}015$ m e $Q_B = Q_{B'}$ (Figura 7.11*c*). Então:

$$\tau_B = \frac{VQ_B}{It_B} = \frac{80\text{ kN}(0{,}660(10^{-3})\text{ m}^3)}{155{,}6(10^{-6})\text{ m}^4(0{,}015\text{ m})} = 22{,}6\text{ MPa}$$

A partir da discussão sobre as limitações no uso da fórmula do cisalhamento, observe que os valores calculados para $\tau_{B'}$ e τ_B são, na realidade, muito equivocados. Por quê?

Para o ponto C, $t_C = 0{,}015$ m e A' é a área sombreada mostrada na Figura 7.11*d*. Considerando essa área como composta de dois retângulos, temos:

$$Q_C = \Sigma\bar{y}'A' = [0{,}110\text{ m}](0{,}300\text{ m})(0{,}02\text{ m}) + [0{,}05\text{ m}](0{,}015\text{ m})(0{,}100\text{ m})$$

$$= 0{,}735(10^{-3})\text{ m}^3$$

Assim,

$$\tau_C = \tau_{máx} = \frac{VQ_C}{It_C} = \frac{80\text{ kN}[0{,}735(10^{-3})\text{ m}^3]}{} = 25{,}2\text{ MPa}$$

Parte (b). Para determinar a força cortante na alma, primeiro estabeleceremos a tensão de cisalhamento na localização *arbitrária* y na alma (Figura 7.11*e*). Usando unidades métricas, temos:

$$I = 155{,}6(10^{-6})\text{ m}^4$$
$$t = 0{,}015\text{ m}$$
$$A' = (0{,}300\text{ m})(0{,}02\text{ m}) + (0{,}015\text{ m})(0{,}1\text{ m} - y)$$
$$Q = \Sigma\bar{y}A' = (0{,}11\text{ m})(0{,}300\text{ m})(0{,}02\text{ m}) + [y + \tfrac{1}{2}(0{,}1\text{ m} - y)](0{,}015\text{ m})(0{,}1\text{ m} - y)$$
$$= (0{,}735 - 7{,}50\,y^2)(10^{-3})\text{ m}^3$$

De modo que:

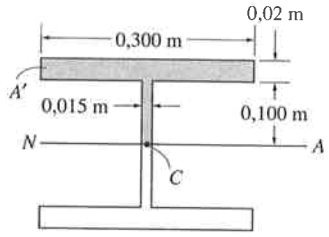
$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{80\text{ kN}(0{,}735 - 7{,}50\,y^2)(10^{-3})\text{ m}^3}{(155{,}6(10^{-6})\text{ m}^4)(0{,}015\text{ m})}$$
$$= (25{,}192 - 257{,}07\,y^2)\text{ MPa}$$

Essa tensão atua na tira de área $dA = 0{,}015\,dy$ mostrada na Figura 7.11*e* e, portanto, a força cortante a que a alma resiste é:

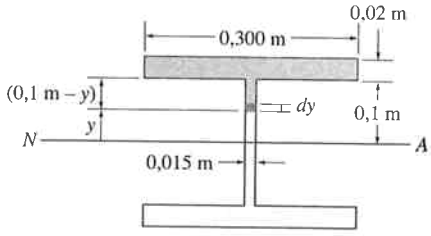
$$V_{alma} = \int_{A_{alma}} \tau\,dA = \int_{-0{,}1\text{ m}}^{0{,}1\text{ m}} (25{,}192 - 257{,}07\,y^2)(10^6)(0{,}015\text{ m})\,dy$$

$$V_{alma} = 73{,}0\text{ kN} \qquad \textit{Resposta}$$

Observe que, por comparação, a alma suporta 91% do cisalhamento total (80 kN) e as abas, os 9% restantes. Tente resolver o problema determinando a força em uma das abas (3,496 kN) pelo mesmo método. Portanto, $V_{alma} = V - 2V_{aba} = 80\text{ kN} - 2(3{,}496\text{ kN}) = 73{,}0\text{ kN}$.



(d)

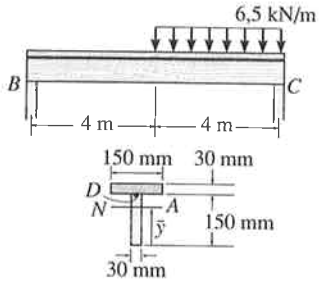


(e)

Figura 7.11

EXEMPLO 7.3

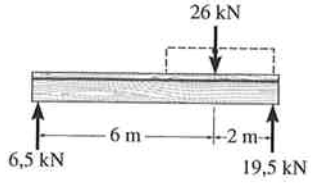
A viga mostrada na Figura 7.12*a* é feita de duas tábuas. Determinar a tensão de cisalhamento máxima na cola necessária para manter as tábuas unidas ao longo da junção. Os apoios em B e C exercem somente reações verticais sobre a viga.

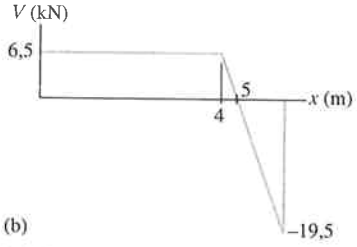


(a)

SOLUÇÃO

Cisalhamento Interno. As reações dos apoios e o diagrama de força cortante da viga são mostrados na Figura 7.12*b*. Vê-se que a força cortante máxima na viga é 19,5 kN.





(b)

Figura 7.12

Propriedades da Seção. O centróide e, portanto, o eixo neutro serão determinados pelo eixo de referência situado na parte inferior da área da seção transversal (Figura 7.12*a*). Trabalhando em unidades métricas, temos:

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} A}{\Sigma A} = \frac{[0{,}075\text{ m}](0{,}150\text{ m})(0{,}030\text{ m}) + [0{,}165\text{ m}](0{,}030\text{ m})(0{,}150\text{ m})}{(0{,}150\text{ m})(0{,}030\text{ m}) + (0{,}030\text{ m})(0{,}150\text{ m})} = 0{,}120\text{ m}$$

O momento de inércia, calculado em torno do eixo neutro (Figura 7.12*a*), é, portanto:

$$I = \left[\frac{1}{12}(0{,}030\text{ m})(0{,}150\text{ m})^3 + (0{,}150\text{ m})(0{,}030\text{ m})(0{,}120\text{ m} - 0{,}075\text{ m})^2\right]$$
$$+ \left[\frac{1}{12}(0{,}150\text{ m})(0{,}030\text{ m})^3 + (0{,}030\text{ m})(0{,}150\text{ m})(0{,}165\text{ m} - 0{,}120\text{ m})^2\right] = 27{,}0(10^{-6})\text{ m}^4$$

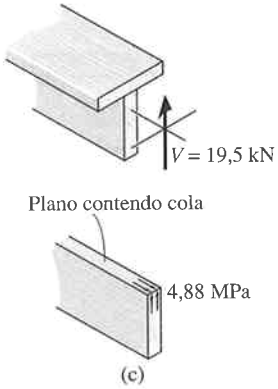


Figura 7.12

A tábua superior (aba) está presa à inferior (alma) pela cola, aplicada sobre a espessura $t = 0{,}03$ m. Conseqüentemente, A' é definida como a área do topo da tábua (Figura 7.12*a*). Temos:

$$Q = \bar{y}'A' = [0{,}180\text{ m} - 0{,}015\text{ m} - 0{,}120\text{ m}](0{,}03\text{ m})(0{,}150\text{ m})$$
$$= 0{,}2025(10^{-3})\text{ m}^3$$

Tensão de Cisalhamento. Usando os dados anteriores e aplicando a fórmula do cisalhamento, temos:

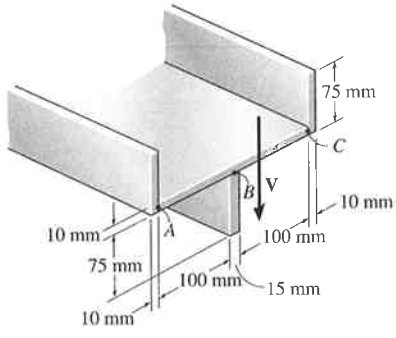
$$\tau_{máx} = \frac{VQ}{It} = \frac{19{,}5\text{ kN}(0{,}2025(10^{-3})\text{ m}^3)}{27{,}0(10^{-6})\text{ m}^4(0{,}030\text{ m})} = 4{,}88\text{ MPa}$$ ***Resposta***

A tensão de cisalhamento que atua no topo da tábua é mostrada na Figura 7.12*c*. Como se nota, é a resistência da cola a essa tensão de cisalhamento horizontal ou lateral que impede as tábuas de deslizar sobre o apoio *C*.

PROBLEMAS

7.1. A viga composta por três chapas de aço está submetida a uma força cortante $V = 150$ kN. Determinar a tensão de cisalhamento nos pontos *A* e *C* em que as chapas são acopladas. Mostrar que $\bar{y} = 0{,}080196$ m a partir da parte inferior e $I_{EN} = 4{,}8646(10^{-6})$ m^4.

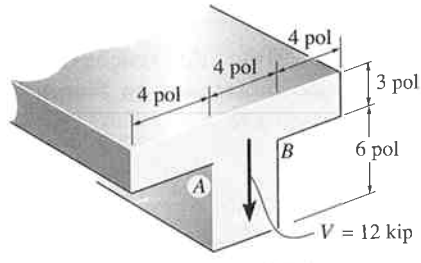
7.2. A viga composta por três chapas de aço está submetida a uma força cortante $V = 150$ kN. Determinar a tensão de cisalhamento no ponto *B* em que as chapas são unidas. Mostrar que $\bar{y} = 0{,}080196$ m a partir da parte inferior e $I_{EN} = 4{,}8646(10^{-6})$ m^4.



Problemas 7.1/7.2

7.3. Se a viga T for submetida a um cisalhamento vertical $V = 12$ kip, qual será a tensão de cisalhamento máxima nela desenvolvida? Calcular também o salto da tensão de cisalhamento na junção aba-alma *AB*. Desenhar a variação de intensidade da tensão de cisalhamento em toda a seção transversal.

***7.4.** Se a viga T for submetida a um cisalhamento vertical $V = 12$ kip, a qual força cortante vertical a aba resistirá?

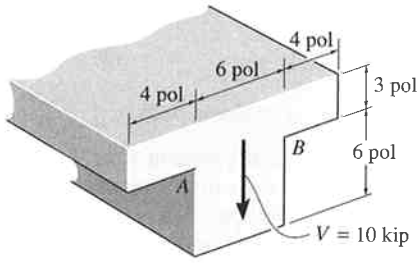


Problemas 7.3/7.4

7.5. Se a viga T for submetida a um cisalhamento vertical $V = 10$ kip, qual será a tensão de cisalhamento máxima nela desenvolvida? Calcular também o salto da tensão de cisalhamento na junção aba-alma *AB*. Desenhar a variação de inten-

sidade da tensão de cisalhamento em toda a seção transversal. Mostrar que $I_{EN} = 532{,}04$ pol^4.

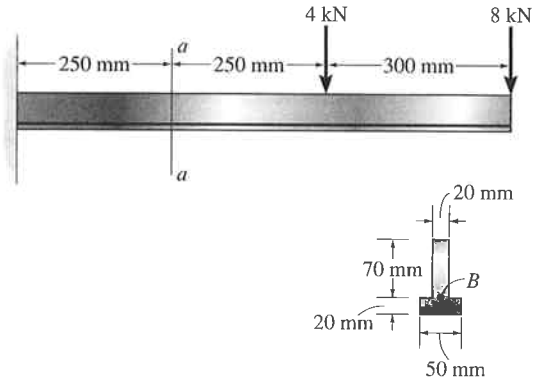
7.6. Se a viga T for submetida a um cisalhamento vertical $V = 10$ kip, a qual força cortante vertical a aba resistirá. Mostrar que $I_{EN} = 532{,}04$ pol^4.



Problemas 7.5/7.6

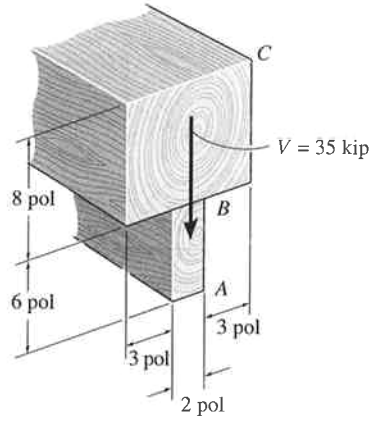
7.7. Determinar a tensão de cisalhamento máxima no ponto B da alma da viga em balanço na seção a–a.

***7.8.** Determinar a tensão de cisalhamento máxima que atua sobre a seção a–a da viga em balanço.



Problemas 7.7/7.8

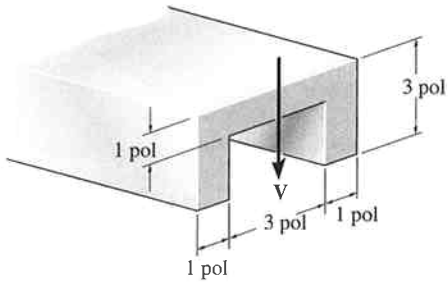
7.9. Desenhar a intensidade da distribuição da tensão de cisalhamento que atua sobre a área da seção transversal da viga. Além disso, determinar a força cortante resultante que atua sobre o segmento AB. O cisalhamento que atua sobre a seção é $V = 35$ kip. Mostrar que $I_{EN} = 872{,}49$ pol^4.



Problema 7.9

7.10. Determinar a maior força cortante que o elemento pode suportar se a tensão de cisalhamento admissível for $\tau_{adm} = 8$ ksi.

7.11. Se a força cortante aplicada for $V = 18$ kip, qual será a tensão de cisalhamento máxima no elemento?

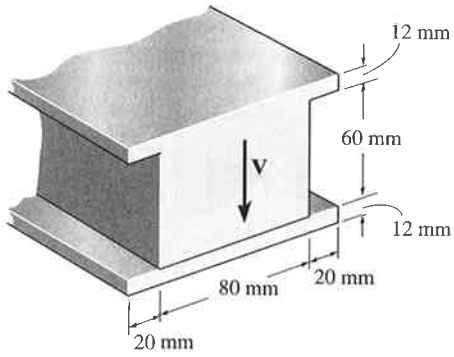


Problemas 7.10/7.11

***7.12.** Determinar a tensão de cisalhamento máxima no suporte se ele estiver submetido a uma força cortante $V = 20$ kN.

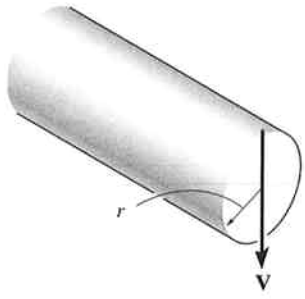
7.13. Determinar a força cortante máxima V a que o suporte pode resistir se a tensão de cisalhamento admissível para o material for $\tau_{adm} = 40$ MPa.

7.14. Construir o gráfico da distribuição da tensão de cisalhamento sobre a seção transversal do suporte, supondo que ele esteja submetido a uma força cortante $V = 15$ kN.



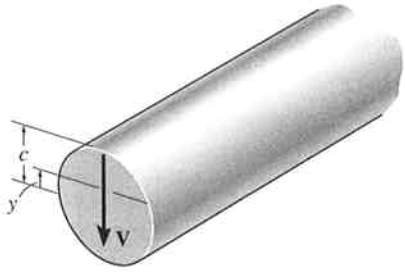
Problemas 7.12/7.13/7.14

7.15. Determinar a tensão de cisalhamento máxima no eixo com seção transversal circular de raio r e sujeito à força cortante **V**. Expressar a resposta em termos da área A da seção transversal.



Problema 7.15

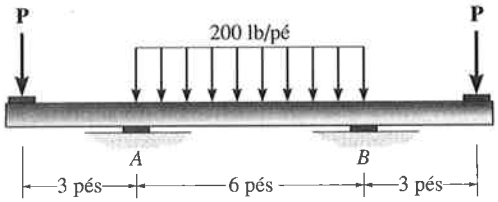
***7.16.** Construir o gráfico da distribuição da tensão de cisalhamento na seção transversal de uma haste com raio c. Quantas vezes a tensão de cisalhamento máxima é maior que a tensão de cisalhamento média sobre a seção transversal?

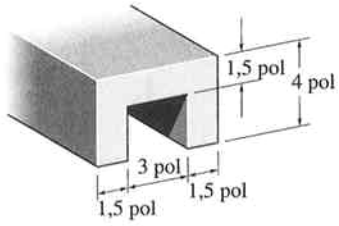


Problema 7.16

7.17. Determinar as maiores forças P nas extremidades que o elemento pode suportar, supondo que a tensão de cisalhamento admissível seja $\tau_{adm} = 10$ ksi. Os apoios em A e B exercem apenas reações verticais sobre a viga.

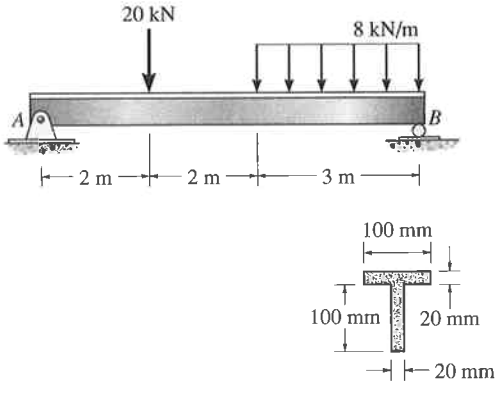
7.18. Se a força for $P = 800$ lb, qual será a tensão de cisalhamento máxima sobre a viga na seção crítica? Os apoios em A e B exercem apenas reações verticais.





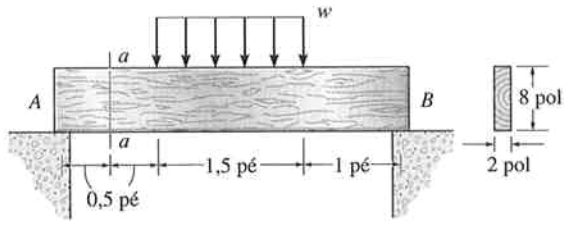
Problemas 7.17/7.18

7.19. A viga em T está submetida ao carregamento mostrado. Determinar a tensão de cisalhamento transversal sobre ela na seção crítica.



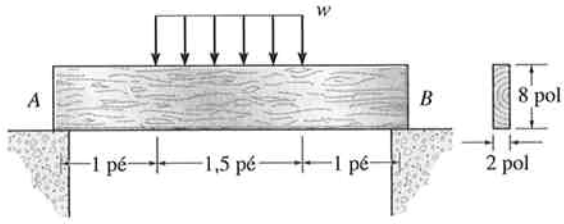
Problema 7.19

***7.20.** Os apoios em A e B exercem reações verticais sobre a viga de madeira. Se a carga distribuída for $w = 4$ kip/pé, qual será a tensão de cisalhamento máxima sobre a viga na seção a–a?



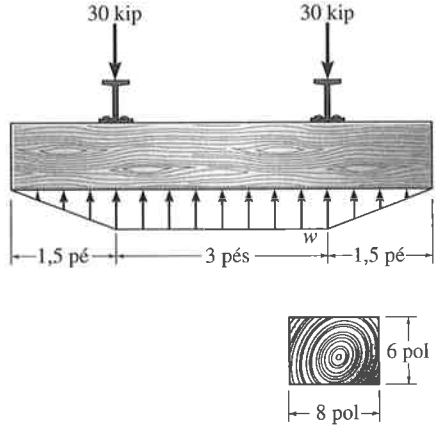
Problema 7.20

7.21. Os apoios em A e B exercem reações verticais sobre a viga de madeira. Supondo que a tensão de cisalhamento admissível seja $\tau_{adm} = 400$ psi, determinar a intensidade da maior carga distribuída w que pode ser aplicada sobre a viga.



Problema 7.21

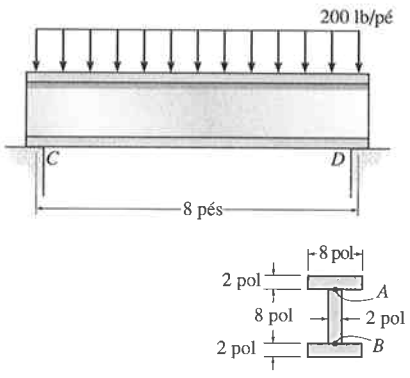
7.22. Os dormentes ferroviários devem ser projetados para resistir a grandes carregamentos de cisalhamento. Supondo que o dormente esteja sujeito a cargas exercidas pelo trilho de 30 kip e que o leito de pedras exerça a reação mostrada, determinar a intensidade da força de equilíbrio w e a tensão de cisalhamento máxima no dormente.



Problema 7.22

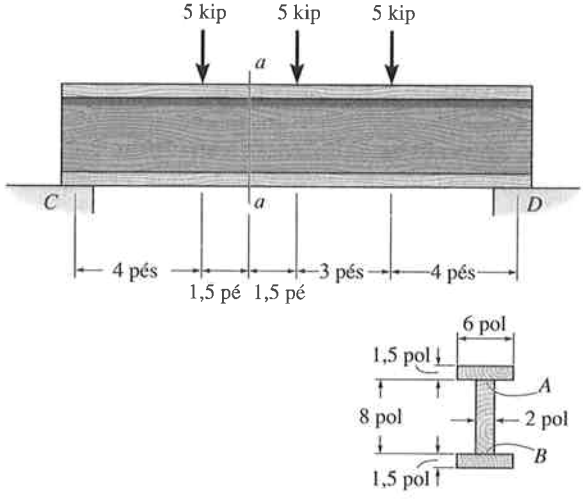
7.23. A viga compõe-se de três peças de plástico coladas nas juntas A e B. Se estiver sujeita ao carregamento mostrado, qual tensão de cisalhamento será desenvolvida nas juntas? Os apoios em C e D exercem apenas reações verticais sobre a viga.

***7.24.** A viga compõe-se de três peças de plástico coladas nas juntas A e B. Se estiver sujeita ao carregamento mostrado, a qual força cortante vertical a aba superior resistirá na seção crítica. Os apoios em C e D exercem apenas reações verticais sobre a viga.



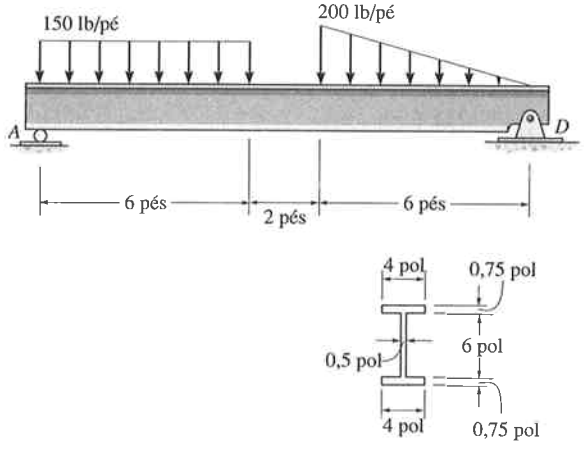
Problemas 7.23/7.24

7.25. A viga compõe-se de três tábuas coladas nas juntas A e B. Se ela estiver sujeita ao carregamento mostrado, a qual força cortante vertical máxima sua aba superior resistirá. Os apoios em C e D exercem apenas reações verticais sobre a viga.



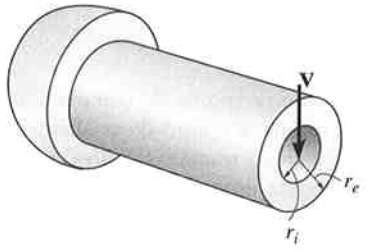
Problema 7.25

7.26. Determinar a tensão de cisalhamento máxima que atua sobre a viga na seção crítica.



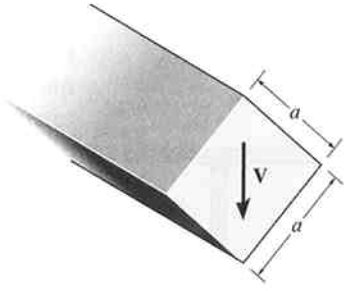
Problema 7.26

7.27. Determinar a variação da tensão de cisalhamento sobre a seção transversal do rebite oco. Qual é a tensão de cisalhamento máxima no rebite? Mostrar também que, se $r_i \to r_e$, então $\tau_{máx} = 2(V/A)$.



Problema 7.27

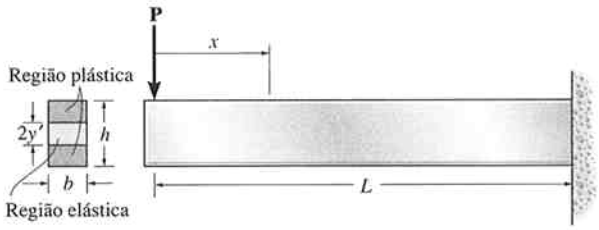
***7.28.** A viga tem seção transversal quadrada e está submetida à força cortante **V**. Desenhar a distribuição da tensão de cisalhamento sobre essa seção transversal e especificar a tensão de cisalhamento máxima. Além disso, localizar onde, a partir do eixo neutro, inicia-se a trinca ao longo do elemento devida ao cisalhamento.



Problema 7.28

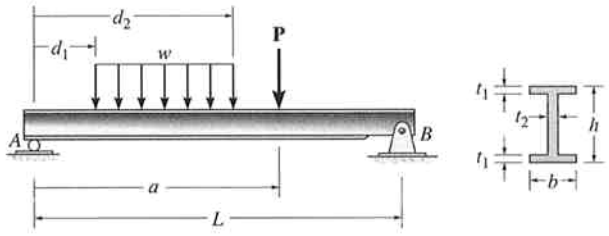
7.29. A viga tem seção transversal retangular e está sujeita a uma carga **P** com intensidade suficiente para desenvolver um momento totalmente plástico $M_p = PL$ no apoio fixo. Se o material for elastoplástico, a uma distância $x < L$ o momento $M = Px$ criará uma região de escoamento plástico com núcleo elástico associado de altura $2y'$. Essa situação foi descrita pela Equação 6.30, e o momento **M** é distribuído sobre a seção transversal como mostra a Figura 6.54*e*. Provar que a tensão de cisalhamento máxima desenvolvida na viga é dada por $\tau_{máx} = \frac{3}{2}(P/A')$, onde $A' = 2\,y'b$, a área da seção transversal do núcleo elástico.

7.30. A viga da Figura 6.54*f* está sujeita a um momento totalmente plástico $\mathbf{M}_p$. Provar que as tensões de cisalhamento longitudinal e transversal na viga são nulas. *Dica*: considerar um elemento da viga como mostrado na Figura 7.4*d*.



Problemas 7.29/7.30

■**7.31.** Escrever um programa de computador que possa ser usado para determinar a tensão de cisalhamento máxima na viga, a qual tem a seção transversal mostrada e está sujeita a uma carga distribuída específica constante w e a uma força concentrada **P**. Mostrar uma aplicação do programa usando os valores $L = 4\ m$, $a = 2$ m, $P = 1{,}5$ kN, $d_1 = 0$, $d_2 = 2$ m, $w = 400$ N/m, $t_1 = 15$ mm, $t_2 = 20$ mm, $b = 50$ mm e $h = 150$ mm.



Problema 7.31

7.4 FLUXO DE CISALHAMENTO EM ESTRUTURAS COMPOSTAS POR VÁRIOS ELEMENTOS

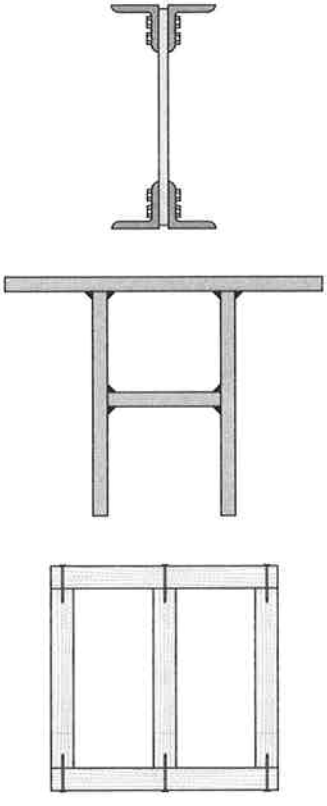


Figura 7.13

Na prática da engenharia, às vezes se constroem estruturas com vários elementos, a fim de obter maior resistência a cargas. Alguns exemplos são mostrados na Figura 7.13. Se as cargas provocarem flexão na estrutura, podem ser necessários elementos de fixação, como pregos, parafusos, material de solda ou cola, capazes de evitar o deslizamento relativo dos elementos (Figura 7.2). Para projetar tais elementos de fixação é necessário conhecer a força cortante que deve ser resistida pelo elemento de fixação ao longo do *comprimento* da estrutura. Tal carga, quando medida como força por unidade de comprimento, é denominada ***fluxo de cisalhamento q***.[2]

A grandeza do fluxo de cisalhamento em qualquer seção longitudinal da viga é obtida por um desenvolvimento semelhante ao usado para determinar a tensão de cisalhamento. Para mostrá-lo, consideraremos a determinação do fluxo de cisalhamento ao longo da junção em que a parte composta na Figura 7.14*a* acopla-se à aba da viga. Como mostra a Figura 7.14*b*, três forças horizontais atuam nessa parte. Duas delas, F e $F + dF$, são geradas pelas tensões normais provocadas pelos momentos M e $M + dM$, respectivamente. A terceira força, que para o equilíbrio é igual a dF, atua na junção e deve ser suportada pelo elemento de fixação. Compreendendo que dF é o resultado de dM, então, como no caso da fórmula do cisalhamento (Equação 7.1), temos:

$$dF = \frac{dM}{I}\int_{A'} y\, dA'$$

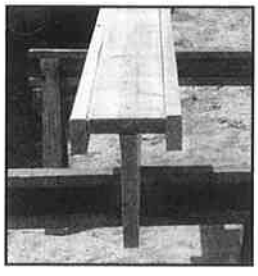
A integral representa Q, ou seja, o momento da área sombreada clara A', na Figura 7.14*b*, em torno do eixo neutro da seção transversal. Como o segmento tem comprimento dx, o fluxo de cisalhamento ou força por unidade de comprimento ao longo da viga é $q = dF/dx$. Então, dividindo os membros da equação por dx e observando que $V = dM/dx$ (Equação 6.2), podemos escrever:

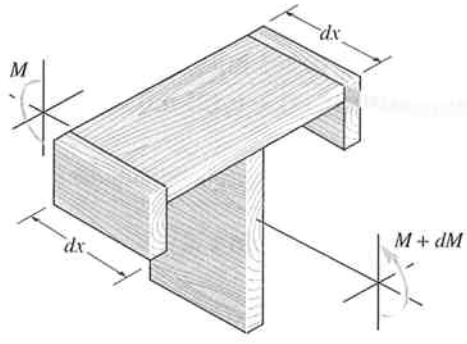
[2] O uso da palavra 'fluxo' nessa terminologia será significativo na discussão da Seção 7.5.

$$q = \frac{VQ}{I} \tag{7.6}$$

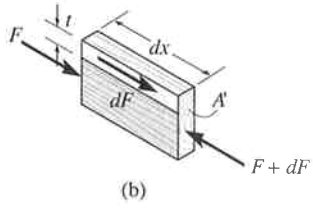
Onde:

q = fluxo de cisalhamento medido como força por unidade de comprimento ao longo da viga
V = força cortante resultante interna determinada pelo método das seções e pelas equações de equilíbrio
I = momento de inércia de *toda* a área da seção transversal calculado em torno do eixo neutro
$Q = \int_{A'} y\, dA' = \bar{y}'A'$, onde A' é a área da seção transversal do segmento acoplado à viga na junção em que o fluxo de cisalhamento deve ser calculado, e $\bar{y}'$ é a distância do eixo neutro ao centróide de A'.





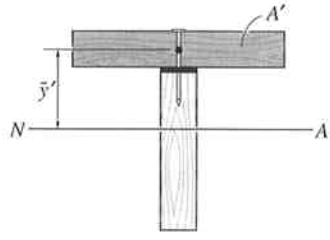
(a)



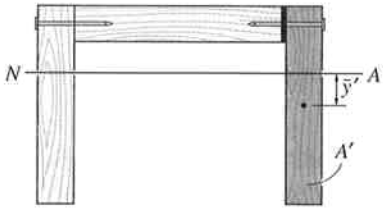
(b)

Figura 7.14

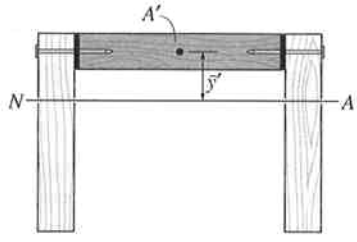
A aplicação dessa equação segue o mesmo 'procedimento de análise' descrito na Seção 7.3 para a fórmula do cisalhamento. A esse respeito, é muito importante identificar corretamente o valor adequado de Q ao determinar o fluxo de cisalhamento em uma junção da seção transversal em particular. Alguns exemplos ilustram como isso é feito. Consideremos as seções transversais da viga mostrada na Figura 7.15. As partes constituintes sombreadas são unidas à viga por elementos de fixação. Nos planos do acoplamento, determina-se o fluxo de cisalhamento q usando um valor de Q calculado por A' e $\bar{y}'$, indicados em cada figura. Observe que o valor de q será resistido por um *único* elemento de fixação nas figuras 7.15*a* e 7.15*b*, por *dois* na Figura 7.15*c* e por *três* na Figura 7.15*d*. Em outras palavras, o elemento de fixação nas figuras 7.15*a* e 7.15*b* suporta o valor calculado de q e, nas figuras 7.15*c* e 7.15*d*, cada elemento de fixação suporta $q/2$ e $q/3$, respectivamente.



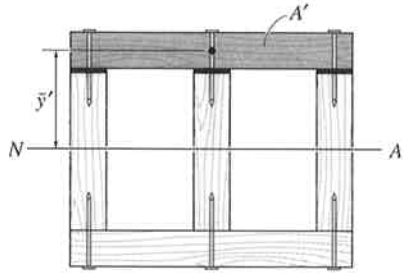
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 7.15

PONTO IMPORTANTE

- O *fluxo de cisalhamento* mede a força por unidade de comprimento ao longo do eixo longitudinal de uma viga. Esse valor, obtido pela fórmula do cisalhamento, é usado para determinar a força cortante desenvolvida em elementos de fixação que prendem as várias partes de uma estrutura.

EXEMPLO 7.4

A estrutura compõe-se de quatro tábuas coladas como mostra a Figura 7.16*a*. Supondo que ela seja submetida à força cortante $V = 850$ kN, determinar o fluxo de cisalhamento em B e C que deve ser resistido pela cola.

SOLUÇÃO

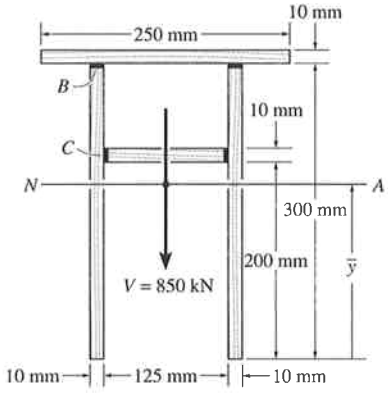
Propriedades da Seção. O eixo neutro (centróide) será localizado a partir da parte inferior da viga (Figura 7.16*a*). Trabalhando em unidades métricas, temos:

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} A}{\Sigma A} = \frac{2[0{,}15\text{ m}](0{,}3\text{ m})(0{,}01\text{ m}) + [0{,}205\text{ m}](0{,}125\text{ m})(0{,}01\text{ m}) + [0{,}305\text{ m}](0{,}250\text{ m})(0{,}01\text{ m})}{2(0{,}3\text{ m})(0{,}01\text{ m}) + 0{,}125\text{ m}(0{,}01\text{ m}) + 0{,}250\text{ m}(0{,}01\text{ m})}$$

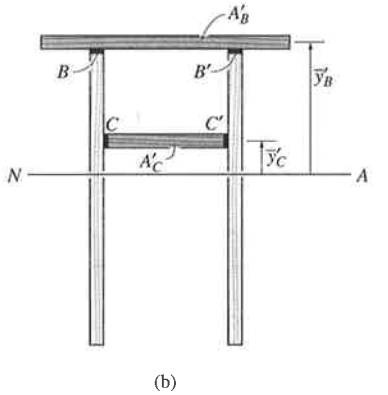
$$= 0{,}1968\text{ m}$$

O momento de inércia calculado em torno do eixo neutro é:

$$I = 2\left[\frac{1}{12}(0{,}01\text{ m})(0{,}3\text{ m})^3 + (0{,}01\text{ m})(0{,}3\text{ m})(0{,}1968\text{ m} - 0{,}150\text{ m})^2\right]$$
$$+ \left[\frac{1}{12}(0{,}125\text{ m})(0{,}01\text{ m})^3 + (0{,}125\text{ m})(0{,}01\text{ m})(0{,}205\text{ m} - 0{,}1968\text{ m})^2\right]$$
$$+ \left[\frac{1}{12}(0{,}250\text{ m})(0{,}01\text{ m})^3 + (0{,}250\text{ m})(0{,}01\text{ m})(0{,}305\text{ m} - 0{,}1968\text{ m})^2\right]$$
$$= 87{,}52(10^{-6})\text{ m}^4$$



(a)



(b)

Figura 7.16

Como a cola em B e B' prende a tábua superior à viga (Figura 7.16*b*), temos:

$$Q_B = \bar{y}'_B A'_B = [0{,}305\text{ m} - 0{,}1968\text{ m}](0{,}250\text{ m})(0{,}01\text{ m})$$
$$= 0{,}270(10^{-3})\text{ m}^3$$

Da mesma maneira, a cola em C e C' prende a tábua interna à viga (Figura 7.16*b*) e, assim

$$Q_C = \bar{y}'_C A'_C = [0{,}205\text{ m} - 0{,}1968\text{ m}](0{,}125\text{ m})(0{,}01\text{ m})$$
$$= 0{,}01025(10^{-3})\text{ m}^3$$

Fluxo de Cisalhamento. Temos para B e B':

$$q'_B = \frac{VQ_B}{I} = \frac{850\text{ kN}(0{,}270(10^{-3})\text{ m}^3)}{} = 2{,}62\text{ MN/m}$$

e para C e C':

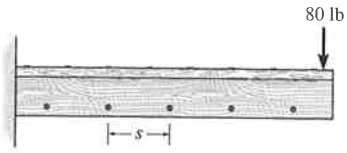
$$q'_C = \frac{VQ_C}{I} = \frac{850\text{ kN}(0{,}01025(10^{-3})\text{ m}^3)}{} = 0{,}0995\text{ MN/m}$$

Como são usadas *duas junções* para prender cada tábua, a cola por unidade de comprimento em cada junção deve ser suficientemente forte para resistir à *metade* de cada valor calculado de q'. Assim:

$q_B = 1{,}31$ MN/m e $q_C = 0{,}0498$ MN/m ***Resposta***

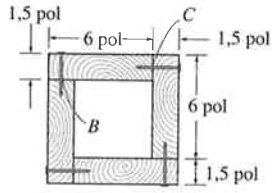
EXEMPLO 7.5

Uma viga-caixão deve ser construída com quatro tábuas pregadas como mostrado na Figura 7.17*a*. Supondo que cada prego suporte uma força cortante de 30 lb, determinar o espaço s máximo entre os pregos em B e C de modo que a viga resista a uma força vertical de 80 lb.



SOLUÇÃO

Cisalhamento Interno. Se a viga for secionada em um *ponto arbitrário* ao longo de seu comprimento, o cisalhamento interno necessário para o equilíbrio será sempre $V = 80$ lb e, assim, o diagrama de cisalhamento será como o mostrado na Figura 7.17*b*.



(a)

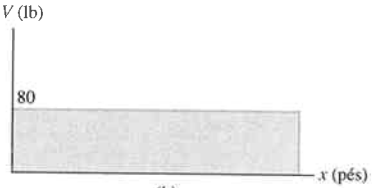
Propriedades da Seção. O momento de inércia da área da seção transversal em torno do eixo neutro é determinado considerando-se o quadrado de 7,5 pol × 7,5 pol menos o quadrado de 4,5 pol × 4,5 pol.

$$I = \frac{1}{12}(7{,}5\text{ pol})(7{,}5\text{ pol})^3 - \frac{1}{12}(4{,}5\text{ pol})(4{,}5\text{ pol})^3 = 229{,}5\text{ pol}^4$$

O fluxo de cisalhamento em B é determinado usando-se Q_B, referente à área sombreada escura da Figura 7.17*c*. É essa parte 'simétrica' da viga que deve ser 'presa' ao resto pelos pregos no lado esquerdo e pelas fibras da borda no lado direito.

Assim:

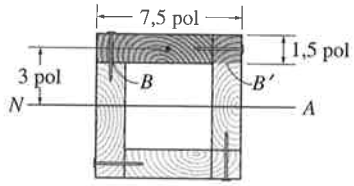
$$Q_B = \bar{y}'A' = [3\text{ pol}](7{,}5\text{ pol})(1{,}5\text{ pol}) = 33{,}75\text{ pol}^3$$



(b)

Da mesma maneira, o fluxo de cisalhamento em C é determinado usando-se a área sombreada 'simétrica' da Figura 7.17*d*. Temos:

$$Q_C = \bar{y}'A' = [3\text{ pol}](4{,}5\text{ pol})(1{,}5\text{ pol}) = 20{,}25\text{ pol}^3$$

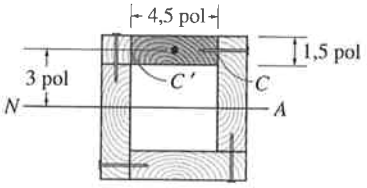


(c)

Fluxo de Cisalhamento.

$$q_B = \frac{VQ_B}{I} = \frac{80\text{ lb}(33{,}75\text{ pol}^3)}{229{,}5\text{ pol}^4} = 11{,}76\text{ lb/pol}$$

$$q_C = \frac{VQ_C}{I} = \frac{80\text{ lb}(20{,}25\text{ pol}^3)}{229{,}5\text{ pol}^4} = 7{,}059\text{ lb/pol}$$



(d)

Figura 7.17

Esses valores representam a força cortante por unidade de comprimento da viga que deve ser resistida pelos pregos em B e pelas fibras em B' (Figura 7.17*c*) e pelos pregos em C e pelas fibras em C' (Figura 7.17*d*), respectivamente. Como, em cada caso, o fluxo de cisalhamento é resistido por *duas* superfícies e cada prego resiste a 30 lb, o espaço em B deve ser:

$$s_B = \frac{30\text{ lb}}{(11{,}76/2)\text{ lb/pol}} = 5{,}10\text{ pol} \qquad \text{Usar } s_B = 5\text{ pol} \qquad \textit{Resposta}$$

E, em C:

$$s_C = \frac{30\text{ lb}}{(7{,}059/2)\text{ lb/pol}} = 8{,}50\text{ pol} \qquad \text{Usar } s_C = 8{,}5\text{ pol} \qquad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 7.6

Pregos com resistência total ao cisalhamento de 40 lb são usados em uma viga que pode ser construída como no Caso I ou como no Caso II (Figura 7.18). Supondo que se deixe um espaço de 9 pol entre eles, determinar o maior cisalhamento vertical que pode ser suportado em cada caso, de modo que as peças de fixação não falhem.

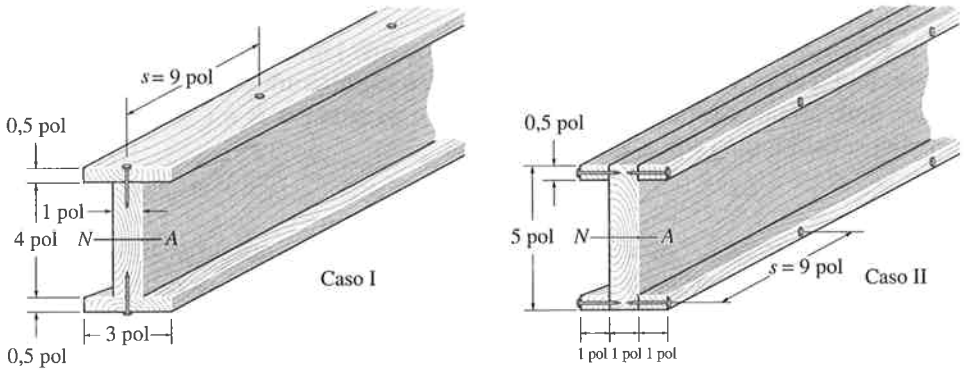


Figura 7.18

SOLUÇÃO

Como a geometria é a mesma em ambos os casos, o momento de inércia em torno do eixo neutro é:

$$I = \frac{1}{12}(3\text{ pol})(5\text{ pol})^3 - 2\left[\frac{1}{12}(1\text{ pol})(4\text{ pol})^3\right] = 20{,}58\text{ pol}^4$$

Caso I. Nesse projeto uma única fileira de pregos prende cada aba, superior inferior, à alma. Para cada aba:

$$Q = \bar{y}'A' = [2{,}25\text{ pol}](3\text{ pol}(0{,}5\text{ pol})) = 3{,}375\text{ pol}^3$$

de modo que:

$$q = \frac{VQ}{I}$$

$$\frac{40\text{ lb}}{9\text{ pol}} = \frac{V(3{,}375\text{ pol}^3)}{20{,}58\text{ pol}^4}$$

$$V = 27{,}1\text{ lb} \qquad \textit{Resposta}$$

Caso II. Aqui, uma única fileira de pregos prende cada tábua lateral à alma. Assim:

$$Q = \bar{y}'A' = [2{,}25\text{ pol}](1\text{ pol}(0{,}5\text{ pol})) = 1{,}125\text{ pol}^3$$

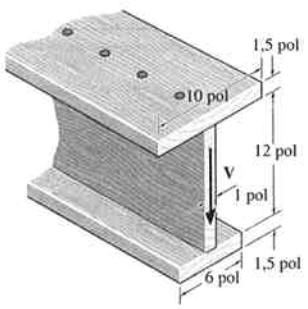
$$q = \frac{VQ}{I}$$

$$\frac{40\text{ lb}}{9\text{ pol}} = \frac{V(1{,}125\text{ pol}^3)}{20{,}58\text{ pol}^4}$$

$$V = 81{,}3\text{ lb} \qquad \textit{Resposta}$$

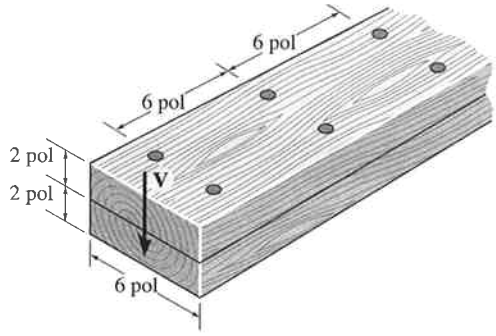
PROBLEMAS

***7.32.** A viga compõe-se de três tábuas. Determinar o cisalhamento máximo V que ela pode suportar se a tensão de cisalhamento admissível para a madeira for $\tau_{adm} = 400$ psi. Qual espaço s deve haver entre cada prego, se cada um resiste a uma força cortante de 400 lb?



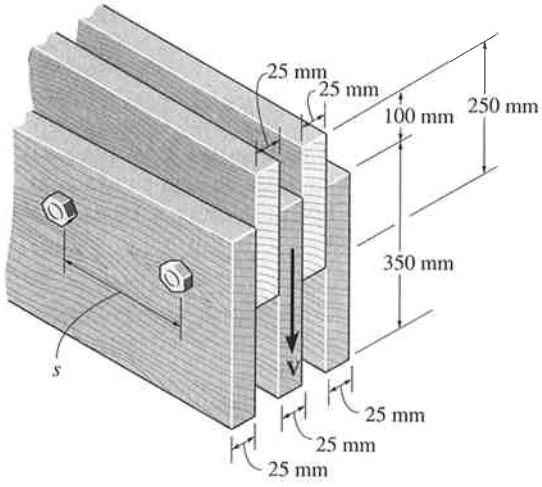
Problema 7.32

7.33. A viga compõe-se de duas tábuas, acopladas nas partes superior e inferior por duas fileiras de pregos fixos a cada 6 pol. Se uma força cortante interna $V = 600$ lb for aplicada às tábuas, qual força cortante cada prego suportará?



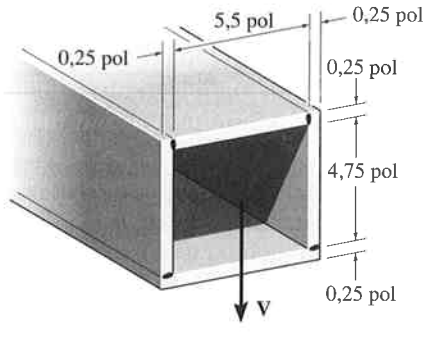
Problema 7.33

7.34. A viga compõe-se de cinco tábuas parafusadas como mostrado. Determinar a força cortante máxima desenvolvida em cada parafuso se houver um espaço $s = 250$ mm entre eles e o cisalhamento aplicado for $V = 35$ kN.



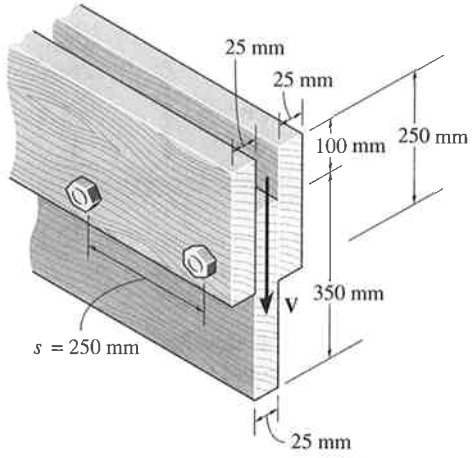
Problema 7.34

7.35. A viga-caixão é composta por quatro peças de plástico coladas, como mostrado. Se a força cortante for $V = 2$ kip, qual será a tensão de cisalhamento resistida pelas superfícies a serem coladas?



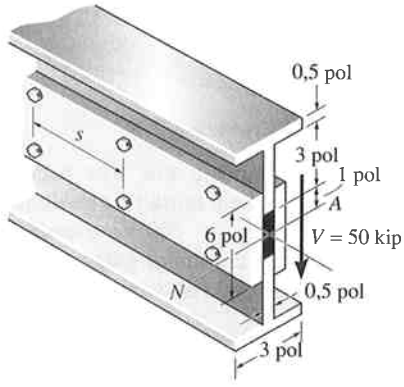
Problema 7.35

***7.36.** A viga compõe-se de três tábuas parafusadas, como mostrado. Determinar a força cortante desenvolvida em cada parafuso se houver um espaço $s = 250$ mm entre eles e o cisalhamento aplicado for $V = 35$ kN.



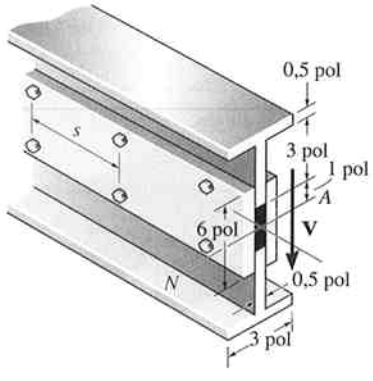
Problema 7.36

7.37. A viga compõe-se de duas vigas em T estruturais e duas chapas. Cada chapa tem altura de 6 pol e espessura de 0,5 pol. Se for aplicado um cisalhamento $V = 50$ kip à seção transversal, qual deverá ser o espaço máximo entre os parafusos? Cada um deles resiste a uma força cortante de 15 kip.



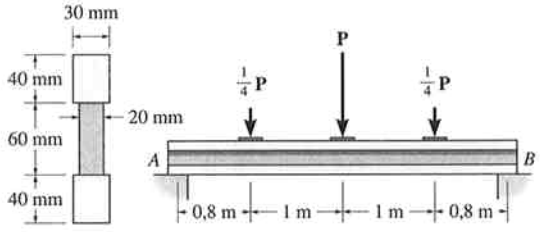
Problema 7.37

7.38. A viga compõe-se de duas vigas em T estruturais e duas chapas. Cada chapa tem altura de 6 pol e espessura de 0,5 pol. Se o espaço entre os parafusos for $s = 8$ pol, qual força cortante máxima **V** poderá ser aplicada à seção transversal? Cada parafuso resiste a uma força cortante de 15 kip.



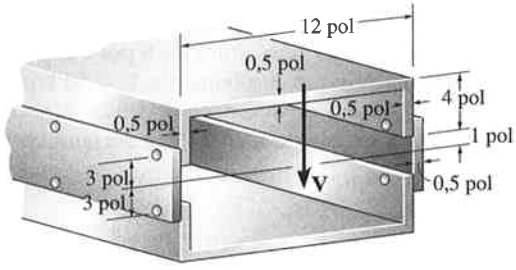
Problema 7.38

7.39. A viga é composta por três tiras de poliestireno coladas como mostrado. Se a cola tem resistência ao cisalhamento de 80 kPa, qual carga máxima P poderá ser aplicada sem que a cola perca sua aderência?



Problema 7.39

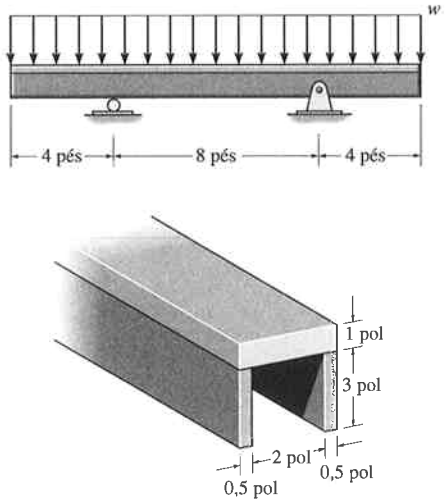
***7.40.** A viga compõe-se de dois perfis em U e duas chapas. Cada chapa tem altura de 6 pol e espessura de 0,5 pol. Se for aplicado um cisalhamento V = 50 kip à seção transversal, qual deverá ser o espaço máximo entre os parafusos? Cada um deles resiste a uma força cortante de 15 kip.



Problema 7.40

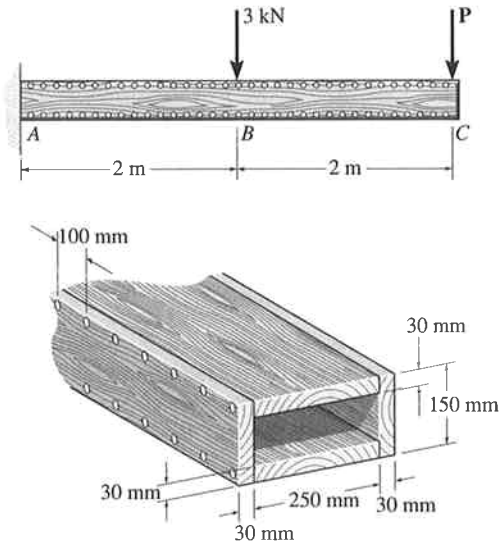
7.41. O suporte é composto por três peças de plástico coladas, como mostrado. Se a tensão de cisalhamento admissível para o plástico é τ_{adm} = 800 psi e cada junta colada resiste a 250 lb/pol, qual é a maior carga distribuída admissível w que pode ser aplicada ao suporte?

7.42. O suporte é composto por três peças de plástico coladas, como mostrado. Se estiver sujeito à carga distribuída w = 200 lb/pé, qual tensão de cisalhamento cada junta colada suportará?



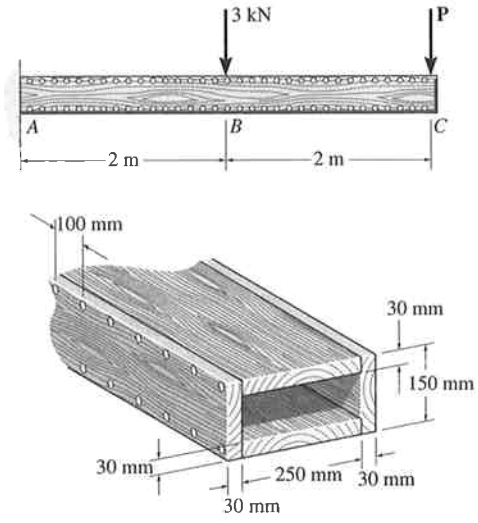
Problemas 7.41/7.42

7.43. A viga está submetida ao carregamento mostrado, sendo P = 7 kN. Determinar a tensão de cisalhamento média desenvolvida sobre os pregos na região AB da viga. Os pregos localizam-se em cada lado da viga e a 100 mm um do outro. Cada um tem diâmetro de 5 mm.



Problema 7.43

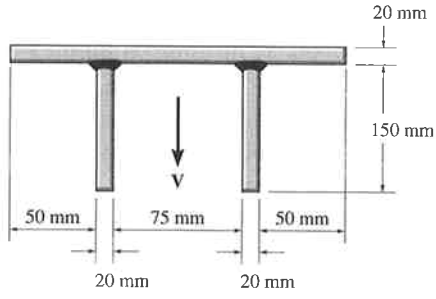
7.44. A viga compõe-se de quatro tábuas pregadas. Se os pregos estão em ambos os lados da viga e cada um resiste a um cisalhamento de 3 kN, qual carga máxima P pode ser aplicada à extremidade?



Problema 7.44

7.45. A viga em duplo T compõe-se de três chapas soldadas como mostrado. Determinar a tensão de cisalhamento na solda necessária para suportar uma força cortante V = 80 kN.

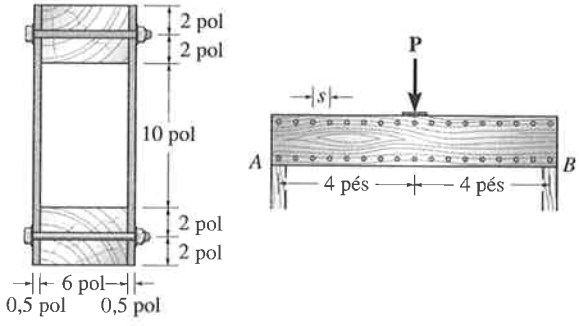
7.46. A viga em duplo T compõe-se de três chapas soldadas como mostrado. Se a solda resiste a uma tensão de cisalhamento τ_{adm} = 90 MPa, qual cisalhamento máximo V pode ser aplicado à viga?



Problemas 7.45/7.46

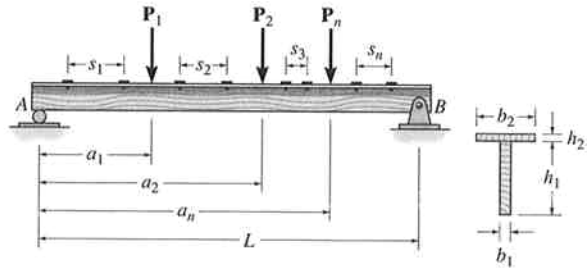
7.47. A viga-mestra de alma dupla é composta por duas chapas de madeira compensada, presas aos elementos de madeira nas partes superior e inferior. Se cada elemento de fixação suporta 600 lb de cisalhamento simples, qual o espaço s necessário para suportar a carga $P = 3.000$ lb? Supor que a articulação de A é um pino e a de B um rolete.

***7.48.** A viga-mestra de alma dupla é composta por duas chapas de madeira compensada presas aos elementos de madeira nas partes superior e inferior. A tensão de flexão admissível para a madeira é $\sigma_{adm} = 2$ ksi e a de cisalhamento admissível, $\tau_{adm} = 800$ psi. Se o espaço entre os elementos de fixação é $s = 6$ pol e cada um suporta cisalhamento simples de 600 lb, qual carga máxima P pode ser aplicada à viga?



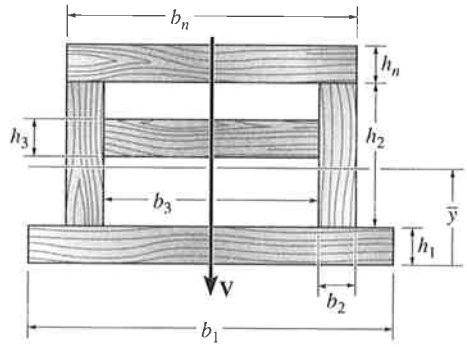
Problemas 7.47/7.48

■**7.49.** A viga em T de madeira está submetida a uma carga formada por n forças concentradas P_n. Supondo que a força cortante V_{prego} em cada prego seja conhecida, escrever um programa de computador que especifique o espaçamento dos pregos entre cada carga. Mostrar uma aplicação do programa usando os valores $L = 15$ pés, $a_1 = 4$ pés, $P_1 = 600$ lb, $a_2 = 8$ pés, $P_2 = 1.500$ lb, $b_1 = 1{,}5$ pol, $h_1 = 10$ pol, $b_2 = 8$ pol, $h_2 = 1$ pol e $V_{prego} = 200$ lb.



Problema 7.49

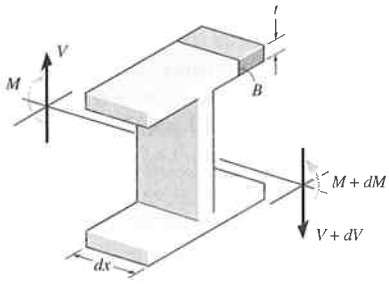
■**7.50.** A viga de madeira compõe-se de n tábuas, cada uma com seção transversal retangular. Escrever um programa de computador para determinar a tensão de cisalhamento máxima na viga quando ela é submetida a qualquer cisalhamento V. Mostrar uma aplicação do programa usando uma seção transversal caixão e em forma de T.



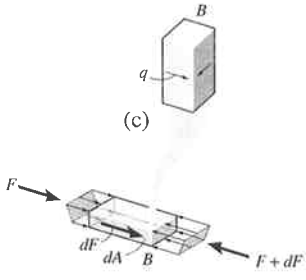
Problema 7.50

7.5 FLUXO DE CISALHAMENTO EM ELEMENTOS DE PAREDES FINAS

Na seção anterior desenvolvemos a equação do fluxo de cisalhamento ($q = VQ/I$) e mostramos como esta é usada para determinar o fluxo de cisalhamento que atua ao longo de qualquer plano longitudinal de um elemento. Nesta seção mostraremos como aplicá-la para determinar a *distribuição* do fluxo de cisalhamento em toda a área da seção transversal do elemento. Nesse caso, vamos supor que o elemento tenha *paredes finas*, isto é, a espessura da parede é pequena se comparada com a altura ou a largura do elemento. Como será mostrado na próxima seção, essa análise tem aplicações importantes em projetos estruturais e mecânicos.



(a)



(c)

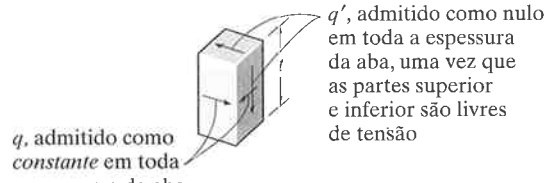
(b)

Antes de determinar a distribuição do fluxo de cisalhamento em uma seção transversal, mostraremos como esse fluxo relaciona-se com a tensão de cisalhamento. Para isso, consideremos o segmento dx da viga em duplo T da Figura 7.19*a*. O diagrama de corpo livre de uma parte da aba é mostrado na Figura 7.19*b*. A força dF desenvolve-se ao longo da seção longitudinal sombreada, a fim de balancear as forças F e $F + dF$ criadas pelos momentos M e $M + dM$, respectivamente. Como o segmento tem comprimento dx, o fluxo de cisalhamento ou a força por unidade de comprimento ao longo da seção é $q = dF/dx$. Como a parede da aba é *fina*, a tensão de cisalhamento τ não varia muito na espessura t da seção; desse modo, devemos supor que seja *constante*. Logo, $dF = \tau dA = \tau(t\,dx) = q\,dx$, ou

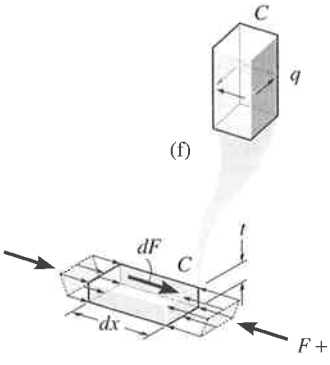
$$q = \tau t \tag{7.7}$$

Obteremos o mesmo resultado comparando a equação do fluxo de cisalhamento, $q = VQ/I$, com a fórmula do cisalhamento, $\tau = VQ/It$.

Do mesmo modo que a tensão de cisalhamento, o fluxo de cisalhamento atua sobre os planos longitudinal e transversal. Por exemplo: se o elemento do canto no ponto B da Figura 7.19*b* for retirado (Figura 7.19*c*), o fluxo de cisalhamento atuará nas faces do elemento como mostrado. Apesar de ele existir, *desprezamos* o componente transversal vertical do fluxo de cisalhamento, porque, conforme mostra a Figura 7.19*d*, esse componente, assim como a tensão de cisalhamento, é aproximadamente zero em toda a espessura do elemento. Isso porque se supõe que as paredes sejam finas e as superfícies superior e inferior, livres de tensão. Resumindo, apenas o componente do fluxo de cisalhamento que atua *paralelamente* às paredes do elemento será considerado.



(d)

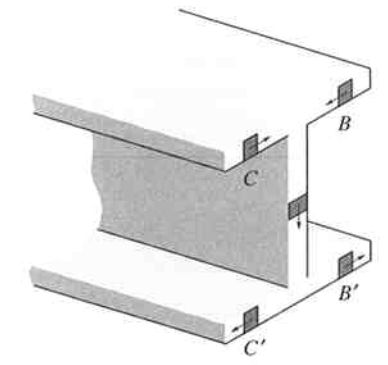


(f)

(e)

Por meio de análise similar, o isolamento do segmento esquerdo da aba superior (Figura 7.19*e*) estabelecerá a direção correta do fluxo de cisalhamento no canto C do elemento do segmento (Figura 7.19*f*). Usando esse método, mostrar que o fluxo de cisalhamento correspondente aos pontos B' e C' na aba inferior tem a direção mostrada na Figura 7.19*g*.

Esse exemplo ilustra como a *direção* do fluxo de cisalhamento é estabelecida em qualquer ponto da seção transversal de uma viga. Mostraremos agora, usando a fórmula do fluxo de cisalhamento, $q = VQ/I$, como determinar sua distribuição em toda a seção transversal. Espera-se que a fórmula dê resultados satisfatórios para o fluxo de cisalhamento, visto que, como dissemos na Seção 7.3, a precisão dessa equação melhora no caso de elementos com seções transversais finas. Em qualquer aplicação, entretanto, a força cortante **V** deve atuar ao longo de um eixo de simetria ou do eixo principal de inércia do centróide da seção transversal.

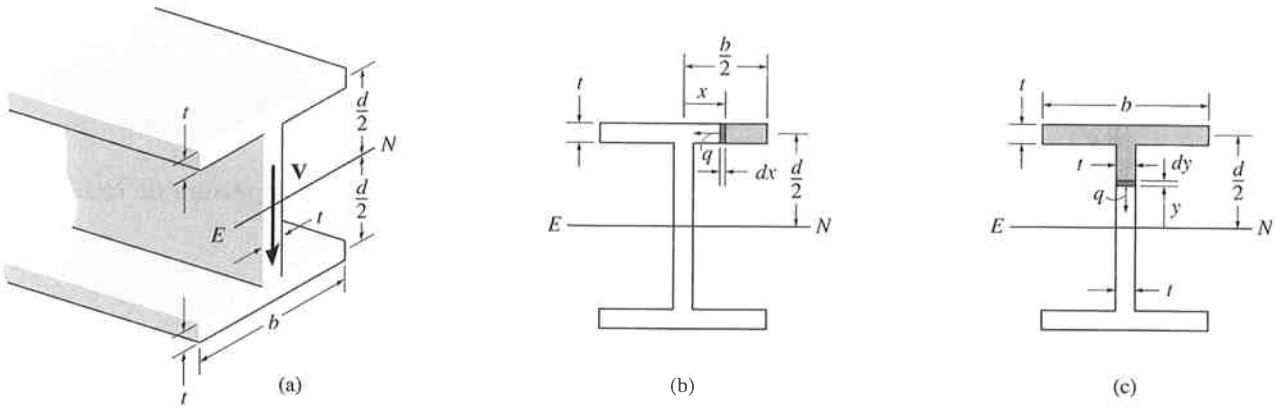


(g)

Figura 7.19

Começaremos determinando a distribuição do fluxo de cisalhamento ao longo da aba superior direita da viga em duplo T mostrada na Figura 7.20*a*. Para isso, levaremos em conta o fluxo de cisalhamento q, que atua sobre o elemento sombreado claro, localizado a uma distância arbitrária x da linha de centro da seção transversal (Figura 7.20*b*). Tal fluxo de cisalhamento é determinado pela Equação 7.6, com $Q = \bar{y}'A' = [d/2](b/2 - x)t$. Assim:

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{V[d/2]((b/2) - x)t}{I} = \frac{Vtd}{2I}\left(\frac{b}{2} - x\right) \tag{7.8}$$



Por inspeção, verificamos que a distribuição é *linear*, variando de $q = 0$ em $x = b/2$ a $(q_{máx})_{aba} = Vtdb/4I$ em $x = 0$. (O limite $x = 0$ é possível aqui, uma vez que se supõe que o elemento tenha 'paredes finas' e, desse modo, a espessura da alma é desprezada.) Devido à simetria, uma análise similar leva à mesma distribuição de fluxo de cisalhamento para as outras abas; assim, os resultados são os mostrados na Figura 7.20*d*.

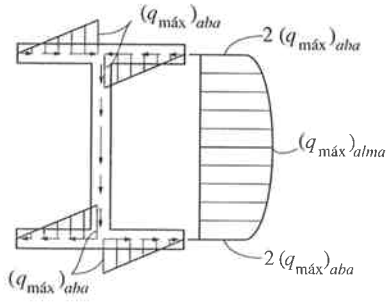
A força total desenvolvida nas partes esquerda e direita de cada aba é determinada por integração. Como a força no elemento sombreado claro da Figura 7.20*b* é $dF = q\,dx$, então:

$$F_{aba} = \int q\,dx = \int_0^{b/2} \frac{Vtd}{2I}\left(\frac{b}{2} - x\right) dx = \frac{Vtdb^2}{16I}$$

Obtém-se o mesmo resultado determinando-se a área do triângulo da Figura 7.20*d*, uma vez que q é uma distribuição de força/comprimento. Logo:

$$F_{aba} = \frac{1}{2}(q_{máx})_{aba}\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{Vtdb^2}{16I}$$

Todas as quatro forças da aba são mostradas na Figura 7.20*e*, e podemos ver, por suas direções, que se mantém o equilíbrio da força horizontal da seção transversal.



Distribuição do fluxo de cisalhamento

(d)

Uma análise similar é feita para a alma (Figura 7.20*c*). Temos, nesse caso, $Q = \Sigma \bar{y}'A' = [d/2](bt) + [y + (1/2)(d/2 - y)]t(d/2 - y) = btd/2 + (t/2)(d^2/4 - y^2)$, de modo que:

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{Vt}{I}\left[\frac{db}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{4} - y^2\right)\right] \tag{7.9}$$

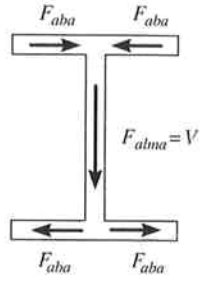
No caso da alma, o fluxo de cisalhamento varia de modo *parabólico*, de $q = 2(q_{máx})_{aba} = Vtdb/2I$ em $y = d/2$ ao máximo de $q = (q_{máx})_{alma} = (Vtd/I)(b/2 + d/8)$ (Figura 7.20*d*).

A fim de determinar a força na alma, F_{alma}, devemos integrar a Equação 7.9, ou seja:

$$F_{alma} = \int q\,dy = \int_{-d/2}^{d/2} \frac{Vt}{I}\left[\frac{db}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{4} - y^2\right)\right] dy$$

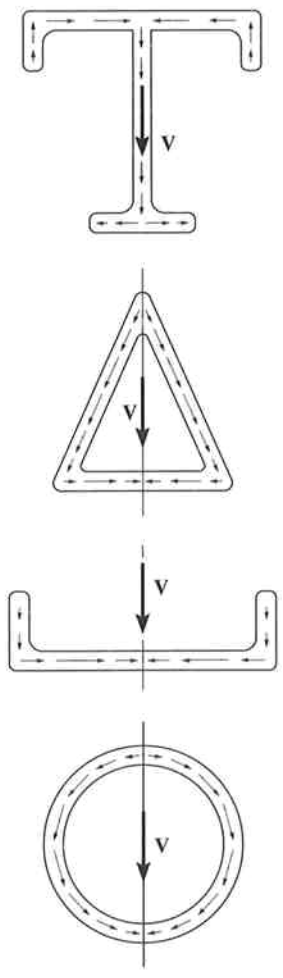
$$= \frac{Vt}{I}\left[\frac{db}{2}y + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{4}y - \frac{1}{3}y^3\right)\right]\Bigg|_{-d/2}^{d/2}$$

$$= \frac{Vtd^2}{4I}\left(2b + \frac{1}{3}d\right)$$



(e)

Figura 7.20



Fluxo de cisalhamento q

Figura 7.21

É possível simplificar, já que o momento de inércia da área da seção transversal é:

$$I = 2\left[\frac{1}{12}bt^3 + bt\left(\frac{d}{2}\right)^2\right] + \frac{1}{12}td^3$$

Desprezando o primeiro termo, uma vez que a espessura de cada aba é pequena, obtemos:

$$I = \frac{td^2}{4}\left(2b + \frac{1}{3}d\right)$$

Substituindo pela equação anterior, vemos que $F_{alma} = V$, o que era esperado (Figura 7.20*e*).

Pela análise anterior devem ser observados três pontos importantes. Primeiro, o valor de q muda na seção transversal, visto que Q é diferente para cada segmento de área A' no qual é determinada. Em particular, q varia *linearmente* ao longo dos segmentos (abas) *perpendiculares* à direção de **V** e *parabolicamente* ao longo dos segmentos (alma) *inclinados ou paralelos* a **V**. Segundo, *q atua sempre paralelamente às paredes* do elemento, visto que a seção em que se calcula q é perpendicular às paredes. Terceiro, o *sentido da direção* de q é tal que o cisalhamento parece '*fluir*' através da seção transversal, *da periferia para dentro* da aba superior da viga, 'combinando-se' e depois 'fluindo' *para baixo* através da alma (uma vez que deve contribuir para a força cortante **V**) e, por fim, separando-se e 'fluindo' *para fora* na aba inferior. Se formos capazes de 'visualizar' esse 'fluxo', ficará fácil estabelecer não só a direção de q, como *também* a direção correspondente de τ. Outros exemplos de como q orienta-se ao longo de membros de paredes finas são mostrados na Figura 7.21. Em todos os casos, a simetria prevalece em torno de um eixo colinear a **V** e, como resultado, q 'flui' na direção que fornecerá os componentes de força vertical necessários (equivalentes a **V**) e também satisfará os requisitos de equilíbrio da força horizontal da seção transversal.

PONTOS IMPORTANTES

- Se o elemento for feito de segmentos com paredes finas, apenas o fluxo de cisalhamento *paralelo* às paredes importará.
- O fluxo de cisalhamento varia *linearmente* ao longo dos segmentos *perpendiculares* à direção do cisalhamento **V**.
- O fluxo de cisalhamento varia *parabolicamente* ao longo dos segmentos *inclinados* ou *paralelos* à direção do cisalhamento **V**.
- Na seção transversal, o cisalhamento 'flui' ao longo dos segmentos, o que contribui para o cisalhamento **V**, além de satisfazer ao equilíbrio das forças horizontal e vertical.

EXEMPLO 7.7

A viga-caixão da Figura 7.22*a* está submetida a um cisalhamento de 10 kip. Determinar a variação do fluxo de cisalhamento através da seção transversal.

SOLUÇÃO

Verifica-se, por inspeção, que o eixo neutro passa pelo centro da seção transversal. Logo, o momento de inércia é:

$$I = \frac{1}{12}(6\text{ pol})(8\text{ pol})^3 - \frac{1}{12}(4\text{ pol})(6\text{ pol})^3 = 184\text{ pol}^4$$

Apenas o fluxo de cisalhamento nos pontos B, C e D precisa ser determinado. No ponto B, a área $A' \approx 0$ (Figura 7.22*b*), uma vez que se pode imaginá-la localizada inteiramente no ponto B. Alternativamente, A' também representa *toda* a área da seção transversal, caso em que $Q_B = \bar{y}'A' = 0$, visto que $\bar{y}' = 0$. Como $Q_B = 0$, então:

$$q_B = 0$$

No ponto C, a área A' aparece sombreada escura (Figura 7.22*c*). Nesse caso, usamos dimensões médias, uma vez que o ponto C está na linha de centro de cada segmento. Temos:

$$Q_C = \bar{y}'A' = (3{,}5\text{ pol})(5\text{ pol})(1\text{ pol}) = 17{,}5\text{ pol}^3$$

Assim:

$$q_C = \frac{VQ_C}{I} = \frac{10\text{ kip}(17{,}5\text{ pol}^3/2)}{184\text{ pol}^4} = 0{,}951\text{ kip/pol}$$

O fluxo de cisalhamento em D é calculado por meio dos três retângulos sombreados escuros da Figura 7.22*d*. Temos:

$$Q_D = \Sigma\bar{y}'A' = 2[2\text{ pol}](1\text{ pol})(4\text{ pol}) + [3{,}5\text{ pol}](4\text{ pol})(1\text{ pol}) = 30\text{ pol}^3$$

De modo que:

$$q_D = \frac{VQ_D}{I} = \frac{10\text{ kip}(30\text{ pol}^3/2)}{184\text{ pol}^4} = 1{,}63\text{ kip/pol}$$

Montada com base nesses resultados e na simetria da seção transversal, a Figura 7.22*e* mostra graficamente a distribuição do fluxo de cisalhamento. Como esperado, a distribuição é linear ao longo dos segmentos horizontais (perpendiculares a **V**) e parabólica ao longo dos verticais (paralelos a **V**).

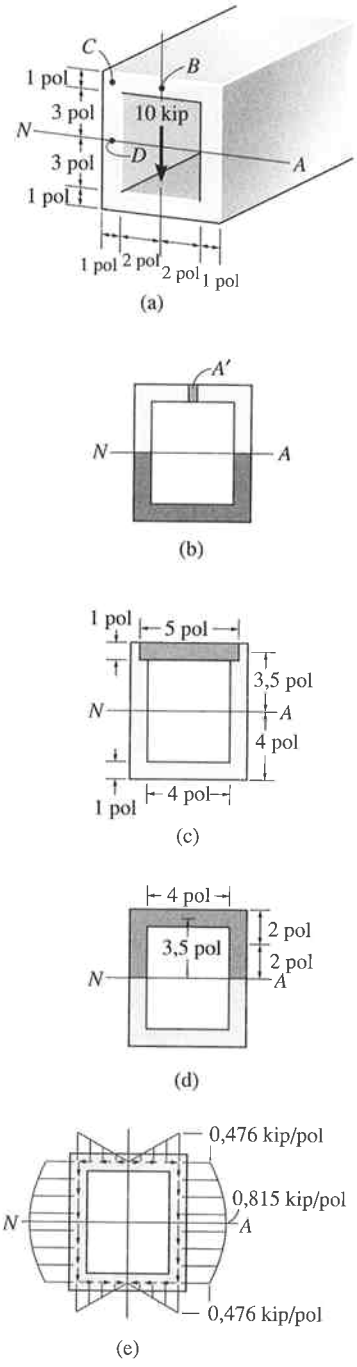


Figura 7.22

*7.6 CENTRO DE CISALHAMENTO

Na seção anterior admitimos que o cisalhamento interno **V** desenvolve-se ao longo de um eixo principal de inércia do centróide, que *também* representa um *eixo de simetria* da seção transversal. Nesta seção consideraremos o efeito do cisalhamento ao longo de um eixo principal do centróide que *não* seja um eixo de simetria. Como anteriormente, apenas elementos de paredes finas serão analisados, de modo que serão usadas as distâncias das paredes à linha de centro dos elementos. Um exemplo típico desse caso é a seção com perfil em U mostrada na Figura 7.23*a*, que está em balanço em um apoio fixo e submetida à força **P**. Se a força for aplicada ao longo do eixo vertical assimétrico que passa pelo *centróide C* da área da seção transversal, o perfil em U não só se fletirá para baixo *como também torcerá* no sentido horário como mostrado.

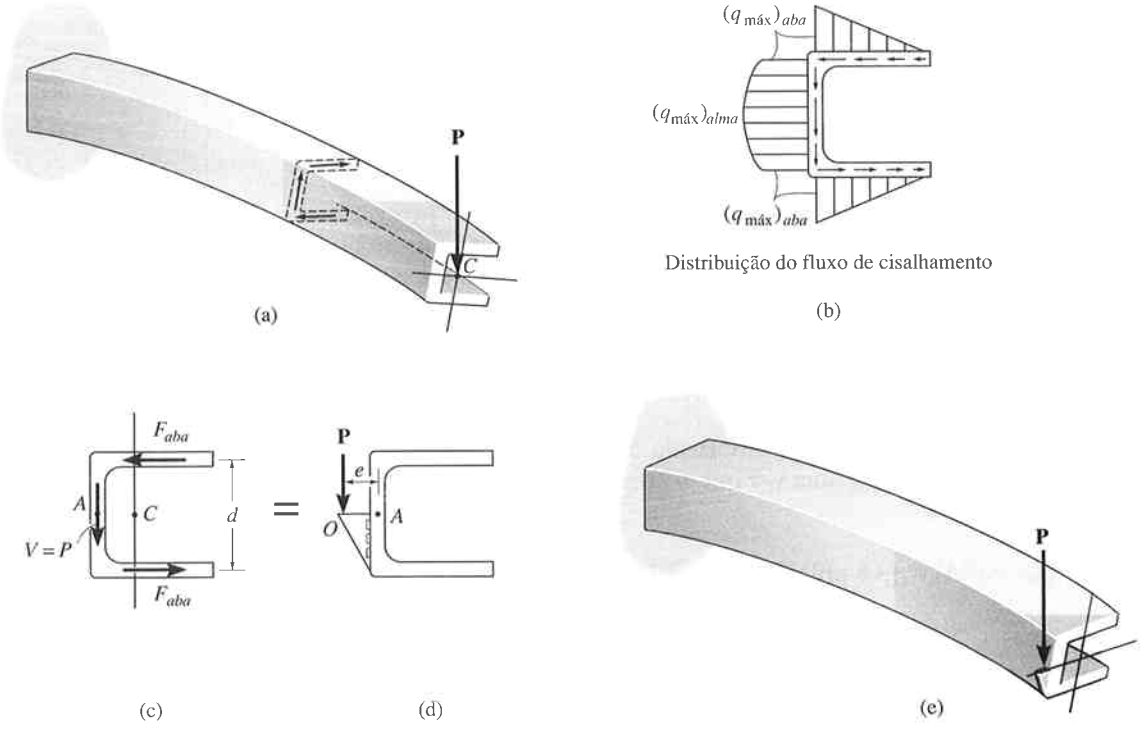
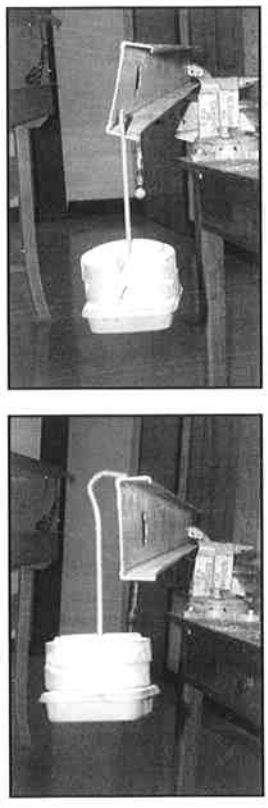


Figura 7.23



Observe como uma viga em balanço se flete quando carregada através do centróide (acima) e do centro de cisalhamento (abaixo).

Para entender por que o elemento torce, precisamos estudar a distribuição do fluxo de cisalhamento ao longo das abas e da alma do perfil em U (Figura 7.23*b*). Quando a distribuição é integrada nas áreas da aba e da alma, fornece forças resultantes de F_{aba} em cada aba e uma força $V = P$ na alma (Figura 7.23*c*). Se somarmos os momentos dessas forças em torno do ponto A, veremos que o conjugado ou torque criado pelas forças das abas é responsável pela torção do elemento. O sentido real da torção é horário quando visto a partir da frente da viga, como mostra a Figura 7.23*a*, uma vez que as forças de 'equilíbrio' interno de *reação* F_{aba} provocam a torção. A fim de *impedir* a torção é necessário aplicar **P** em um ponto O localizado a uma distância e da alma do perfil em U (Figura 7.23*d*). É preciso que $\Sigma M_A = F_{aba}d = Pe$ ou:

$$e = \frac{F_{aba}d}{P}$$

Usando o método discutido na Seção 7.5, avaliamos F_{aba} em termos de P $(= V)$ e das dimensões das abas e da alma. Uma vez feito isso, P será cancelada após a substituição na equação anterior e será possível, então, expressar e simplesmente em função da geometria da seção transversal e *não* em função de P ou de sua localização ao longo do comprimento da viga (ver o Exemplo 7.9). Portanto, o ponto O localizado é chamado ***centro de cisalhamento*** ou ***centro de flexão***. Quando **P** é aplicada nesse centro de cisalhamento, ***a viga flete sem torção***, como mostra a Figura 7.23*e*. Os manuais de projeto relacionam a localização desse ponto para uma variedade de seções transversais de vigas de paredes finas, usadas comumente na prática.

Ao proceder à análise, deve-se observar que o ***centro de cisalhamento localiza-se sempre em um eixo de simetria*** da área da seção transversal do elemento. Por exemplo: se o perfil em U da Figura 7.23*a* for girado 90° e **P** for aplicada em A (Figura 7.24*a*), não ocorrerá torção, uma vez que o fluxo de

cisalhamento na alma e nas abas é *simétrico* nesse caso e, portanto, as forças resultantes nesses elementos criam momentos nulos em torno de A (Figura 7.24*b*). Obviamente, se um elemento tiver uma seção transversal com *dois* eixos de simetria, como no caso de uma viga em duplo T, o centro de cisalhamento coincidirá com a interseção desses eixos (o centróide).

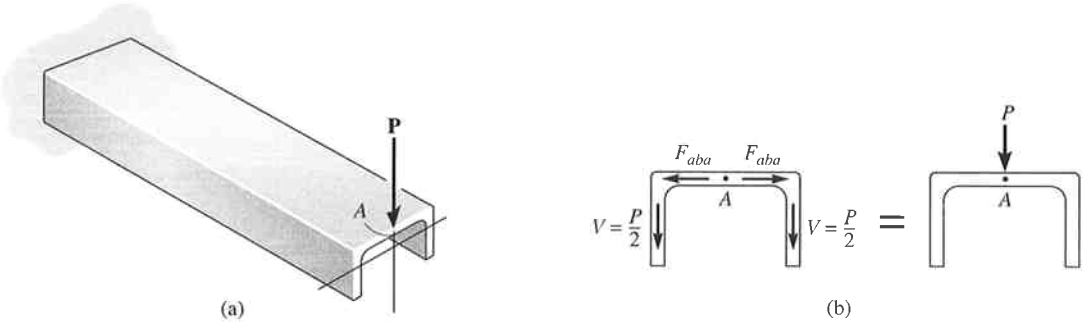


Figura 7.24

PONTOS IMPORTANTES

- O *centro de cisalhamento* é o ponto em que se aplica uma força que pode provocar flexão, embora não provoque torção na viga.
- O centro de cisalhamento localiza-se sempre em um eixo de simetria da seção transversal.
- A localização do centro de cisalhamento é função apenas da geometria da seção transversal e independe da carga aplicada.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

Para determinar a localização do centro de cisalhamento de um elemento de paredes finas no qual o cisalhamento interno esteja na *mesma direção* do eixo principal do centróide da seção transversal, aconselha-se usar o seguinte procedimento.

Resultantes do Fluxo de Cisalhamento.

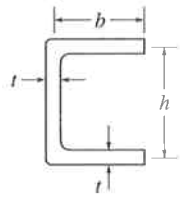
- Determinar a direção em que o cisalhamento 'flui' através dos vários segmentos da seção transversal e, em seguida, desenhar as forças resultantes em cada um desses segmentos. (A título de exemplo, ver a Figura 7.23*c*.) Como o centro de cisalhamento é determinado calculando-se os momentos dessas forças resultantes em torno de um ponto (A), escolher esse ponto em uma localização que elimine os momentos de tantas forças resultantes quanto possível.
- As intensidades das forças resultantes que criam um momento em torno de A devem ser calculadas. Isso é feito para qualquer segmento determinando-se o fluxo de cisalhamento q em um ponto arbitrário do segmento e, depois, integrando-se q ao longo do comprimento do segmento. Observe que **V** cria uma variação *linear* do fluxo de cisalhamento nos segmentos *perpendiculares* a **V** e uma variação *parabólica* do fluxo de cisalhamento nos segmentos *paralelos ou inclinados* em relação a **V**.

Centro de Cisalhamento.

- Somar os momentos das resultantes do fluxo de cisalhamento em torno do ponto A e definir esse momento como igual ao momento de **V** em torno de A. Resolvida essa equação, é possível determinar a distância e do braço de momento que localiza a linha de ação de **V** a partir de A.
- Se existir um *eixo de simetria* na seção transversal, o centro de cisalhamento se localizará no ponto em que esse eixo interceptar a linha de ação de **V**. Se, no entanto, não existirem eixos de simetria, girar a seção transversal 90° e repetir o processo para obter outra linha de ação de **V**. O centro de cisalhamento se localizará, então, no ponto de interseção das duas retas a 90°.

EXEMPLO 7.9

Determinar a localização do centro de cisalhamento da seção do perfil em U, que tem paredes finas e as dimensões mostradas na Figura 7.25*a*.



(a)

SOLUÇÃO

Resultantes do Fluxo de Cisalhamento. Um cisalhamento vertical para baixo **V** aplicado à seção faz o cisalhamento fluir através das abas e da alma como mostra a Figura 7.25*b*. Isso provoca as forças resultantes F_{aba} e V nas abas e na alma como mostra a Figura 7.25*c*. Calcularemos os momentos em torno do ponto A, de modo que somente a força F_{aba} tenha de ser determinada.

A área da seção transversal pode ser dividida em três retângulos componentes — uma alma e duas abas. Como se admite que cada componente seja fino, o momento de inércia da área em torno do eixo neutro é:

$$I = \frac{1}{12}th^3 + 2\left[bt\left(\frac{h}{2}\right)^2\right] = \frac{th^2}{2}\left(\frac{h}{6} + b\right)$$

Pela Figura 7.25*d*, q em uma posição arbitrária x é:

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{V(h/2)[b - x]t}{(th^2/2)[(h/6) + b]} = \frac{V(b - x)}{h[(h/6) + b]}$$

Então, a força F_{aba} é:

$$F_{aba} = \int_0^b q\,dx = \frac{V}{h[(h/6) + b]}\int_0^b (b - x)\,dx = \frac{Vb^2}{2h[(h/6) + b]}$$

Obtém-se o mesmo resultado encontrando primeiro $(q_{máx})_{aba}$ (Figura 7.25*b*) e depois calculando a área triângular $\frac{1}{2}b(q_{máx})_{aba} = F_{aba}$.

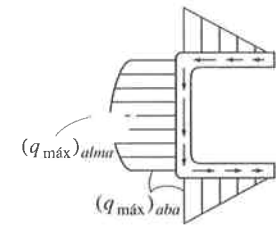
Centro de Cisalhamento. Somando os momentos em torno do ponto A (Figura 7.25*c*), requer-se que:

$$Ve = F_{aba}h = \frac{Vb^2h}{2h[(h/6) + b]}$$

Assim:

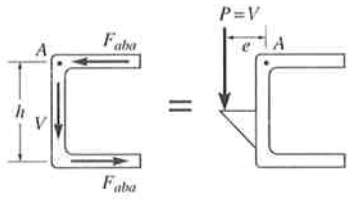
$$e = \frac{b^2}{[(h/3) + 2b]} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Como mencionamos anteriormente, e depende apenas da geometria da seção transversal.

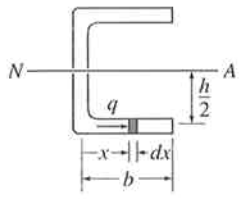


Distribuição do fluxo de cisalhamento

(b)



(c)

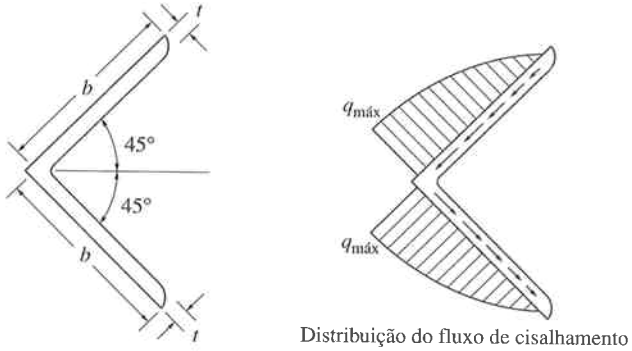


(d)

Figura 7.25

EXEMPLO 7.10

Determinar a localização do centro de cisalhamento da cantoneira de abas iguais (Figura 7.26*a*). Calcular também a força cortante interna resultante em cada aba.



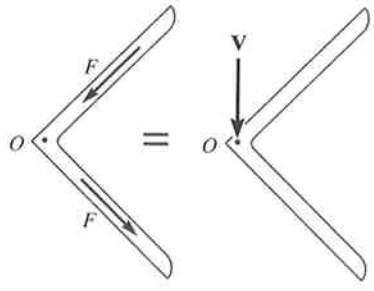


Figura 7.26

SOLUÇÃO

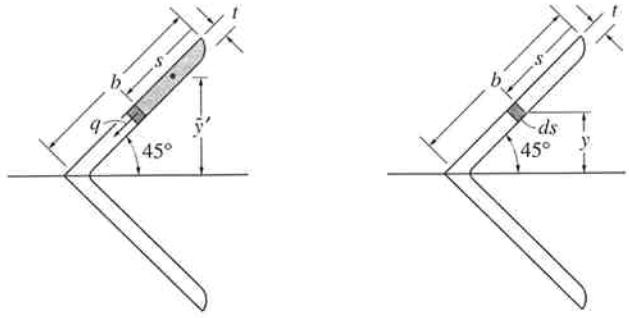
Quando se aplica à seção um cisalhamento vertical para baixo **V**, as resultantes do fluxo de cisalhamento orientam-se como mostram as figuras 7.26*b* e 7.26*c*, respectivamente. Observe que a força F deve ser a mesma em cada aba, visto que para o equilíbrio a soma de seus componentes horizontais deve ser nula. Além disso, as linhas de ação de ambas as forças interceptam-se no ponto O; portanto, esse ponto *deve ser o centro de cisalhamento*, uma vez que a soma dos momentos dessas forças e de **V** em torno de O é zero (Figura 7.26*c*).

Determina-se a intensidade de **F** encontrando primeiro o fluxo de cisalhamento na localização arbitrária s ao longo da aba superior (Figura 7.26*d*). Aqui:

$$Q = \bar{y}'A' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left((b - s) + \frac{s}{2}\right)ts = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(b - \frac{s}{2}\right)st$$

O momento de inércia da cantoneira, calculado em torno do eixo neutro, deve ser determinado a partir de sua definição, uma vez que as abas são inclinadas em relação ao eixo neutro. Para o elemento de área $dA = t\,ds$ (Figura 7.26*e*), temos:

$$I = \int_A y^2\,dA = 2\int_0^b \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(b - s)\right]^2 t\,ds = t\left(b^2 s - bs^2 + \frac{1}{3}s^3\right)\Big|_0^b = \frac{tb^3}{3}$$



(d) (e)

Figura 7.26

Assim, o fluxo de cisalhamento é:

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{V}{(tb^3/3)}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(b - \frac{s}{2}\right)st\right]$$

$$= \frac{3V}{\sqrt{2}b^3}\, s\left(b - \frac{s}{2}\right)$$

A variação de q é parabólica e atinge seu valor máximo quando $s = b$, como mostra a Figura 7.26*b*. A força F é, portanto,

$$F = \int_0^b q\, ds = \frac{3V}{\sqrt{2}b^3}\int_0^b s\left(b - \frac{s}{2}\right) ds$$

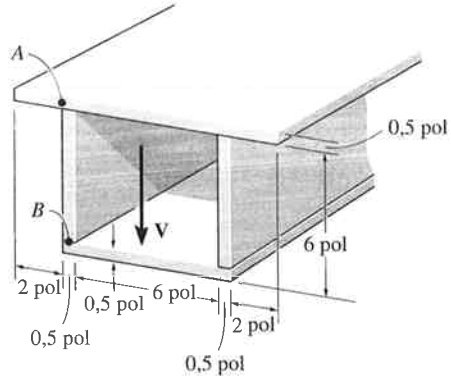
$$= \frac{3V}{\sqrt{2}b^3}\left(b\,\frac{s^2}{2} - \frac{1}{6}s^3\right)\Bigg|_0^b$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}V \qquad \textit{Resposta}$$

Esse resultado pode ser facilmente verificado, visto que a soma dos componentes verticais da força F em cada aba deve ser igual a V e, como mencionamos anteriormente, a soma dos componentes horizontais é nula.

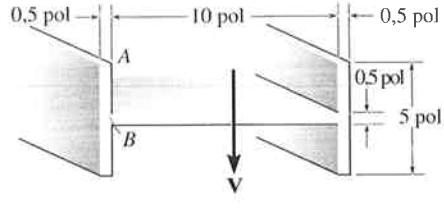
PROBLEMAS

7.51. O conjunto está submetido a um cisalhamento vertical $V = 7$ kip. Determinar o fluxo de cisalhamento nos pontos A e B e o seu valor máximo na seção transversal.



Problema 7.51

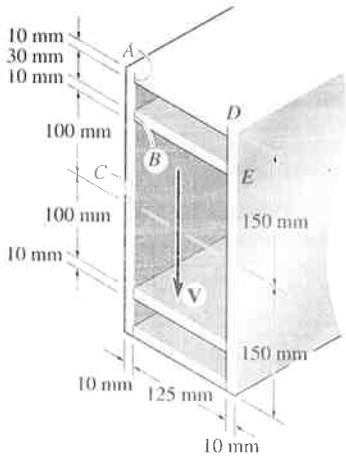
***7.52.** A viga suporta um cisalhamento vertical $V = 7$ kip. Determinar a força resultante desenvolvida no segmento AB.



Problema 7.52

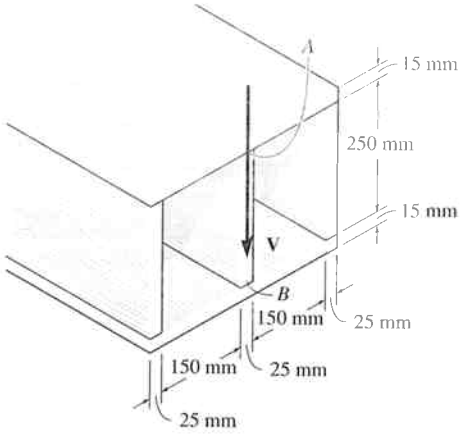
7.53. Uma força cortante $V = 18$ kN é aplicada à viga-caixão simétrica. Determinar o fluxo de cisalhamento em A e B.

7.54. Uma força cortante $V = 18$ kN é aplicada à viga-caixão. Determinar o fluxo de cisalhamento em C.



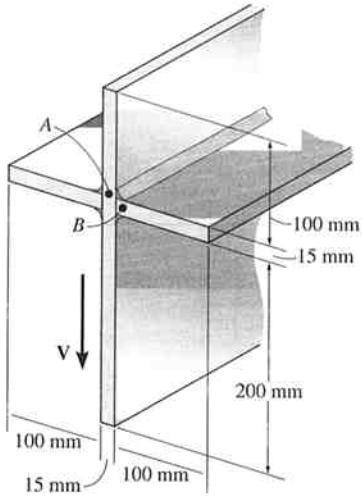
Problemas 7.53/7.54

7.55. A viga-caixão está submetida a um cisalhamento $V = 15$ kN. Determinar (*a*) o fluxo de cisalhamento desenvolvido no ponto B e (*b*) o fluxo de cisalhamento máximo na alma AB da viga-mestra.



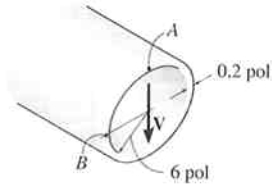
Problema 7.55

***7.56.** A viga compõe-se de três chapas finas soldadas como mostrado. Se estiver sujeita ao cisalhamento $V = 48$ kN, qual será o fluxo de cisalhamento nos pontos A e B? Calcular também a tensão de cisalhamento máxima na viga.



Problema 7.56

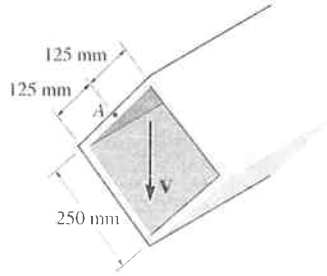
7.57. O tubo está submetido à força cortante $V = 8$ kip. Determinar o fluxo de cisalhamento nos pontos A e B.



Problema 7.57

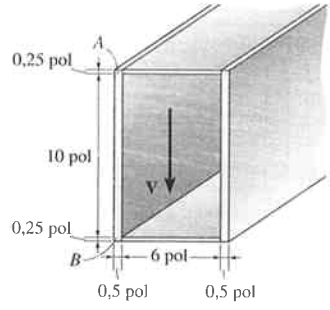
7.58. O tubo quadrado tem 10 mm de espessura e está submetido a uma força cortante $V = 50$ kN. Determinar o fluxo de cisalhamento máximo nele desenvolvido.

7.59. O tubo quadrado tem 10 mm de espessura e está submetido a uma força cortante $V = 50$ kN. Determinar o fluxo de cisalhamento no ponto A.



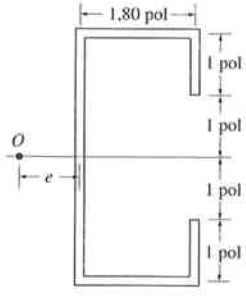
Problemas 7.58/7.59

***7.60.** O elemento está sujeito a uma força cortante $V = 10$ kip. Desenhar a distribuição do fluxo de cisalhamento ao longo da chapa vertical AB. Indicar os valores numéricos de todos os picos.



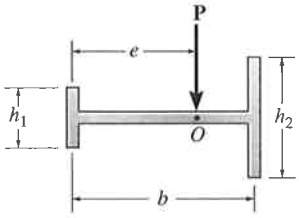
Problema 7.60

7.61. Determinar a localização e do centro de cisalhamento, ponto O, do elemento de paredes finas com a seção transversal mostrada. Os segmentos do elemento têm a mesma espessura t.



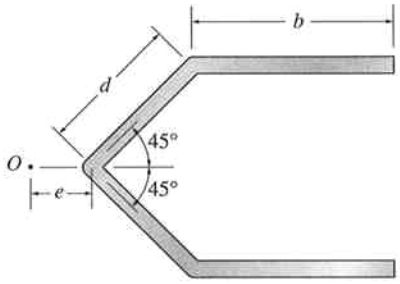
Problema 7.61

7.62. Determinar a localização e do centro de cisalhamento, ponto O, do elemento de paredes finas com a seção transversal mostrada. Os segmentos do elemento têm a mesma espessura t.



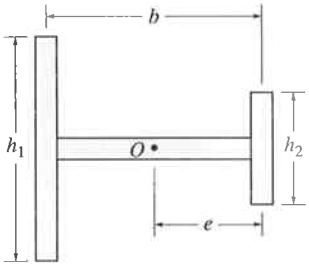
Problema 7.62

7.63. Determinar a localização e do centro de cisalhamento, ponto O, do elemento de paredes finas com a seção transversal mostrada. Os segmentos do elemento têm a mesma espessura t.



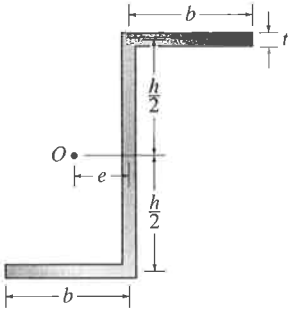
Problema 7.63

***7.64.** Determinar a localização e do centro de cisalhamento, ponto O, do elemento de paredes finas com a seção transversal mostrada. Os segmentos do elemento têm a mesma espessura t.



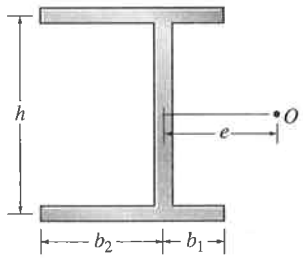
Problema 7.64

7.65. Determinar a localização e do centro de cisalhamento, ponto O, do elemento de paredes finas com a seção transversal mostrada. Os segmentos do elemento têm a mesma espessura t.



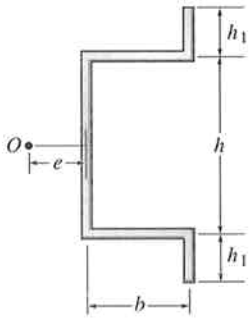
Problema 7.65

7.66. Determinar a localização e do centro de cisalhamento, ponto O, do elemento de paredes finas com a seção transversal mostrada, sendo $b_2 > b_1$. Os segmentos do elemento têm a mesma espessura t.



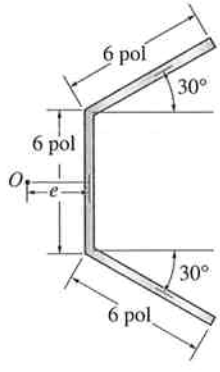
Problema 7.66

7.67. Determinar a localização e do centro de cisalhamento, ponto O, do elemento de paredes finas com a seção transversal mostrada. Os segmentos do elemento têm a mesma espessura t.



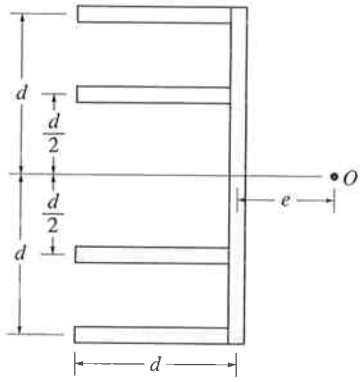
Problema 7.67

***7.68.** Determinar a localização e do centro de cisalhamento, ponto O, do elemento de paredes finas com a seção transversal mostrada. Os segmentos do elemento têm a mesma espessura t.



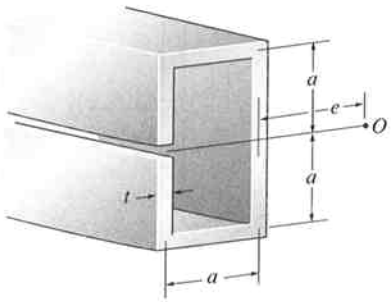
Problema 7.68

7.69. Determinar a localização e do centro de cisalhamento, ponto O, do elemento de paredes finas com a seção transversal mostrada. Os segmentos do elemento têm a mesma espessura t.



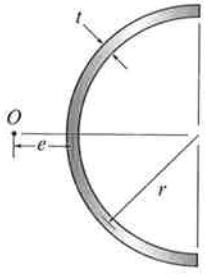
Problema 7.69

7.70. Determinar a localização e do centro de cisalhamento, ponto O, do membro de paredes finas com uma fenda ao longo de sua lateral. Cada elemento tem espessura constante t.



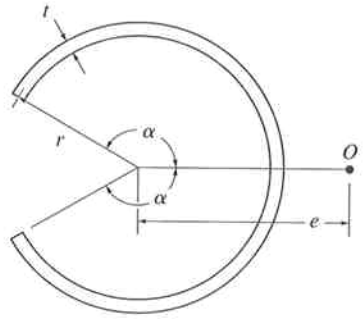
Problema 7.70

7.71. Determinar a localização e do centro de cisalhamento, ponto O, do elemento de paredes finas com a seção transversal mostrada.



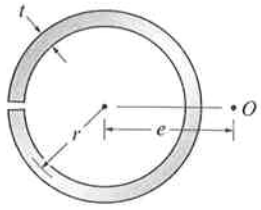
Problema 7.71

***7.72.** Determinar a localização e do centro de cisalhamento, ponto O, do elemento de paredes finas com a seção transversal mostrada.



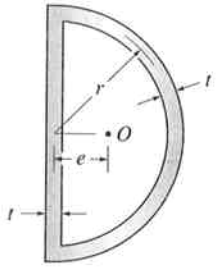
Problema 7.72

7.73. Determinar a localização e do centro de cisalhamento, ponto O, do tubo com uma fenda ao longo de seu comprimento.



Problema 7.73

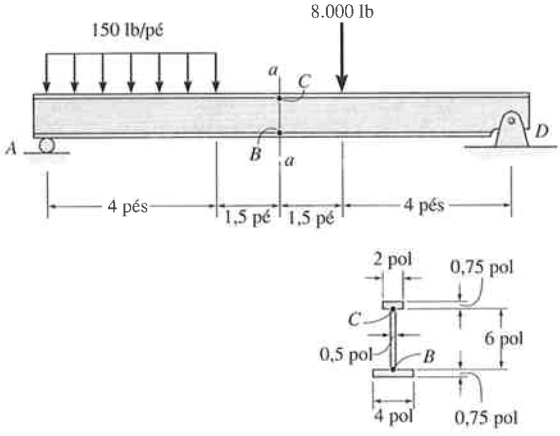
7.74. Determinar a localização e do centro de cisalhamento, ponto O, do tubo de paredes finas com a seção transversal mostrada. Os segmentos do elemento têm a mesma espessura t.



Problema 7.74

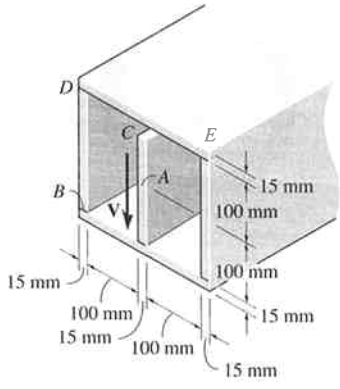
PROBLEMAS DE REVISÃO

7.75. Determinar a tensão de cisalhamento máxima que atua sobre a seção *a–a* da viga.



Problema 7.75

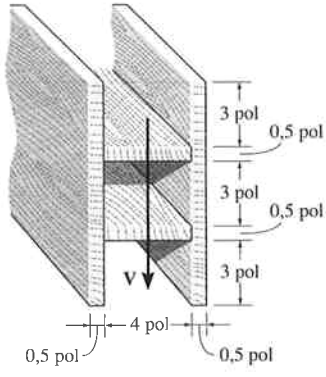
***7.76.** A viga está sujeita a um cisalhamento $V = 25$ kN. Determinar a tensão de cisalhamento nos pontos A e B e calcular a tensão de cisalhamento máxima na viga. Admitir que a folga em C seja fechada, de modo que a chapa central esteja presa à superior.



Problema 7.76

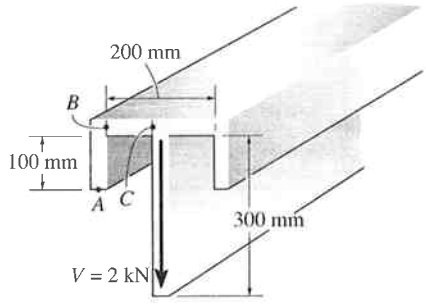
7.77. A viga compõe-se de quatro tábuas coladas. Se a cola suporta 75 lb/pol, qual é o cisalhamento vertical máximo V que a viga pode suportar?

7.78. Resolver o Problema 7.77 se a viga for girada 90° em relação à posição mostrada.



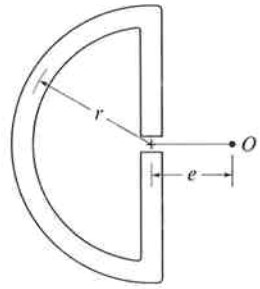
Problemas 7.77/7.78

7.79. O elemento está submetido a uma força cortante $V = 2$ kN. Determinar o fluxo de cisalhamento nos pontos A, B e C. A espessura de cada segmento de paredes finas é 15 mm.



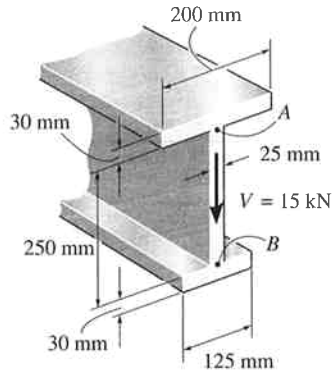
Problema 7.79

***7.80.** Determinar a localização e do centro de cisalhamento, ponto O, para a viga com a seção transversal mostrada. A espessura é t.



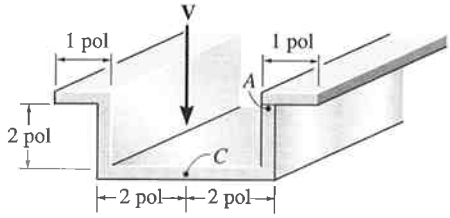
Problema 7.80

7.81. Supondo que a viga seja submetida ao cisalhamento $V = 15$ kN, determinar a tensão de cisalhamento nos pontos A e B da alma. Indicar os componentes da tensão de cisalhamento em um elemento de volume localizado nesses pontos.



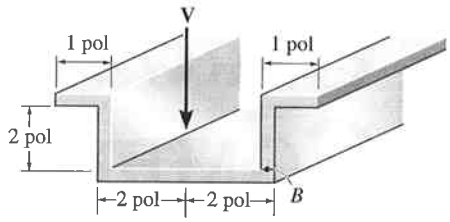
Problema 7.81

7.82. Uma chapa de aço de 0,25 pol de espessura foi transformada na seção de paredes finas mostrada. Se ela for submetida a uma força cortante $V = 250$ lb, qual será a tensão de cisalhamento nos pontos A e C? Indicar os resultados nos elementos de volume localizados nesses pontos.



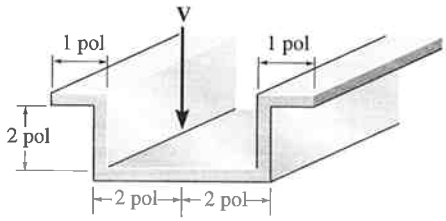
Problema 7.82

7.83. Uma chapa de aço de 0,25 pol de espessura foi transformada na seção de paredes finas mostrada. Se ela for submetida a uma força cortante $V = 250$ lb, qual será a tensão de cisalhamento no ponto B?



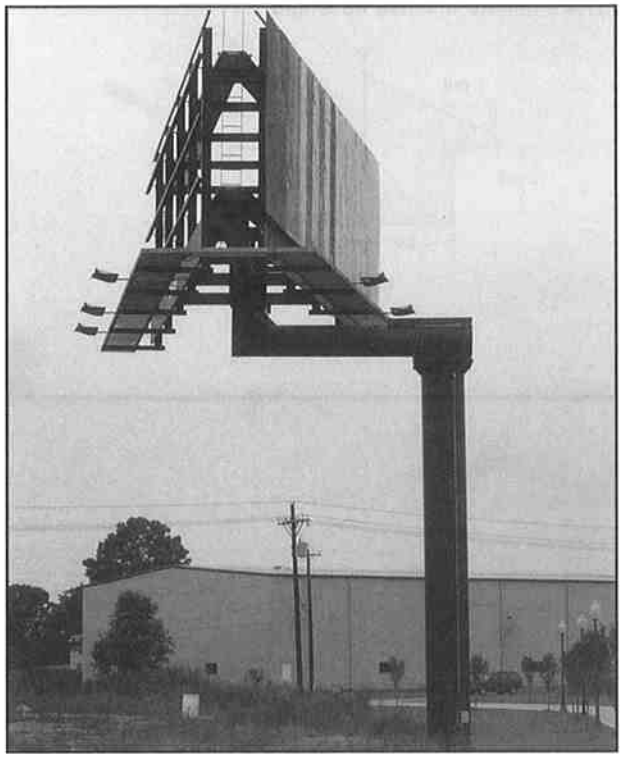
Problema 7.83

***7.84.** Uma chapa de aço de 0,25 pol de espessura foi transformada na seção de paredes finas mostrada. Se ela for submetida a uma força cortante $V = 250$ lb, qual será a tensão de cisalhamento máxima na chapa?



Problema 7.84

8 Cargas Combinadas



A coluna com carga fora de centro que suporta a placa do anúncio está submetida a cargas combinadas de força normal, força cortante, momento fletor e torção.

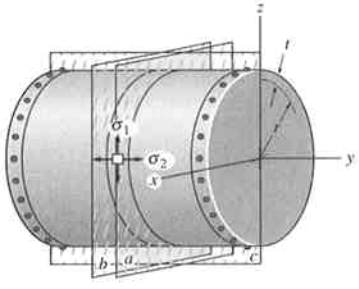
Objetivos do Capítulo

Este capítulo revê a análise de tensão desenvolvida nos capítulos anteriores quanto a cargas axiais, torção, flexão e cisalhamento. Vamos discutir a solução de problemas em que várias dessas cargas internas ocorrem simultaneamente na seção transversal do elemento. Antes, no entanto, analisaremos a tensão desenvolvida em vasos de pressão com paredes finas.

8.1 Vasos de Pressão com Paredes Finas

Vasos cilíndricos ou esféricos são usados comumente na indústria como caldeiras ou reservatórios. Quando sob pressão, o material de que são feitos está submetido a cargas em todas as direções. Apesar disso, o vaso pode ser analisado de maneira simples desde que tenha paredes finas. Em geral, o vaso de ***paredes finas*** é aquele com uma relação raio interno sobre espessura da parede de 10 ou mais ($r/t \geq 10$). Especificamente, quando $r/t = 10$, os resultados da análise de paredes finas prevêem uma tensão aproximadamente 4% *menor* que a tensão máxima no vaso. Para razões r/t maiores, o erro será ainda menor.

Quando a parede do vaso é 'fina', a distribuição de tensão na sua espessura não varia significativamente, de modo que a consideraremos *uniforme* ou *constante*. Baseados nessa hipótese, analisaremos agora o estado de tensão em vasos de pressão cilíndricos e esféricos de paredes finas. Em ambos os casos, a pressão no vaso é entendida como *pressão manométrica*, visto que mede a pressão *acima* da atmosférica, que admitimos existir tanto dentro como fora da parede.



(a)

Figura 8.1

Vasos Cilíndricos. Consideremos o vaso cilíndrico com espessura da parede t e raio interno r mostrado na Figura 8.1*a*. O gás ou fluido nele contido, que se admite ter peso desprezível, desenvolve a pressão manométrica p no interior do vaso. Devido à uniformidade do carregamento, um elemento do vaso removido das extremidades e orientado como mostrado estará sujeito a tensões normais σ_1 no ***sentido circunferencial ou tangencial*** e σ_2 no ***sentido longitudinal ou axial***. Ambos os componentes da tensão exercem tração sobre o material. Queremos determinar a intensidade de cada componente em termos da geometria do vaso e da pressão interna. Para tanto, devemos aplicar o método das seções e as equações de equilíbrio de forças.

Para determinar a tensão circunferencial, consideremos o vaso secionado pelos planos *a*, *b* e *c*. O diagrama de corpo livre do segmento posterior com o gás ou fluido contido é mostrado na Figura 8.1*b*. Aqui, aparecem apenas as cargas na direção *x*. Essas cargas são desenvolvidas pela tensão circunferencial uniforme σ_1, que atua sobre toda a parede do vaso, e pela pressão que atua na face vertical secionada do gás ou fluido. Para o equilíbrio na direção de *x*, é preciso que:

$$\Sigma F_x = 0; \qquad 2[\sigma_1(t\,dy)] - p(2r\,dy) = 0$$

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t} \tag{8.1}$$

Para obter a tensão longitudinal σ_2, consideraremos a parte esquerda da seção *b* do cilindro (Figura 8.1*a*). Como mostrado na Figura 8.1*c*, σ_2 atua uniformemente sobre toda a parede e *p* atua na seção do gás ou fluido. Como o raio médio é aproximadamente igual ao raio interno do vaso, o equlíbrio na direção *y* requer:

$$\Sigma F_y = 0; \qquad \sigma_2(2\pi rt) - p(\pi r^2) = 0$$

$$\sigma_2 = \frac{pr}{2t} \tag{8.2}$$

Nas equações anteriores:

σ_1, σ_2 = tensão normal nas direções circunferencial e longitudinal; admite-se que sejam *constantes* em toda a parede do cilindro e que cada uma tracione o material

p = pressão manométrica interna desenvolvida pelo gás ou fluido

r = raio interno do cilindro

t = espessura da parede ($r/t \geq 10$)

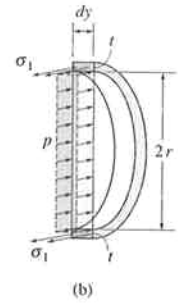
Comparando as equações 8.1 e 8.2, nota-se que a tensão circunferencial é duas vezes maior que a longitudinal ou axial. Conseqüentemente, ao se fabricar vasos de pressão cilíndricos de chapas laminadas, as juntas longitudinais devem ser projetadas para suportar o dobro da tensão das circunferenciais.

Vasos Esféricos. Pode-se analisar um vaso de pressão esférico de maneira semelhante. Como exemplo, consideremos que o vaso tenha espessura da parede *t* e raio interno *r* e esteja sujeito a uma pressão manométrica interna *p* (Figura 8.2*a*). Se o vaso for secionado pela metade em *a*, o diagrama de corpo livre resultante será igual ao da Figura 8.2*b*. Como ocorre no caso do cilindro, o equilíbrio na direção *y* requer:

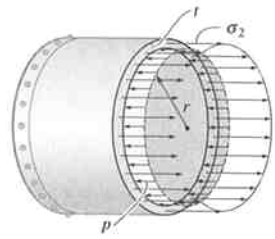
$$\Sigma F_y = 0; \qquad \sigma_2(2\pi rt) - p(\pi r^2) = 0$$

$$\sigma_2 = \frac{pr}{2t} \tag{8.3}$$

Vemos, por comparação, que é o *mesmo resultado* obtido para a tensão longitudinal no vaso de pressão cilíndrico. Além disso, verifica-se que a tensão será a mesma *independentemente* da orientação do diagrama de corpo livre hemisférico. Conseqüentemente, um elemento do material estará sujeito ao estado de tensão mostrado na Figura 8.2*a*.

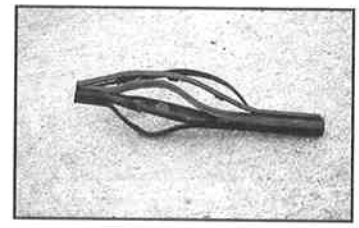


(b)

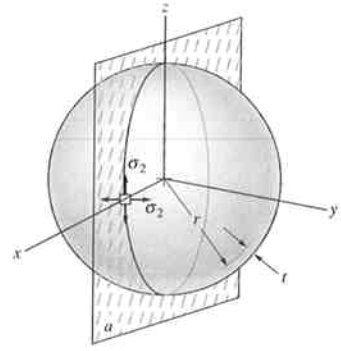


(c)

Figura 8.1

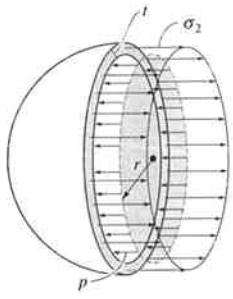


Vemos aqui o cano de uma espingarda que se entupiu com detritos antes do disparo. A pressão do gás da carga aumentou a tensão circunferencial do interior do cano, o que provocou a ruptura.



(a)

Figura 8.2



(b)

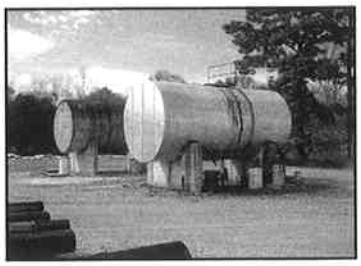
Figura 8.2

A análise apresentada indica que um elemento de material tirado tanto de um vaso de pressão cilíndrico como de um vaso de pressão esférico estará sujeito a uma ***tensão biaxial***, ou seja, uma tensão normal que atua em duas direções apenas. Na verdade, o material do vaso também estará sujeito a uma ***tensão radial***, σ_3, que atua ao longo de uma linha radial. Tal tensão tem valor máximo igual à pressão p na parede interior e decresce para zero através da parede na superfície externa do vaso, visto que a pressão manométrica ali é nula. Entretanto, para vasos de parede fina, vamos *ignorar* o componente radial da tensão, uma vez que nossa hipótese limitante $r/t = 10$ resulta em σ_2 e σ_1, as quais são, respectivamente, cinco e dez vezes *maiores* que a tensão radial máxima, $(\sigma_3)_{máx} = p$. É necessário compreender, por fim, que as fórmulas anteriores devem ser usadas somente para vasos sujeitos a uma pressão manométrica interna. Se o vaso estiver sujeito a uma pressão externa, o esforço de compressão exercido sobre a parede fina poderá provocar instabilidade no vaso, e o colapso poderá ocorrer por instabilidade da estrutura.

EXEMPLO 8.1

Um vaso de pressão cilíndrico tem diâmetro interno de 4 pés e espessura de $\frac{1}{2}$ pol. Determinar a pressão interna máxima que ele pode suportar de forma que tanto a componente da tensão circunferencial como a da longitudinal não excedam 20 ksi. Sob as mesmas condições, qual pressão interna máxima um vaso esférico de tamanho semelhante suporta?

SOLUÇÃO



Vaso de Pressão Cilíndrico. A tensão máxima ocorre no sentido da circunferência. Pela Equação 8.1, temos:

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t}; \qquad 20 \text{ kip/pol}^2 = \frac{p(24 \text{ pol})}{\frac{1}{2} \text{ pol}}$$

$$p = 417 \text{ psi} \qquad \textit{Resposta}$$

Observe que, quando essa pressão for atingida (Equação 8.2), a tensão no sentido longitudinal será $\sigma_2 = \frac{1}{2}(20 \text{ ksi}) = 10 \text{ ksi}$. Além disso, a *tensão máxima* na *direção radial* ocorre na parede interna do vaso e é $(\sigma_3)_{máx} = p = 417$ psi. Esse valor é 48 vezes menor que o da tensão circunferencial (20 ksi) e, como mencionamos anteriormente, seu efeito é desprezível.

Vaso Esférico. Neste caso, a tensão máxima ocorre em qualquer das duas direções perpendiculares em um elemento do vaso (Figura 8.2*a*). Pela Equação 8.3, temos:

$$\sigma_2 = \frac{pr}{2t}; \qquad 20 \text{ kip/pol}^2 = \frac{p(24 \text{ pol})}{2(\frac{1}{2} \text{ pol})}$$

$$p = 833 \text{ psi} \qquad \textit{Resposta}$$

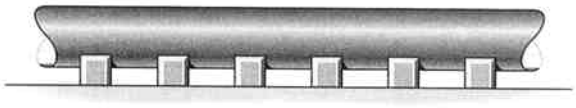
Apesar de mais difícil de fabricar, o vaso de pressão esférico suporta duas vezes mais pressão que o cilíndrico.

PROBLEMAS

8.1. Um reservatório de gás esférico tem diâmetro interno $r = 1{,}5$ m. Se for submetido a uma pressão interna $p = 300$ kPa, qual espessura deverá ter para que a tensão normal máxima não exceda 12 MPa?

8.2. O tubo de cloreto de polivinil de extremidades abertas tem diâmetro interno de 4 pol e espessura de 0,2 pol. Se transporta água corrente com pressão de 60 psi, qual o estado de pressão em suas paredes?

8.3. Se o fluxo de água no tubo do Problema 8.2 parar devido ao fechamento de uma válvula, como ficará o estado de pressão nas paredes. Desprezar o peso da água e supor que os apoios exercem apenas forças verticais sobre o tubo.

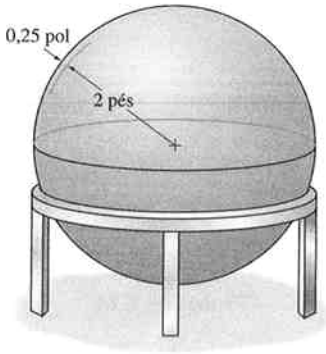


Problemas 8.2/8.3

***8.4.** O tubo de extremidades abertas tem espessura da parede de 2 mm e diâmetro interno de 40 mm. Calcular a pressão que o gelo exerceu sobre a parede interna a ponto de provocar a ruptura mostrada. A tensão máxima que o material suporta na temperatura de congelamento é $\sigma_{máx} = 360$ MPa. Mostrar a tensão que atua em um pequeno elemento do material imediatamente antes que o tubo falhe.

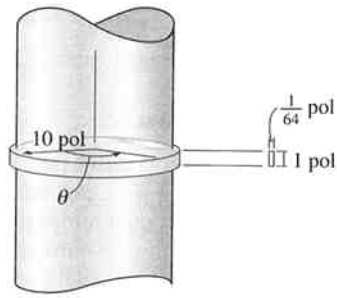
Problema 8.4

8.5. Dentro dos dois hemisférios acoplados de raio interno de 2 pés e espessura da parede de 0,25 pol, a pressão manométrica interna cai para -10 psi. Supondo que o coeficiente de atrito estático entre eles seja $\mu_e = 0{,}5$, determinar (*a*) o torque T necessário para iniciar o giro do hemisfério superior em relação ao inferior, (*b*) a força vertical necessária para separar o hemisfério superior do inferior e (*c*) a força horizontal necessária para deslizar o hemisfério superior sobre o inferior.



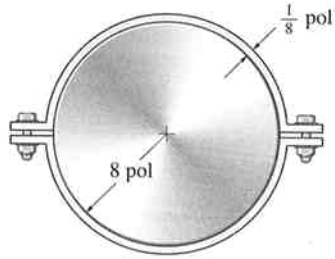
Problema 8.5

8.6. A princípio, a cinta de aço inoxidável 304 está ajustada firmemente ao redor do cilindro rígido liso. Supondo que ela sofra uma queda de temperatura não-linear de $\Delta T = 20 \text{ sen}^2 \theta$ °F, onde θ é dado em radianos, determinar a tensão na circunferência da cinta.



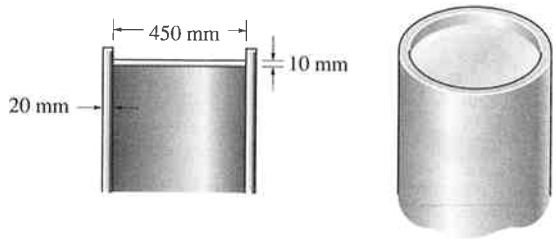
Problema 8.6

8.7. Uma cinta de aço A-36 tem 2 pol de largura e está presa ao redor de um cilindro rígido liso. Supondo que os parafusos sejam apertados de modo que a tensão sobre eles chegue a 400 lb, determinar a tensão normal sobre a cinta, a pressão exercida sobre o cilindro e a distância que metade da cinta estica.



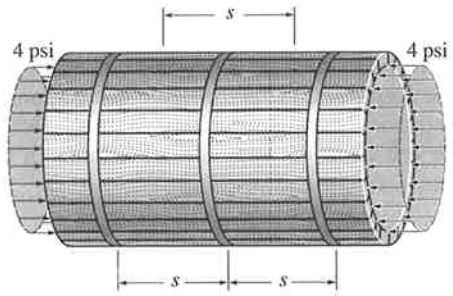
Problema 8.7

***8.8.** Fecha-se o vaso de pressão colando uma chapa circular na extremidade como mostrado. Supondo que o vaso suporte uma pressão interna de 450 kPa, determinar a tensão de cisalhamento média na cola e o estado de tensão na parede.



Problema 8.8

8.9. Um tubo de madeira com diâmetro interno de 3 pés é atado por aros de aço com área da seção transversal de 0,2 pol^2. Supondo que a tensão admissível nos aros seja $\sigma_{adm} = 12$ ksi, determinar o espaço s máximo entre eles, ao longo da seção do tubo, de modo que este resista a uma pressão manométrica interna de 4 psi. Admitir que cada aro suporta a pressão que atua ao longo do comprimento s do tubo.

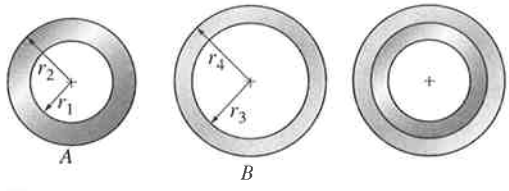


Problema 8.9

8.10. O aro de aço A-36 tem diâmetro interno de 23,99 pol, espessura de 0,25 pol e largura de 1 pol. Se ele e o cilindro rígido de 24 pol estão a 65° F, a qual temperatura o aro deve ser aquecido para que apenas deslize sobre o cilindro? Qual pressão ele exerce sobre o cilindro e qual o esforço de tração nele desenvolvido quando sua temperatura volta a 65° F?

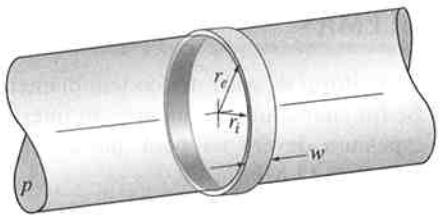
Problema 8.10

8.11. O anel interno A tem raio interno r_1 e raio externo r_2. Antes de aquecido, o anel externo B tem raio interno r_3 e raio externo r_4, sendo $r_2 > r_3$. Se o anel externo for aquecido e então montado sobre o interno, qual será a pressão entre eles quando a temperatura do anel B atingir a do anel interno? O material tem módulo de elasticidade E e coeficiente de dilatação térmica α.



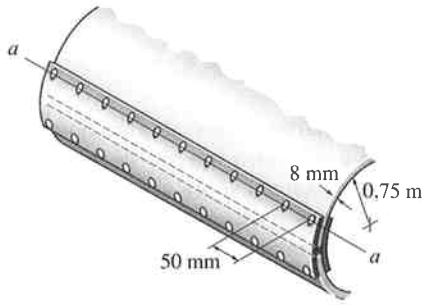
Problema 8.11

***8.12.** O anel com as dimensões mostradas é colocado sobre uma membrana flexível bombeada com uma pressão p. Determinar a mudança no raio interno do anel depois que a pressão for aplicada. O módulo de elasticidade do anel é E.



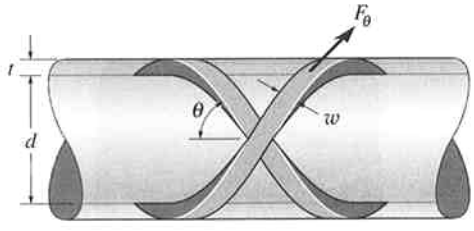
Problema 8.12

8.13. A caldeira está composta por chapas de aço de 8 mm presas em suas extremidades por uma junta de topo, que consiste em duas chapas de cobertura de 8 mm e rebites de 10 mm de diâmetro distantes 50 mm um do outro, como mostrado. Supondo que a pressão do vapor na caldeira seja de 1,35 MPa, determinar (*a*) a tensão circunferencial na chapa da caldeira separada da costura, (*b*) a tensão circunferencial na chapa de cobertura externa ao longo da linha de rebites *a–a* e (*c*) a tensão de cisalhamento nos rebites.



Problema 8.13

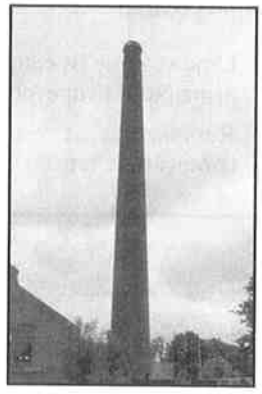
8.14. Um vaso de pressão fechado na extremidade é fabricado com filamentos de fibras de vidro enrolados de forma reticulada em um mandril, de modo que a espessura da parede do vaso t seja composta inteiramente do filamento e do aglutinante de epóxi como mostrado. Consideremos um segmento do vaso de largura w enrolado em um ângulo θ. Supondo que o vaso esteja sujeito a uma pressão interna p, mostrar que a força no segmento é $F_\theta = \sigma_0 wt$, onde σ_0 é a tensão nos filamentos. Mostrar também que as tensões nas direções circunferencial e longitudinal são $\sigma_e = \sigma_0 \operatorname{sen}^2\theta$ e $\sigma_l = \sigma_0 \cos^2\theta$, respectivamente. Com que ângulo θ (ângulo ótimo de enrolamento) os filamentos devem ser enrolados de modo que as tensões nas direções circunferencial e longitudinal sejam equivalentes?



Problema 8.14

8.2 ESTADO DE TENSÃO PROVOCADO POR CARGAS COMBINADAS

Nos capítulos anteriores desenvolvemos métodos para determinar as distribuições de tensão em elementos sujeitos a uma força axial interna, uma força cortante, um momento fletor ou um momento de torção. Mais freqüentemente, no entanto, a seção transversal de um elemento está sujeita a vários tipos de carregamento *simultaneamente* e, como resultado, o método de superposição, se aplicável, é usado para determinar a distribuição de tensão *resultante* provocada pelas cargas. Na aplicação, primeiro se determina a distribuição de tensão devida a *cada carga* e, depois, superpõem-se essas distribuições para determinar a distribuição de tensão resultante. Como mencionamos na Seção 4.3, o princípio da superposição é usado para essa finalidade desde que exista uma *relação linear* entre as *tensões* e as *cargas*. A geometria do elemento também *não* deve sofrer *mudança significativa* quando as cargas são aplicadas. Essa condição é necessária a fim de assegurar que a tensão produzida por uma carga não seja relacionada à tensão produzida por qualquer outra carga. A discussão vai se limitar à satisfação desses dois critérios.



Esta chaminé suporta as cargas combinadas de vento e peso. É importante investigar o esforço de tração, visto que a alvenaria resiste pouco a ele.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

O seguinte procedimento fornece a maneira geral de estabelecer os componentes de tensão normal e cisalhamento em determinado ponto do elemento quando este está submetido a vários tipos diferentes de cargas simultaneamente. Supõe-se que o material seja homogêneo e comporte-se de maneira linear-elástica. Além do mais, o princípio de Saint-Venant requer que o ponto em que a tensão seja determinada esteja afastado de quaisquer descontinuidades na seção transversal ou nos pontos de aplicação da carga.

Carga Interna.

- Secionar o elemento na perpendicular ao seu eixo, no ponto em que a tensão deva ser determinada, e obter os componentes da força normal e da força cortante resultantes, bem como os componentes dos momentos fletor e de torção.
- Os componentes da força devem atuar através do *centróide* da seção transversal e os componentes do momento devem ser calculados em torno dos *eixos do centróide*, que representam os eixos principais de inércia da seção transversal.

Tensão Normal Média.

- Calcular o componente da tensão associado a *cada* carga interna. Em cada caso, representar o efeito como uma distribuição de tensão que atua sobre toda a área da seção transversal ou mostrar a tensão em um elemento do material localizado em um ponto específico da seção transversal.

FORÇA NORMAL. A força normal interna é desenvolvida por uma distribuição uniforme da tensão normal determinada por $\sigma = P/A$.

FORÇA CORTANTE. A força cortante em um elemento submetido a flexão é desenvolvida por uma distribuição da tensão de cisalhamento determinada pela fórmula do cisalhamento, $\tau = VQ/It$. Entretanto, deve-se ter cuidado especial ao aplicar essa equação, como observado na Seção 7.3.

MOMENTO FLETOR. Em *elementos retos*, o momento fletor interno é desenvolvido por uma distribuição da tensão normal que varia linearmente de zero no eixo neutro até o máximo no limite externo do elemento. A distribuição de tensão é determinada pela fórmula da flexão, $\sigma = -My/I$. Se o elemento for *curvo*, a distribuição de tensão não é linear e determina-se por $\sigma = My/[Ae(R - y)]$.

MOMENTO DE TORÇÃO. Em eixos circulares e tubos, o momento de torção interno é desenvolvido por uma distribuição da tensão de cisalhamento que varia linearmente da linha de centro do eixo até o máximo no limite externo do eixo. A distribuição da tensão de cisalhamento é determinada pela fórmula da torção, $\tau = T\rho/J$. Se o elemento for um tubo de parede fina fechado, usar $\tau = T/2A_m t$.

VASOS DE PRESSÃO COM PAREDES FINAS. Se o vaso for um cilindro de parede fina, a pressão interna p provocará um estado de tensão biaxial no material tal que o componente da tensão circunferencial será $\sigma_1 = pr/t$ e o componente longitudinal da tensão, $\sigma_2 = pr/2t$. Se o vaso for uma esfera de parede fina, o estado de tensão biaxial será representado por dois componentes equivalentes, cada um com intensidade $\sigma_2 = pr/2t$.

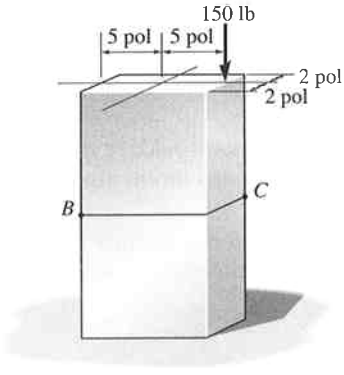
(Continuação)

Superposição.

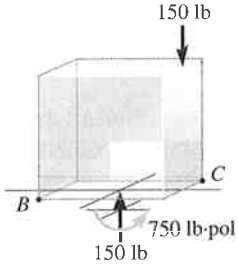
- Uma vez que os componentes da tensão normal e de cisalhamento de cada carga tenham sido calculados, usar o princípio da superposição para determinar os componentes resultantes das tensões normal e de cisalhamento.
- Representar os resultados em um elemento do material localizado no ponto ou mostrá-los como uma distribuição de tensão atuando sobre a área da seção transversal do elemento.

Os problemas desta seção, que envolvem cargas combinadas, servem como *revisão* básica de várias equações das importantes tensões mencionadas anteriormente. Uma compreensão profunda de como essas equações são aplicadas, como indicado nos capítulos anteriores, é necessária para resolver com sucesso os problemas no fim desta seção. Os exemplos a seguir devem ser estudados cuidadosamente antes de se prosseguir para a resolução dos problemas.

EXEMPLO 8.2



(a)



(b)

Figura 8.3

Uma força de 150 lb é aplicada na borda do elemento mostrado na Figura 8.3*a*. Desprezar o peso do elemento e determinar o estado de tensão nos pontos *B* e *C*.

SOLUÇÃO

Cargas Internas. O elemento foi secionado através de *B* e *C*. Para o equilíbrio da seção deve haver uma força axial de 150 lb atuando através do centróide e um momento fletor de 750 lb · pol em torno do eixo do centróide ou eixo principal (Figura 8.3*b*).

Componentes da Tensão.

FORÇA NORMAL. A distribuição uniforme da tensão normal devida à força normal é mostrada na Figura 8.3*c*. Neste caso:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{150 \text{ lb}}{(10 \text{ pol})(4 \text{ pol})} = 3{,}75 \text{ psi}$$

MOMENTO FLETOR. A distribuição da tensão normal devida ao momento fletor é mostrada na Figura 8.3*d*. A tensão máxima é:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I} = \frac{750 \text{ lb} \cdot \text{pol}(5 \text{ pol})}{[\frac{1}{12}(4 \text{ pol})(10 \text{ pol})^3]} = 11{,}25 \text{ psi}$$

Superposição. Se as distribuições da tensão normal forem somadas algebricamente, a distribuição de tensão resultante será como a mostrada na Figura 8.3*e*. Apesar de não ser requerida nesse caso, a localização da reta de tensão nula é determinada pela proporção dos triângulos, ou seja:

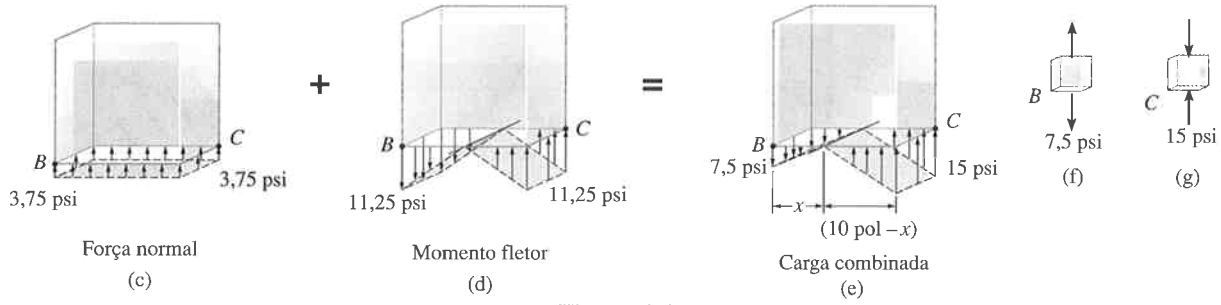
$$\frac{7{,}5 \text{ psi}}{x} = \frac{15 \text{ psi}}{(10 \text{ pol} - x)}$$

$$x = 3{,}33 \text{ pol}$$

Os elementos do material em B e C estão sujeitos a tensão normal ou *uniaxial*, como mostram as figuras 8.3*f* e 8.3*g*. Portanto:

$\sigma_B = 7{,}5$ psi (tração) ***Resposta***

$\sigma_C = 15$ psi (compressão) ***Resposta***

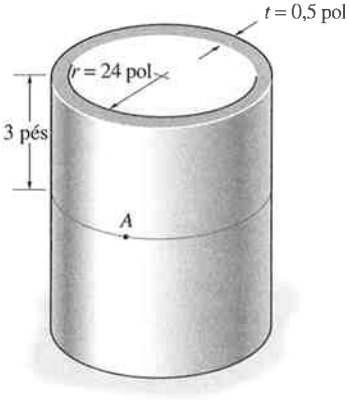


Força normal (c) | Momento fletor (d) | Carga combinada (e)

Figura 8.3

EXEMPLO 8.3

O reservatório da Figura 8.4*a* tem raio interno de 24 pol e espessura de 0,5 pol. Está cheio até o topo com água de peso específico $\gamma_{água} = 62{,}4$ lb/pé^3. Se o reservatório é aberto na parte superior e feito de aço com peso específico $\gamma_{aço} = 490$ lb/pé^3, qual o estado de tensão no ponto A.



(a)

SOLUÇÃO

Cargas Internas. O diagrama de corpo livre da seção tanto do reservatório quanto da água acima do ponto A é mostrado na Figura 8.4*b*. Observar que o peso da água é suportado pela superfície dela imediatamente *abaixo* da seção e *não* pelas paredes do reservatório. As paredes simplesmente apóiam o peso do reservatório na direção vertical. Esse peso é:

$$W_{aço} = \gamma_{aço} V_{aço} = (490 \text{ lb/pé}^3)\left[\pi\left(\frac{24{,}5}{12} \text{ pés}\right)^2 - \pi\left(\frac{24}{12} \text{ pés}\right)^2\right](3 \text{ pés}) = 777{,}7 \text{ lb}$$

A tensão no sentido circunferencial é desenvolvida pela pressão da água no nível A. Para obter essa pressão, usa-se a *lei de Pascal*, segundo a qual a pressão em um ponto localizado a uma profundidade z da água é $p = \gamma_{água} z$. Conseqüentemente, a pressão no nível A do reservatório é:

$$p = \gamma_{água} z = (62{,}4 \text{ lb/pé}^3)(3 \text{ pés}) = 187{,}2 \text{ lb/pé}^2 = 1{,}30 \text{ psi}$$

Componentes da Tensão.

TENSÃO CIRCUNFERENCIAL. Aplicando a Equação 8.1, com o raio interno $r = 24$ pol, temos:

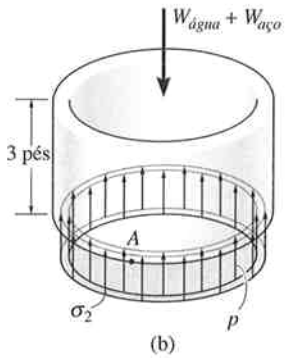
$$\sigma_1 = \frac{pr}{t} = \frac{1{,}30 \text{ lb/pol}^2 \text{ (24 pol)}}{(0{,}5 \text{ pol})} = 62{,}4 \text{ psi} \qquad \textit{Resposta}$$

TENSÃO LONGITUDINAL. Como o peso do reservatório é suportado uniformemente pelas paredes, temos:

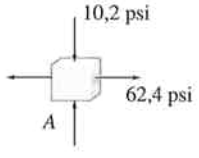
$$\sigma_2 = \frac{W_{aço}}{A_{aço}} = \frac{777{,}7 \text{ lb}}{\pi[(24{,}5 \text{ pol})^2 - (24 \text{ pol})^2]} = 10{,}2 \text{ psi} \qquad \textit{Resposta}$$

Observar que a Equação 8.2, $\sigma_2 = pr/2t$, *não se aplica* neste caso, uma vez que o reservatório é aberto na parte superior e, como dissemos anteriormente, a água não desenvolve carga sobre as paredes no sentido longitudinal.

O ponto A está, portanto, sujeito à tensão biaxial mostrada na Figura 8.4*c*.



(b)

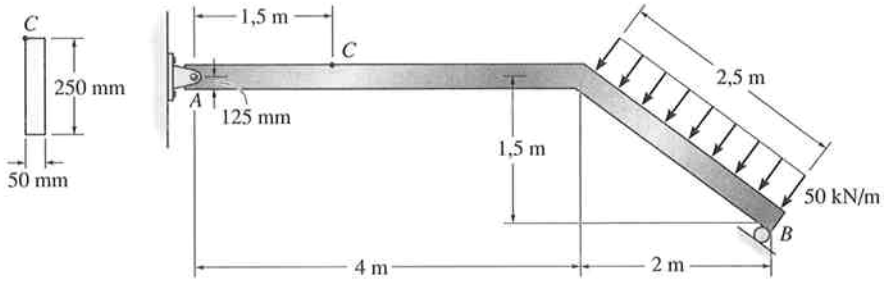


(c)

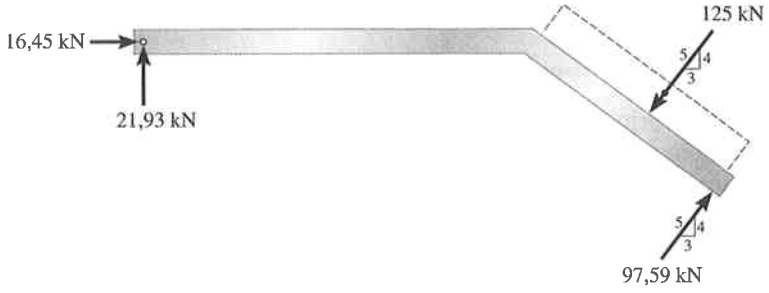
Figura 8.4

EXEMPLO 8.4

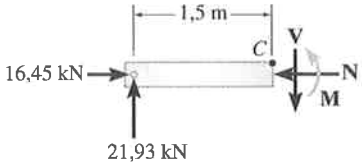
O elemento mostrado na Figura 8.5*a* tem seção transversal retangular. Determinar o estado de tensão que a carga produz no ponto *C*.



(a)



(b)

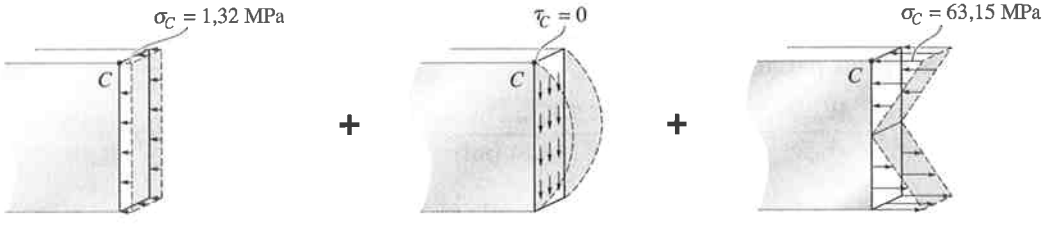


(c)

SOLUÇÃO

Cargas Internas. As reações de apoio no elemento foram determinadas e são mostradas na Figura 8.5*b*. Se considerarmos o segmento esquerdo do membro *AC* (Figura 8.5*c*), a resultante das cargas internas na seção consistirá em uma força normal, uma força cortante e um momento fletor. Resolvendo:

$$N = 16{,}45 \text{ kN} \qquad V = 21{,}93 \text{ kN} \qquad M = 32{,}89 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



Força normal (d) | Força cortante (e) | Momento fletor (f)

Figura 8.5

Componentes da Tensão.

FORÇA NORMAL. A distribuição uniforme da tensão normal que atua sobre a seção transversal é produzida pela força normal (Figura 8.5*d*). No ponto *C*:

$$\sigma_C = \frac{P}{A} = \frac{16{,}45 \text{ kN}}{(0{,}050 \text{ m})(0{,}250 \text{ m})} = 1{,}32 \text{ MPa}$$

FORÇA CORTANTE. Neste caso a área $A' = 0$, uma vez que o ponto *C* está localizado no topo do elemento. Então, $Q = \bar{y}'A' = 0$ e, para *C* (Figura 8.5*e*), a tensão de cisalhamento é:

$$\tau_C = 0$$

MOMENTO FLETOR. O ponto *C* está localizado a $y = c = 125$ mm do eixo neutro, de modo que a tensão normal em *C* (Figura 8.5*f*) é:

$$\sigma_C = \frac{Mc}{I} = \frac{(32{,}89 \text{ kN} \cdot \text{m})(0{,}125 \text{ m})}{[\frac{1}{12}(0{,}050 \text{ m})(0{,}250)^3]} = 63{,}15 \text{ MPa}$$

Superposição. A tensão de cisalhamento é nula. A soma das tensões normais determinadas anteriormente resulta em um esforço de compressão em *C* com valor de:

$$\sigma_C = 1{,}32 \text{ MPa} + 63{,}15 \text{ MPa} = 64{,}5 \text{ MPa} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

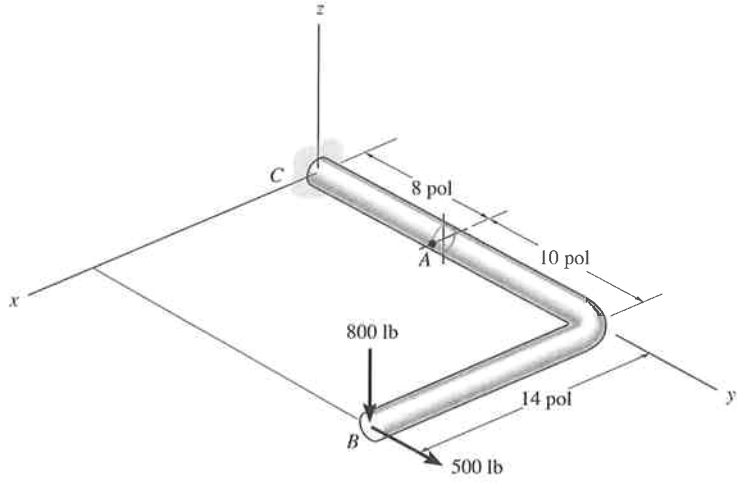
Esse resultado é mostrado na Figura 8.5*g* atuando sobre um elemento em *C*.

(g)

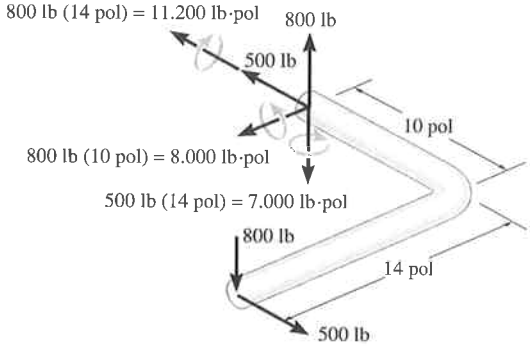
Figura 8.5

EXEMPLO 8.5

A haste maciça mostrada na Figura 8.6*a* tem raio de 0,75 pol. Se for submetida ao carregamento mostrado, qual será o estado de tensão no ponto *A*?



(a)

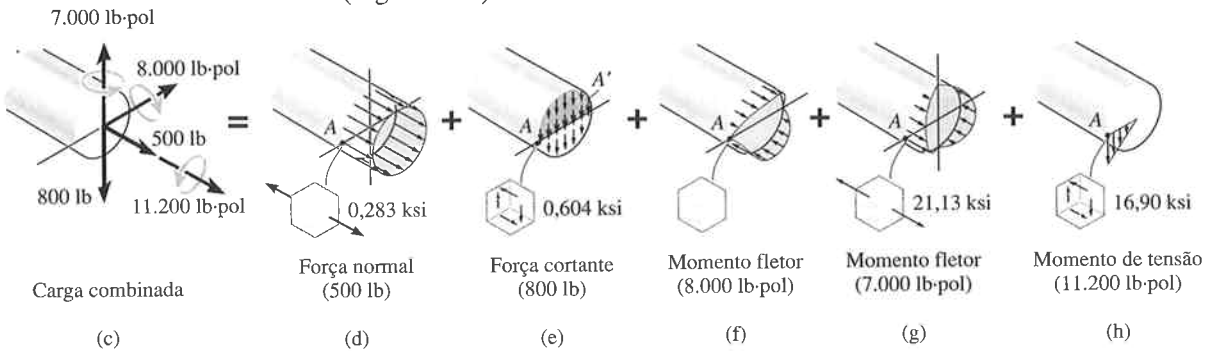


(b)

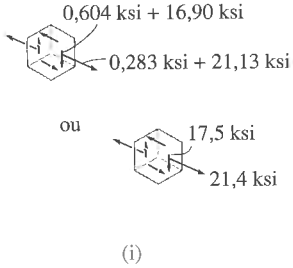
Figura 8.6

SOLUÇÃO

Cargas Internas. A haste foi secionada no ponto A. Usando o diagrama de corpo livre do segmento AB (Figura 8.6*b*), determina-se a resultante das cargas internas de seis equações de equilíbrio. Verificar esses resultados. A força normal (500 lb) e a força cortante (800 lb) atuam através do centróide da seção transversal, ao passo que os componentes do momento fletor (8.000 lb · pol e 7.000 lb · pol) são aplicados em torno dos eixos do centróide (principais). Para 'visualizar' melhor as distribuições de tensão devidas a cada uma dessas cargas, consideraremos as *resultantes iguais, porém opostas* que atuam sobre AC (Figura 8.6*c*).



Carga combinada (c) | Força normal (500 lb) (d) | Força cortante (800 lb) (e) | Momento fletor (8.000 lb·pol) (f) | Momento fletor (7.000 lb·pol) (g) | Momento de tensão (11.200 lb·pol) (h)



(i)

Figura 8.6

Componentes da Tensão.

FORÇA NORMAL. A distribuição da tensão normal é mostrada na Figura 8.6*d*. Para o ponto A, temos:

$$\sigma_A = \frac{P}{A} = \frac{500 \text{ lb}}{\pi(0{,}75 \text{ pol})^2} = 283 \text{ psi} = 0{,}283 \text{ ksi}$$

FORÇA CORTANTE. A distribuição da tensão de cisalhamento é mostrada na Figura 8.6*e*. Para o ponto A, Q é determinada pela área *semicircular* sombreada. Usando a tabela no final do livro, temos:

$$Q = \bar{y}'A' = \frac{4(0{,}75 \text{ pol})}{3\pi}\left[\frac{1}{2}\pi\left(0{,}75 \text{ pol}\right)^2\right] = 0{,}2813 \text{ pol}^3$$

de modo que:

$$\tau_A = \frac{VQ}{It} = \frac{800 \text{ lb}(0{,}2813 \text{ pol}^3)}{[\frac{1}{4}\pi(0{,}75 \text{ pol})^4]2(0{,}75 \text{ pol})} = 604 \text{ psi} = 0{,}604 \text{ ksi}$$

MOMENTOS FLETORES. Para o componente de 8.000 lb · pol, o ponto A localiza-se no eixo neutro (Figura 8.6*f*), de modo que a tensão normal é:

$$\sigma_A = 0$$

Para o momento de 7.000 lb · pol, $c = 0{,}75$ pol, de modo que a tensão normal no ponto A (Figura 8.6*g*) é:

$$\sigma_A = \frac{Mc}{I} = \frac{7.000 \text{ lb} \cdot \text{pol}(0.75 \text{ pol})}{[\frac{1}{4}\pi(0{,}75 \text{ pol})^4]} = 21.126 \text{ psi} = 21{,}13 \text{ ksi}$$

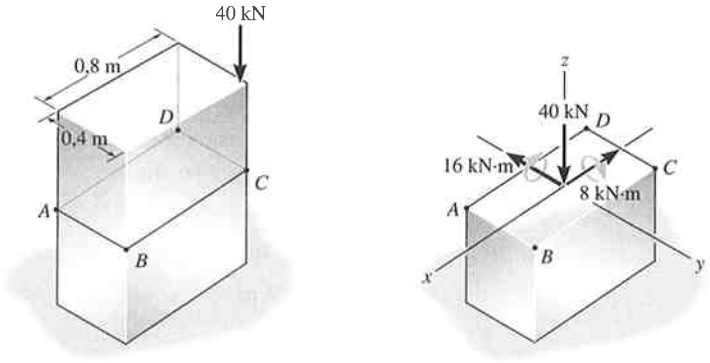
MOMENTO DE TORÇÃO. No ponto A, $\rho_A = c = 0{,}75$ pol (Figura 8.6*h*). Então a tensão de cisalhamento é:

$$\tau_A = \frac{Tc}{J} = \frac{11.200 \text{ lb} \cdot \text{pol}(0{,}75 \text{ pol})}{[\frac{1}{2}\pi(0{,}75 \text{ pol})^4]} = 16.901 \text{ psi} = 16{,}90 \text{ ksi}$$

Superposição. Quando os resultados apresentados anteriormente são superpostos, vê-se que um elemento do material em A está sujeito aos componentes da tensão normal e de cisalhamento (Figura 8.6*i*).

EXEMPLO 8.6

O bloco retangular de peso desprezível da Figura 8.7*a* está sujeito a uma força vertical de 40 kN, aplicada em seu canto. Determinar a distribuição da tensão normal que atua sobre a seção *ABCD*.



(a) (b)

SOLUÇÃO

Cargas Internas. Se considerarmos o equilíbrio do segmento inferior do bloco (Figura 8.7*b*), veremos que a força de 40 kN atua através do centróide da seção transversal e *dois* componentes do momento fletor atuam em torno dos eixos do centróide ou eixos principais de inércia da seção. Confirmar esses resultados.

Componentes da Tensão.

FORÇA NORMAL. A distribuição uniforme da tensão normal é mostrada na Figura 8.7*c*. Temos:

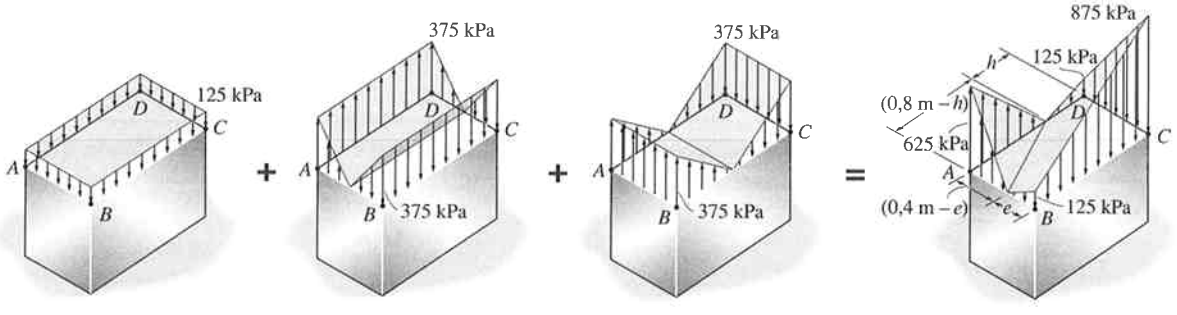
$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{40 \text{ kN}}{(0{,}8 \text{ m})(0{,}4 \text{ m})} = 125 \text{ kPa}$$

MOMENTOS FLETORES. A distribuição da tensão normal para o momento 8 kN · m é mostrada na Figura 8.7*d*. A tensão máxima é:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_x c_y}{I_x} = \frac{8 \text{ kN} \cdot \text{m}(0{,}2 \text{ m})}{[\frac{1}{12}(0{,}8 \text{ m})(0{,}4 \text{ m})^3]} = 375 \text{ kPa}$$

Da mesma maneira, para o momento 16 kN · m (Figura 8.7*e*), a tensão normal máxima é:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_y c_x}{I_y} = \frac{16 \text{ kN} \cdot \text{m}(0{,}4 \text{ m})}{[\frac{1}{12}(0{,}8 \text{ m})(0{,}4 \text{ m})^3]} = 375 \text{ kPa}$$



Força normal (40 kN) (c) | Momento fletor (8 kN·m) (d) | Momento fletor (16 kN·m) (e) | Carga combinada (f)

Figura 8.7

Superposição. A tensão normal em cada ponto do canto é determinada por adição algébrica. Admitindo que o esforço de tração seja positivo, temos:

$$\sigma_A = -125 \text{ kPa} + 375 \text{ kPa} + 375 \text{ kPa} = 625 \text{ kPa}$$
$$\sigma_B = -125 \text{ kPa} - 375 \text{ kPa} + 375 \text{ kPa} = -125 \text{ kPa}$$
$$\sigma_C = -125 \text{ kPa} - 375 \text{ kPa} - 375 \text{ kPa} = -875 \text{ kPa}$$
$$\sigma_D = -125 \text{ kPa} + 375 \text{ kPa} - 375 \text{ kPa} = -125 \text{ kPa}$$

Como as distribuições de tensão devidas ao momento fletor são lineares, a distribuição de tensão resultante também é linear e, portanto, tem a aparência mostrada na Figura 8.7*f*. Localiza-se a linha de tensão nula ao longo de cada lado por proporção de triângulos. Pela figura, requer-se que:

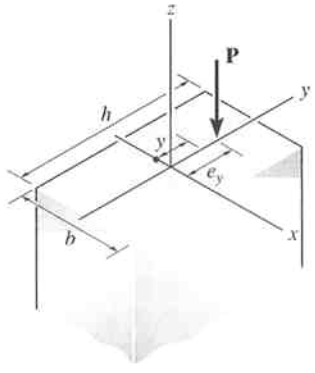
$$\frac{(0{,}4 \text{ m} - e)}{625 \text{ kPa}} = \frac{e}{125 \text{ kPa}}$$
$$e = 0{,}0667 \text{ m}$$

e

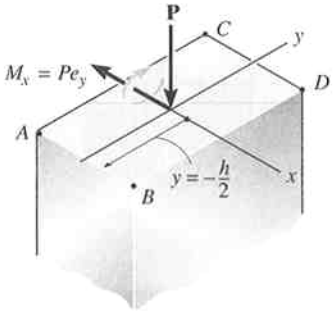
$$\frac{(0{,}8 \text{ m} - h)}{625 \text{ kPa}} = \frac{h}{125 \text{ kPa}}$$
$$h = 0{,}133 \text{ m}$$

EXEMPLO 8.7

Um bloco retangular tem peso desprezível e está submetido a uma força vertical **P** (Figura 8.8*a*). (*a*) Determinar a faixa de valores da excentricidade e_y da carga ao longo do eixo *y* de modo que não provoque qualquer esforço de tração no bloco. (*b*) Especificar a região da seção transversal em que **P** pode ser aplicada sem provocar esforço de tração no bloco.



(a)



(b)

Figura 8.8

SOLUÇÃO

Parte (a). Quando **P** desloca-se para o centróide da seção transversal (Figura 8.8*b*), é preciso adicionar um conjugado $M_x = Pe_y$ a fim de manter uma carga estaticamente equivalente. A tensão normal combinada em qualquer localização coordenada *y* na seção transversal provocada por essas duas cargas é:

$$\sigma = -\frac{P}{A} - \frac{(Pe_y)y}{I_x} = -\frac{P}{A}\left(1 + \frac{Ae_y y}{I_x}\right)$$

Aqui, o sinal negativo indica esforço de compressão. Para e_y positivo (Figura 8.8*a*), o *menor* esforço de compressão ocorre ao longo da borda *AB*, onde $y = -h/2$ (Figura 8.8*b*). (Por inspeção, vê-se que **P** provoca compressão, mas $\mathbf{M}_x$ provoca tração.) Então:

$$\sigma_{\text{mín}} = -\frac{P}{A}\left(1 - \frac{Ae_y h}{2I_x}\right)$$

Tal esforço permanece negativo, isto é, de compressão, desde que o termo entre parênteses seja positivo; ou seja:

$$1 > \frac{Ae_y h}{2I_x}$$

Como $A = bh$ e $I_x = \frac{1}{12}bh^3$, então

$$1 > \frac{6e_y}{h}$$

ou:

$$e_y < \frac{1}{6}h \qquad \textit{Resposta}$$

Em outras palavras, se $-\frac{1}{6}h \leq e_y \leq \frac{1}{6}h$, a tensão sobre o bloco ao longo da borda AB ou CD é nula ou permanece *compressiva*. Algumas vezes essa condição é denominada '*regra do terço médio*'. É muito importante tê-la em mente ao carregar colunas ou arcos de seção transversal retangular feitos de materiais como pedra ou concreto, que suportam pouco ou nenhum esforço de tração.

Parte (b). Podemos estender a análise anterior em duas direções supondo que **P** atua no quadrante positivo do plano $x-y$ (Figura 8.8*c*). A carga estática equivalente quando **P** atua sobre o centróide é mostrada na Figura 8.8*d*. Em qualquer ponto x,y da seção transversal, a tensão normal combinada devida a carregamentos normal e de flexão é:

$$\sigma = -\frac{P}{A} - \frac{Pe_y y}{I_x} - \frac{Pe_x x}{I_y}$$

$$= -\frac{P}{A}\left(1 + \frac{Ae_y y}{I_x} + \frac{Ae_x x}{I_y}\right)$$

Ao analisar a Figura 8.8*d*, nota-se que, no ponto A, ambos os momentos criam esforço de tração e a força normal cria esforço de compressão. Logo, o menor esforço de compressão ocorrerá no ponto A, para o qual $x = -b/2$ e $y = -h/2$. Assim:

$$\sigma_A = -\frac{P}{A}\left(1 - \frac{Ae_y h}{2I_x} - \frac{Ae_x b}{2I_y}\right)$$

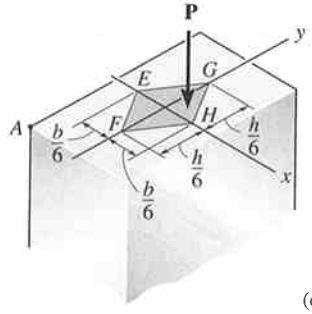
Como anteriormente, a tensão normal permanece negativa ou compressiva no ponto A, desde que os termos entre parênteses permaneçam positivos. Ou seja:

$$0 < \left(1 - \frac{Ae_y h}{2I_x} - \frac{Ae_x b}{2I_y}\right)$$

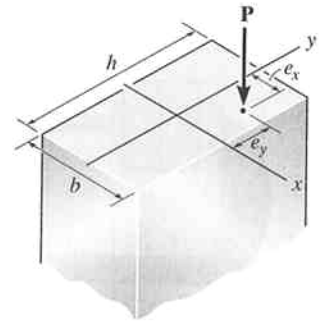
Substituindo $A = bh$, $I_x = \frac{1}{12}bh^3$, $I_y = \frac{1}{12}hb^3$, temos:

$$0 < 1 - \frac{6e_y}{h} - \frac{6e_x}{b} \qquad \textit{Resposta}$$

Portanto, independentemente de sua intensidade, se **P** for aplicada em qualquer ponto das vizinhanças da reta GH mostrada na Figura 8.8*e*, a tensão normal no ponto A permanecerá compressiva. De maneira semelhante, a tensão normal nos outros cantos da seção transversal será compressiva se **P** restringir-se às vizinhanças das retas EG, FE e HF. O paralelograma assim definido é denominado *núcleo* ou *kernel* da seção. Pela 'regra do terço médio' da parte (*a*), as diagonais do paralelograma terão comprimentos $b/3$ e $h/3$.

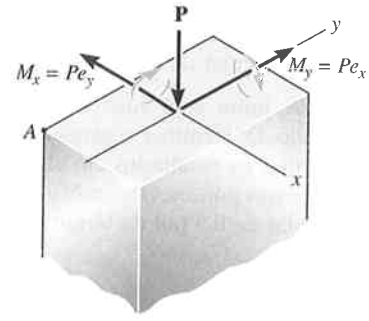


(e)



(c)

II



(d)

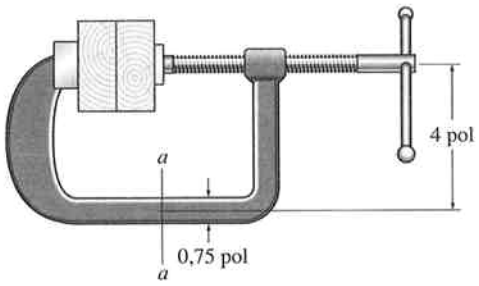
Figura 8.8

Exemplo de onde ocorre esforço combinado axial e de flexão.

PROBLEMAS

8.15. O fuso da prensa exerce uma força de compressão de 500 lb sobre os blocos de madeira. Determinar a tensão normal máxima desenvolvida ao longo da seção *a–a*. A seção transversal é retangular, de 0,75 pol por 0,50 pol.

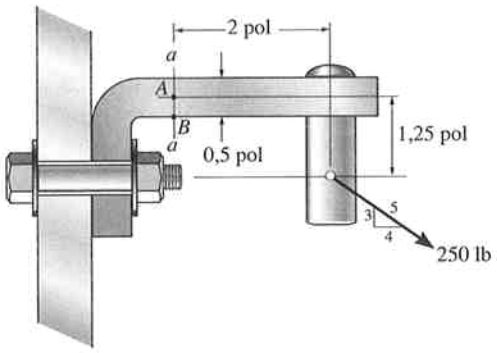
***8.16.** O fuso da prensa exerce uma força de compressão de 500 lb sobre os blocos de madeira. Desenhar a distribuição de tensão ao longo da seção *a–a*. A seção transversal é retangular, de 0,75 pol por 0,50 pol.



Problemas 8.15/8.16

8.17. A junta está sujeita a uma força de 250 lb como mostrado. Desenhar a distribuição da tensão normal que atua sobre a seção *a–a*, supondo que o elemento tenha seção transversal retangular de 0,5 pol de largura e 0,75 de espessura.

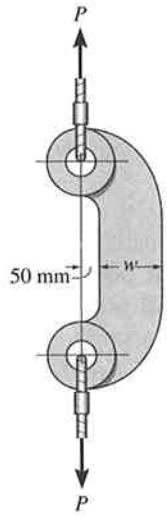
8.18. A junta está sujeita a uma força de 250 lb como mostrado. Determinar o estado de tensão nos pontos *A* e *B* e desenhar os resultados em elementos infinitesimais localizados nesses pontos. O membro tem área da seção transversal retangular de 0,5 pol de largura e 0,75 de espessura.



Problemas 8.17/8.18

8.19. O elo fora de centro suporta a carga $P = 30$ kN. Determinar qual largura w ele precisa ter, se a tensão normal admissível é $\sigma_{adm} = 73$ MPa. O elo tem espessura de 40 mm.

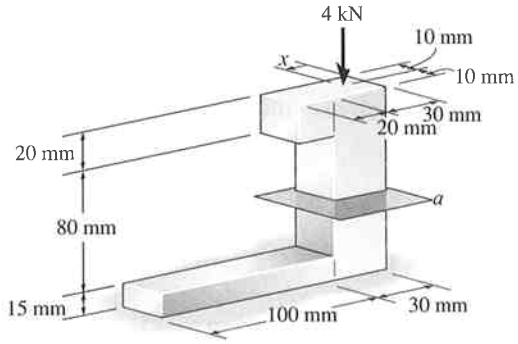
***8.20.** O elo fora de centro tem largura $w = 200$ mm e espessura de 40 mm. Se a tensão normal admissível for $\sigma_{adm} = 75$ MPa, qual carga máxima P poderá ser aplicada aos cabos?



Problemas 8.19/8.20

8.21. Determinar a tensão normal máxima e a mínima na seção *a* do suporte quando a carga for aplicada em $x = 0$.

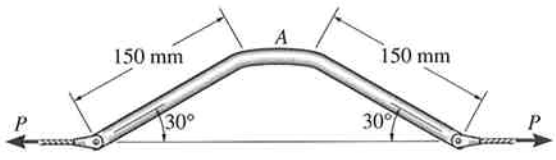
8.22. Determinar a tensão normal máxima e a mínima na seção *a* do suporte quando a carga for aplicada em $x = 50$ mm.



Problemas 8.21/8.22

8.23. O elo encurvado está sujeito à carga $P = 500$ N do cabo. Qual diâmetro d ele precisa ter se a tensão normal admissível é $\sigma_{adm} = 175$ MPa? Considerar que a seção crítica está em *A*.

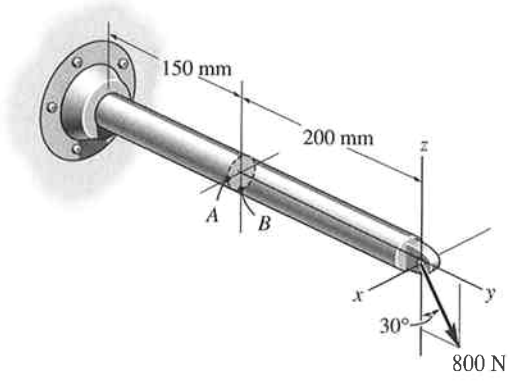
***8.24.** O elo encurvado tem diâmetro $d = 15$ mm e é feito de um material com tensão normal admissível $\sigma_{adm} = 175$ MPa. Determinar a carga máxima P que ele suportará com segurança. Considerar que a seção crítica está em *A*.



Problemas 8.23/8.24

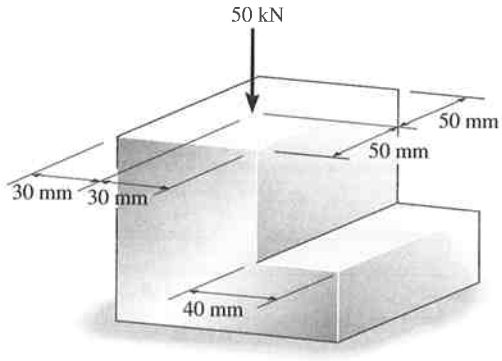
8.25. A barra tem diâmetro de 40 mm. Supondo que ela seja submetida a uma força de 800 N como mostrado, determinar os componentes da tensão que atuam sobre o ponto A e mostrar os resultados em um elemento de volume localizado nesse ponto.

8.26. Resolver o Problema 8.25 para o ponto B.



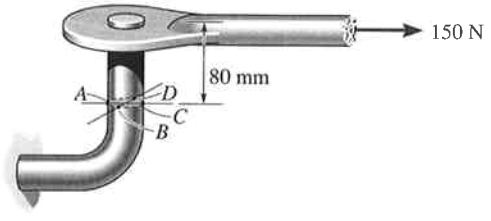
Problemas 8.25/8.26

8.27. O apoio em degrau está submetido à carga sobre o mancal de 50 kN. Determinar os esforços de compressão máximo e mínimo no material.



Problema 8.27

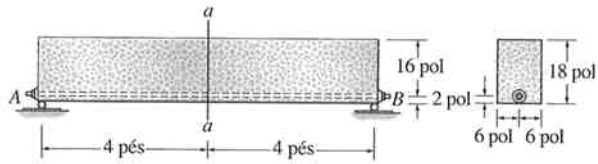
***8.28.** O pino de apoio consiste em uma haste de aço e tem diâmetro de 20 mm. Determinar os componentes da tensão nos pontos A e B e representar os resultados em um elemento de volume localizado em cada um desses pontos.



Problema 8.28

8.29. Como o concreto suporta pouca ou nenhuma tração, usam-se hastes ou barras para *protendê-lo* logo que ele se consolida. Consideremos a viga simplesmente apoiada abaixo, que tem seção transversal retangular de 18 pol por 12 pol. Supondo que o concreto tenha peso específico de 150 lb/pé^3, determinar qual tensão deve haver na haste AB, que se estende por toda a viga, para que não se desenvolva esforço de tração na seção central a–a. Desprezar o tamanho da haste e qualquer deflexão da viga.

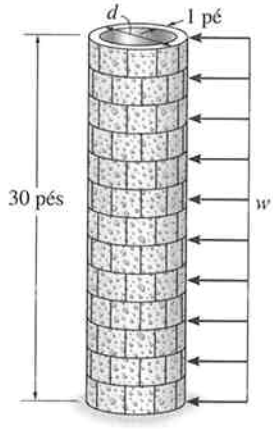
8.30. Resolver o Problema 8.29 supondo que a haste tenha diâmetro de 0,5 pol. Usar o método da área transformada discutido na Seção 6.6. $E_{aço} = 29(10^3)$ ksi, $E_c = 3{,}60(10^3)$ ksi.



Problemas 8.29/8.30

8.31. A chaminé está sujeita à carga de vento uniforme w = 150 lb/pé e tem peso de 2.200 lb/pé. Se a argamassa entre os tijolos não suporta esforço de tração, a chaminé é segura? Adotar d = 6 pés. A espessura da parede de tijolos é de 1 pé.

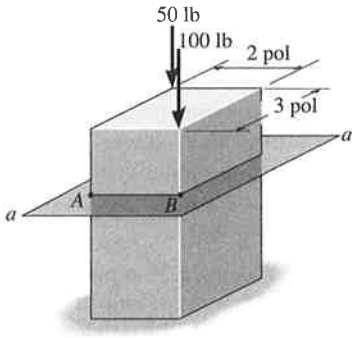
***8.32.** A chaminé está sujeita à pressão uniforme do vento p = 25 lb/pé^2. Deve ser construída com paredes de tijolos de 1 pé de espessura. Supondo que os tijolos e a argamassa tenham peso específico de 145 lb/pé^3, determinar o menor diâmetro externo da chaminé d de modo que não seja desenvolvido esforço de tração no material. A carga do vento é aproximada por $w = pd$.



Problemas 8.31/8.32

8.33. O bloco está submetido às duas cargas axiais mostradas. Determinar a tensão normal desenvolvida nos pontos A e B. Desprezar o peso do bloco.

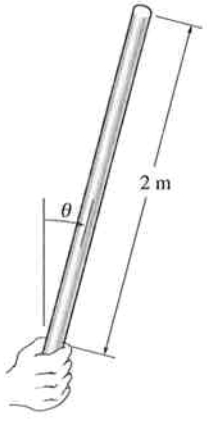
8.34. O bloco está submetido às duas cargas axiais mostradas. Desenhar a distribuição da tensão normal que atua sobre a seção transversal da seção a–a. Desprezar o peso do bloco.



Problemas 8.33/8.34

8.35. Uma barra de seção transversal de 30 mm por 30 mm e 2 m de comprimento é mantida em pé. Supondo que tenha massa de 5 kg/m, determinar o maior ângulo θ, medido a partir da vertical, a que ela pode ser segurada antes de sofrer um esforço de tração próximo ao ponto em que a mão a está prendendo.

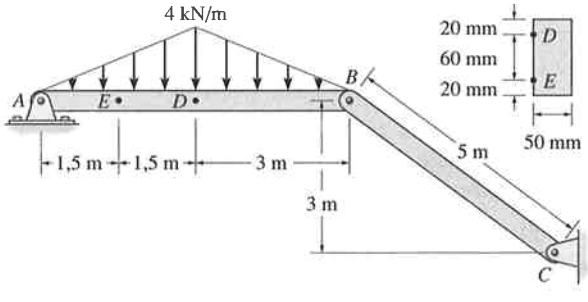
***8.36.** Resolver o Problema 8.35 supondo que a barra tenha seção transversal circular de 30 mm de diâmetro.



Problemas 8.35/8.36

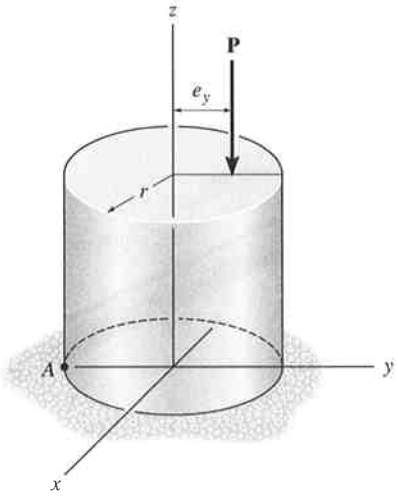
8.37. A estrutura suporta a carga distribuída mostrada. Determinar o estado de tensão que atua no ponto *D*. Mostrar os resultados em um elemento infinitesimal localizado naquele ponto.

8.38. A estrutura suporta a carga distribuída mostrada. Determinar o estado de tensão que atua no ponto *E*. Mostrar os resultados em um elemento infinitesimal localizado naquele ponto.



Problemas 8.37/8.38

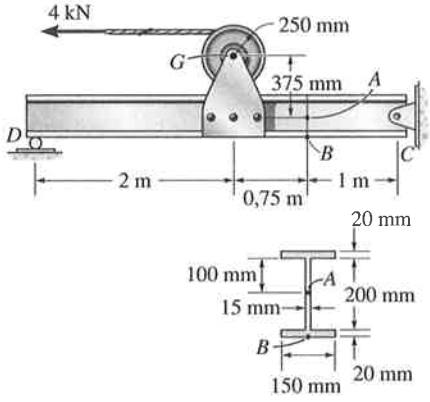
8.39. O cilindro de peso desprezível repousa em um piso liso. Determinar a distância excêntrica e_y em que a carga pode ser colocada de modo que a tensão normal no ponto *A* seja nula.



Problema 8.39

***8.40.** Determinar o estado de tensão no ponto *A* quando a viga está sujeita a uma força de 4 kN no cabo. Indicar o resultado como um elemento infinitesimal de volume.

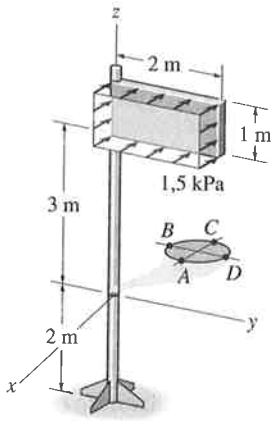
8.41. Determinar o estado de tensão no ponto *B* quando a viga está sujeita a uma força de 4 kN no cabo. Indicar o resultado como um elemento infinitesimal de volume.



Problemas 8.40/8.41

8.42. O sinal está submetido a uma carga uniforme de vento. Determinar os componentes da tensão nos pontos *A* e *B* do poste de apoio, que tem 100 mm de diâmetro. Mostrar os resultados em um elemento de volume localizado em cada um desses pontos.

8.43. O sinal está submetido a uma carga uniforme de vento. Determinar os componentes da tensão nos pontos *C* e *D* do poste de apoio, que tem 100 mm de diâmetro. Mostrar os resultados em um elemento de volume localizado em cada um desses pontos.

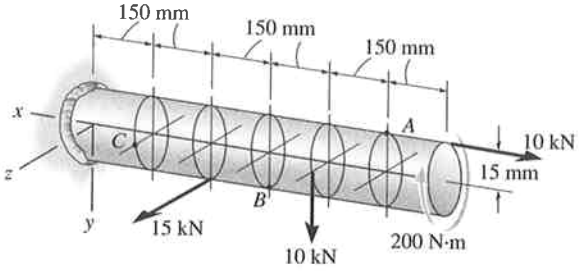


Problemas 8.42/8.43

***8.44.** A haste maciça está sujeita ao carregamento mostrado. Determinar o estado de tensão desenvolvido no ponto A do material e mostrar os resultados em um elemento de volume infinitesimal nesse ponto.

8.45. A haste maciça está sujeita ao carregamento mostrado. Determinar o estado de tensão desenvolvido no ponto B do material e mostrar os resultados em um elemento de volume infinitesimal nesse ponto.

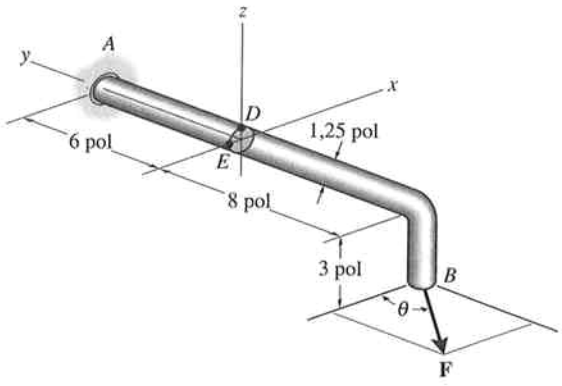
8.46. A haste maciça está sujeita ao carregamento mostrado. Determinar o estado de tensão desenvolvido no ponto C do material e mostrar os resultados em um elemento de volume infinitesimal nesse ponto.



Problemas 8.44/8.45/8.46

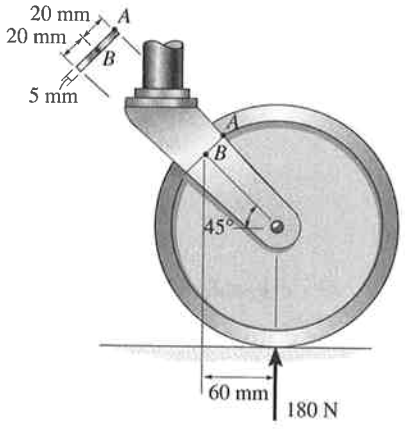
8.47. O eixo torto está engastado na parede em A. Supondo que seja aplicada uma força **F** em B, determinar os componentes da tensão nos pontos D e E. Mostrar os resultados em um elemento infinitesimal localizado em cada ponto. Adotar $F = 12$ lb e $\theta = 90°$.

***8.48.** O eixo torto está engastado na parede em A. Supondo que seja aplicada uma força **F** em B, determinar os componentes da tensão nos pontos D e E. Mostrar os resultados em um elemento de volume localizado em cada ponto. Adotar $F = 12$ lb e $\theta = 45°$.



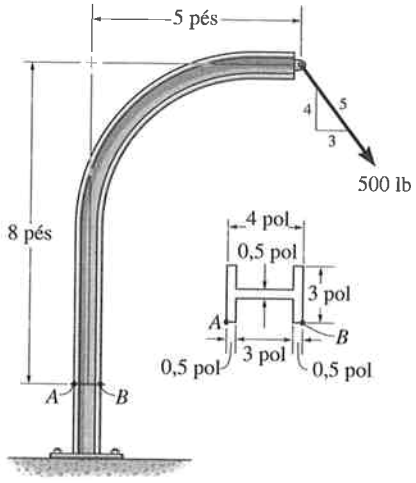
Problemas 8.47/8.48

8.49. O rodízio suporta uma carga de reação de 180 N. Determinar o estado de tensão nos pontos A e B em uma das duas chapas de apoio. Mostrar os resultados em um elemento de volume infinitesimal localizado em cada ponto.



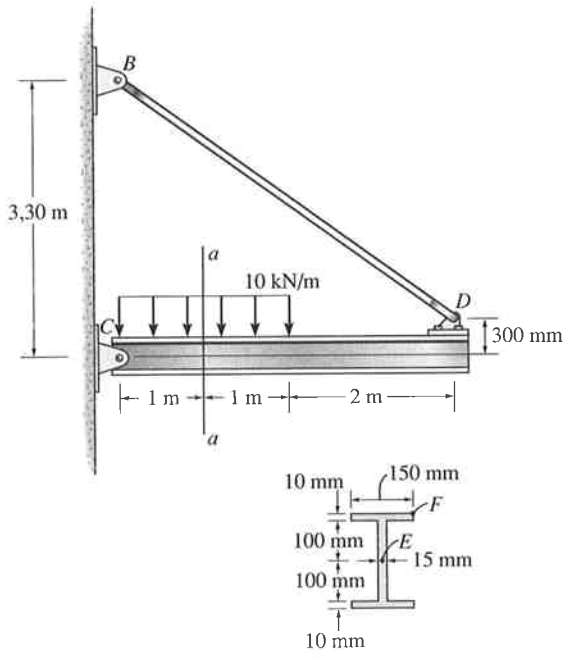
Problema 8.49

8.50. A lança de guindaste está sujeita a uma carga de 500 lb. Determinar o estado de tensão nos pontos A e B. Mostrar os resultados em um elemento de volume infinitesimal localizado em cada um desses pontos.



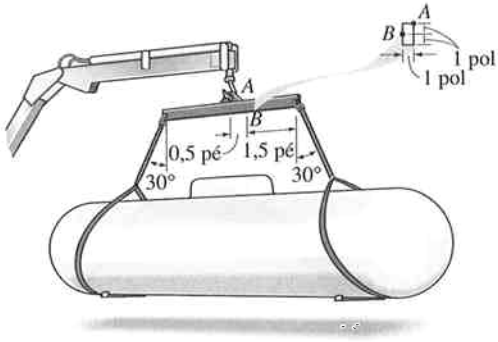
Problema 8.50

8.51. A viga suporta a carga mostrada. Determinar o estado de tensão nos pontos E e F da seção a–a e representar os resultados em um elemento de volume infinitesimal localizado em cada um desses pontos.



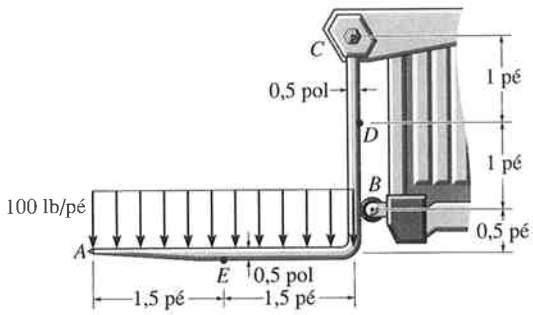
Problema 8.51

***8.52.** A barra de distribuição de peso carregada simetricamente é usada para levantar o reservatório de 2.000 lb. Determinar o estado de tensão nos pontos A e B e indicar os resultados em um elemento de volume infinitesimal.



Problema 8.52

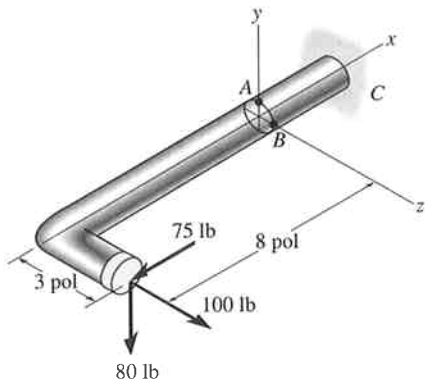
8.53. O dente do garfo ABC da empilhadeira está sujeito à de carga distribuída uniforme mostrada. Supondo que esteja acoplado por pino em C e suportado por rolete em B, determinar o estado de tensão nos pontos D e E e mostrar os resultados em elementos infinitesimais. O dente do garfo tem 3 pol de largura e 0,5 pol de espessura.



Problema 8.53

8.54. A haste de 1 pol de diâmetro está submetida às cargas mostradas. Determinar o estado de tensão no ponto A e mostrar os resultados em um elemento infinitesimal nele localizado.

8.55. A haste de 1 pol de diâmetro está submetida às cargas mostradas. Determinar o estado de tensão no ponto B e mostrar os resultados em um elemento infinitesimal nele localizado.

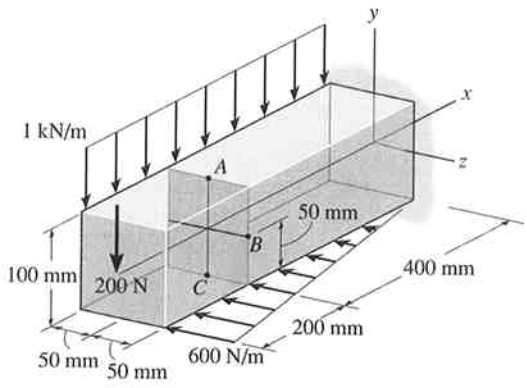


Problemas 8.54/8.55

***8.56.** O elemento está sujeito à combinação de cargas distribuída e concentrada mostrada. Determinar o estado de tensão no ponto A e mostrar os resultados em um elemento de volume infinitesimal nele localizado. *Dica*: usar a Tabela 5.1.

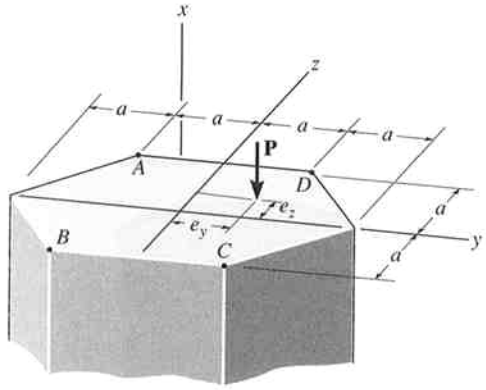
8.57. O elemento está sujeito à combinação de cargas distribuída e concentrada mostrada. Determinar o estado de tensão no ponto B e mostrar os resultados em um elemento de volume infinitesimal nele localizado. *Dica*: usar a Tabela 5.1.

8.58. O elemento está sujeito à combinação de cargas distribuída e concentrada mostrada. Determinar o estado de tensão no ponto C e mostrar os resultados em um elemento de volume infinitesimal nele localizado. *Dica*: usar a Tabela 5.1.



Problemas 8.56/8.57/8.58

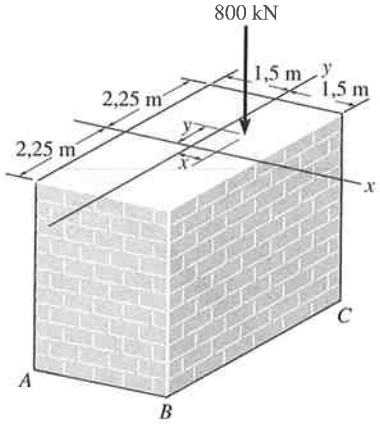
8.59. O poste com as dimensões mostradas está sujeito à carga de apoio **P**. Especificar a região em que a carga pode ser aplicada sem provocar esforço de tração nos pontos *A*, *B*, *C* e *D*.



Problema 8.59

***8.60.** A pilastra de alvenaria está submetida à carga de 800 kN. Determinar a equação da reta $y = f(x)$ ao longo da qual a carga pode ser colocada sem provocar esforço de tração sobre a pilastra. Desprezar o peso desta.

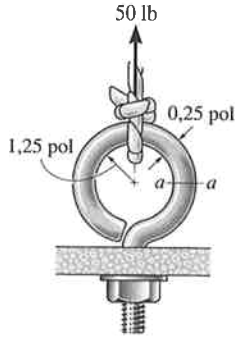
8.61. A pilastra de alvenaria está submetida à carga de 800 kN. Supondo que $x = 0{,}25$ m e $y = 0{,}5$ m, determinar a tensão normal em cada canto *A*, *B*, *C* e *D* (não está mostrado) e esquematizar a distribuição de tensão sobre a seção transversal. Desprezar o peso da pilastra.



Problemas 8.60/8.61

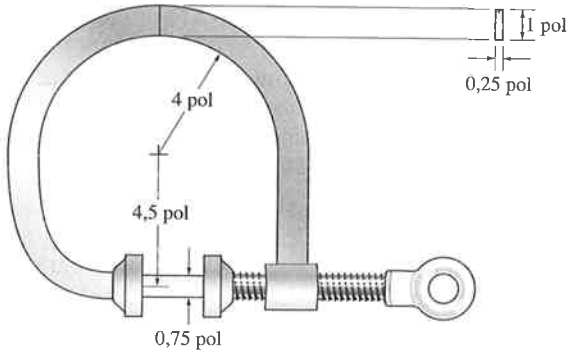
8.62. O olhal está sujeito à força de 50 lb. Determinar os esforços máximos de tração e compressão na seção *a–a*. A seção transversal é circular e tem diâmetro de 0,25 pol. Usar a fórmula da viga curva para calcular o esforço de flexão.

8.63. Resolver o Problema 8.62 supondo que a seção transversal seja quadrada com dimensões de 0,25 pol por 0,25 pol.



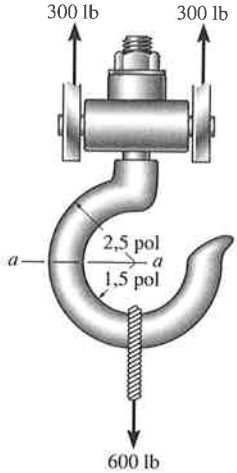
Problemas 8.62/8.63

***8.64.** O grampo C aplica um esforço de compressão de 80 psi sobre o bloco cilíndrico. Determinar a tensão normal máxima desenvolvida sobre o grampo.



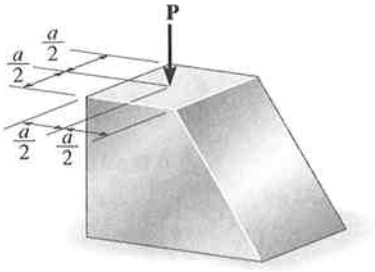
Problema 8.64

8.65. O gancho é usado para levantar a força de 600 lb. Determinar os esforços máximos de tração e compressão na seção *a–a*. A seção transversal é circular e tem diâmetro de 1 pol. Usar a fórmula da viga curva para calcular o esforço de flexão.



Problema 8.65

8.66. O suporte está sujeito à carga de compressão **P**. Determinar a tensão normal absoluta máxima e a mínima que atuam sobre o material.



Problema 8.66

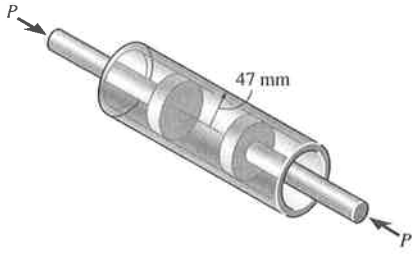
8.67. O suporte está sujeito à carga de compressão **P**. Determinar a tensão normal máxima e a mínima que atuam sobre o material.

Problema 8.67

PROBLEMAS DE REVISÃO

***8.68.** A pressão do ar no cilindro sobe até exercer as forças $P = 2$ kN nos dois pistões, cada um com raio de 45 mm. Supondo que a parede do cilindro tenha espessura de 2 mm, determinar o estado de tensão nela desenvolvido.

8.69. Determinar a força máxima P que pode ser exercida em cada pistão de modo que o componente da tensão circunferencial não exceda 3 MPa. Cada pistão tem raio de 45 mm e a parede do cilindro tem 2 mm de espessura.



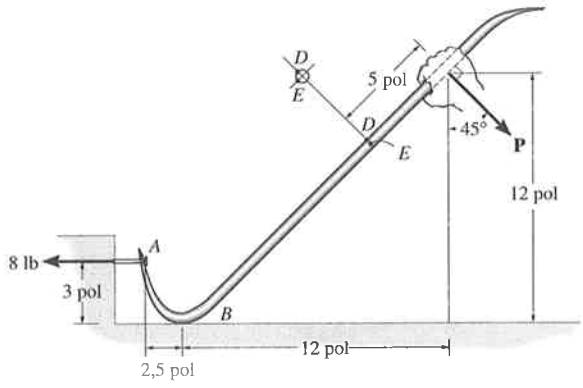
Problemas 8.68/8.69

8.70. A tampa do reservatório cilíndrico está a ele parafusada ao longo dos flanges. O reservatório tem diâmetro interno de 1,5 m e espessura da parede de 18 mm. Supondo que a maior tensão normal não possa exceder 150 MPa, determinar a pressão máxima que o reservatório pode suportar. Calcular também o número de parafusos necessários para prender a tampa do reservatório, supondo que cada parafuso tenha diâmetro de 20 mm. A tensão admissível para os parafusos é $(\sigma_{adm})_p = 180$ MPa.

8.71. A tampa do reservatório cilíndrico está a ele parafusada ao longo dos flanges. O reservatório tem diâmetro interno de 1,5 m e espessura da parede de 18 mm. Supondo que a pressão no reservatório seja $p = 1{,}20$ MPa, determinar a força nos 16 parafusos usados para prender a tampa. Especificar também o estado de tensão na parede do reservatório.

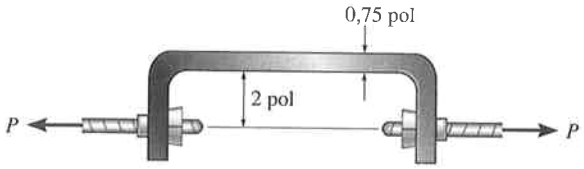
Problemas 8.70/8.71

***8.72.** O pé-de-cabra é usado para retirar o prego em A. Supondo que se aplique uma força de 8 lb, determinar os componentes da tensão nos pontos D e E. Mostrar os resultados em um elemento de volume localizado em cada um desses pontos. O pé-de-cabra tem seção transversal circular de 0,5 pol de diâmetro. Não ocorre deslizamento em B.



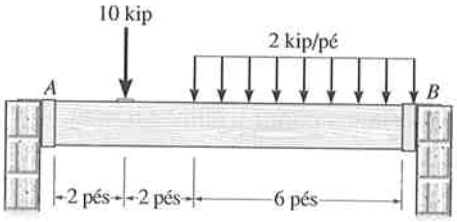
Problema 8.72

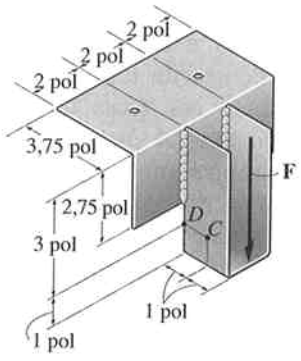
8.73. O suporte de aço é usado para conectar as extremidades dos dois cabos. Supondo que se aplique a força P = 500 lb, determinar a tensão normal máxima nele desenvolvida. O suporte tem espessura de 0,5 pol e largura de 0,75 pol.



Problema 8.73

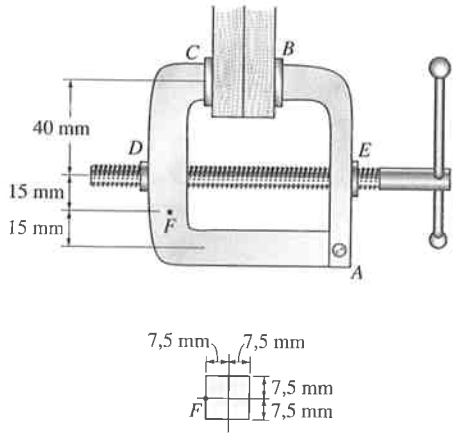
8.74. O suporte de parede tem espessura de 0,25 pol e é usado para apoiar as reações verticais da viga carregada como mostrado. Supondo que a carga transfira-se uniformemente a cada alça do suporte, determinar o estado de tensão nos pontos C e D da alça A. Supor, também, que a reação vertical **F** nessa extremidade atua no centro e na borda do suporte como mostrado.





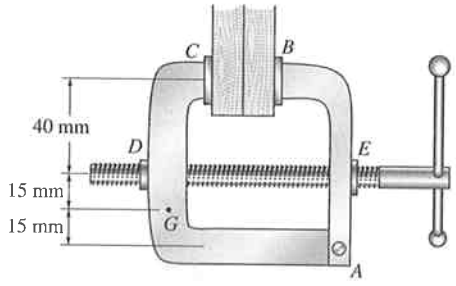
Problema 8.74

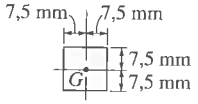
8.75. O grampo compõe-se dos elementos AB e AC acoplados por pino em A. Supondo que a força de compressão em C e B seja de 180 N, determinar o estado de tensão no ponto F e indicar os resultados em um elemento de volume infinitesimal. O parafuso DE está sujeito apenas a uma força de tração ao longo de seu eixo.



Problema 8.75

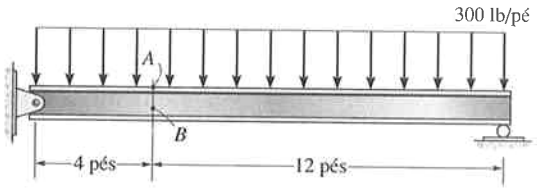
***8.76.** O grampo compõe-se dos elementos AB e AC acoplados por pino em A. Supondo que a força de compressão em C e B seja de 180 N, determinar o estado de tensão no ponto G e indicar os resultados em um elemento de volume infinitesimal. O parafuso DE está sujeito apenas a uma força de tração ao longo de seu eixo.

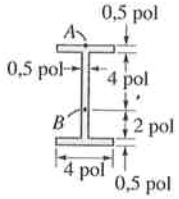




Problema 8.76

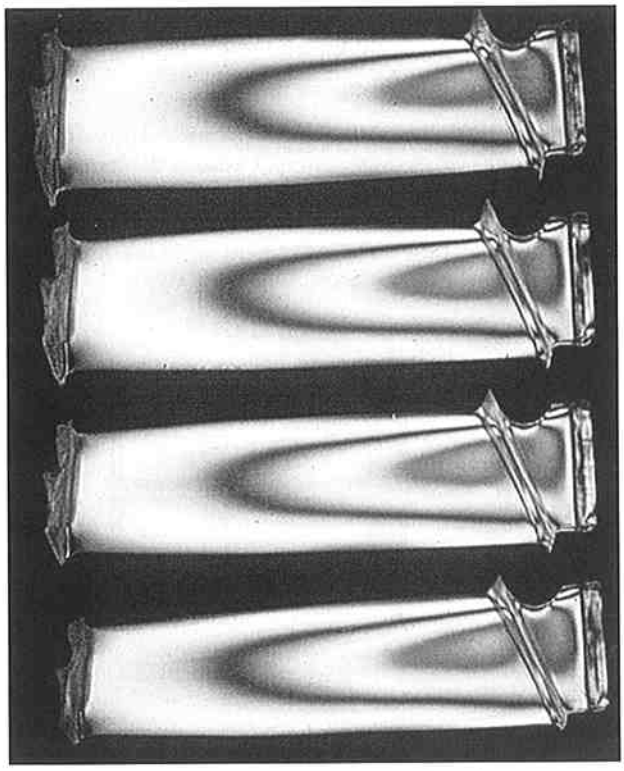
8.77. A viga de abas largas está submetida ao carregamento mostrado. Determinar o estado de tensão nos pontos A e B e mostrar os resultados em um elemento de volume infinitesimal localizado em cada um desses pontos.





Problema 8.77

9 Transformação de Tensão



As pás desta turbina estão sujeitas a um padrão de tensões complexo, ilustrado pelas faixas sombreadas que aparecem nas pás quando são feitas de material transparente e vistas através de luz polarizada. Para um projeto adequado, os engenheiros devem ser capazes de determinar onde e em que direção ocorrem as tensões máximas. (Cortesia do Measurements Group, Inc., Raleigh, Carolina do Norte, 27611, EUA.)

Objetivos do Capítulo

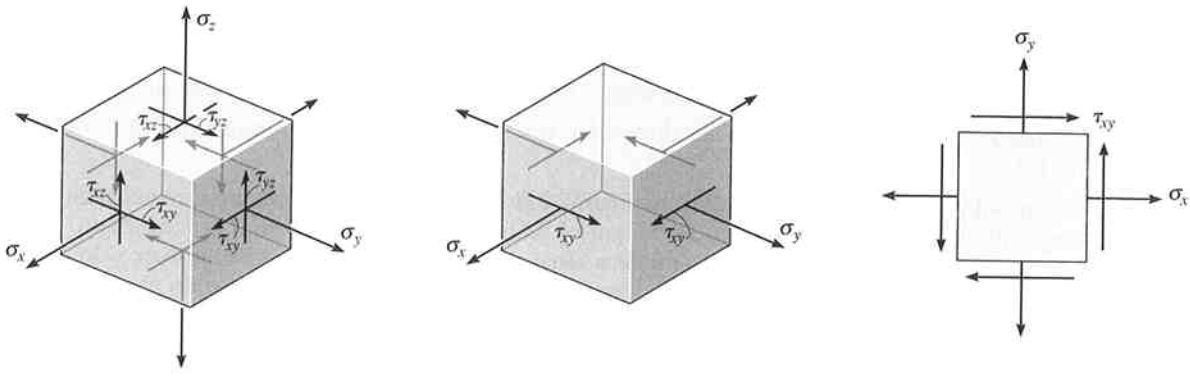
Neste capítulo mostraremos como transformar os componentes de tensão, associados a um sistema de coordenadas particular, em componentes associados a um sistema de coordenadas que tenha orientação diferente. Uma vez estabelecidas as equações de transformação necessárias, poderemos obter as tensões normal máxima e de cisalhamento máxima em um ponto e determinar a orientação dos elementos sobre os quais atuam. A transformação em um estado plano de tensões será discutida na primeira parte do capítulo, uma vez que essa condição é a mais comum na prática da engenharia. No final discutiremos um método para determinar a tensão de cisalhamento máxima absoluta em um ponto quando o material está sujeito a estados de tensão tanto planos como tridimensionais.

9.1 Transformação no Estado Plano de Tensões

Na Seção 1.3 foi mostrado que o estado geral de tensão em um ponto é caracterizado por *seis* componentes independentes de tensões normal e de cisalhamento, que atuam nas faces de um elemento do material localizado em tal ponto (Figura 9.1*a*). Esse estado de tensão, entretanto, não é encontrado com freqüência na prática da engenharia. Em vez disso, os engenheiros geralmente fazem aproximações ou simplificações das cargas sobre o corpo, a fim de que a tensão produzida em um elemento estrutural ou mecânico possa ser analisada em um *plano simples*. Nesse caso, diz-se que o material está sujeito a um *estado plano de tensões* (Figura 9.1*b*). Por exemplo: se não houver carga na superfície do corpo, os componentes das tensões normal e de cisalhamento serão nulos na face de um elemento localizado nessa superfície. Conseqüentemente, os componentes de tensão correspondentes na face oposta também serão nulos e, desse modo, o material no ponto estará sujeito ao estado plano de tensões.

O estado geral ***plano de tensões*** em um ponto é representado, portanto, pela combinação de dois componentes de tensão normal, σ_x, σ_y, e um componente de tensão de cisalhamento, τ_{xy}, que atuam sobre as quatro faces do elemento. Por conveniência, neste livro estudaremos esse estado de tensão no plano $x-y$ (Figura 9.1*c*). Observe que, se o estado de tensão em determinado ponto for definido pelos três componentes de tensão mostrados no elemento

da Figura 9.2*a*, então um elemento com orientação diferente, tal como o da Figura 9.2*b*, estará sujeito a três componentes de tensão diferentes. Em outras palavras, ***o estado plano de tensões no ponto é representado unicamente pelos três componentes que atuam em um elemento que tenha orientação específica naquele ponto.***



Estado geral de tensão
(a)

Estado plano de tensões
(b)

Estado plano de tensões
(vista bidimensional)
(c)

Figura 9.1

Mostraremos nesta seção, por meio de exemplos numéricos, como *transformar* os componentes de tensão que tenham determinada orientação em certo elemento para um elemento com orientação diferente. Ou seja, supondo que o estado de tensão seja definido pelos componentes σ_x, σ_y, τ_{xy}, orientados ao longo dos eixos x, y (Figura 9.2*a*), mostraremos como obter os componentes $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$, $\tau_{x'y'}$, orientados ao longo dos eixos x', y' (Figura 9.2*b*), de modo que representem o *mesmo* estado de tensão no ponto. Isso será como conhecer dois componentes de força, digamos $\mathbf{F}_x$ e $\mathbf{F}_y$, direcionados ao longo dos eixos x, y, que produzem a força resultante $\mathbf{F}_R$, e depois tentar determinar os componentes de força $\mathbf{F}_{x'}$ e $\mathbf{F}_{y'}$, direcionados ao longo dos eixos x', y', de modo que produzam a *mesma* resultante. A transformação dos componentes de tensão, entretanto, é mais difícil que a dos componentes de força, visto que, no primeiro caso, a transformação deve considerar a intensidade e a direção de cada componente de tensão *e* a orientação da área sobre a qual cada um atua. No caso da força, a transformação deve considerar apenas a intensidade e a direção do componente.

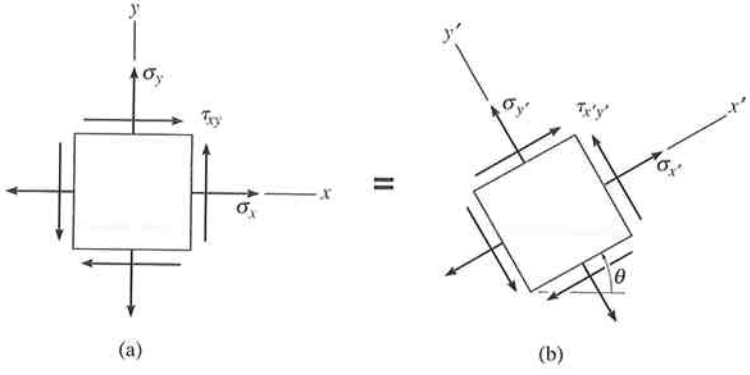


Figura 9.2

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

Se o estado de tensão para dada orientação de um elemento do material for conhecido (Figura 9.3*a*), o estado de tensão para outra orientação (Figura 9.3*b*) será determinado pelo seguinte procedimento.

- Para determinar os componentes $\sigma_{x'}$, $\tau_{x'y'}$ que atuam sobre a face x' do elemento (Figura 9.3*b*), secionar o elemento da Figura 9.3*a* como mostra a Figura 9.3*c*. Se admitirmos que a área secionada como ΔA, as áreas adjacentes do segmento serão ΔA sen θ e ΔA cos θ.
- Desenhar o diagrama de corpo livre do segmento, o que requer mostrar as *forças* que atuam sobre o elemento. Isso é feito multiplicando-se os componentes de tensão de cada face pela área sobre a qual atuam.
- Aplicar as equações de equilíbrio de força nas direções x' e y' para obter os dois componentes de tensão desconhecidos $\sigma_{x'}$ e $\tau_{x'y'}$.
- Se $\sigma_{y'}$, que atua sobre a face $+y'$ do elemento na Figura 9.3*b*, tiver de ser determinado, será necessário considerar um segmento do elemento como mostra a Figura 9.3*d* e, depois, seguir o mesmo procedimento descrito. Nesse caso, entretanto, não será preciso determinar a tensão de cisalhamento $\tau_{x'y'}$ se esta tiver sido calculada anteriormente, visto que é complementar, isto é, tem a mesma intensidade em cada face do elemento (Figura 9.3*b*).

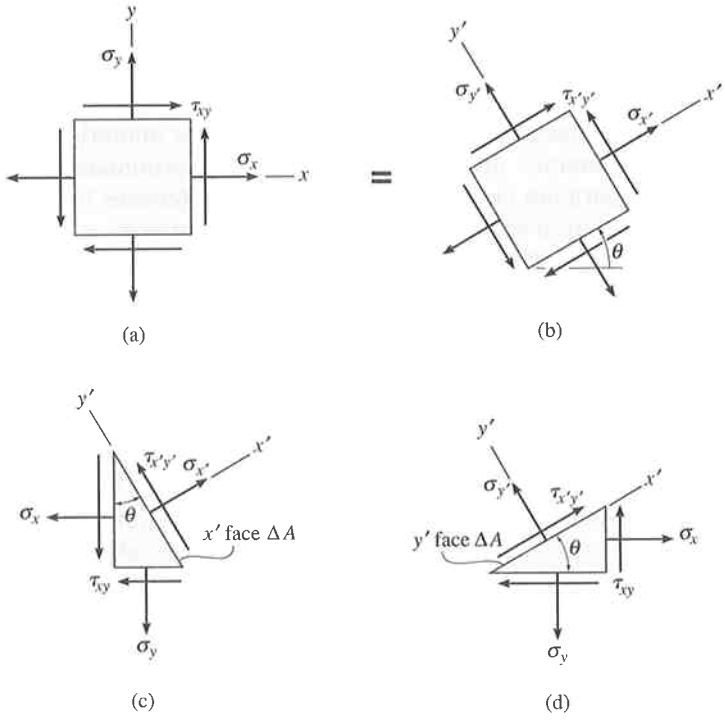
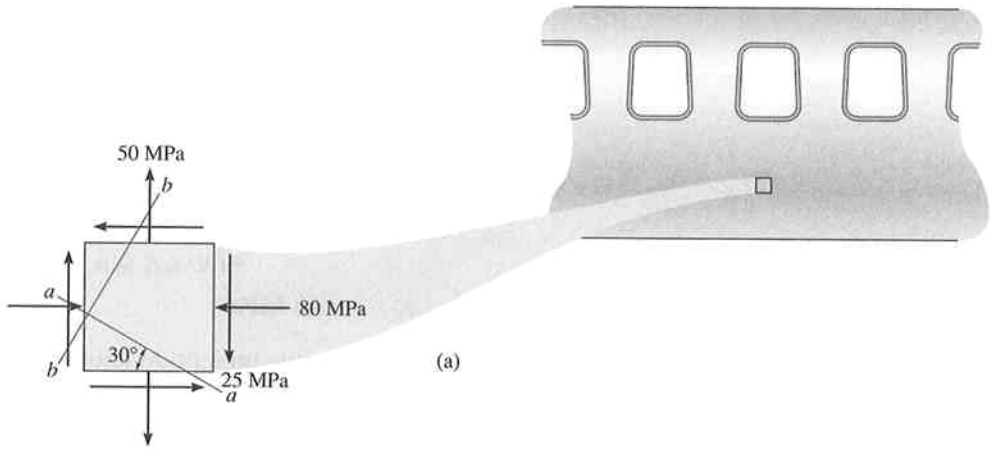


Figura 9.3

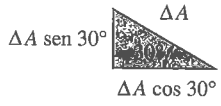
EXEMPLO 9.1

O estado plano de tensões em certo ponto da superfície da fuselagem de um avião é representado em um elemento, cuja orientação é a ilustrada na Figura 9.4*a*. Representar o estado de tensão no ponto de um elemento orientado a 30° no sentido horário em relação à posição mostrada.



SOLUÇÃO

O elemento foi secionado pela reta *a–a* (Figura 9.4*a*), a parte inferior do segmento foi removida e, supondo que o plano secionado (inclinado) tenha área ΔA, os planos horizontal e vertical têm as áreas mostradas na Figura 9.4*b*. O diagrama de corpo livre do segmento é mostrado na Figura 9.4*c*. Aplicando as equações de equilíbrio de força nas direções x' e y' para evitar a solução de equações simultâneas para as incógnitas $\sigma_{x'}$ e $\tau_{x'y'}$, temos:



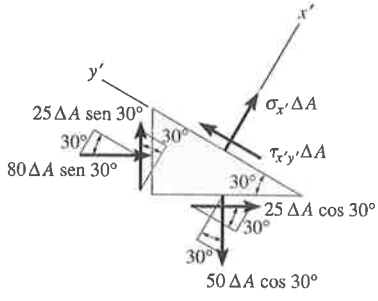
(b)

$$+\nearrow \Sigma F_{x'} = 0; \quad \sigma_{x'}\,\Delta A - (50\,\Delta A \cos 30°)\cos 30° + (25\,\Delta A \cos 30°)\operatorname{sen} 30° + (80\,\Delta A \operatorname{sen} 30°)\operatorname{sen} 30° + (25\,\Delta A \operatorname{sen} 30°)\cos 30° = 0$$

$$\sigma_{x'} = -4{,}15 \text{ MPa} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

$$+\nwarrow \Sigma F_{y'} = 0; \quad \tau_{x'y'}\,\Delta A - (50\,\Delta A \cos 30°)\operatorname{sen} 30° - (25\,\Delta A \cos 30°)\cos 30° - (80\,\Delta A \operatorname{sen} 30°)\cos 30° + (25\,\Delta A \operatorname{sen} 30°)\operatorname{sen} 30° = 0$$

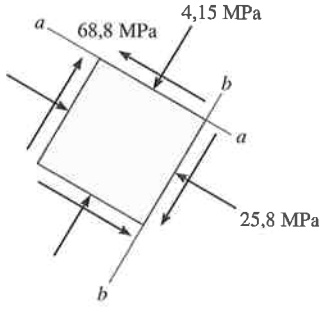
$$\tau_{x'y'} = 68{,}8 \text{ MPa} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$



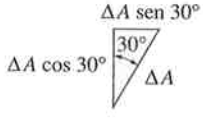
(c)

Como é negativa, $\sigma_{x'}$ atua na direção oposta à mostrada na Figura 9.4*c*. Os resultados aparecem na parte *superior* do elemento na Figura 9.4*d*, uma vez que essa superfície é a considerada na Figura 9.4*c*.

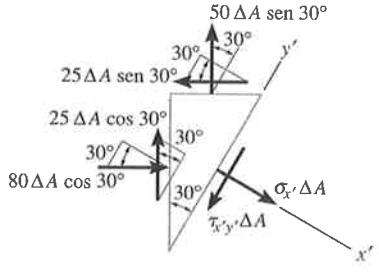
Devemos repetir o procedimento para obter a tensão no plano *perpendicular b–b*. Secionando o elemento da Figura 9.4*a* ao longo de *b–b*, extraímos o segmento cujos lados têm as áreas mostradas na Figura 9.4*e*. Orientando o eixo $+x'$ para fora, perpendicularmente à face secionada, obtemos o diagrama de corpo livre mostrado na Figura 9.4*f*. Assim,



(d)



(e)



(f)

Figura 9.4

$$+\searrow \Sigma F_{x'} = 0; \quad \sigma_{x'}\,\Delta A - (25\,\Delta A \cos 30°)\,\text{sen}\,30°$$
$$+(80\,\Delta A \cos 30°)\cos 30° - (25\,\Delta A\,\text{sen}\,30°)\cos 30°$$
$$-(50\,\Delta A\,\text{sen}\,30°)\,\text{sen}\,30° = 0$$
$$\sigma_{x'} = -25{,}8\ \text{MPa} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

$$+\nearrow \Sigma F_{y'} = 0; \quad -\tau_{x'y'}\,\Delta A + (25\,\Delta A \cos 30°)\cos 30°$$
$$+(80\,\Delta A \cos 30°)\,\text{sen}\,30° - (25\,\Delta A\,\text{sen}\,30°)\,\text{sen}\,30°$$
$$+(50\,\Delta A\,\text{sen}\,30°)\cos 30° = 0$$
$$\tau_{x'y'} = 68{,}8\ \text{MPa} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

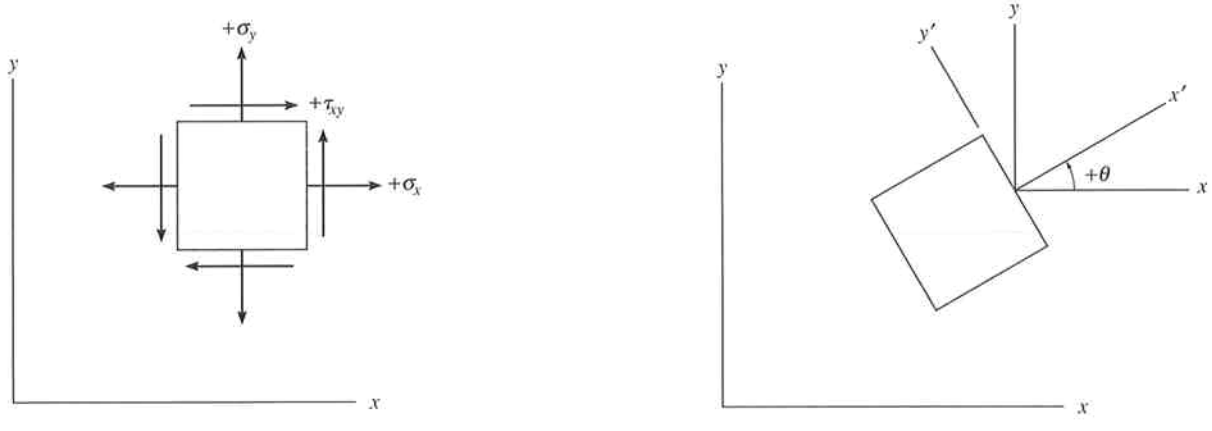
Como $\sigma_{x'}$ é uma quantidade negativa, atua no sentido oposto à sua direção mostrada na Figura 9.4*f*. Os componentes de tensão são mostrados atuando sobre o *lado direito* do elemento na Figura 9.4*d*.

Pela análise, concluímos que o estado de tensão no ponto é representado escolhendo-se um elemento orientado como mostra a Figura 9.4*a*, ou um orientado como mostra a Figura 9.4*d*. Em outras palavras, os estados de tensão são equivalentes.

9.2 EQUAÇÕES GERAIS DE TRANSFORMAÇÃO DE TENSÃO PARA O ESTADO PLANO

O método para transformar os componentes das tensões normal e de cisalhamento do sistema de eixos de coordenadas x, y para x', y', discutido na seção anterior, será agora desenvolvido de maneira geral e expresso como um conjunto de equações de transformação de tensão.

Convenção de Sinal. Antes que as equações de transformação sejam deduzidas, devemos estabelecer uma convenção de sinal para os componentes de tensão. Adotaremos, nesse caso, a mesma convenção usada na Seção 1.3. Resumidamente, uma vez estabelecidos os eixos x, y ou x', y', o componente das tensões normal ou de cisalhamento será *positivo* caso atue na direção *positiva* da coordenada da face *positiva* do elemento, ou caso atue na direção *negativa* da coordenada da face *negativa* do elemento (Figura 9.5*a*). Por exem-



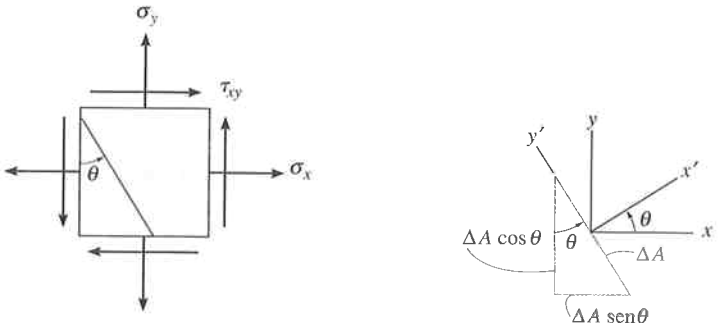
Convenção de sinal positivo

Figura 9.5

plo, σ_x é positivo uma vez que atua para a direita sobre a face vertical direita e atua para a esquerda (direção $-x$) sobre a face vertical esquerda. A tensão de cisalhamento mostrada na Figura 9.5*a* está atuando na direção positiva em todas as quatro faces do elemento. Na face da direita, τ_{xy} atua para cima (direção +y); na face inferior, τ_{xy} atua para a esquerda (direção $-x$), e assim por diante.

Todos os componentes de tensão mostrados na Figura 9.5*a* mantêm o equilíbrio do elemento e, por essa razão, conhecendo-se a direção de τ_{xy} em uma face do elemento, definimos sua direção nas outras três faces. Portanto, podemos lembrar a convenção de sinal apresentada antes simplesmente observando que a ***tensão normal positiva atua para fora de todas as faces e a tensão de cisalhamento positiva atua para cima na face direita do elemento.***

Dado o estado plano de tensões mostrado na Figura 9.5*a*, a orientação do plano inclinado no qual devem ser determinados os componentes das tensões normal e de cisalhamento será definida pelo ângulo θ. Para mostrar esse ângulo adequadamente, é necessário primeiro estabelecer um eixo positivo x' *orientado para fora, perpendicular* ou normal em relação ao plano, e um eixo associado y' ao longo do plano (Figura 9.5*b*). Observe que os conjuntos de eixos sem linha e com linha constituem sistemas de coordenadas dextrogiro; isto é, o eixo positivo z (ou z') é estabelecido pela regra da mão direita. Fechando-se os dedos no sentido de x (ou x') para y (ou y'), obtém-se a direção positiva do eixo z (ou z'), que aponta para fora. O ângulo θ é medido do eixo x positivo até o eixo x' positivo. A direção será *positiva* desde que siga a curvatura dos dedos da mão direita, isto é, o sentido anti-horário, como mostra a Figura 9.5*b*.



(a) (b)

Figura 9.6

Componentes das Tensões Normal e de Cisalhamento. Usando a convenção de sinal estabelecida, secionamos o elemento da Figura 9.6*a* ao longo do plano inclinado e isolamos o segmento mostrado na Figura 9.6*b*. Supondo que a área secionada seja ΔA, as faces horizontal e vertical do segmento terão área ΔA sen θ e ΔA cos θ, respectivamente.

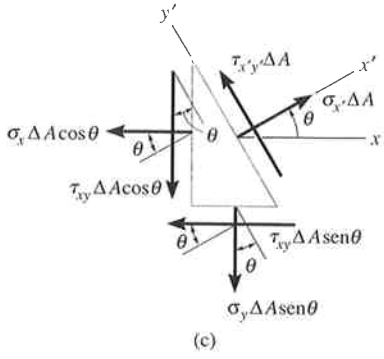
O diagrama de corpo livre do segmento resultante é mostrado na Figura 9.6*c*. Aplicando as equações de equilíbrio de força para determinar os componentes desconhecidos das tensões normal e de cisalhamento, $\sigma_{x'}$ e $\tau_{x'y'}$, obtemos:

$$+\nearrow \Sigma F_{x'} = 0; \quad \sigma_{x'}\,\Delta A - (\tau_{xy}\,\Delta A \text{ sen } \theta)\cos\theta - (\sigma_y\,\Delta A \text{ sen } \theta)\text{ sen } \theta - (\tau_{xy}\,\Delta A \cos\theta)\text{ sen } \theta - (\sigma_x\,\Delta A \cos\theta)\cos\theta = 0$$

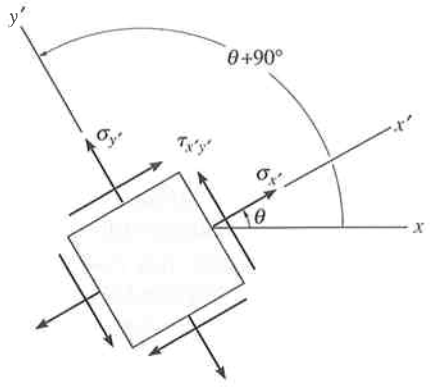
$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \text{ sen}^2\,\theta + \tau_{xy}(2 \text{ sen } \theta \cos\theta)$$

$$+\nwarrow \Sigma F_{y'} = 0; \quad \tau_{x'y'}\,\Delta A + (\tau_{xy}\,\Delta A \text{ sen } \theta)\text{ sen } \theta - (\sigma_y\,\Delta A \text{ sen } \theta)\cos\theta - (\tau_{xy}\,\Delta A \cos\theta)\cos\theta + (\sigma_x\,\Delta A \cos\theta)\text{ sen } \theta = 0$$

$$\tau_{x'y'} = (\sigma_y - \sigma_x)\text{ sen } \theta \cos\theta + \tau_{xy}(\cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta)$$



(c)



(d)

Figura 9.6

Essas duas equações podem ser simplificadas, em cada caso, pelo uso das identidades trigonométricas sen $2\theta = 2$ sen θ cos θ, sen^2 $\theta = (1 - \cos 2\theta)/2$ e cos^2 $\theta = (1 + \cos 2\theta)/2$, obtendo-se:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \tag{9.1}$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \tag{9.2}$$

Se for necessário saber a tensão normal que atua na direção y', ela pode ser obtida simplesmente substituindo-se ($\theta = \theta + 90°$) por θ na Equação 9.1 (Figura 9.6*d*), o que resulta em:

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \tag{9.3}$$

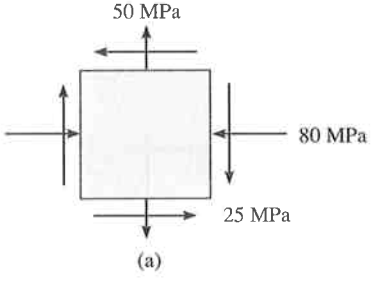
Se $\sigma_{y'}$ for calculada como quantidade positiva, isso indica que ela atua na direção positiva de y' como mostra a Figura 9.6*d*.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

Para aplicar as equações de transformação de tensão 9.1 e 9.2, é necessário simplesmente substituir os valores conhecidos de σ_x, σ_y, τ_{xy} e θ de acordo com a convenção de sinal estabelecida (Figura 9.5). Se $\sigma_{x'}$ e $\tau_{x'y'}$ forem calculadas como quantidades positivas, então essas tensões atuam na direção positiva dos eixos x' e y'.

Por conveniência, podemos facilmente programar essas equações em uma calculadora de bolso.

EXEMPLO 9.2



(a)

O estado plano de tensões é representado pelo elemento mostrado na Figura 9.7*a*. Determinar o estado de tensão no ponto em outro elemento, orientado a 30° no sentido horário em relação à posição mostrada.

SOLUÇÃO

Este problema foi resolvido no Exemplo 9.1 por meio dos princípios básicos. Aqui vamos aplicar as equações 9.1 e 9.2. Pela convenção de sinal estabelecida (Figura 9.5), vê-se que:

$$\sigma_x = -80 \text{ MPa} \qquad \sigma_y = 50 \text{ MPa} \qquad \tau_{xy} = -25 \text{ MPa}$$

Plano CD. Para obter os componentes de tensão no plano *CD* (Figura 9.7*b*), deve-se observar que o eixo x' positivo é orientado para fora, perpendicularmente a *CD*, e o eixo associado y' é orientado ao longo de *CD*. O ângulo medido do eixo x para x' é $\theta = -30°$(horário). Aplicando as equações 9.1 e 9.2, temos:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\,\text{sen}\,2\theta$$

$$= \frac{-80 + 50}{2} + \frac{-80 - 50}{2}\cos 2(-30°) + (-25)\,\text{sen}\,2(-30°)$$

$$= -25{,}8\ \text{MPa} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\,\text{sen}\,2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

$$= -\frac{-80 - 50}{2}\,\text{sen}\,2(-30°) + (-25)\cos 2(-30°)$$

$$= -68{,}8\ \text{MPa} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Os sinais negativos indicam que $\sigma_{x'}$ e $\tau_{x'y'}$ atuam nas direções negativas de x' e y', respectivamente. Os resultados estão mostrados no elemento da Figura 9.7*d*.

Plano BC. De maneira similar, os componentes de tensão que atuam sobre a face *BC* (Figura 9.7*c*) são obtidos usando-se $\theta = 60°$. Aplicando as equações 9.1 e 9.2,[1] obtemos:

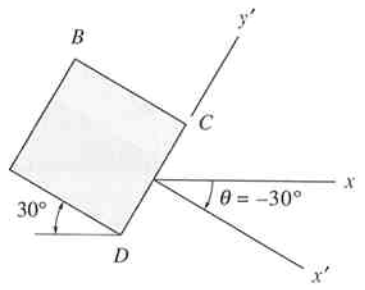
$$\sigma_{x'} = \frac{-80 + 50}{2} + \frac{-80 - 50}{2}\cos 2(60°) + (-25)\,\text{sen}\,2(60°)$$

$$= -4{,}15\ \text{MPa} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

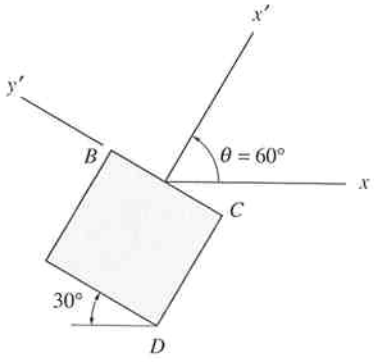
$$\tau_{x'y'} = -\frac{-80 - 50}{2}\,\text{sen}\,2(60°) + (-25)\cos 2(60°)$$

$$= 68{,}8\ \text{MPa} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

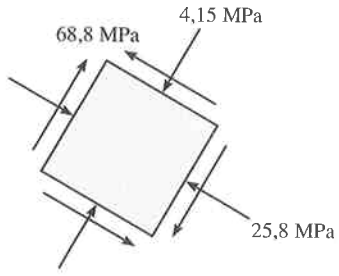
Aqui, $\tau_{x'y'}$ foi calculado duas vezes a fim de propiciar uma verificação. O sinal negativo de $\sigma_{x'}$ indica que essa tensão atua na direção x' negativa (Figura 9.7*c*). Os resultados são mostrados no elemento da Figura 9.7*d*.



(b)



(c)



(d)

Figura 9.7

9.3 TENSÕES PRINCIPAIS E TENSÃO DE CISALHAMENTO MÁXIMA NO PLANO

Pelas equações 9.1 e 9.2, pode-se ver que $\sigma_{x'}$ e $\tau_{x'y'}$ dependem do ângulo de inclinação θ dos planos em que essas tensões atuam. Na prática da engenharia, em geral, é importante determinar a orientação dos planos que fazem a tensão normal chegar ao máximo e ao mínimo, bem como a orientação dos planos que fazem a tensão de cisalhamento chegar ao máximo. Cada um desses problemas será considerado nesta seção.

Tensões Principais no Plano. Para determinar a *tensão normal* máxima e a mínima, devemos diferenciar a Equação 9.1 em relação a θ e igualar a zero o resultado. Isso leva a:

[1] Alternativamente, poderíamos aplicar a Equação 9.3 com $\theta = -30°$ em vez da Equação 9.1.

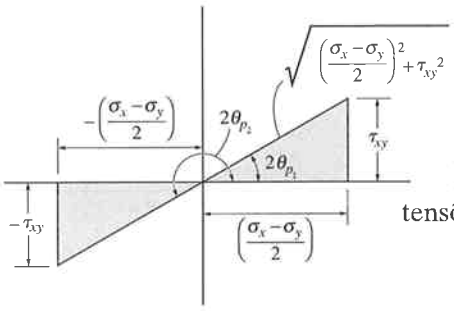


Figura 9.8

$$\frac{d\sigma_{x'}}{d\theta} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}(2 \operatorname{sen} 2\theta) + 2\tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

Resolvendo essa equação, obtemos a orientação $\theta = \theta_p$ dos planos de tensões normais máxima e mínima.

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} \tag{9.4}$$

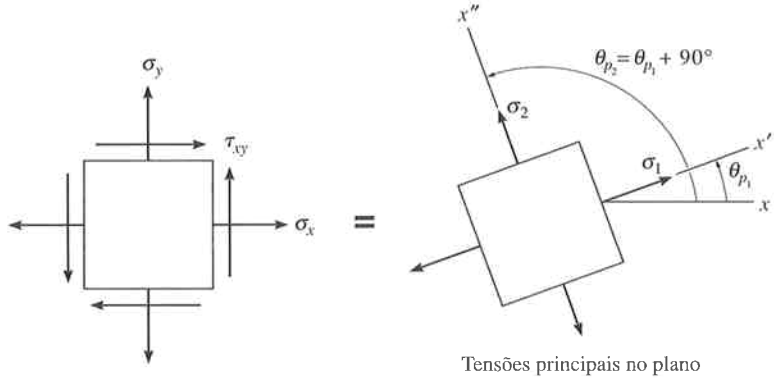
A solução tem duas raízes: θ_{p_1} e θ_{p_2}. Explicitamente, os valores de $2\theta_{p_1}$ e $2\theta_{p_2}$ estão 180° defasados. De modo que θ_{p_1} e θ_{p_2} estarão 90° defasados.

Os valores de θ_{p_1} e θ_{p_2} devem ser substituídos na Equação 9.1 para obtermos as tensões normais requeridas. O seno e o cosseno de $2\theta_{p_1}$ e $2\theta_{p_2}$ são obtidos a partir dos triângulos sombreados mostrados na Figura 9.8. A construção desses triângulos baseia-se na Equação 9.4, supondo que τ_{xy} e $(\sigma_x - \sigma_y)$ são ambas quantidades positivas ou ambas quantidades negativas. Temos:

para θ_{p_1},

$$\operatorname{sen} 2\theta_{p_1} = \tau_{xy} \Big/ \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

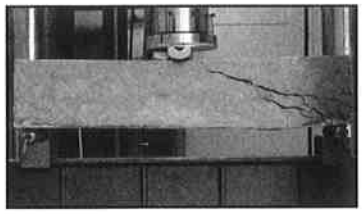
$$\cos 2\theta_{p_1} = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \Big/ \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



(a) (b)

Tensões principais no plano

Figura 9.9



As trincas nesta viga de concreto foram provocadas por tensões de tração, apesar de ela estar submetida tanto a momento interno como a cisalhamento. As equações de transformação de tensão são usadas para prever a direção das trincas, bem como as tensões normais principais que as provocaram.

para θ_{p_2},

$$\operatorname{sen} 2\theta_{p_2} = -\tau_{xy} \Big/ \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\cos 2\theta_{p_2} = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \Big/ \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Se qualquer um desses dois conjuntos de relações trigonométricas for substituído na Equação 9.1 e simplificado, obteremos:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{9.5}$$

Dependendo do sinal escolhido, esse resultado revelará a tensão normal máxima ou a mínima no plano a qual atua sobre um ponto em que $\sigma_1 \geq \sigma_2$. Esse conjunto de valores particulares é denominado ***tensões principais*** no plano, e os planos correspondentes nos quais ele atua são chamados de ***planos principais*** de tensão (Figura 9.9*b*). Além disso, se substituirmos as relações trigonométricas de θp_1 e θp_2 na Equação 9.2, poderemos ver que $\tau_{x'y'} = 0$; ou seja, ***nenhuma tensão de cisalhamento atua sobre os planos principais.***

Tensão de Cisalhamento Máxima no Plano. Para determinar a orientação de um elemento sobre cujas faces atua a tensão de cisalhamento máxima, deriva-se a Equação 9.2 em relação a θ e iguala-se a zero o resultado. Temos então:

$$\text{tg } 2\theta_c = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}} \tag{9.6}$$

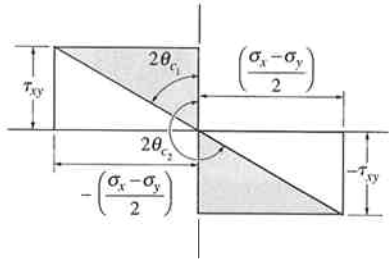


Figura 9.10

As duas raízes dessa equação, θ_{c_1} e θ_{c_2}, podem ser determinadas pelos triângulos sombreados mostrados na Figura 9.10. Comparando com a Figura 9.8, cada raiz de $2\theta_c$ está defasada em relação a 90° de $2\theta_p$. Assim, as raízes θ_c e θ_p estão separadas por 45° e, como resultado, ***os planos para a tensão de cisalhamento máxima são determinados orientando-se um elemento a 45° da posição do elemento que define os planos da tensão principal.***

Usando qualquer uma das raízes θ_{c_1} ou θ_{c_2}, determinaremos a tensão de cisalhamento máxima calculando os valores trigonométricos de sen $2\theta_c$ e cos $2\theta_c$ da Figura 9.10 e substituindo-os na Equação 9.2. O resultado é:

$$\tau_{\substack{\text{máx} \\ \text{no plano}}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{9.7}$$

O valor de $\tau_{\substack{\text{máx} \\ \text{no plano}}}$ calculado pela Equação 9.7 é denominado ***tensão de cisalhamento máxima no plano***, porque atua sobre o elemento no plano x–y.

Substituindo os valores de sen $2\theta_c$ e cos $2\theta_c$ na Equação 9.1, vemos que também há uma tensão normal nos planos da tensão de cisalhamento máxima. Obtemos:

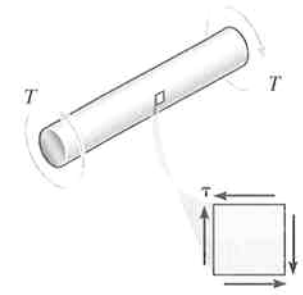
$$\sigma_{\text{méd}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \tag{9.8}$$

Como no caso das equações de transformação de tensão, é conveniente programar as equações anteriores de modo que possam ser usadas em uma calculadora de bolso.

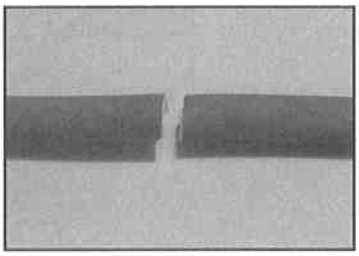
PONTOS IMPORTANTES

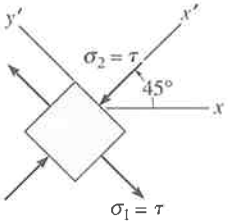
- As *tensões principais* representam a tensão normal máxima e a mínima no ponto.
- Quando o estado de tensão é representado pelas tensões principais, *nenhuma tensão de cisalhamento* atua sobre o elemento.
- O estado de tensão no ponto também é representado em termos de *tensão de cisalhamento máxima no plano*. Nesse caso, também atuará sobre o elemento uma *tensão normal média*.
- O elemento que representa a tensão de cisalhamento máxima no plano com as tensões normais médias associadas é *orientado* a 45° do elemento que representa as tensões principais.

EXEMPLO 9.3



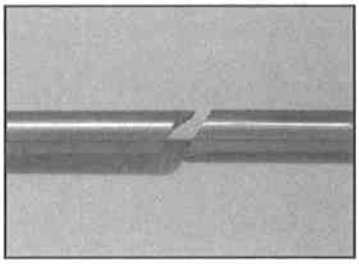
(a)





(b)

Figura 9.11



Quando a carga de torção é aplicada à barra da Figura 9.11*a*, produz um estado de tensão de cisalhamento puro no material. Determinar: *a*) a tensão de cisalhamento máxima no plano e a tensão normal média; e *b*) a tensão principal.

SOLUÇÃO

Pela convenção de sinal estabelecida,

$$\sigma_x = 0 \qquad \sigma_y = 0 \qquad \tau_{xy} = -\tau$$

Tensão de Cisalhamento Máxima no Plano. Temos, aplicando as equações 9.7 e 9.8:

$$\tau_{\substack{\text{máx} \\ \text{no plano}}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{(0)^2 + (-\tau)^2} = \pm\tau \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

$$\sigma_{\text{méd}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{0 + 0}{2} = 0 \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Desse modo, como esperado, a tensão de cisalhamento máxima no plano é representada pelo elemento da Figura 9.11*a*.

Determinou-se, por meio de experimentos, que materiais *dúcteis falham* devido à *tensão de cisalhamento*. Como resultado, se for aplicado um torque a uma barra feita de aço doce, a tensão de cisalhamento máxima no plano provocará sua falha como mostra a foto ao lado.

Tensão Principal. Aplicando as equações 9.4 e 9.5, temos:

$$\text{tg}\, 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} = \frac{-\tau}{(0 - 0)/2}, \quad \sigma_{p_2} = 45°, \quad \sigma_{p_1} = 135°$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 0 \pm \sqrt{(0)^2 + \tau^2} = \pm\tau \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

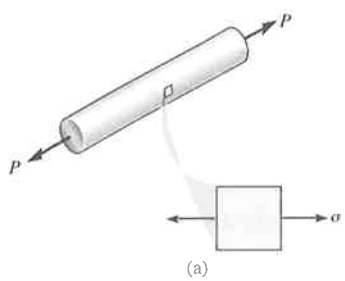
Se aplicarmos a Equação 9.1 com $\theta_{p_2} = 45°$, então:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\,\text{sen}\, 2\theta = 0 + 0 + (-\tau)\,\text{sen}\, 90° = -\tau$$

Desse modo, $\sigma_2 = -\tau$ atua a $\theta_{p_2} = 45°$, como mostra a Figura 9.11*b* e $\sigma_1 = \tau$ atua na outra face, $\theta_{p_1} = 135°$.

Materiais *frágeis* falham devido à *tensão normal*. Essa é a razão pela qual um material frágil, como o ferro fundido, submetido à torção falha sob tração, com inclinação de 45° como se vê na foto ao lado.

EXEMPLO 9.4



(a)

Figura 9.12

Quando a carga axial P é aplicada à barra da Figura 9.12*a*, produz um esforço de tração no material. Determinar: *a*) a tensão principal; e *b*) a tensão de cisalhamento máxima no plano e a tensão normal média associada.

SOLUÇÃO

Pela convenção de sinal estabelecida:

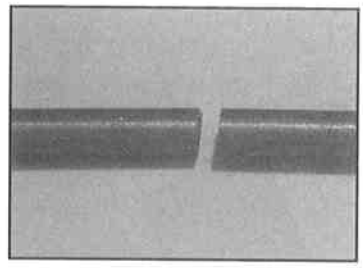
$$\sigma_x = \sigma \qquad \sigma_y = 0 \qquad \tau_{xy} = 0$$

Tensão Principal. Por observação, o elemento orientado como mostra a Figura 9.12*a* ilustra uma condição de tensão principal, uma vez que a tensão

de cisalhamento não atua sobre ele. Pode-se, também, mostrar essa condição pela substituição direta dos valores apresentados anteriormente nas equações 9.4 e 9.5. Desse modo:

$$\sigma_1 = \sigma \qquad \sigma_2 = 0 \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Como os experimentos mostraram que a tensão normal provoca falha em materiais frágeis, então, se a barra for feita de *material frágil*, como ferro fundido, falhará como mostra a foto ao lado.

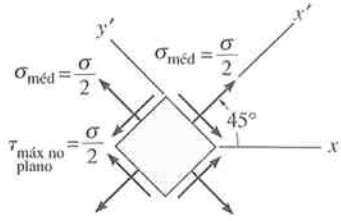


Tensão de Cisalhamento Máxima no Plano. Aplicando as equações 9.6, 9.7 e 9.8, temos:

$$\text{tg } 2\theta_c = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}} = \frac{-(\sigma - 0)/2}{0}; \theta_{s_1} = 45°, \theta_{s_2} = 135°$$

$$\tau_{\substack{\text{máx} \\ \text{no plano}}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma - 0}{2}\right)^2 + (0)^2} = \pm \frac{\sigma}{2} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

$$\sigma_{\text{méd}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma + 0}{2} = \frac{\sigma}{2} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$



(b)

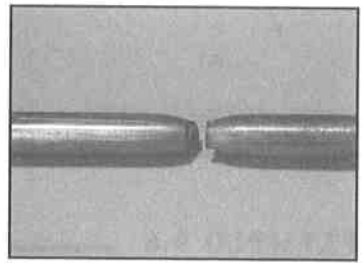
Figura 9.12

Para determinar a orientação apropriada do elemento, aplica-se a Equação 9.2.

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \text{sen } 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta = -\frac{\sigma - 0}{2} \text{sen } 90° + 0 = -\frac{\sigma}{2}$$

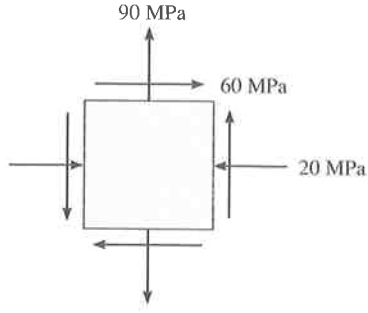
Essa tensão de cisalhamento negativa atua sobre a face x', na direção negativa de y', como mostra a Figura 9.12*b*.

Se a barra for feita de *material dúctil*, tal como aço doce, então a tensão de cisalhamento provocará sua falha quando ela estiver submetida a *tração*. Essa condição é observada na foto ao lado, em que, na região de estrangulamento, a tensão de cisalhamento provocou 'deslizamento' ao longo da vizinhança cristalina do aço, resultando em um plano de ruptura que formou um *cone* em torno da barra orientado a, aproximadamente, 45°, como calculado anteriormente.



EXEMPLO 9.5

O estado plano de tensões em determinado ponto de um corpo é mostrado no elemento da Figura 9.13*a*. Representar esse estado de tensão em termos das tensões principais.



(a)

Figura 9.13

SOLUÇÃO

Temos, pela convenção de sinal estabelecida:

$$\sigma_x = -20 \text{ MPa} \qquad \sigma_y = 90 \text{ MPa} \qquad \tau_{xy} = 60 \text{ MPa}$$

Orientação do Elemento. Aplicando a Equação 9.4, temos:

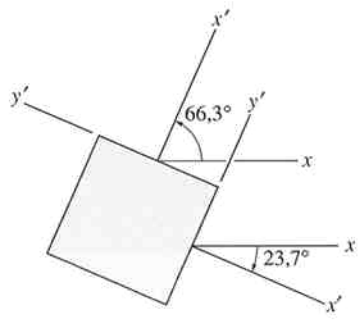
$$\text{tg } 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} = \frac{60}{(-20 - 90)/2}$$

Resolvendo e denominando a raiz conforme θ_{p_2}, como mostramos a seguir, temos:

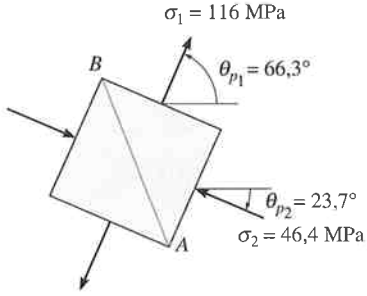
$$2\theta_{p_2} = -47{,}49° \qquad \theta_{p_2} = -23{,}7°$$

Como a diferença entre $2\theta_{p_1}$ e $2\theta_{p_2}$ é 180°, temos:

$$2\theta_{p_1} = 180° + 2\theta_{p_2} = 132{,}51° \qquad \theta_{p_1} = 66{,}3°$$



(b)



(c)

Figura 9.13

Lembre-se de que θ é positivo no *sentido anti-horário* do eixo x para a normal externa (eixo x') da face do elemento e, desse modo, os resultados são os mostrados na Figura 9.13*b*.

Tensões Principais. Temos:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2}$$

$$= \frac{-20 + 90}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-20 - 90}{2}\right)^2 + (60)^2}$$

$$= 35{,}0 \pm 81{,}4$$

$$\sigma_1 = 116 \text{ MPa} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

$$\sigma_2 = -46{,}4 \text{ MPa} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

O plano principal sobre o qual atua cada tensão normal é determinado aplicando-se a Equação 9.1, com, digamos $\theta = \theta_{p_2} = -23{,}7°$. Temos:

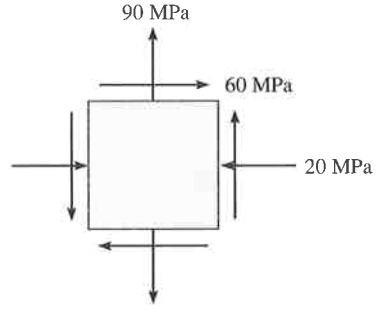
$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta$$

$$= \frac{-20 + 90}{2} + \frac{-20 - 90}{2} \cos 2(-23{,}7°) + 60 \operatorname{sen} 2(-23{,}7°)$$

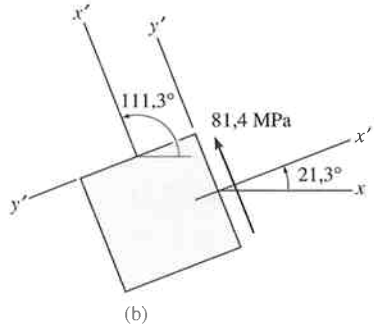
$$= -46{,}4 \text{ MPa}$$

Portanto, $\sigma_2 = -46{,}4$ MPa atua sobre o plano definido por $\theta_{p_2} = -23{,}7°$, enquanto $\sigma_1 = 116$ MPa atua sobre o plano definido por $\theta_{p_1} = 66{,}3°$. Os resultados estão mostrados no elemento da Figura 9.13*c*. Lembre-se de que nenhuma tensão de cisalhamento atua sobre esse elemento.

EXEMPLO 9.6



(a)



(b)

Figura 9.14

O estado plano de tensões em determinado ponto de um corpo é representado no elemento da Figura 9.14*a*. Representar esse estado de tensão em termos da tensão de cisalhamento máxima no plano e da tensão normal média a ela associada.

SOLUÇÃO

Orientação do Elemento. Como $\sigma_x = -20$ MPa, $\sigma_y = 90$ MPa, e $\tau_{xy} = 60$ MPa, aplicando a Equação 9.6, temos:

$$\operatorname{tg} 2\theta_c = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}} = \frac{-(-20 - 90)/2}{60}$$

$$2\theta_{c_2} = 42{,}5° \qquad \theta_{c_2} = 21{,}3°$$

$$2\theta_{c_1} = 180° + 2\theta_{c_2} \qquad \theta_{c_1} = 111{,}3°$$

Observe que esses ângulos mostrados na Figura 9.14*b* estão afastados 45° dos planos principais de tensão, como determina o Exemplo 9.5.

Tensão de Cisalhamento Máxima no Plano. Aplicando a Equação 9.7:

$$\tau_{\substack{\text{máx} \\ \text{no plano}}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2} = \sqrt{\left(\frac{-20 - 90}{2}\right)^2 + (60)^2}$$

$$= 81{,}4 \text{ MPa} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

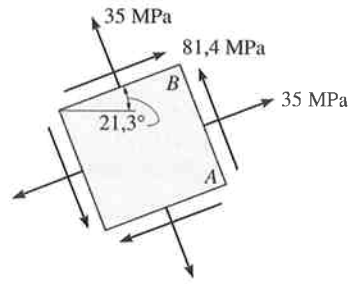
Determina-se a direção apropriada de $\tau_{\substack{\text{máx} \\ \text{no plano}}}$ no elemento considerando $\theta = \theta_{c_2} = 21{,}3°$ e aplicando a Equação 9.2. Temos:

$$\tau_{x'y'} = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$= -\left(\frac{-20 - 90}{2}\right) \operatorname{sen} 2(21{,}3°) + 60 \cos 2(21{,}3°)$$

$$= 81{,}4 \text{ MPa}$$

Assim, $\tau_{\text{máx}}_{\text{no plano}} = \tau_{x'y'}$ atua na direção *positiva* de y' sobre essa face ($\theta = 21{,}3°$) (Figura 9.14*b*). As tensões de cisalhamento nas outras três faces têm a orientação mostrada na Figura 9.14*c*.



(c)

Figura 9.14

Tensão Normal Média. Além da tensão de cisalhamento máxima, calculada anteriormente, o elemento também está submetido a uma tensão normal média determinada pela Equação 9.8; ou seja,

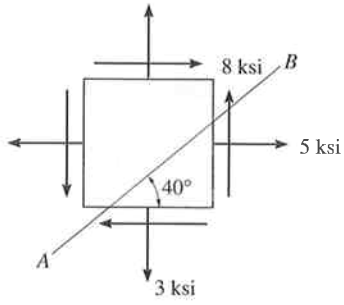
$$\sigma_{\text{méd}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{-20 + 90}{2} = 35 \text{ MPa} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Essa é uma tensão de tração. Os resultados são mostrados na Figura 9.14*c*.

PROBLEMAS

9.1. Provar que a soma das tensões normais $\sigma_x + \sigma_y = \sigma_{x'} + \sigma_{y'}$ é constante.

9.2. O estado de tensão em certo ponto de um componente é mostrado no elemento. Determinar os componentes de tensão que atuam sobre o plano inclinado AB. Resolver o problema pelo método do equilíbrio descrito na Seção 9.1.

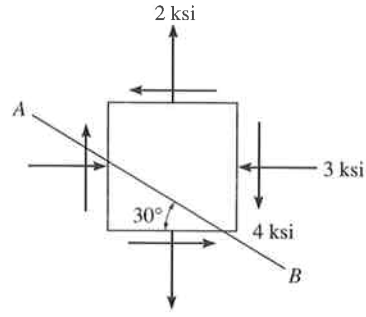


Problemas 9.2/9.3

9.3. Resolver o Problema 9.2 usando as equações de transformação de tensão desenvolvidas na Seção 9.2.

***9.4.** O estado de tensão em certo ponto de um componente é mostrado no elemento. Determinar os componentes de tensão que atuam sobre o plano inclinado AB. Resolver o problema pelo método do equilíbrio descrito na Seção 9.1.

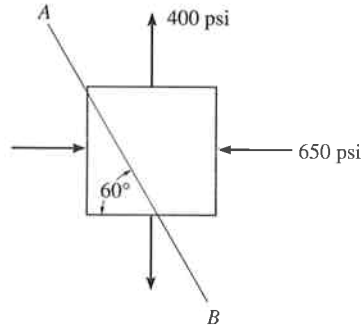
9.5. Resolver o Problema 9.4 usando as equações de transformação de tensão desenvolvidas na Seção 9.2. Mostrar o resultado em um desenho esquemático.



Problemas 9.4/9.5

9.6. O estado de tensão em certo ponto de um componente é mostrado no elemento. Determinar os componentes de tensão que atuam sobre o plano inclinado AB. Resolver o problema pelo método do equilíbrio descrito na Seção 9.1.

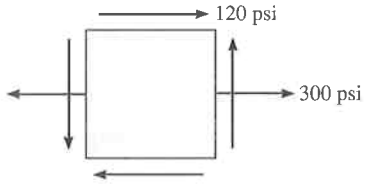
9.7. Resolver o Problema 9.6 usando as equações de transformação de tensão desenvolvidas na Seção 9.2.



Problemas 9.6/9.7

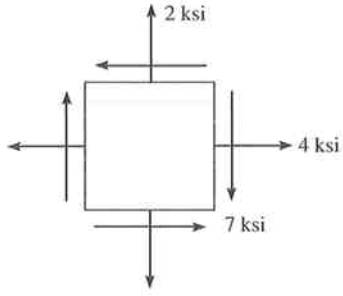
*9.8. Determinar o estado de tensão equivalente em um elemento se ele estiver orientado a 60° no sentido horário em relação ao elemento mostrado.

9.9. Determinar o estado de tensão equivalente em um elemento se ele estiver orientado a 30° no sentido anti-horário em relação ao elemento mostrado.



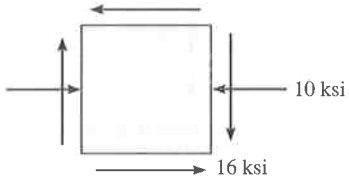
Problemas 9.8/9.9

9.10. O estado de tensão em um ponto é mostrado no elemento. Determinar (*a*) as tensões principais e (*b*) a tensão de cisalhamento máxima no plano e a tensão normal média no ponto. Especificar a orientação do elemento em cada caso.



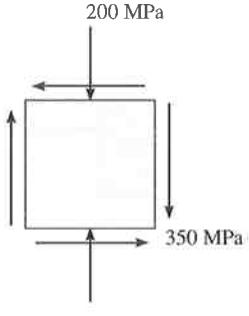
Problema 9.10

9.11. Determinar o estado de tensão equivalente em um elemento se ele estiver orientado a 50° no sentido anti-horário em relação ao elemento mostrado. Usar as equações de transformação de tensão.



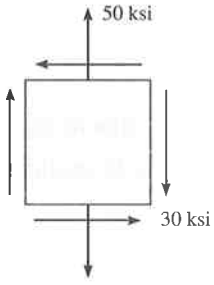
Problema 9.11

*9.12. O estado de tensão em um ponto é mostrado no elemento. Determinar (*a*) as tensões principais e (*b*) a tensão de cisalhamento máxima no plano e a tensão normal média no ponto. Especificar a orientação do elemento em cada caso.



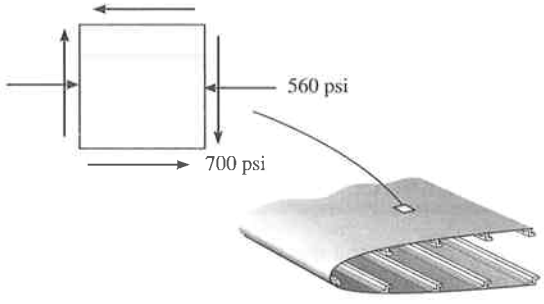
Problema 9.12

9.13. O estado de tensão em um ponto é mostrado no elemento. Determinar (*a*) as tensões principais e (*b*) a tensão de cisalhamento máxima no plano e a tensão normal média no ponto. Especificar a orientação do elemento em cada caso.



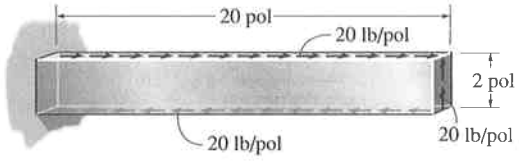
Problema 9.13

9.14. O estado de tensão em um ponto da superfície superior da asa do avião é mostrado no elemento. Determinar (*a*) as tensões principais e (*b*) a tensão de cisalhamento máxima no plano e a tensão normal média no ponto. Especificar a orientação do elemento em cada caso.



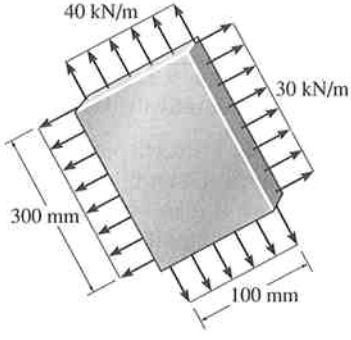
Problema 9.14

9.15. A barra de aço tem espessura de 0,5 pol e está submetida a carga na região mostrada. Determinar as tensões principais desenvolvidas na barra.



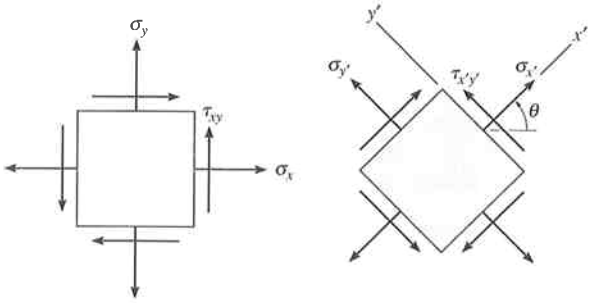
Problema 9.15

*9.16. A barra de aço tem espessura de 10 mm e está submetida a carga na região mostrada. Determinar a tensão de cisalhamento máxima no plano e a tensão normal média desenvolvida no aço.



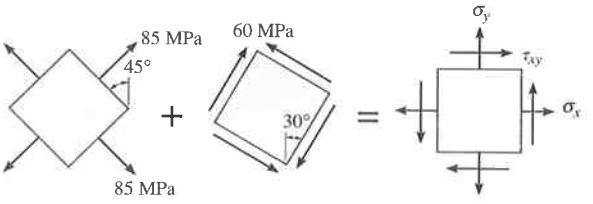
Problema 9.16

■**9.17.** Considerar o caso genérico de estado plano de tensões mostrado. Escrever um programa de computador que possa ser usado para determinar as tensões normal e de cisalhamento, $\sigma_{x'}$ e $\tau_{x'y'}$, no plano de um elemento orientado com o ângulo θ em relação à horizontal. Além disso, calcular as tensões principais, a tensão de cisalhamento máxima no plano, a tensão normal média e a orientação do elemento.



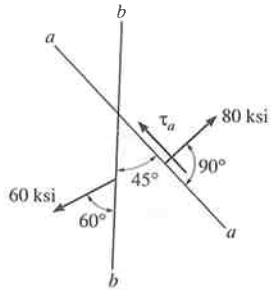
Problema 9.17

9.18. Certo ponto em uma chapa fina está submetido aos dois estados de tensão sucessivos mostrados. Determinar o estado de tensão resultante, representado no elemento que tem a orientação mostrada à direita.



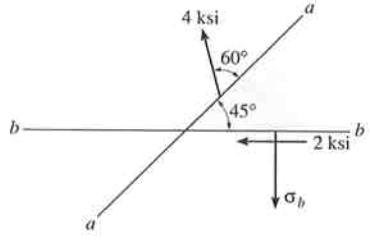
Problema 9.18

9.19. A tensão que atua sobre dois planos de certo ponto está indicada. Determinar a tensão de cisalhamento no plano a–a e as tensões principais no ponto.



Problema 9.19

*__9.20.__ A tensão que atua sobre dois planos de certo ponto está indicada. Determinar a tensão normal σ_b e as tensões principais no ponto.

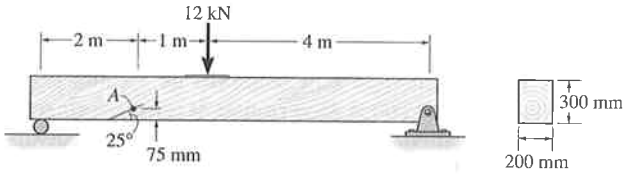


Problema 9.20

Os problemas seguintes envolvem assuntos discutidos no Capítulo 8.

9.21. A viga de madeira está sujeita a uma carga de 12 kN. Supondo que as fibras da madeira no ponto A formem um ângulo de 25° com a horizontal, como mostrado, determinar as tensões normal e de cisalhamento que atuam perpendicular e paralelamente a tais fibras em virtude do carregamento.

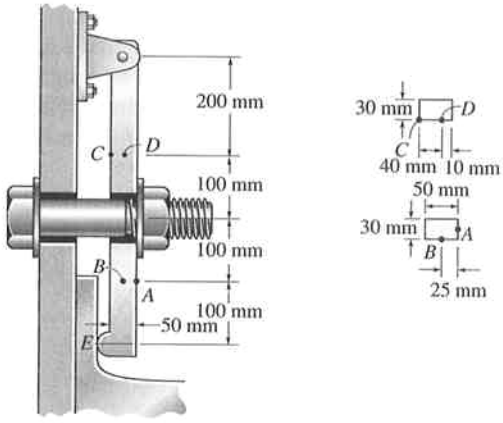
9.22. A viga de madeira está sujeita a uma carga de 12 kN. Determinar as tensões principais no ponto A e especificar a orientação do elemento.



Problemas 9.21/9.22

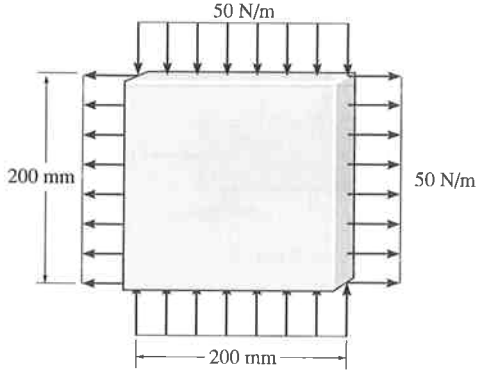
9.23. O fixador força a superfície lisa em E quando se aperta o parafuso. Supondo que a força de tração no parafuso seja de 40 kN, determinar as tensões principais nos pontos A e B e mostrar os resultados em elementos localizados em cada um desses pontos. A área da seção transversal em A e B é mostrada na figura ao lado.

*__9.24.__ Resolver o Problema 9.23 para os pontos C e D.



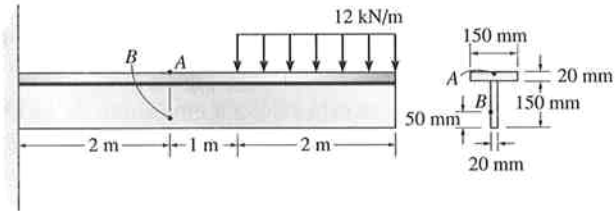
Problemas 9.23/9.24

9.25. A placa de aço de seção quadrada tem espessura de 10 mm e está sujeita a carga na região mostrada. Determinar a tensão de cisalhamento máxima no plano e a tensão normal média desenvolvidas no aço.



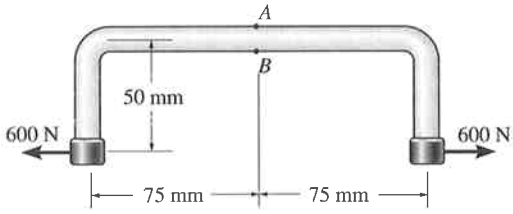
Problema 9.25

9.26. A viga T está submetida à carga distribuída que é aplicada ao longo da sua linha de centro. Determinar as tensões principais nos pontos A e B e mostrar os resultados em elementos localizados nesses pontos.



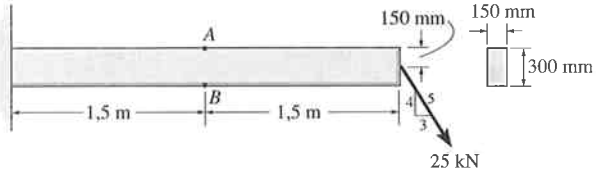
Problema 9.26

9.27. A barra encurvada tem diâmetro de 15 mm e está submetida à força de 600 N. Determinar as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima no plano desenvolvidas nos pontos A e B. Mostrar os resultados em elementos, adequadamente orientados, localizados nesses pontos.



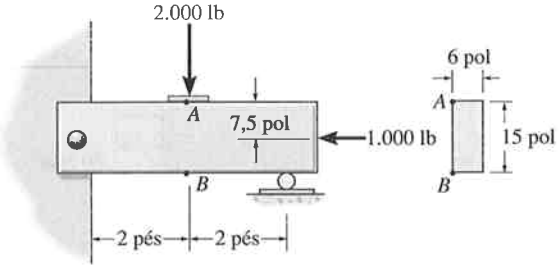
Problema 9.27

***9.28.** A viga tem seção transversal retangular e está sujeita às cargas mostradas. Determinar as tensões principais e de cisalhamento máxima no plano que se desenvolvem nos pontos A e B. Mostrar os resultados em elementos, adequadamente orientados, localizados nesses pontos.



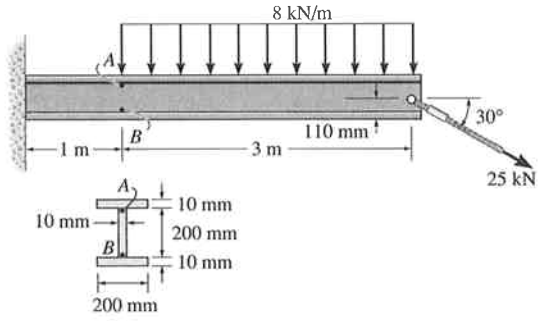
Problema 9.28

9.29. A viga tem seção transversal retangular e está sujeita às cargas mostradas. Determinar as tensões principais e de cisalhamento máxima no plano que se desenvolvem nos pontos A e B. Os pontos estão à esquerda da carga de 2.000 lb. Mostrar os resultados em elementos, adequadamente orientados, localizados nesses pontos.



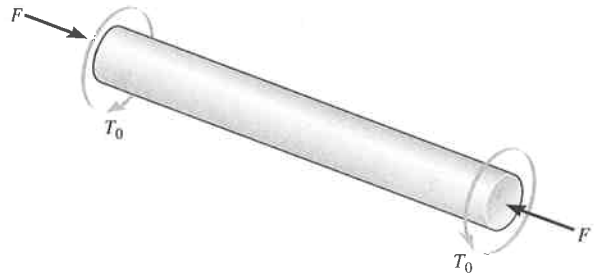
Problema 9.29

9.30. A viga de abas largas está submetida às cargas mostradas. Determinar a tensão principal nos pontos A e B. Esses pontos estão localizados nas partes superior e inferior da alma, respectivamente. Apesar de não ser muito precisa, usar a fórmula do cisalhamento para calcular a tensão de cisalhamento.



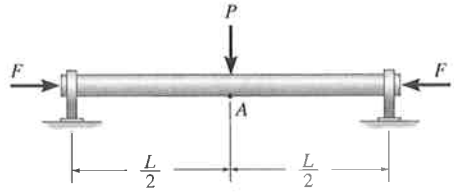
Problema 9.30

9.31. O eixo tem diâmetro d e está submetido às cargas mostradas. Determinar as tensões principais e de cisalhamento máxima no plano que se desenvolvem em qualquer lugar da superfície do eixo.



Problema 9.31

***9.32.** O eixo tem diâmetro d e está submetido às cargas mostradas. Determinar as tensões principais e de cisalhamento máxima no plano que se desenvolvem no ponto A. Os mancais suportam apenas cargas verticais.

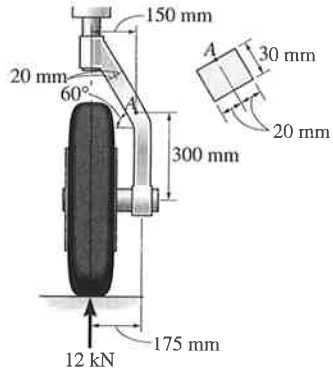


Problema 9.32

9.33. Uma haste tem seção transversal circular com diâmetro de 2 pol. Ela está submetida a um torque de 12 kip. pol e a um momento fletor **M**. A maior tensão principal no ponto de tensão de flexão máxima é 15 kip. Determinar a intensidade do momento fletor.

Problema 9.33

9.34. A roda dianteira de um avião está submetida a uma carga de projeto de 12 kN. Determinar as tensões principais que atuam no ponto A do suporte de alumínio da roda.

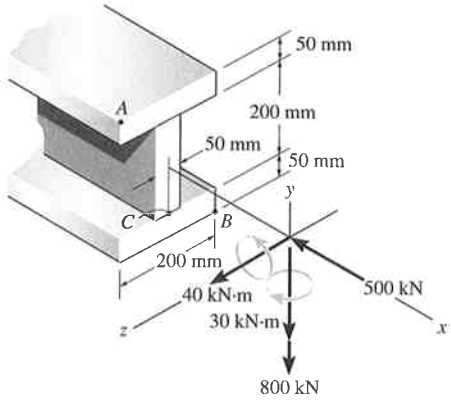


Problema 9.34

9.35. As cargas internas na seção da viga estão mostradas. Determinar as tensões principais no ponto A. Calcular também a tensão de cisalhamento máxima no plano nesse ponto.

***9.36.** Resolver o Problema 9.35 para o ponto B.

9.37. Resolver o Problema 9.35 para o ponto C, localizado no centro da parte inferior da alma.

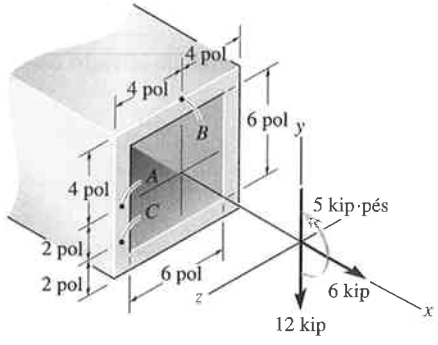


Problemas 9.35/9.36/9.37

9.38. As cargas internas na seção da viga consistem de uma carga axial de 6 kip, uma força cortante de 12 kip e um momento fletor de 5 kip · pés. Determinar as tensões principais no ponto A. Calcular também a tensão de cisalhamento máxima no plano nesse ponto.

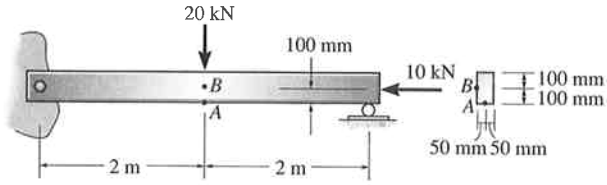
9.39. Resolver o Problema 9.38 para o ponto B.

***9.40.** Resolver o Problema 9.38 para o ponto C.



Problemas 9.38/9.39/9.40

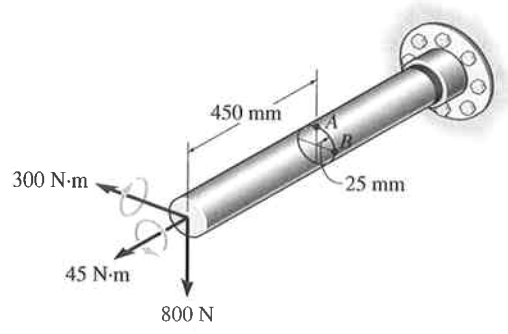
9.41. A viga tem seção transversal retangular e está submetida às cargas mostradas. Determinar as tensões principais desenvolvidas nos pontos A e B, localizados à esquerda da carga de 20 kN. Mostrar os resultados em elementos localizados nesses pontos.



Problema 9.41

9.42. O eixo maciço está sujeito a torque, a momento fletor e a força cortante como mostrado. Determinar as tensões principais que atuam no ponto A.

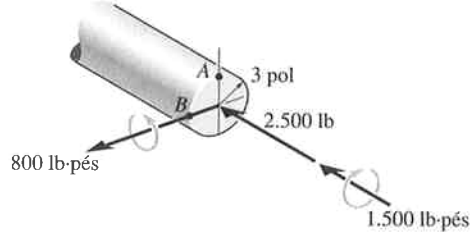
9.43. Resolver o Problema 9.42 para o ponto B.



Problemas 9.42/9.43

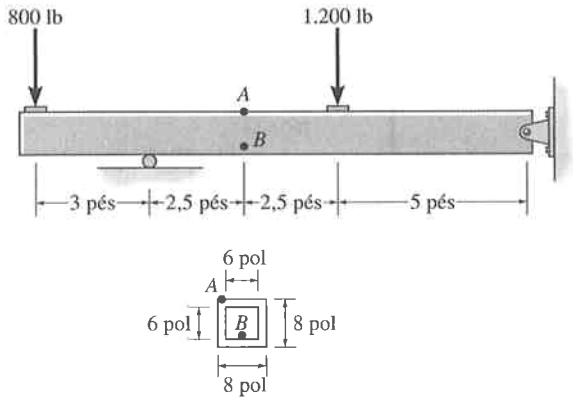
***9.44.** As cargas internas na seção transversal do eixo de acionamento de uma turbina (cujo diâmetro é de 6 pol) consistem de uma força axial de 2.500 lb, um momento fletor de 800 lb · pés e um momento de torção de 1.500 lb · pés. Determinar as tensões principais no ponto A. Calcular também a tensão de cisalhamento máxima no plano nesse ponto.

9.45. As cargas internas na seção transversal do eixo de acionamento de uma turbina (cujo diâmetro é de 6 pol) consistem de uma força axial de 2.500 lb, um momento fletor de 800 lb · pés e um momento de torção de 1.500 lb · pés. Determinar as tensões principais no ponto B. Calcular também a tensão de cisalhamento máxima no plano nesse ponto.



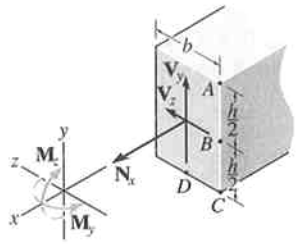
Problemas 9.44/9.45

9.46. A viga-caixão está sujeita ao carregamento mostrado. Determinar as tensões principais nos pontos A e B.



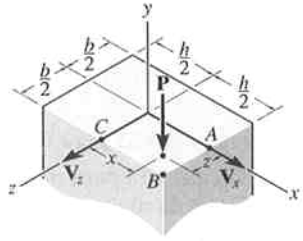
Problema 9.46

9.47. A viga tem seção transversal retangular e está submetida às cargas mostradas. Escrever um programa de computador que possa ser usado para determinar as tensões principais nos pontos A, B, C e D. Mostrar uma aplicação do programa usando os valores $h = 12$ pol, $b = 8$ pol, $N_x = 400$ lb, $V_y = 300$ lb, $V_z = 0$, $M_y = 0$ e $M_z = -150$ lb · pés.



Problema 9.47

***9.48.** O elemento tem seção transversal retangular e está submetido ao carregamento mostrado. Escrever um programa de computador que possa ser usado para determinar as tensões principais nos pontos A, B e C. Mostrar uma aplicação do programa usando os valores $b = 150$ mm, $h = 200$ mm, $P = 1{,}5$ kN, $x = 75$ mm, $z = -50$ mm, $V_x = 300$ N e $V_z = 600$ N.



Problema 9.48

9.4 CÍRCULO DE MOHR — ESTADO PLANO DE TENSÕES

Mostraremos nesta seção que as equações de transformação para o estado plano de tensões têm uma solução gráfica que, em geral, é fácil de usar e lembrar. Além disso, essa abordagem permite-nos 'visualizar' como os componentes das tensões normal e de cisalhamento, $\sigma_{x'}$ e $\tau_{x'y'}$, variam conforme o plano em que atuam esteja orientado em direções diferentes (Figura 9.15*a*).

As equações 9.1 e 9.2 podem ser reescritas sob a forma:

$$\sigma_{x'} - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \cos 2\theta + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \tag{9.9}$$

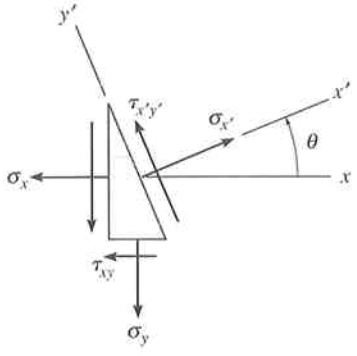
$$\tau_{x'y'} = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \tag{9.10}$$

O parâmetro θ pode ser *eliminado* elevando-se ao quadrado cada uma das equações e adicionando-as. O resultado é:

$$\left[\sigma_{x'} - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)\right]^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

Para um problema específico, σ_x, σ_y e τ_{xy} serão *constantes conhecidas*. Desse modo, a equação anterior será escrita de forma mais compacta:

$$(\sigma_{x'} - \sigma_{\text{méd}})^2 + \tau_{x'y'}^2 = R^2 \tag{9.11}$$



(a)

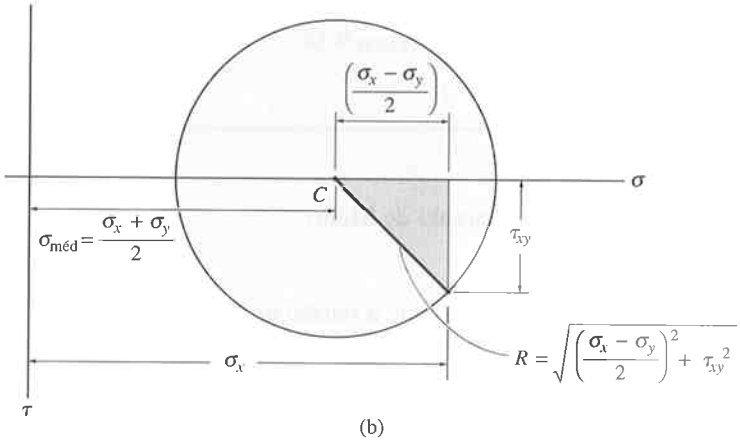
Figura 9.15

onde:

$$\sigma_{méd} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{9.12}$$

Se estabelecermos eixos coordenados em que *σ seja positivo para a direita* e *τ positivo para baixo* e representarmos a Equação 9.11, veremos que ela forma um *círculo* de raio R e centro $C(\sigma_{méd}, 0)$ no eixo σ (Figura 9.15*b*). Esse círculo é chamado *círculo de Mohr* porque foi desenvolvido pelo engenheiro alemão Otto Mohr.



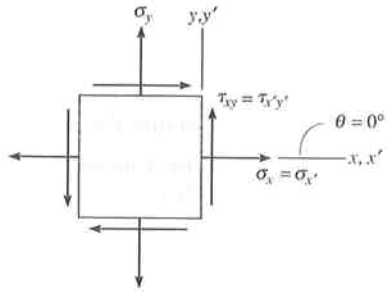
(b)

Figura 9.15

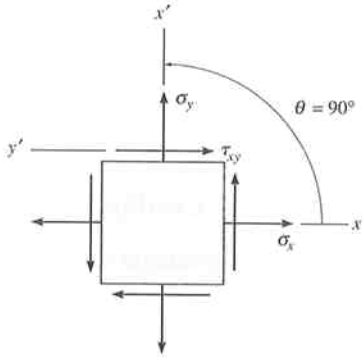
Para desenhar o círculo de Mohr é necessário definir primeiro os eixos σ e τ (Figura 9.16*c*). Como os componentes de tensão σ_x, σ_y, τ_{xy} são conhecidos, o centro do círculo, $C(\sigma_{méd}, 0)$, pode ser marcado. Para obter o raio, precisamos conhecer pelo menos um ponto do círculo. Consideremos o caso em que o eixo x' coincide com o eixo x, como ilustra a Figura 9.16*a*. Então $\theta = 0°$ e $\sigma_{x'} = \sigma_x$, $\tau_{x'y'} = \tau_{xy}$. Vamos nos referir a essa condição como o 'ponto de referência' A e marcar suas coordenadas $A(\sigma_x, \tau_{xy})$ (Figura 9.16*c*). Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo sombreado, podemos determinar o raio R, que coincidirá com o obtido pela Equação 9.12. Conhecidos os pontos C e A, traçamos o círculo como mostra a figura.

Consideremos agora o eixo x' girado 90° no sentido anti-horário (Figura 9.16*b*). Então $\sigma_{x'} = \sigma_y$, $\tau_{x'y'} = -\tau_{xy}$. Esses valores são as coordenadas do ponto $G(\sigma_y, -\tau_{xy})$ do círculo (Figura 9.16*c*). Então, a linha radial CG está a 180° no sentido anti-horário da 'linha de referência' CA. Em outras palavras, uma rotação θ do eixo x' no elemento corresponde a uma rotação 2θ no círculo na *mesma direção*.[2]

Uma vez definido, o círculo de Mohr é usado para determinar as tensões principais, a tensão de cisalhamento máxima no plano e a tensão normal média a ela associada ou, ainda, a tensão em qualquer plano arbitrário. O método é explicado no procedimento de análise que segue.



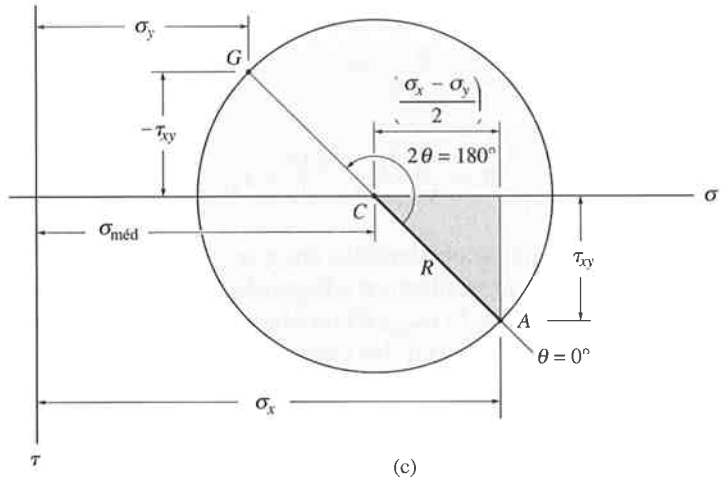
(a)



(b)

Figura 9.16

[2] Se, em vez disso, o eixo τ fosse construído com a *direção positiva para cima*, então o ângulo 2θ no círculo seria medido no *sentido oposto* à orientação θ do plano.



(c)

Figura 9.16

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

Os seguintes passos são necessários para se desenhar e usar o círculo de Mohr.

Construção do Círculo.

- Estabelecer um sistema de coordenadas tal que a abscissa represente a tensão normal σ, com sentido *positivo para a direita*, e a ordenada represente a tensão de cisalhamento τ, com sentido *positivo para baixo* (Figura 9.17*a*).†
- Usando a convenção de sinal positiva para σ_x,σ_y, τ_{xy}, como mostra a Figura 9.17*b*, marcamos o centro do círculo, localizado no eixo σ a uma distância $\sigma_{méd} = (\sigma_x + \sigma_y)/2$ da origem (Figura 9.17*a*).
- Marcar o 'ponto de referência' A de coordenadas $A(\sigma_x, \tau_{xy})$. Esse ponto representa os componentes das tensões normal e de cisalhamento na face vertical direita do elemento e, como o eixo x' coincide com o eixo x, isso significa que $\theta = 0°$ (Figura 9.17*b*).
- Unir o ponto A ao centro C e determinar CA por trigonometria. Essa distância representa o raio R do círculo (Figura 9.17*a*).
- Uma vez determinado R, traçar o círculo.

Tensões Principais.

- As tensões principais σ_1 e σ_2 $[\sigma_1 \geq \sigma_2]$ são representadas pelos pontos B e D em que o círculo intercepta o eixo σ, ou seja, onde $\tau = 0$ (Figura 9.17*a*).
- Essas tensões atuam sobre os planos definidos pelos ângulos θ_{p_1} e θ_{p_2} (Figura 9.17*c*). Eles são representados no círculo pelos ângulos $2\theta_{p_1}$ (mostrado) e $2\theta_{p_2}$ (não mostrado) e medidos *da* linha de referência radial CA *para* as linhas CB e CD, respectivamente.
- Apenas um desses ângulos precisa ser calculado pelo círculo, usando-se trigonometria, uma vez que θ_{p_1} e θ_{p_2} estão 90° afastados. Lembrar que a direção da rotação no círculo $2\theta_p$ (nesse caso no sentido anti-horário) representa a *mesma* direção de rotação θ_p a partir do eixo de referência $(+x)$ para o plano principal $(+x')$ (Figura 9.17*c*).†

Tensão de Cisalhamento Máxima no Plano.

- Os componentes da tensão normal média e da tensão de cisalhamento máxima no plano são determinados a partir do círculo como as coordenadas tanto do ponto E como do ponto F (Figura 9.17*a*).
- Nesse caso, os ângulos θ_{c_1} e θ_{c_2} dão a orientação dos planos que contêm os componentes (Figura 9.17*d*). O ângulo $2\theta_{c_1}$ é mostrado na Figura 9.17*a* e determinado por trigonometria.
- Nesse caso a rotação ocorre no sentido horário e, desse modo, θ_{c_1} deve estar no sentido horário no elemento (Figura 9.17*d*).†

(Continuação)

Tensões no Plano Arbitrário.

- Os componentes das tensões normal e de cisalhamento $\sigma_{x'}$ e $\tau_{x'y'}$ que atuam sobre um plano especificado definido pelo ângulo θ (Figura 9.17*e*) são obtidos no círculo usando-se trigonometria para determinar as coordenadas do ponto P (Figura 9.17*a*).
- Para localizar P, o ângulo conhecido para o plano θ (nesse caso no sentido anti-horário) (Figura 9.17*e*) deve ser medido no círculo na *mesma direção* de 2θ (sentido anti-horário), *da* linha de referência CA *para* a linha radial CP (Figura 9.17*a*).†

† Se, ao contrário, o eixo τ fosse construído com a *direção positiva para cima*, então o ângulo 2θ no círculo seria medido *no sentido oposto* à orientação θ do plano.

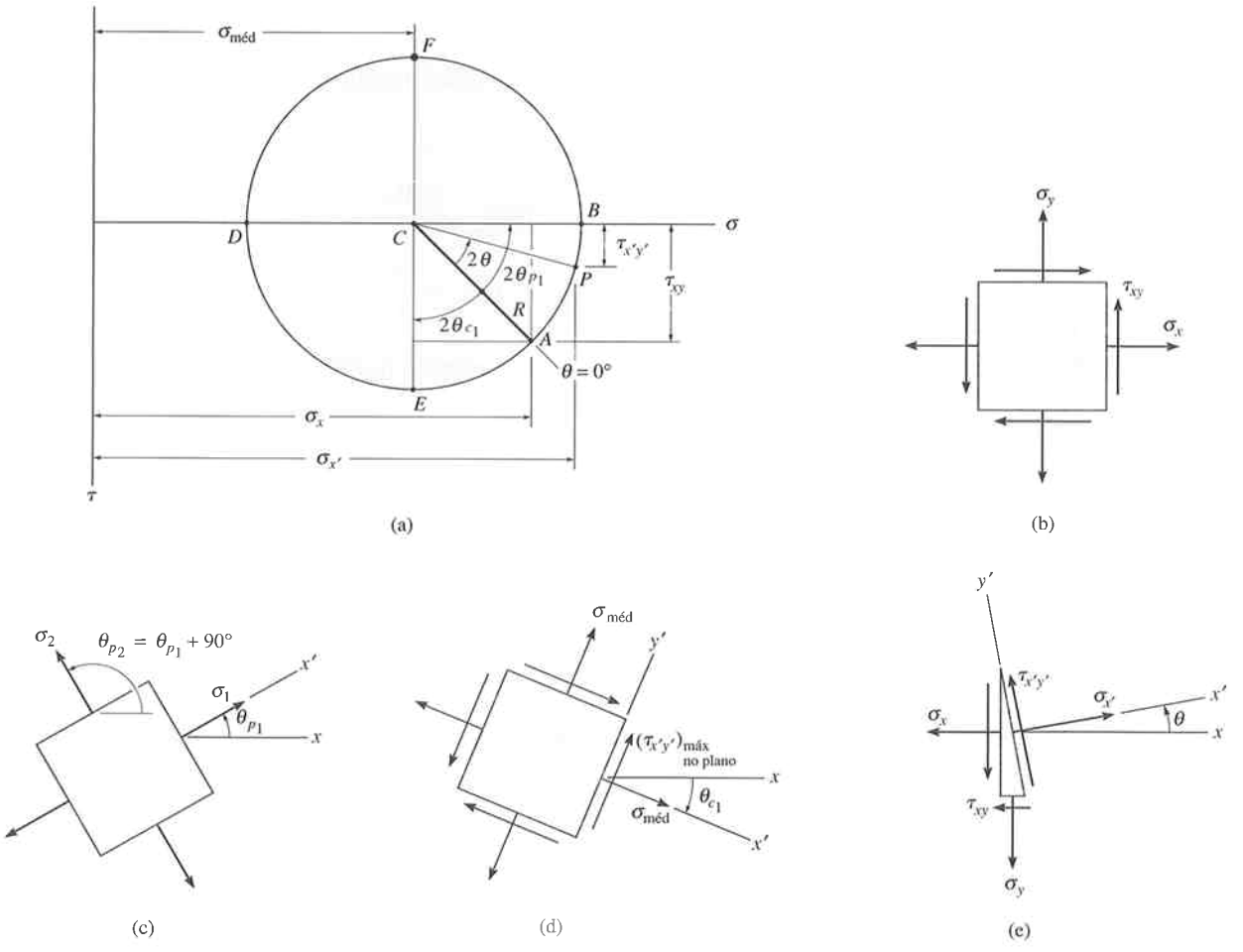


Figura 9.17

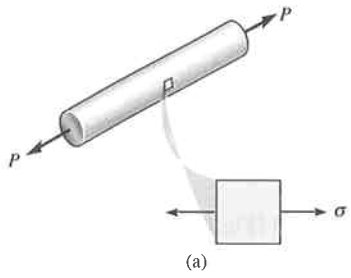
EXEMPLO 9.7

A carga axial P produz, no material, o estado de tensão mostrado na Figura 9.18*a*. Desenhar o círculo de Mohr para esse caso.

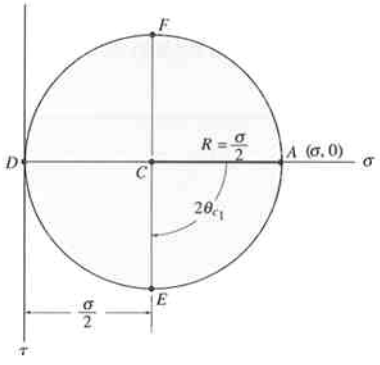
SOLUÇÃO

Construção do Círculo. Pela Figura 9.18*a*:

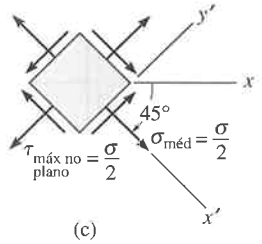
$$\sigma_x = \sigma \qquad \sigma_y = 0 \qquad \tau_{xy} = 0$$



(a)



(b)



(c)

Figura 9.18

Os eixos σ e τ estão estabelecidos na Figura 9.18*b*. O centro C do círculo está no eixo σ em:

$$\sigma_{\text{méd}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma + 0}{2} = \frac{\sigma}{2}$$

Pela face direita do elemento (Figura 9.18*a*), o ponto de referência de $\theta = 0°$ tem coordenadas $A(\sigma, 0)$. Portanto, o raio CA do círculo é $R = \sigma/2$ (Figura 9.18*b*).

Tensões. Observe que as tensões principais estão nos pontos A e D.

$$\sigma_1 = \sigma \qquad \sigma_2 = 0$$

O elemento da Figura 9.18*a* representa esse estado de tensões principais.

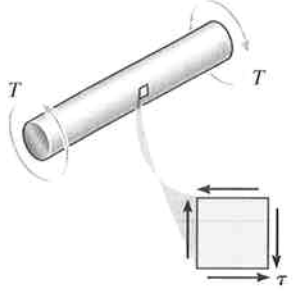
A tensão de cisalhamento máxima no plano e a tensão normal média a ela associada são identificadas no círculo como os pontos E ou F (Figura 9.18*b*). Em E, temos:

$$\tau_{\substack{\text{máx} \\ \text{no plano}}} = \frac{\sigma}{2}$$

$$\sigma_{\text{méd}} = \frac{\sigma}{2}$$

Por observação, o ângulo no sentido horário é $2\theta_{c_1} = 90°$. Portanto $\theta_{c_1} = 45°$, de modo que o eixo x' está orientado a 45° no sentido horário a partir do eixo x (Figura 9.18*c*). Como E tem coordenadas positivas, $\sigma_{\text{méd}}$ e $\tau_{\substack{\text{máx} \\ \text{no plano}}}$ atuam nas direções positivas de x' e y', respectivamente.

EXEMPLO 9.8



(a)

Figura 9.19

A carga de torção T produz, no eixo, o estado de tensão mostrado na Figura 9.19*a*. Desenhar o círculo de Mohr para esse caso.

SOLUÇÃO

Construção do Círculo. Pela Figura 9.19*a*:

$$\sigma_x = 0 \qquad \sigma_y = 0 \qquad \tau_{xy} = -\tau$$

Os eixos σ e τ estão estabelecidos na Figura 9.19*b*. O centro C do círculo está no eixo σ em:

$$\sigma_{\text{méd}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{0 + 0}{2} = 0$$

Pela face direita do elemento (Figura 9.19*a*), o ponto de referência de $\theta = 0°$ tem coordenadas $A(0, -\tau)$ (Figura 9.19*b*). Portanto, o raio CA do círculo é $R = \tau$.

Tensões. Aqui o ponto A representa um ponto de tensão normal média e tensão de cisalhamento máxima no plano (Figura 9.19*b*). Então:

$$\tau_{\substack{\text{máx}\\ \text{no plano}}} = -\tau$$

$$\sigma_{\text{méd}} = 0$$

As tensões principais são identificadas como os pontos B e D no círculo. Assim:

$$\sigma_1 = \tau$$

$$\sigma_2 = -\tau$$

O ângulo no sentido horário indo de CA para CB é $2\theta_{p_1} = 90°$, de modo que $\theta_{p_1} = 45°$. Esse ângulo no sentido horário define a direção de σ_1 (ou do eixo x'). Os resultados são mostrados na Figura 9.19*c*.

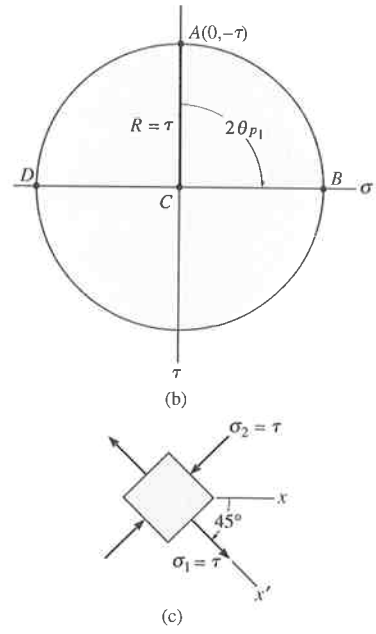
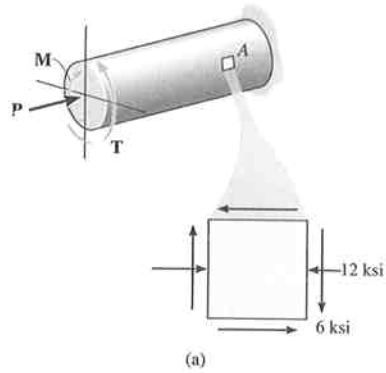


Figura 9.19

EXEMPLO 9.9

Devido à carga aplicada, o elemento no ponto A do cilindro maciço da Figura 9.20*a* está sujeito ao estado de tensão mostrado. Determinar as tensões principais que atuam nesse ponto.



SOLUÇÃO

Construção do Círculo. Pela Figura 9.20*a*:

$$\sigma_x = -12 \text{ ksi} \qquad \sigma_y = 0 \qquad \tau_{xy} = -6 \text{ ksi}$$

O centro do círculo está em:

$$\sigma_{\text{méd}} = \frac{-12 + 0}{2} = -6 \text{ ksi}$$

O ponto inicial $A(-12, -6)$ e o centro $C(-6, 0)$ estão representados na Figura 9.20*b*. O círculo é construído com raio de:

$$R = \sqrt{(12 - 6)^2 + (6)^2} = 8{,}49 \text{ ksi}$$

Tensões Principais. As tensões principais estão indicadas pelas coordenadas dos pontos B e D. Temos, para $\sigma_1 > \sigma_2$,

$$\sigma_1 = 8{,}49 - 6 = 2{,}49 \text{ ksi} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

$$\sigma_2 = -6 - 8.49 = -14{,}5 \text{ ksi} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

A orientação do elemento pode ser determinada calculando-se o *ângulo no sentido anti-horário* $2\theta_{p_2}$ na Figura 9.20*b*, que define a direção θ_{p_2} de σ_2 e seu plano principal associado. Temos:

$$2\theta_{p_2} = \text{tg}^{-1}\frac{6}{(12 - 6)} = 45{,}0°$$

$$\theta_{p_2} = 22{,}5°$$

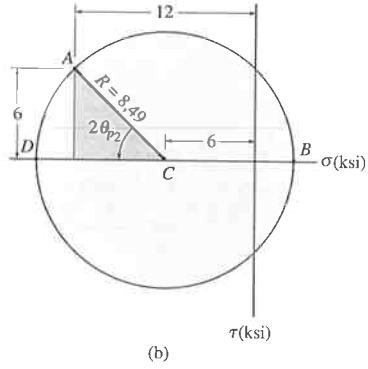


Figura 9.20

O elemento está orientado de tal modo que o eixo x' ou σ_2 é direcionado a 22,5° no *sentido anti-horário* a partir da horizontal (eixo x) como mostra a Figura 9.20*c*.

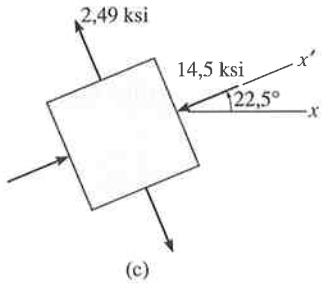


Figura 9.20

EXEMPLO 9.10

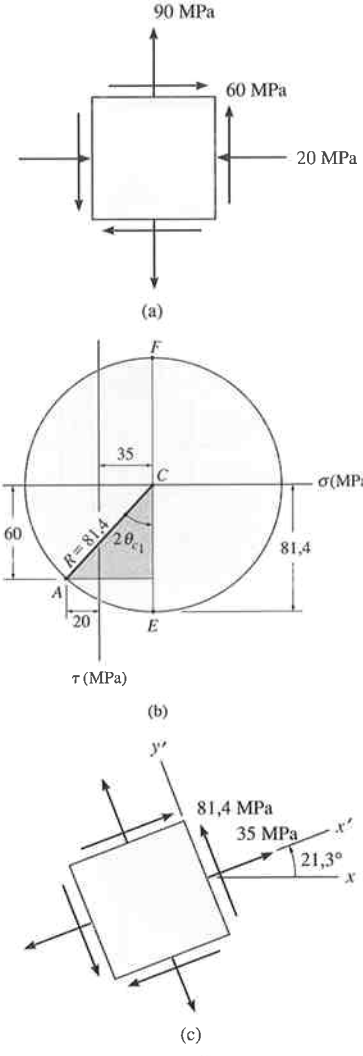


Figura 9.21

O estado plano de tensões em um ponto é mostrado no elemento da Figura 9.21*a*. Determinar as tensões de cisalhamento máximas no plano e a orientação do elemento sobre o qual elas atuam.

SOLUÇÃO

Construção do Círculo. Pelos dados do problema:

$$\sigma_x = -20 \text{ MPa} \qquad \sigma_y = 90 \text{ MPa} \qquad \tau_{xy} = 60 \text{ MPa}$$

Os eixos σ, τ estão definidos na Figura 9.21*b*. O centro C do círculo está localizado sobre o eixo σ no ponto:

$$\sigma_{méd} = \frac{-20 + 90}{2} = 35 \text{ MPa}$$

O ponto C e o ponto de referência $A(-20, 60)$ estão representados. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo sombreado para determinar o raio CA do círculo, temos:

$$R = \sqrt{(60)^2 + (55)^2} = 81{,}4 \text{ MPa}$$

Tensão de Cisalhamento Máxima no Plano. A tensão de cisalhamento máxima no plano e a tensão normal média são identificadas pelos pontos E ou F do círculo. Em particular, as coordenadas do ponto $E(35, 81{,}4)$ resultam em:

$$\tau_{\substack{máx \\ no\ plano}} = 81{,}4 \text{ MPa} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

$$\sigma_{méd} = 35 \text{ MPa} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

O ângulo no *sentido anti-horário* θ_{s_1} é identificado no círculo como $2\theta_{c_1}$. Temos:

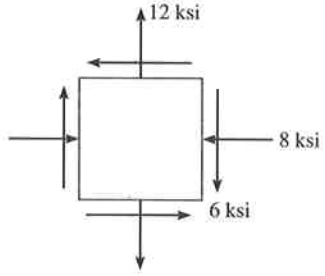
$$2\theta_{c_1} = \text{tg}^{-1}\left(\frac{20 + 35}{60}\right) = 42{,}5°$$

$$\theta_{c_1} = 21{,}3° \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Esse ângulo no *sentido anti-horário* define a direção do eixo x' (Figura 9.21*c*). Como o ponto E tem coordenadas *positivas*, a tensão normal média e a tensão de cisalhamento máxima no plano atuam nas direções *positivas* de x' e y' como mostrado.

EXEMPLO 9.11

O estado plano de tensões em determinado ponto é mostrado no elemento da Figura 9.22*a*. Representar esse estado de tensão em um elemento orientado a 30° no sentido anti-horário em relação à posição mostrada.



(a)

SOLUÇÃO

Construção do Círculo. Pelos dados do problema:

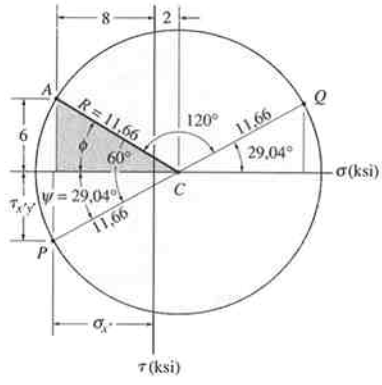
$$\sigma_x = -8 \text{ ksi} \qquad \sigma_y = 12 \text{ ksi} \qquad \tau_{xy} = -6 \text{ ksi}$$

Os eixos σ e τ estão definidos na Figura 9.22*b*. O centro C do círculo está localizado sobre o eixo σ em:

$$\sigma_{\text{méd}} = \frac{-8 + 12}{2} = 2 \text{ ksi}$$

O ponto inicial para $\theta = 0°$ tem coordenadas $A(-8, -6)$. Assim, pelo triângulo sombreado o raio CA é:

$$R = \sqrt{(10)^2 + (6)^2} = 11{,}66$$



(b)

Tensões em um Elemento a 30°. Como o elemento será girado 30° no *sentido anti-horário*, devemos construir uma linha radial CP, $2(30°) = 60°$ no *sentido anti-horário*, medida a partir de CA ($\theta = 0°$) (Figura 9.22*b*). Devemos agora determinar as coordenadas do ponto P ($\sigma_{x'}$, $\tau_{x'y'}$). Pela geometria do círculo:

$$\phi = \text{tg}^{-1}\frac{6}{10} = 30{,}96° \qquad \psi = 60° - 30{,}96° = 29{,}04°$$

$$\sigma_{x'} = 2 - 11{,}66 \cos 29{,}04° = -8{,}20 \text{ ksi} \qquad \textit{Resposta}$$

$$\tau_{x'y'} = 11{,}66 \text{ sen } 29{,}04° = 5{,}66 \text{ ksi} \qquad \textit{Resposta}$$

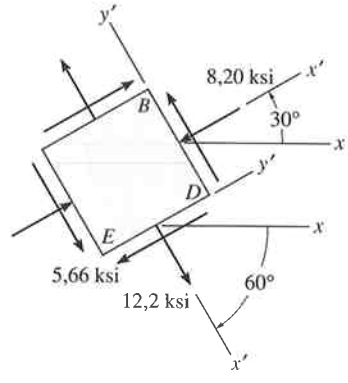
Esses dois componentes de tensão atuam sobre a face BD do elemento mostrado na Figura 9.22*c*, visto que x' para essa face está orientado a 30° no sentido anti-horário em relação ao eixo x.

Os componentes de tensão que atuam sobre a face adjacente DE do elemento, a qual está a 60° no *sentido horário* do eixo x positivo (Figura 9.22*c*), são representados pelas coordenadas do ponto Q do círculo. Esse ponto localiza-se na linha radial CQ, que está a 180° de CP. As coordenadas do ponto Q são:

$$\sigma_{x'} = 2 + 11{,}66 \cos 29{,}04° = 12{,}2 \text{ ksi} \qquad \textit{Resposta}$$

$$\tau_{x'y'} = -(11{,}66 \text{ sen } 29{,}04) = -5{,}66 \text{ ksi} \qquad \text{(verificar)}$$

Observe que, neste caso, $\tau_{x'y'}$ atua na direção $-y'$.



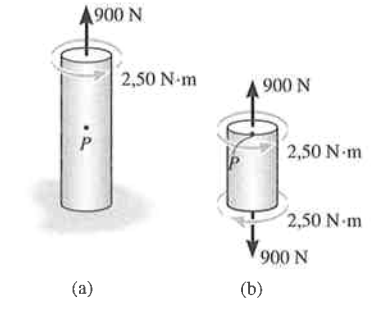
(c)

Figura 9.22

9.5 TENSÃO EM EIXOS QUE SE DEVE À CARGA AXIAL E À TORÇÃO

Ocasionalmente, os eixos circulares são submetidos a efeitos combinados de carga axial e torção. Desde que o material permaneça linear-elástico e esteja sujeito apenas a pequenas deformações, podemos usar o princípio de superposição para obter a tensão resultante no eixo devida a ambas as cargas. As tensões principais são determinadas tanto pelas equações de transformação de tensão como pelo círculo de Mohr.

EXEMPLO 9.12



Uma força axial de 900 N e um torque de 2,50 N · m estão aplicados ao eixo mostrado na Figura 9.23*a*. Supondo que o eixo tenha diâmetro de 40 mm, determinar as tensões principais no ponto *P* de sua superfície.

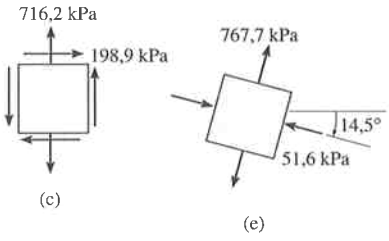
SOLUÇÃO

Cargas Internas. As cargas internas consistem no torque de 2,50 N · m e na carga axial de 900 N (Figura 9.23*b*).

Componentes de Tensão. As tensões produzidas no ponto *P* são, portanto:

$$\tau = \frac{Tc}{J} = \frac{2{,}50\ \text{N} \cdot \text{m}\ (0{,}02\ \text{m})}{\frac{\pi}{2}(0{,}02\ \text{m})^4} = 198{,}9\ \text{kPa}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{900\ \text{N}}{\pi(0{,}02\ \text{m})^2} = 716{,}2\ \text{kPa}$$



O estado de tensão definido por esses dois componentes é mostrado em um elemento extraído do ponto *P* (Figura 9.23*c*).

Tensões Principais. As tensões principais são determinadas usando-se o círculo de Mohr (Figura 9.23*d*). Nesse caso, o centro *C* do círculo está no ponto:

$$\sigma_{\text{méd}} = \frac{0 + 716{,}2}{2} = 358{,}1\ \text{kPa}$$

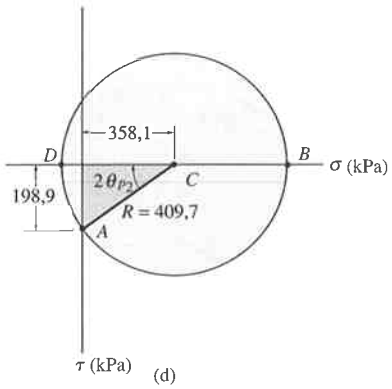


Figura 9.23

Representando graficamente *C*(358,1, 0) e o ponto de referência *A*(0, 198,9), mostre que o raio do círculo é *R* = 409,7. As tensões principais são representadas pelos pontos *B* e *D*. Portanto:

$$\sigma_1 = 358{,}1 + 409{,}7 = 767{,}8\ \text{kPa} \qquad \textit{Resposta}$$

$$\sigma_2 = 358{,}1 - 409{,}7 = -51{,}6\ \text{kPa} \qquad \textit{Resposta}$$

O ângulo no sentido horário $2\theta_{p_2}$ é determinado pelo círculo: $2\theta_{p_2} = 29{,}1°$. O elemento está orientado de modo que o eixo x' ou σ_2 está orientado a $\theta_{p_1} = 14{,}5°$ no sentido horário em relação ao eixo x, como mostra a Figura 9.23*e*.

9.6 VARIAÇÕES DE TENSÃO AO LONGO DE UMA VIGA PRISMÁTICA

Como as vigas resistem tanto a cisalhamento interno como a cargas de momento, a análise da tensão nelas desenvolvidas exige a aplicação das fórmulas de cisalhamento e de flexão. Vamos discutir aqui os resultados gerais obtidos quando essas equações são aplicadas a vários pontos de uma viga em balanço; tal viga possui seção transversal retangular e suporta uma carga **P** na extremidade (Figura 9.24*a*).

Em geral, em uma seção arbitrária *a–a* ao longo do eixo da viga (Figura 9.24*b*), o cisalhamento interno **V** e o momento **M** desenvolvem-se a partir de uma distribuição *parabólica* da tensão de cisalhamento e de uma distribuição *linear* da tensão normal (Figura 9.24*c*). Como resultado, as tensões que atuam sobre elementos localizados nos pontos 1 a 5 ao longo da seção serão como as mostradas na Figura 9.24*d*. Observe que os elementos 1 e 5 estão sujeitos apenas à tensão normal máxima, enquanto o elemento 3, localizado no eixo neutro, está sujeito apenas à tensão de cisalhamento máxima. Os elementos intermediários 2 e 4 resistem *tanto* a tensão normal *como* a tensão de cisalhamento.

Em cada caso, o estado de tensão pode ser transformado em *tensões principais* pelas equações de transformação de tensão ou pelo círculo de Mohr. Os resultados são mostrados na Figura 9.24*e*. Nesse caso, cada elemento sucessivo de 1 a 5 tem orientação anti-horária. Especificamente, em relação ao elemento 1, que se imagina estar na posição 0°, o elemento 3 está orientado a 45° e o 5 a 90°. Além disso, a *tensão de tração máxima* que atua nas faces verticais do elemento 1 torna-se menor nas faces correspondentes de cada elemento sucessivo, até tornar-se nula nas faces horizontais do elemento 5. De maneira semelhante, a *tensão de compressão máxima* nas faces verticais do elemento 5 reduz-se a zero nas faces horizontais do elemento 1.

Se essa análise for estendida a muitas seções verticais ao longo da viga, além da seção *a–a*, o perfil dos resultados será representado por curvas denominadas *trajetórias de tensão*. Cada uma dessas curvas indica a *direção* de uma tensão principal de intensidade constante. Algumas das trajetórias para a viga em balanço são mostradas na Figura 9.25. Aqui as linhas cheias representam a direção das tensões principais de tração e as tracejadas, a direção das tensões principais de compressão. Como era de esperar, as linhas interceptam o eixo neutro com ângulos de 45° e as linhas cheias e tracejadas se interceptam sempre a 90°. Por quê? O conhecimento da direção dessas linhas ajuda os engenheiros a decidir onde reforçar a viga, de modo que esta não trinque nem se torne instável.

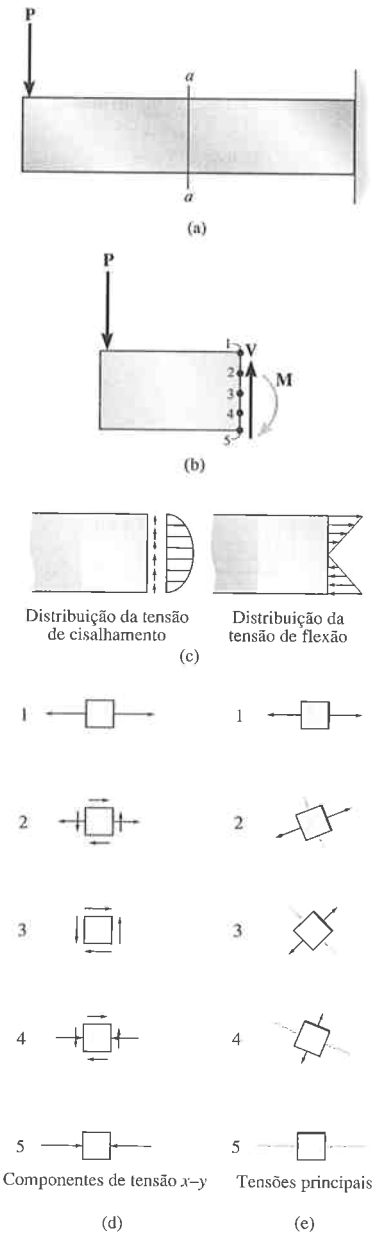


Figura 9.24

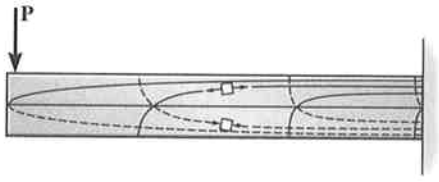
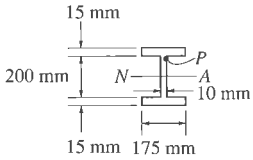
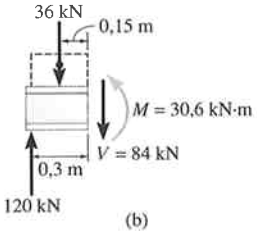


Figura 9.25

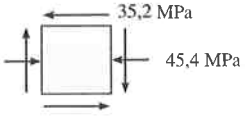
EXEMPLO 9.13

A viga mostrada na Figura 9.26*a* está submetida à carga distribuída w = 120 kN/m. Determinar as tensões principais no ponto P, localizado na parte superior da alma. Desprezar o tamanho das curvas de concordância e as concentrações de tensão nesse ponto. $I = 67{,}4(10^{-6})\ \text{m}^4$.

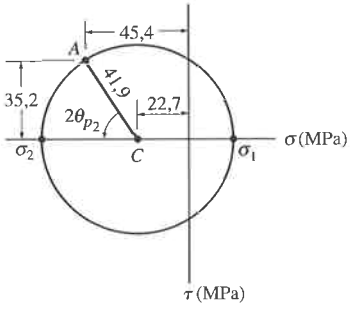




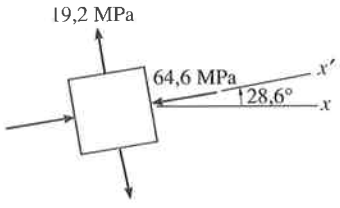
(b)



(c)

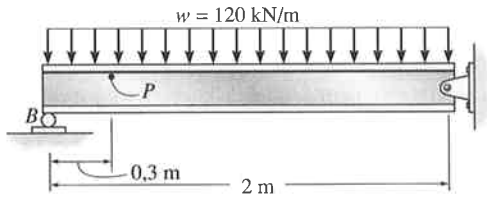


(d)



(e)

Figura 9.26



(a)

SOLUÇÃO

Cargas Internas. A reação do apoio da viga em B está determinada e, para o equilíbrio da viga secionada mostrada na Figura 9.26*b*, temos que:

$$V = 84 \text{ kN} \qquad M = 30{,}6 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Componentes de Tensão. No ponto P:

$$\sigma = \frac{-My}{I} = \frac{30{,}6(10^3) \text{ N} \cdot \text{m}\ (0{,}100 \text{ m})}{67{,}4(10^{-6}) \text{ m}^4} = -45{,}4 \text{ MPa} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{84(10^3) \text{ N}\ [(0{,}1075 \text{ m})(0{,}175 \text{ m})(0{,}015 \text{ m})]}{67{,}4(10^{-6}) \text{ m}^4(0{,}010 \text{ m})} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

$$= 35{,}2 \text{ Mpa}$$

Esses resultados estão mostrados na Figura 9.26*c*.

Tensões Principais. As tensões principais em P são determinadas por meio do círculo de Mohr. Como mostra a Figura 9.26*d*, o centro do círculo está em $(-45{,}4 + 0)/2 = -22{,}7$ e o ponto A tem coordenadas $A(-45{,}4, -35{,}2)$. Mostrar que o raio é $R = 41{,}9$ e, portanto:

$$\sigma_1 = (41{,}9 - 22{,}7) = 19{,}2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = -(22{,}7 + 41{,}9) = -64{,}6 \text{ MPa}$$

O ângulo no sentido anti-horário é $2\theta_{p_2} = 57{,}2°$, de modo que:

$$\theta_{p_2} = 28{,}6°$$

Os resultados estão mostrados na Figura 9.26*e*.

PROBLEMAS

9.49. Resolver o Problema 9.3 usando o círculo de Mohr.

9.50. Resolver o Problema 9.5 usando o círculo de Mohr.

9.51. Resolver o Problema 9.6 usando o círculo de Mohr.

***9.52.** Resolver o Problema 9.8 usando o círculo de Mohr.

9.53. Resolver o Problema 9.10 usando o círculo de Mohr.

9.54. Resolver o Problema 9.11 usando o círculo de Mohr.

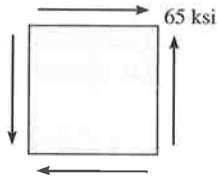
9.55. Resolver o Problema 9.13 usando o círculo de Mohr.

***9.56.** Resolver o Problema 9.12 usando o círculo de Mohr.

9.57. Resolver o Problema 9.14 usando o círculo de Mohr.

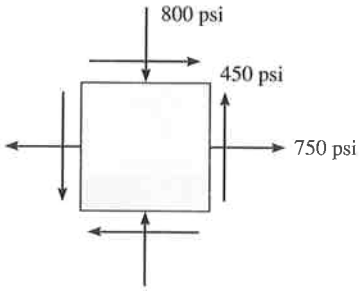
9.58. Resolver o Problema 9.16 usando o círculo de Mohr.

9.59. Determinar o estado de tensão equivalente em um elemento orientado a 60° no sentido horário em relação ao elemento mostrado.



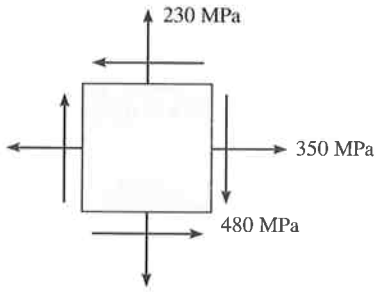
Problema 9.59

***9.60.** Determinar o estado de tensão equivalente em um elemento orientado a 60° no sentido anti-horário em relação ao elemento mostrado.



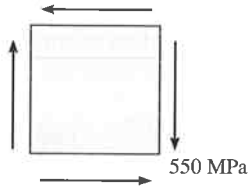
Problema 9.60

9.61. Determinar o estado de tensão equivalente em um elemento orientado a 30° no sentido horário em relação ao elemento mostrado.



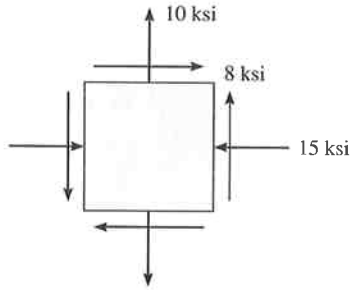
Problema 9.61

9.62. Determinar o estado de tensão equivalente em um elemento orientado a 25° no sentido anti-horário em relação ao elemento mostrado.



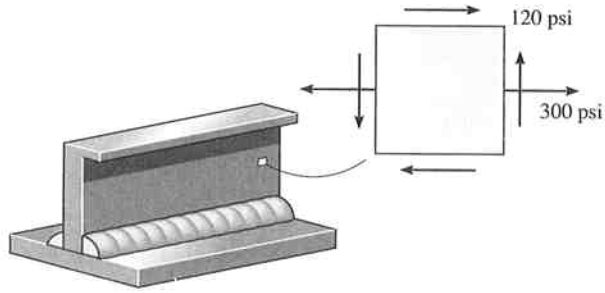
Problema 9.62

9.63. Determinar (*a*) as tensões principais e (*b*) a tensão de cisalhamento máxima no plano e a tensão normal média. Especificar a orientação do elemento em cada caso.



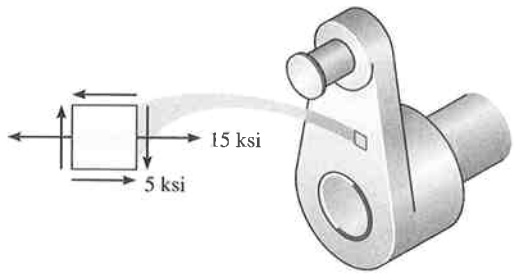
Problema 9.63

***9.64.** Determinar (*a*) as tensões principais e (*b*) a tensão de cisalhamento máxima no plano e a tensão normal média. Especificar a orientação do elemento em cada caso.



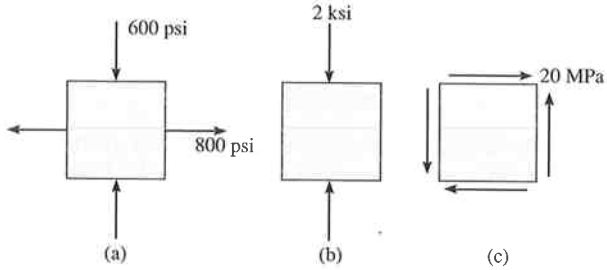
Problema 9.64

9.65. Determinar (*a*) as tensões principais e (*b*) a tensão de cisalhamento máxima no plano e a tensão normal média. Especificar a orientação do elemento em cada caso.



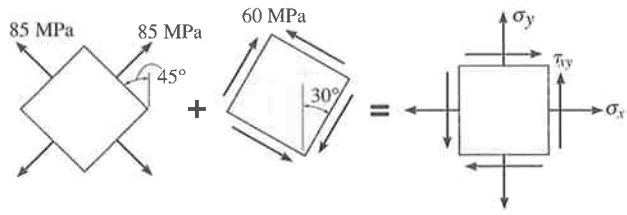
Problema 9.65

9.66. Desenhar o círculo de Mohr que descreve cada um dos seguintes estados de tensão.



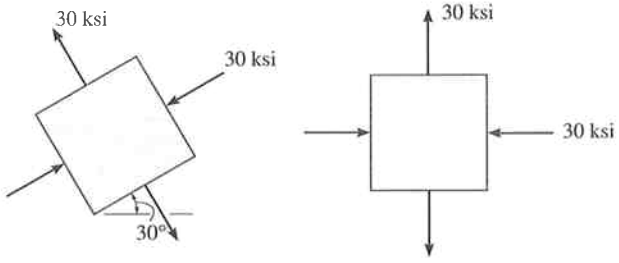
Problema 9.66

9.67. Um ponto em uma chapa fina está sujeito a dois estados de tensão sucessivos como mostrado. Determinar o estado de tensão resultante em relação a um elemento orientado como o da direita.



Problema 9.67

***9.68.** Desenhar o círculo de Mohr que descreve cada um dos seguintes estados de tensão.



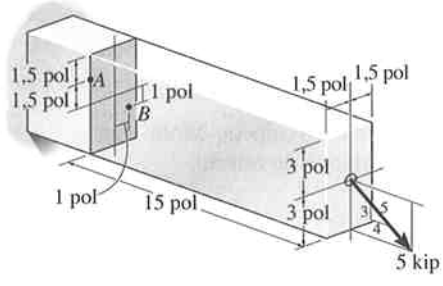
Problema 9.68

9.69. O círculo de Mohr para o estado de tensão da Figura 9.15*a* é mostrado na Figura 9.15*b*. Mostrar que, determinando as coordenadas do ponto $P(\sigma_{x'}, \tau_{x'y'})$ no círculo, obtemos o mesmo valor que conseguiríamos pelas equações de transformação de tensão 9.1 e 9.2.

Os problemas seguintes envolvem assuntos discutidos no Capítulo 8.

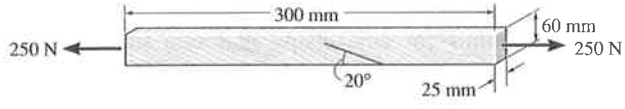
9.70. A viga em balanço com seção transversal retangular está submetida a uma força de 5 kip. Determinar as tensões principais no ponto *A*.

9.71. Resolver o Problema 9.70 para as tensões principais no ponto *B*.



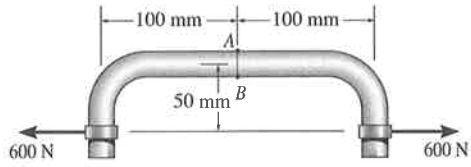
Problemas 9.70/9.71

***9.72.** As fibras da madeira em uma tábua formam um ângulo de 20° com a horizontal como mostrado. Determinar as tensões normal e de cisalhamento que atuam perpendicular e paralelamente às fibras, supondo que a tábua esteja sujeita a uma carga axial de 250 N.



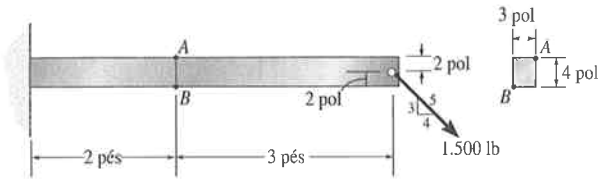
Problema 9.72

9.73. A haste encurvada tem diâmetro de 15 mm e está submetida à força de 600 N. Determinar as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima no plano desenvolvidas nos pontos *A* e *B*. Mostrar os resultados em elementos localizados nesses pontos.



Problema 9.73

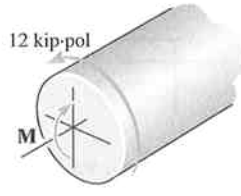
9.74. A viga tem seção transversal retangular e está submetida às cargas mostradas. Determinar as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima no plano desenvolvidas nos pontos *A* e *B*. Mostrar os resultados em elementos localizados nesses pontos.



Problema 9.74

9.75. Um vaso de pressão esférico tem raio interno de 5 pés e espessura da parede de 0,5 pol. Desenhar o círculo de Mohr para o estado de tensão em um ponto e explicar a importância do resultado. O vaso está sujeito a uma pressão interna de 80 psi.

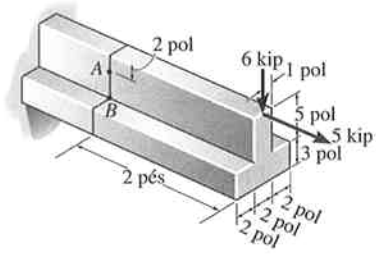
***9.76.** A haste tem seção transversal circular com diâmetro de 2 pol. Está sujeita a um torque de 12 kip · pol e a um momento fletor **M**. Se a maior tensão principal no ponto de tensão de flexão máxima for 15 ksi, qual será a intesidade do momento fletor?



Problema 9.76

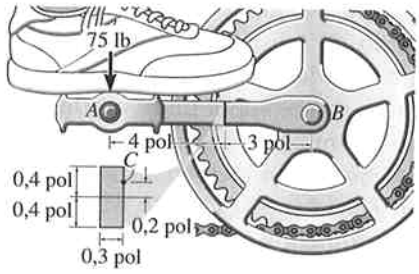
9.77. A viga está submetida às duas forças mostradas. Determinar as tensões principais no ponto *A*.

9.78. A viga está submetida às duas forças mostradas. Determinar as tensões principais no ponto *B*, localizado na parte inferior do segmento vertical da seção transversal.



Problemas 9.77/9.78

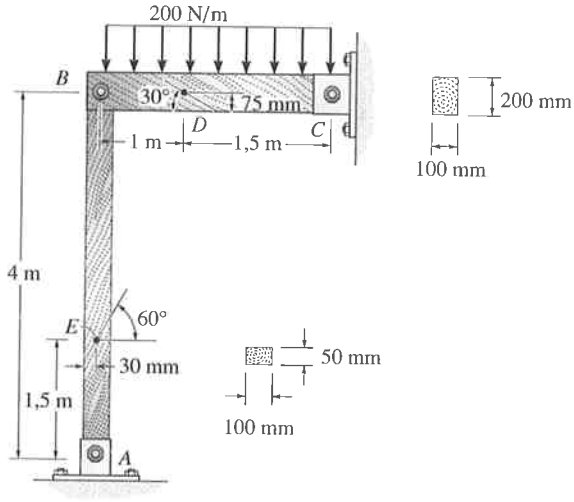
9.79. O pedal de bicicleta tem a seção transversal mostrada. Se estiver fixo à engrenagem no ponto B e não girar quando submetido a uma força de 75 lb, quais serão as tensões no ponto C da seção transversal?



Problema 9.79

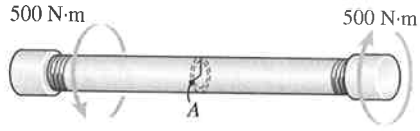
***9.80.** A estrutura suporta a carga distribuída de 200 N/m. Determinar as tensões normal e de cisalhamento no ponto D que atuam perpendicular e paralelamente às fibras, respectivamente. Nesse ponto, as fibras formam um ângulo de 30° com a horizontal como mostrado.

9.81. A estrutura suporta a carga distribuída de 200 N/m. Determinar as tensões normal e de cisalhamento no ponto E que atuam perpendicular e paralelamente às fibras, respectivamente. Nesse ponto, as fibras formam um ângulo de 60° com a horizontal como mostrado.



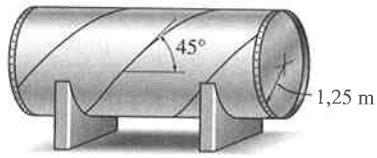
Problemas 9.80/9.81

9.82. O tubo tem raio interno de 25 mm e raio externo de 27 mm. Supondo que esteja submetido a uma pressão interna de 8 MPa e a um momento de torção de 500 N · m, determinar as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima no plano no ponto A, localizado na superfície externa.



Problema 9.82

9.83. O vaso de pressão cilíndrico tem raio interno de 1,25 m e espessura da parede de 15 mm. É feito de chapas de aço soldadas ao longo da costura a 45°. Determinar os componentes da tensão normal e de cisalhamento ao longo da costura se o vaso estiver sujeito a uma pressão interna de 8 MPa.



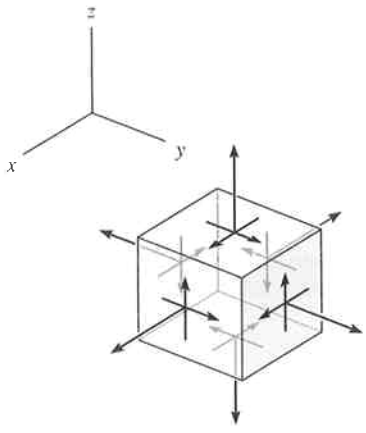
Problema 9.83

***9.84.** O tubo de paredes finas tem diâmetro interno de 0,5 pol e espessura de 0,025 pol. Se for submetido a uma pressão interna de 500 psi, bem como as cargas de tração axial e torção como as mostradas, quais serão as tensões principais em um ponto da superfície?

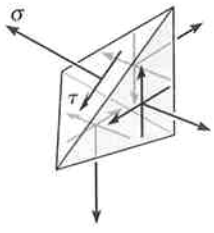
Problema 9.84

9.7 TENSÃO DE CISALHAMENTO MÁXIMA ABSOLUTA

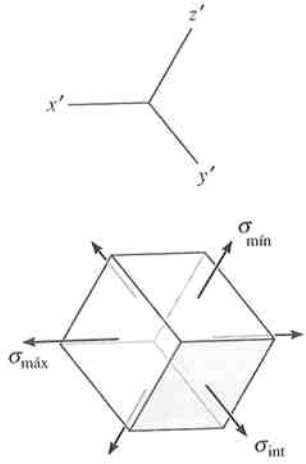
Quando determinado ponto em um corpo é submetido a um estado geral de tensões tridimensional, sobre cada face de um elemento do material atuam um componente de tensão normal e dois componentes de tensão de cisalhamento (Figura 9.27*a*). Como no caso do estado plano, é possível desenvolver equações de transformação de tensão para determinar os componentes das



(a)



(b)

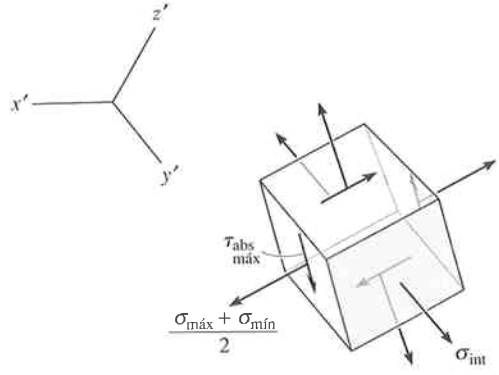


Tensão triaxial

(c)

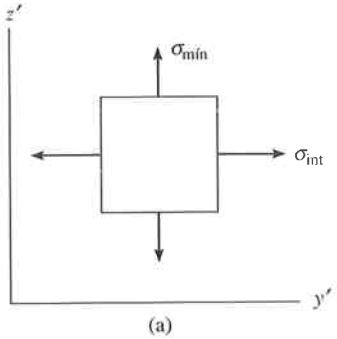
tensões normal e de cisalhamento σ e τ que atuam em *qualquer* plano oblíquo do elemento (Figura 9.27*b*). Além disso, também é possível determinar, no ponto, a orientação de um elemento sobre cujas faces atuem apenas tensões principais. Como mostra a Figura 9.27*c*, supõe-se que essas tensões principais têm intensidades máxima, intermediária e mínima, ou seja, $\sigma_{máx} \geq \sigma_{int} \geq \sigma_{mín}$.

A discussão sobre transformação de tensão em três dimensões foge ao escopo deste texto; entretanto, ela é abordada em livros relacionados à teoria da elasticidade. Para nossos propósitos, vamos supor que a orientação principal do elemento e as tensões principais sejam conhecidas (Figura 9.27*c*). Essa é a condição denominada ***tensão triaxial***. Se virmos o elemento em três dimensões, isto é, nos planos y'–z', x'–z' e x'–y' (Figuras 9.28*a*, 9.28*b* e 9.28*c*), poderemos então usar o círculo de Mohr para determinar a *tensão de cisalhamento máxima no plano* para cada caso. Por exemplo, o diâmetro do círculo de Mohr compreende as tensões principais σ_{int} e $\sigma_{mín}$ para o caso mostrado na Figura 9.28*a*. Pelo círculo (Figura 9.28*d*), a tensão de cisalhamento máxima no plano é $(\tau_{y'z'})_{máx} = (\sigma_{int} - \sigma_{mín})/2$ e a tensão normal média é $(\sigma_{int} + \sigma_{mín})/2$. Como mostra a Figura 9.28*e*, o elemento com esses componentes de tensão deve ser orientado a 45° em relação à posição do elemento mostrado na Figura 9.28*a*. Os círculos de Mohr para os elementos das figuras 9.28*b* e 9.28*c* também foram traçados na Figura 9.28*d*. Os elementos correspondentes com orientação de 45° e sujeitos aos componentes das tensões de cisalhamento máxima no plano e normal média são mostrados nas figuras 9.28*f* e 9.28*g*, respectivamente.



(d)

Figura 9.27



(a)

Figura 9.28

Comparando os três círculos da Figura 9.28*d*, vê-se que a ***tensão de cisalhamento máxima absoluta***, $\tau_{\substack{abs \\ máx}}$, será definida pelo círculo que tenha o maior raio — neste caso, é o que corresponde ao elemento mostrado na Figura 9.28*b*. Em outras palavras, o elemento da Figura 9.28*f* é orientado por uma rotação de 45° em torno do eixo y' em relação ao elemento da Figura 9.27*b*. Note que essa condição também pode ser *determinada diretamente* escolhendo-se as tensões principais máxima e mínima da Figura 9.27*c*, caso em que a tensão de cisalhamento máxima absoluta será:

$$\tau_{\substack{abs \\ máx}} = \frac{\sigma_{máx} - \sigma_{mín}}{2} \tag{9.13}$$

E a tensão normal média associada:

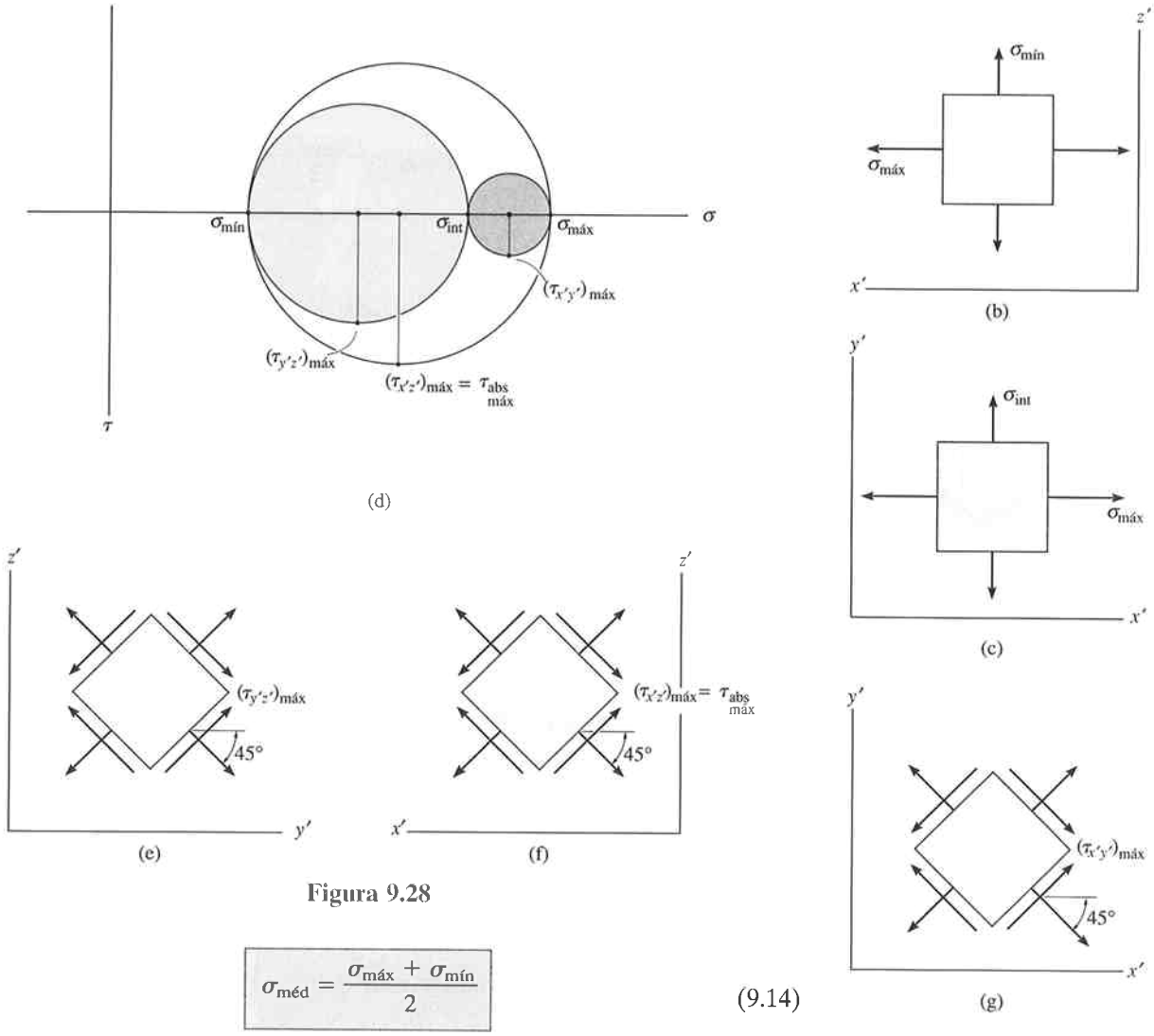


Figura 9.28

$$\sigma_{méd} = \frac{\sigma_{máx} + \sigma_{mín}}{2} \tag{9.14}$$

Essa análise considerou apenas os componentes de tensão que atuam sobre os elementos localizados nas posições definidas pelas rotações em torno dos eixos x', y' ou z'. Se tivéssemos usado as equações de transformação de tensão tridimensional da teoria da elasticidade para obter os valores dos componentes das tensões normal e de cisalhamento que atuam sobre qualquer plano oblíquo no ponto, como na Figura 9.27*b*, poderíamos mostrar que, independentemente da orientação do plano, os valores específicos da tensão de cisalhamento no plano τ serão *sempre menores* que os da tensão de cisalhamento máxima absoluta encontrada pela Equação 9.13. Além disso, a tensão normal σ que atua sobre qualquer plano terá um valor situado entre as tensões principais máxima e mínima, isto é, $\sigma_{máx} \geq \sigma \geq \sigma_{mín}$.

Estado Plano de Tensões. Os resultados anteriores têm uma implicação importante para o caso do estado de plano de tensões, particularmente quando as tensões principais no plano têm o *mesmo sinal*, isto é, ambas são tração ou ambas são compressão. Por exemplo, consideremos o material a ser submetido a um estado de tensão plana, tal que as tensões principais no plano sejam representadas como $\sigma_{máx}$ e σ_{int}, nas direções x' e y', respectivamente; enquanto a tensão principal fora do plano na direção z' é $\sigma_{mín} = 0$ (Figura 9.29*a*). Os círculos de Mohr que descrevem esse estado de tensão para as orientações do elemento em torno de cada eixo de coordenadas são mostrados na Figura 9.29*b*.

Vê-se aqui que, apesar da tensão de cisalhamento máxima no plano ser $(\tau_{x'y'})_{máx} = (\sigma_{máx} - \sigma_{int})/2$, esse valor *não* representa a tensão de cisalhamento máxima absoluta à qual o material está sujeito. Em vez disso, pela Equação 9.13 ou pela Figura 9.29*b*, temos que:

$$\tau_{\substack{abs \\ máx}} = (\tau_{x'z'})_{máx} = \frac{\sigma_{máx} - 0}{2} = \frac{\sigma_{máx}}{2} \tag{9.15}$$

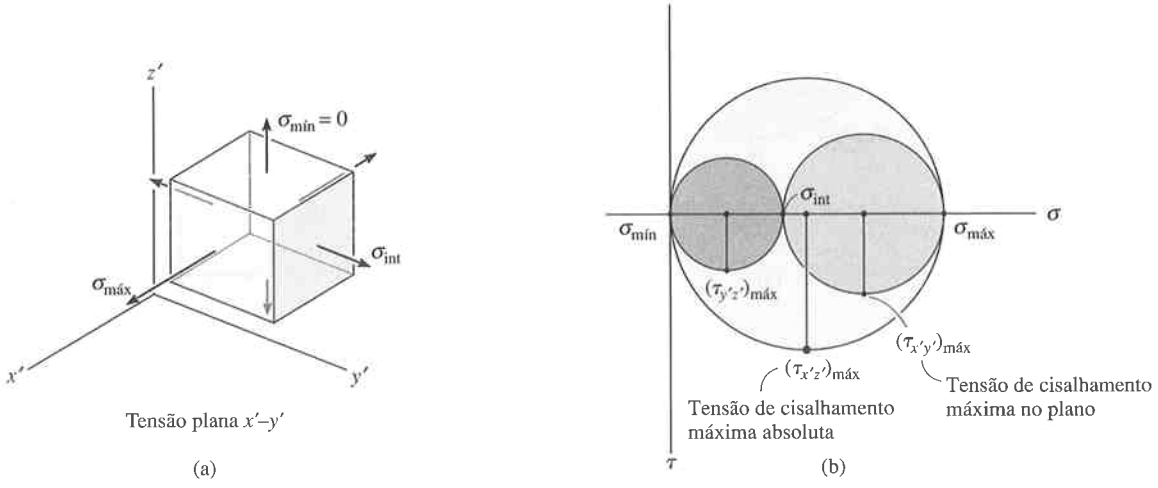


Figura 9.29

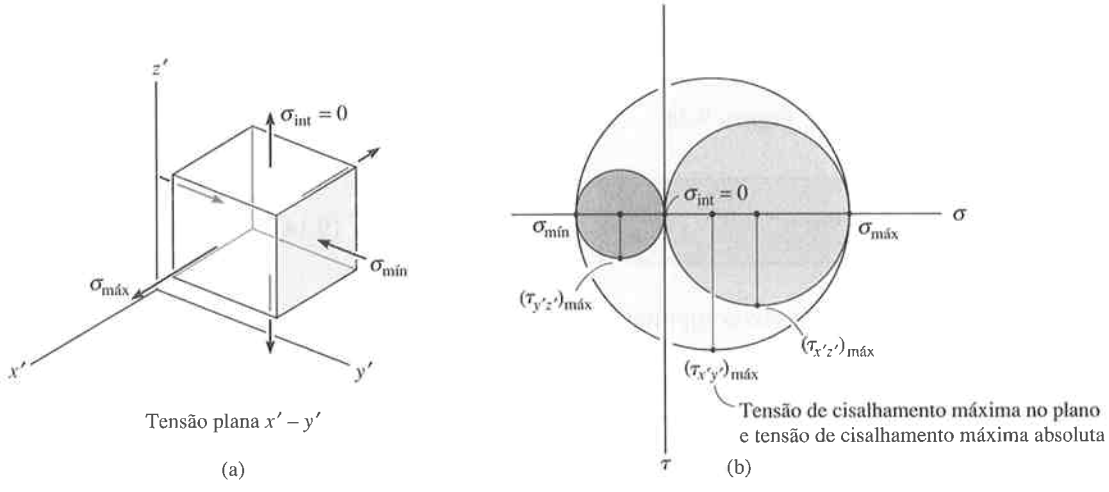


Figura 9.30

Caso uma das tensões principais no plano tenha *sinal oposto* ao da outra, as tensões serão representadas por $\sigma_{máx}$ e $\sigma_{mín}$ e a tensão principal fora do plano por $\sigma_{int} = 0$ (Figura 9.30*a*). Os círculos de Mohr que descrevem o estado de tensão para as orientações do elemento em torno de cada eixo de coordenadas são mostrados na Figura 9.30*b*. Claramente neste caso:

$$\tau_{\substack{abs \\ máx}} = (\tau_{x'y'})_{máx} = \frac{\sigma_{máx} - \sigma_{mín}}{2} \tag{9.16}$$

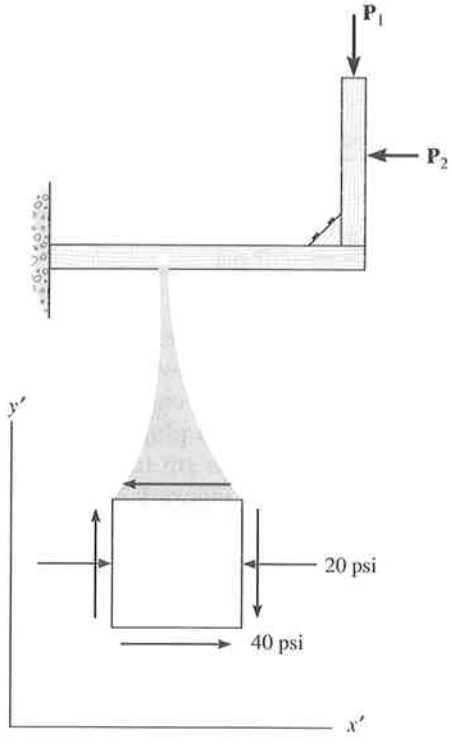
Calcular a tensão de cisalhamento máxima absoluta, como ressaltado aqui, é importante quando se projetam elementos feitos de material dúctil, visto que a resistência do material depende de sua capacidade de suportar a tensão de cisalhamento. Esse aspecto será discutido mais adiante na Seção 10.7.

PONTOS IMPORTANTES

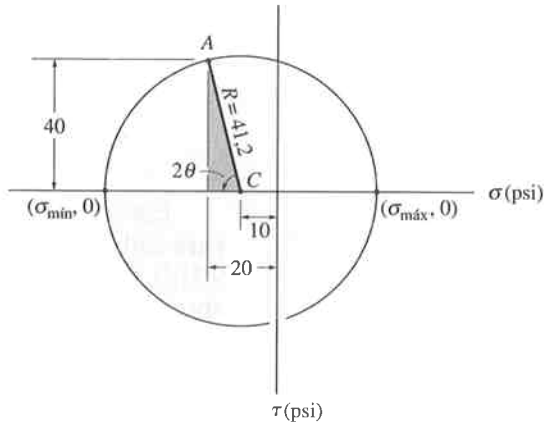
- O estado geral de tensão tridimensional em um ponto é representado por um elemento orientado, de modo que apenas três tensões principais atuem sobre ele.
- A partir dessa orientação, obtemos a orientação do elemento que representa a tensão de cisalhamento máxima absoluta girando o elemento 45° em torno do eixo que define a direção de σ_{int}.
- Se ambas as tensões principais no plano tiverem o *mesmo sinal*, a *tensão de cisalhamento máxima absoluta* ocorrerá *fora do plano* e terá valor $\tau_{\substack{abs \\ máx}} = \sigma_{máx}/2$.
- Se as tensões principais no plano tiverem *sinais opostos*, a *tensão de cisalhamento máxima absoluta será igual à tensão de cisalhamento máxima no plano*; ou seja, $\tau_{\substack{abs \\ máx}} = (\sigma_{máx} - \sigma_{mín})/2$.

EXEMPLO 9.14

Em virtude do carregamento aplicado, o elemento no ponto da estrutura da Figura 9.31*a* está sujeito ao estado plano de tensões mostrado. Determinar as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima absoluta nesse ponto.



(a)



(b)

Figura 9.31

SOLUÇÃO

Tensões Principais. As tensões principais no plano são determinadas pelo círculo de Mohr. O centro do círculo está no eixo σ em $\sigma_{méd} = (-20 + 0)/2 = -10$ psi. Se representarmos graficamente o ponto de controle $A(-20, -40)$, desenharemos o círculo como mostra a Figura 9.31*b*. O raio:

$$R = \sqrt{(20 - 10)^2 + (40)^2} = 41{,}2 \text{ psi}$$

As tensões principais estão nos pontos em que o círculo intercepta o eixo σ; ou seja:

$$\sigma_{máx} = -10 + 41{,}2 = 31{,}2 \text{ psi}$$
$$\sigma_{mín} = -10 - 41{,}2 = -51{,}2 \text{ psi}$$

Pelo círculo, o ângulo 2θ no *sentido anti-horário*, medido de CA para o eixo $-\sigma$, é:

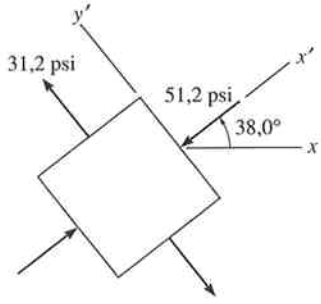
$$2\theta = \text{tg}^{-1}\left(\frac{40}{(20 - 10)}\right) = 76{,}0°$$

Assim:

$$\theta = 38{,}0°$$

A rotação no *sentido anti-horário* define a direção do eixo x' ou $\sigma_{mín}$ e seu plano principal associado (Figura 9.31*c*). Como não há tensão principal na direção z do elemento, temos:

$$\sigma_{máx} = 31{,}2 \text{ psi} \qquad \sigma_{int} = 0 \qquad \sigma_{mín} = -51{,}2 \text{ psi} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$



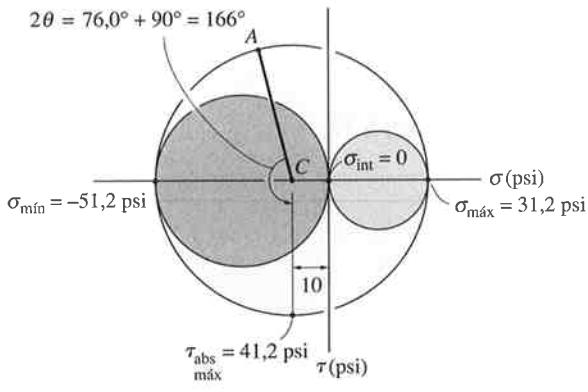
(c)

Tensão de Cisalhamento Máxima Absoluta. Aplicando as equações 9.13 e 9.14, temos:

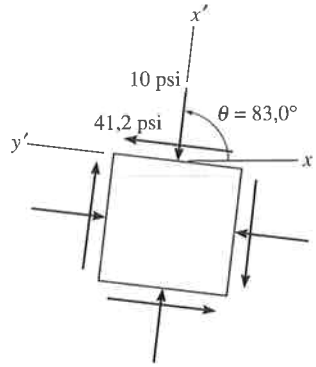
$$\tau_{\substack{abs \\ máx}} = \frac{\sigma_{máx} - \sigma_{mín}}{2} = \frac{31{,}2 - (-51{,}2)}{2} = 41{,}2 \text{ psi} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

$$\sigma_{méd} = \frac{\sigma_{máx} + \sigma_{mín}}{2} = \frac{31{,}2 - 51{,}2}{2} = -10 \text{ psi}$$

Esses mesmos resultados são obtidos desenhando-se o círculo de Mohr para cada orientação de um elemento em torno dos eixos x', y' e z' (Figura 9.31*d*). Como $\sigma_{máx}$ e $\sigma_{mín}$ têm *sinais opostos*, a tensão de cisalhamento máxima absoluta é igual à tensão de cisalhamento máxima no plano. Isso resulta da rotação de 45° do elemento mostrado na Figura 9.31*c* em torno do eixo z'; o elemento orientado adequadamente é mostrado na Figura 9.31*e*.



(d)

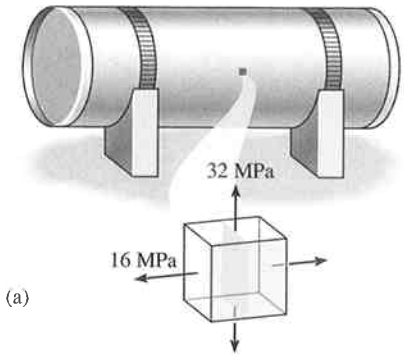


(e)

Figura 9.31

EXEMPLO 9.15

O ponto na superfície do vaso de pressão cilíndrico da Figura 9.32*a* está submetido a um estado plano de tensões. Determinar a tensão de cisalhamento máxima absoluta nesse ponto.



SOLUÇÃO

As tensões principais são $\sigma_{máx} = 32$ MPa, $\sigma_{int} = 16$ MPa e $\sigma_{mín} = 0$. Se as três forem representadas ao longo do eixo σ, poderemos desenhar os três círculos de Mohr que descrevem o estado de tensão em cada um dos três planos perpendiculares (Figura 9.32*b*). O círculo maior tem raio de 16 MPa e descreve o estado de tensão no plano que contém $\sigma_{máx} = 32$ MPa e $\sigma_{mín} = 0$, sombreado na Figura 9.32*a*. A orientação de um elemento a 45° nesse plano resulta no estado de tensão de cisalhamento máxima absoluta e na tensão normal média a ele associada, ou seja:

$$\tau_{\substack{\text{ábs} \\ \text{máx}}} = 16 \text{ MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

$$\sigma_{méd} = 16 \text{ MPa}$$

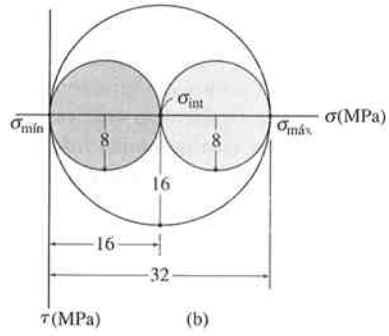


Figura 9.32

Os mesmos resultados são obtidos pela aplicação direta das equações 9.13 e 9.14; isto é:

$$\tau_{\substack{\text{abs} \\ \text{máx}}} = \frac{\sigma_{máx} - \sigma_{mín}}{2} = \frac{32 - 0}{2} = 16 \text{ MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

$$\sigma_{méd} = \frac{\sigma_{máx} + \sigma_{mín}}{2} = \frac{32 + 0}{2} = 16 \text{ MPa}$$

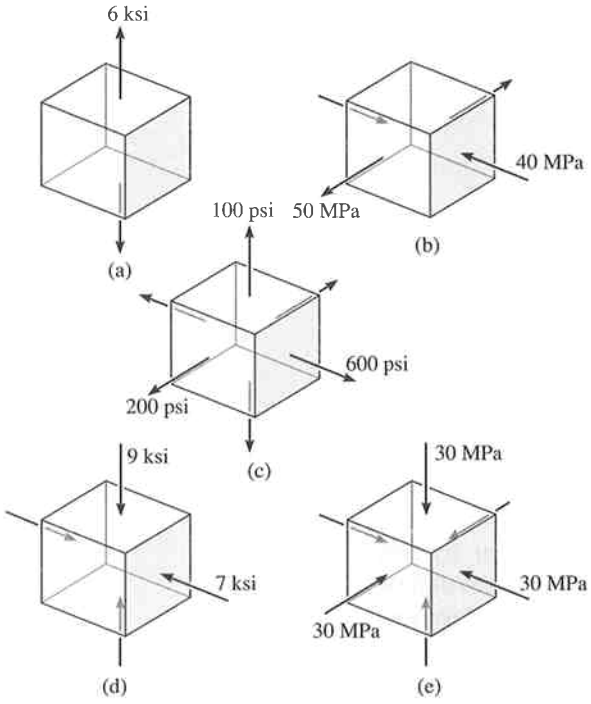
Por comparação, a tensão de cisalhamento máxima no plano é determinada no círculo de Mohr desenhado entre $\sigma_{máx} = 32$ MPa e $\sigma_{int} = 16$ MPa (Figura 9.32*b*). Isso resulta em:

$$\tau_{\substack{\text{máx} \\ \text{no plano}}} = \frac{32 - 16}{2} = 8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{méd} = 16 + \frac{32 - 16}{2} = 24 \text{ MPa}$$

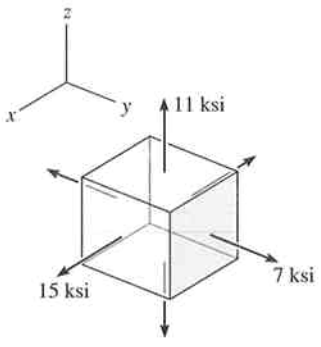
PROBLEMAS

9.85. Desenhar os três círculos de Mohr que descrevem cada um dos seguintes estados de tensão.



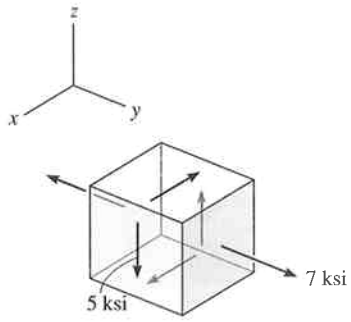
Problema 9.85

9.86. As tensões principais que atuam em determinado ponto de um corpo são mostradas. Desenhar os três círculos de Mohr que descrevem esse estado de tensão e determinar as tensões de cisalhamento máximas no plano e as tensões normais médias associadas para os planos $x-y$, $y-z$ e $x-z$. Mostrar, para cada caso, os resultados no elemento orientado na direção apropriada.



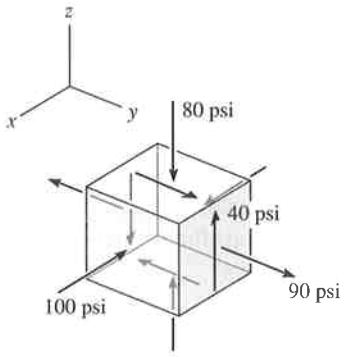
Problema 9.86

9.87. A tensão em um ponto é mostrada no elemento. Determinar as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima absoluta.



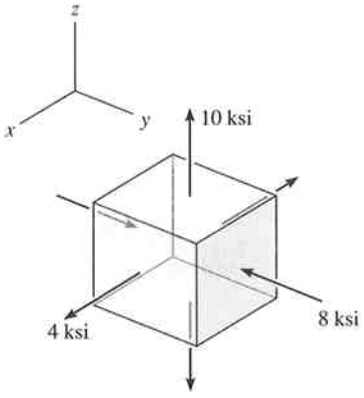
Problema 9.87

***9.88.** A tensão em um ponto é mostrada no elemento. Determinar as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima absoluta.



Problema 9.88

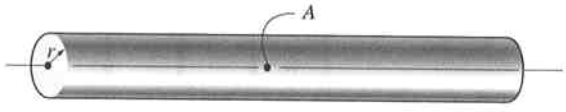
9.89. As tensões principais que atuam em determinado ponto de um corpo são mostradas. Desenhar os três círculos de Mohr que descrevem esse estado de tensão e determinar as tensões de cisalhamento máximas no plano e as tensões normais médias associadas para os planos $x-y$, $y-z$ e $x-z$. Mostrar, para cada caso, os resultados no elemento orientado na direção apropriada.



Problema 9.89

Os problemas seguintes envolvem assuntos discutidos no Capítulo 8.

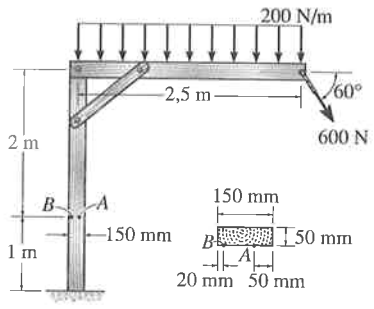
9.90. O cilindro maciço de raio r é colocado em um recipiente vedado e submetido a uma pressão p. Determinar as componentes de tensão que atuam no ponto A localizado na linha de centro do cilindro. Desenhar os círculos de Mohr para o elemento nesse ponto.



Problema 9.90

9.91. Determinar as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima absoluta no ponto A da estrutura. A área da seção transversal nesse ponto é mostrada.

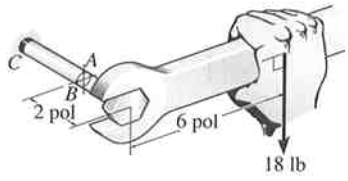
***9.92.** Resolver o Problema 9.91 para o ponto B.



Problemas 9.91/9.92

9.93. O parafuso está fixado em seu apoio C. Se for aplicada uma força de 18 lb à chave, usada para apertá-lo, quais serão as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima absoluta desenvolvidas no ponto A? Represente os resultados em um elemento localizado nesse ponto. O corpo do parafuso tem diâmetro de 0,25 pol.

9.94. Resolver o Problema 9.93 para o ponto B.

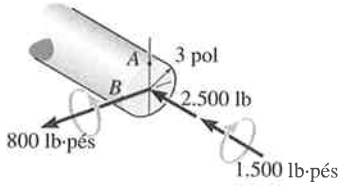


Problemas 9.93/9.94

PROBLEMAS DE REVISÃO

9.95. As cargas internas na seção transversal do eixo de acionamento de uma turbina (cujo diâmetro é de 6 pol) consistem de uma força axial de 2.500 lb, um momento fletor de 800 lb · pés e um momento de torção de 1.500 lb · pés. Determinar as tensões principais no ponto A. Calcular também a tensão de cisalhamento máxima no plano nesse ponto.

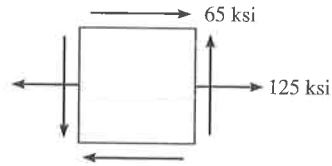
***9.96.** As cargas internas na seção transversal do eixo de acionamento de uma turbina (cujo diâmetro é de 6 pol) consistem de uma força axial de 2.500 lb, um momento fletor de 800 lb · pés e um momento de torção de 1.500 lb · pés. Determinar as tensões principais no ponto B. Calcular também a tensão de cisalhamento máxima no plano nesse ponto.



Problemas 9.95/9.96

9.97. O estado de tensão em um ponto é mostrado no elemento. Determinar (*a*) as tensões principais e (*b*) a tensão de cisalhamento máxima no plano e a tensão normal média no ponto. Especificar a orientação do elemento em cada caso.

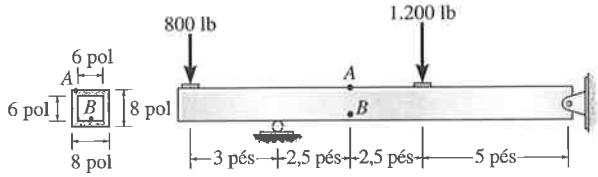
9.98. Desenhar os círculos de Mohr para o estado de tensão mostrado e determinar a tensão de cisalhamento máxima absoluta.



Problemas 9.97/9.98

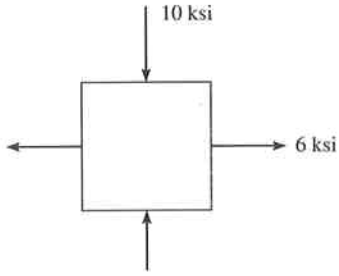
9.99. Uma barra tem seção transversal circular com diâmetro de 1 pol. Ela está sujeita a um torque e a um momento fletor. No ponto de tensão de flexão máxima as tensões principais são 20 ksi e –10 ksi. Determinar o torque e o momento fletor.

***9.100.** A viga-caixão está sujeita à carga mostrada. Determinar as tensões principais nos pontos A e B.



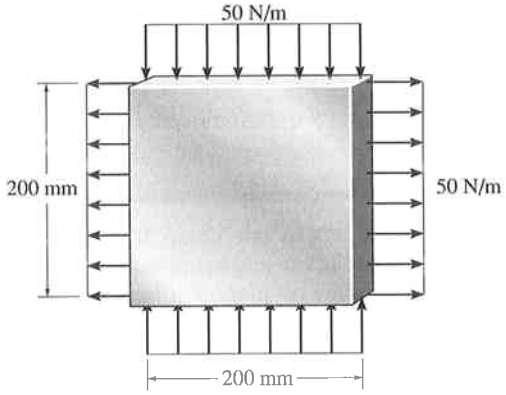
Problema 9.100

9.101. Determinar o estado de tensão equivalente se o elemento estiver orientado a 40° no sentido horário em relação ao elemento mostrado. Usar o círculo de Mohr.



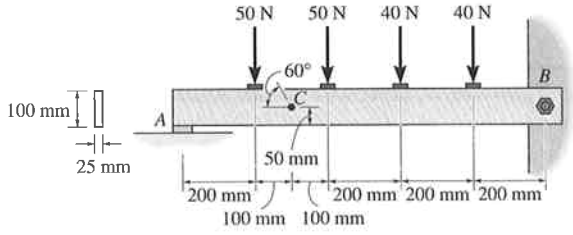
Problema 9.101

9.102. A chapa de aço quadrada tem espessura de 10 mm e está sujeita a carga na região mostrada. Determinar a tensão de cisalhamento máxima no plano e a tensão normal média desenvolvida no aço.



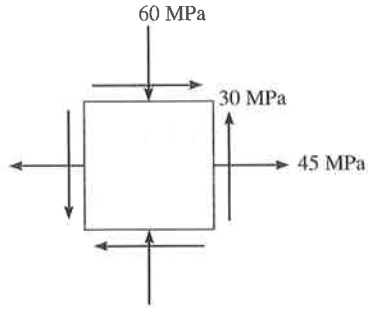
Problema 9.102

9.103. A viga de madeira está submetida à carga mostrada. Supondo que as fibras da madeira no ponto C formem um ângulo de 60° com a horizontal como mostrado, determinar as tensões normal e de cisalhamento que atuam perpendicular e paralelamente às fibras, respectivamente, em virtude da carga. A viga é suportada por um parafuso (pino) em B e por um apoio liso em A.



Problema 9.103

***9.104.** O estado de tensão em um ponto é mostrado no elemento. Determinar (*a*) as tensões principais e (*b*) a tensão de cisalhamento máxima no plano e a tensão normal média no ponto. Especificar a orientação do elemento em cada caso.

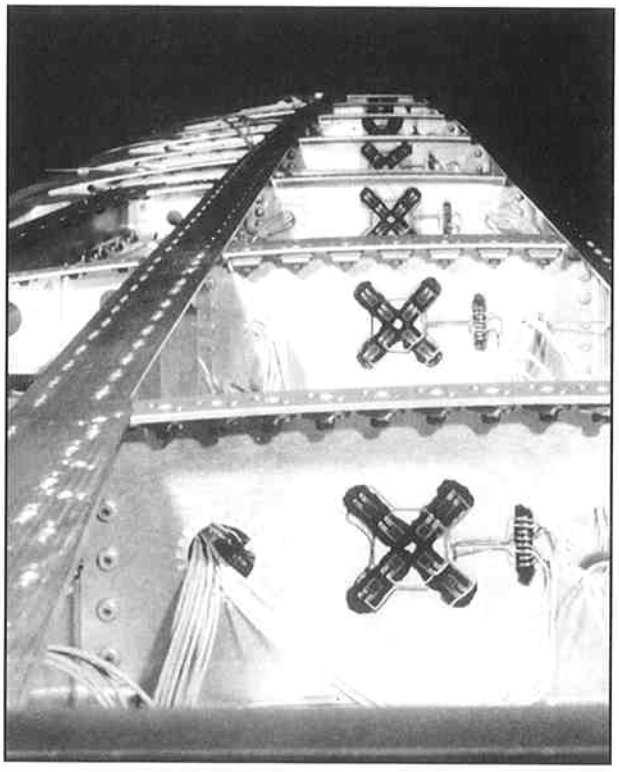


Problema 9.104

10 Transformação da Deformação

Objetivos do Capítulo

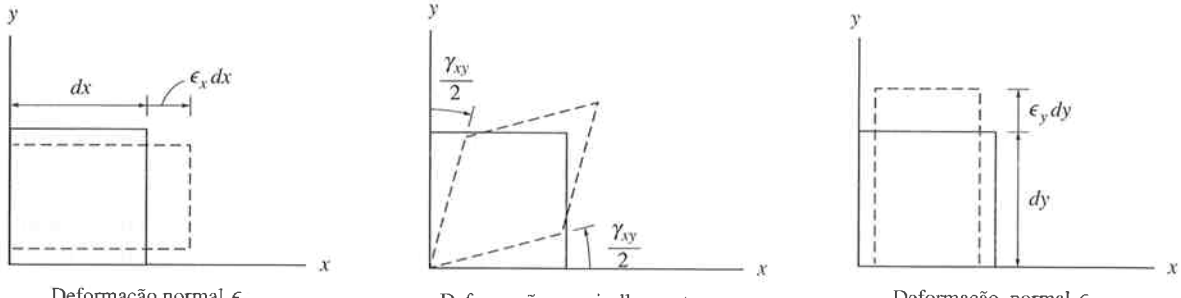
As transformações da deformação em um ponto são semelhantes às transformações da tensão e, por conseguinte, os métodos do Capítulo 9 também serão aplicados aqui. Discutiremos, ainda, várias maneiras de medir as deformações e desenvolveremos algumas relações importantes com as propriedades do material, inclusive uma forma generalizada da lei de Hooke. No fim do capítulo serão discutidas algumas teorias usadas para prever a falha de um material.



Tensões complexas desenvolvidas nesta asa de avião são analisadas com dados obtidos por meio de extensômetros. (Cortesia do Measurements Group Inc., Raleigh, Carolina do Norte, 27611, EUA.)

10.1 Estado Plano de Deformações

Como descrito na Seção 2.2, o estado geral das deformações em determinado ponto de um corpo é representado pela combinação de três componentes de deformação normal (ϵ_x, ϵ_y, ϵ_z) e três componentes de deformação por cisalhamento (γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}). Esses seis componentes tendem a deformar cada face de um elemento do material e, como a tensão, os *componentes* de deformação normal e por cisalhamento no ponto variam de acordo com a orientação do elemento. Os componentes de *deformação* no ponto geralmente são determinados por meio de extensômetros (medidores de deformação), os quais medem os componentes em *direções especificadas*. Tanto na análise como no projeto, algumas vezes os engenheiros têm de transformar os dados a fim de obter os componentes de deformação em outras direções. Devemos lembrar que, quando falamos de deformação, estamos falando das deformações específicas (adimensionais).

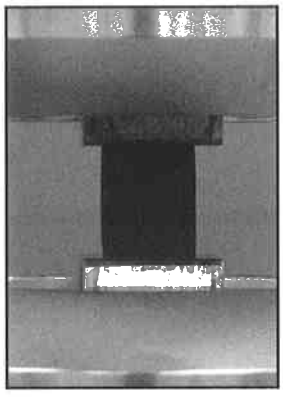


Deformação normal ϵ_x (a)

Deformação por cisalhamento γ_{xy} (c)

Deformação normal ϵ_y (b)

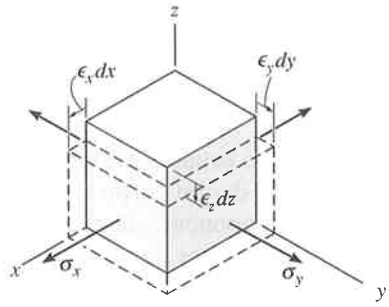
Figura 10.1



O corpo-de-prova feito de borracha está confinado entre os dois apoios fixos e, desse modo, fica sob estado plano de deformações quando as cargas são aplicadas no plano horizontal.

Para compreender como isso é feito, primeiro vamos fixar nossa atenção no estudo do ***estado plano de deformações***. Desconsideraremos, especificamente, os efeitos dos componentes ϵ_z, γ_{xz} e γ_{yz}. Assim, em geral, um elemento nesse estado encontra-se submetido a dois componentes de deformação normal (ϵ_x, ϵ_y) e a um componente de deformação por cisalhamento (γ_{xy}). As distorções no elemento provocadas por cada uma dessas deformações são mostradas graficamente na Figura 10.1. Observe que as deformações normais são produzidas por *mudanças no comprimento* nas direções x e y, e a deformação por cisalhamento é produzida pela *rotação relativa* de dois lados adjacentes do elemento.

Apesar de o estado plano de deformações e o estado plano de tensões terem três componentes localizados no mesmo plano, deve-se entender que o estado plano de tensões *não causa* necessariamente um estado plano de deformações ou vice-versa. A razão para isso é o efeito de Poisson discutido na Seção 3.6. Por exemplo: se o elemento da Figura 10.2 estiver submetido a um estado plano de tensões σ_x e σ_y, serão produzidas não só as deformações normais ϵ_x e ϵ_y como *também* a deformação normal associada (ϵ_z). Obviamente, *não* se trata de um estado plano de deformações. Então, em geral, o efeito de Poisson *impedirá* a ocorrência simultânea dos estados planos de deformações e de tensões, a menos que $\nu = 0$. Deve ser salientado que a condição $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ requer $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$, uma vez que tanto a tensão quanto a deformação por cisalhamento *não* são afetadas pela relação de Poisson.



O estado plano de tensão (σ_x, σ_y) não provoca estado plano de deformações no plano x–y porque $\epsilon_z \neq 0$

Figura 10.2

10.2 EQUAÇÕES GERAIS DE TRANSFORMAÇÃO PARA O ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES

É importante, na análise do estado plano de deformações, estabelecer as equações de transformação que podem ser usadas para determinar os componentes de deformação normal e por cisalhamento x', y' em um ponto, desde que os componentes de deformação x, y sejam conhecidos. Basicamente, esse é um problema de geometria e requer o relacionamento de deformações e rotações entre segmentos de linha infinitesimais que representam os lados dos elementos infinitesimais paralelos a cada conjunto de eixos.

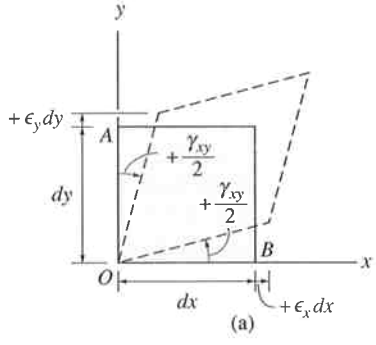
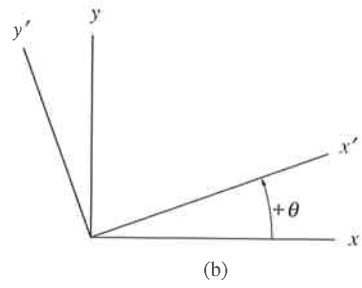


Figura 10.3

Convenção de Sinal. Antes de desenvolver as equações de transformação das deformações, devemos estabelecer uma convenção de sinal para tais deformações. Essa convenção é a mesma estabelecida na Seção 2.2 e será redefinida aqui para a condição de estado plano das deformações. Em relação ao elemento infinitesimal mostrado na Figura 10.3*a*, as *deformações normais* ϵ_x e ϵ_y serão *positivas* se provocarem *alongamento* ao longo dos eixos x e y,

respectivamente, e a *deformação por cisalhamento* γ_{xy} será *positiva* se o ângulo interno *AOB for menor* que 90°. Essa convenção de sinal também segue aquela usada para o estado plano de tensões (Figura 9.5*a*), ou seja, σ_x, σ_y, τ_{xy} provocam *deformação* do elemento nas direções positivas de ϵ_x, ϵ_y, γ_{xy}, respectivamente.

O problema aqui será determinarmos para um ponto as deformações normal e por cisalhamento $\epsilon_{x'}$, $\epsilon_{y'}$, $\gamma_{x'y'}$ medidas em relação aos eixos x', y', se conhecermos ϵ_x, ϵ_y, γ_{xy}, medidas em relação aos eixos x, y. Se o ângulo entre os eixos x e x' for θ, então, como no caso do estado plano de tensões, θ será *positivo* desde que siga a curvatura dos dedos da mão direita, isto é, o sentido anti-horário, como mostra a Figura 10.3*b*.



(b)

Convenção de sinal positiva

Figura 10.3

Deformação Normal e por Cisalhamento. A fim de desenvolver a equação de transformação da deformação para determinar $\epsilon_{x'}$, devemos determinar o alongamento de um segmento de reta dx', localizado ao longo do eixo x' e submetido aos componentes de deformação ϵ_x, ϵ_y, γ_{xy}. Como mostra a Figura 10.4*a*, os componentes da reta dx' ao longo dos eixos x e y são:

$$\begin{aligned} dx &= dx' \cos\theta \\ dy &= dx' \operatorname{sen}\theta \end{aligned} \tag{10.1}$$

Quando ocorre a deformação normal positiva ϵ_x (Figura 10.4*b*), a reta dx é alongada $\epsilon_x\, dx$, o que provoca o alongamento $\epsilon_x\, dx \cos\theta$ da reta dx'. Da mesma maneira, quando ocorre uma deformação ϵ_y (Figura 10.4*c*), a reta dy alonga-se $\epsilon_y\, dy$, o que provoca o alongamento $\epsilon_y\, dy \operatorname{sen}\theta$ da reta dx'. Finalmente, supondo que dx permaneça fixa, a deformação por cisalhamento γ_{xy}, que consiste na mudança de ângulo entre dx e dy, provoca o deslocamento $\gamma_{xy}\, dy$ para a direita do topo da linha dy, como mostra a Figura 10.4*d*. Essa condição provoca o alongamento $\gamma_{xy}\, dy \cos\theta$ de dx'. Se os três alongamentos forem somados, o alongamento resultante de dx' será, então:

$$\delta x' = \epsilon_x\, dx \cos\theta + \epsilon_y\, dy \operatorname{sen}\theta + \gamma_{xy}\, dy \cos\theta$$

Com base na Equação 2.2, concluímos que a deformação normal ao longo da reta dx' é $\epsilon_{x'} = \delta x'/dx'$.

Usando a Equação 10.1, temos então:

$$\epsilon_{x'} = \epsilon_x \cos^2\theta + \epsilon_y \operatorname{sen}^2\theta + \gamma_{xy} \operatorname{sen}\theta \cos\theta \tag{10.2}$$

A equação de transformação da deformação para determinar $\gamma_{x'y'}$ é desenvolvida considerando-se a intensidade da rotação que cada segmento de reta dx' e dy' sofre quando submetido aos componentes da deformação ϵ_x, ϵ_y, γ_{xy}. Consideremos primeiro a rotação de dx', definida pelo ângulo no sentido anti-horário α mostrado na Figura 10.4*e*. Ela é determinada a partir do deslocamento $\delta y'$, usando-se $\alpha = \delta y'/dx'$. Para obter $\delta y'$, consideremos os três componentes de deslocamento seguintes que atuam na direção y': um a partir de ϵ_x, dando $-\epsilon_x\, dx \operatorname{sen}\theta$ (Figura 10.4*b*); outro a partir de ϵ_y, dando $\epsilon_y\, dy \cos\theta$ (Figura 10.4*c*); e o último a partir de γ_{xy}, dando $-\gamma_{xy}\, dy \operatorname{sen}\theta$ (Figura 10.4*d*). Desse modo, $\delta y'$, provocado pelos três componentes de deformação, é:

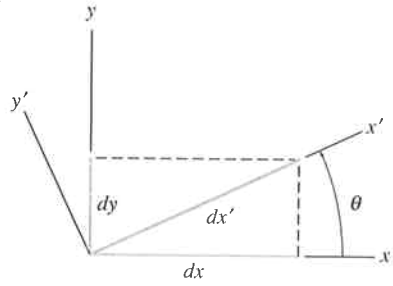
$$\delta y' = -\epsilon_x\, dx \operatorname{sen}\theta + \epsilon_y\, dy \cos\theta - \gamma_{xy}\, dy \operatorname{sen}\theta$$

Usando a Equação 10.1, com $\alpha = \delta y'/dx'$, temos:

$$\alpha = (-\epsilon_x + \epsilon_y) \operatorname{sen}\theta \cos\theta - \gamma_{xy} \operatorname{sen}^2\theta \tag{10.3}$$

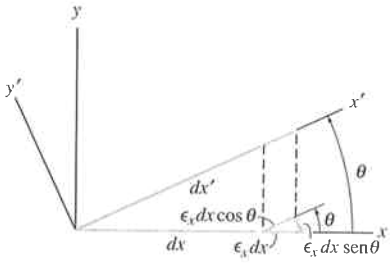
Como mostra a Figura 10.4*e*, a reta dy' gira β. Podemos determinar esse ângulo por uma análise semelhante, ou simplesmente substituindo $\theta + 90°$ por θ na Equação 10.3. Usando as identidades $\operatorname{sen}(\theta + 90°) = \cos\theta$, $\cos(\theta + 90°) = -\operatorname{sen}\theta$, temos:

$$\begin{aligned} \beta &= (-\epsilon_x + \epsilon_y) \operatorname{sen}(\theta + 90°) \cos(\theta + 90°) - \gamma_{xy} \operatorname{sen}^2(\theta + 90°) \\ &= -(-\epsilon_x + \epsilon_y) \cos\theta \operatorname{sen}\theta - \gamma_{xy} \cos^2\theta \end{aligned}$$



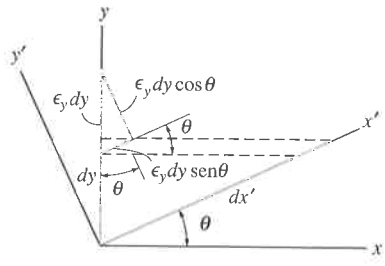
Antes da deformação

(a)



Deformação normal ϵ_x

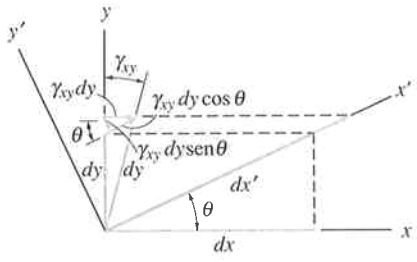
(b)



Deformação normal ϵ_y

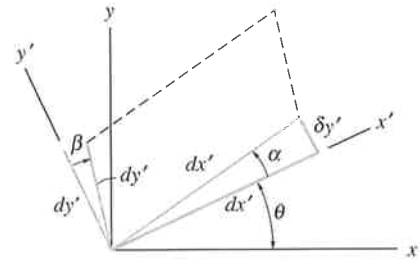
(c)

Figura 10.4



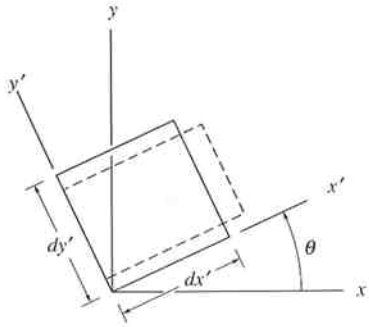
Deformação por cisalhamento γ_{xy}

(d)



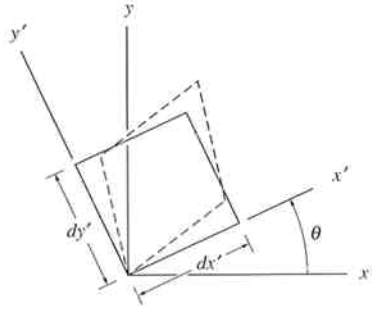
(e)

Figura 10.4



Deformação normal positiva $\epsilon_{x'}$

(a)



Deformação por cisalhamento positiva $\gamma_{x'y'}$

(b)

Figura 10.5

Como α e β representam a rotação dos lados dx' e dy' de um elemento infinitesimal cujos lados estavam orientados inicialmente ao longo dos eixos x' e y' e β tem direção oposta a α (Figura 10.4*e*), o elemento está, então, sujeito a uma deformação por cisalhamento de:

$$\gamma_{x'y'} = \alpha - \beta = -2(\epsilon_x - \epsilon_y)\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + \gamma_{xy}(\cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta) \tag{10.4}$$

Usando as identidades trigonométricas $\text{sen}\,2\theta = 2\,\text{sen}\theta\cos\theta$, $\cos^2\theta = (1 + \cos 2\theta)/2$ e $\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1$, podemos reescrever as equações 10.2 e 10.4 sob a forma final:

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\,\text{sen}\,2\theta \tag{10.5}$$

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)\text{sen}\,2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta \tag{10.6}$$

Essas equações de transformação da deformação produzem a deformação normal $\epsilon_{x'}$ na direção de x' e a deformação por cisalhamento $\gamma_{x'y'}$ de um elemento orientado com ângulo θ, como mostra a Figura 10.5. De acordo com a convenção de sinal estabelecida, se $\epsilon_{x'}$ for *positiva*, o elemento *alonga-se* na direção positiva de x' (Figura 10.5*a*), e se $\gamma_{x'y'}$ for positiva, o elemento deforma-se como mostra a Figura 10.5*b*. Observe que essas deformações ocorrem como se uma tensão normal positiva $\sigma_{x'}$ e uma tensão de cisalhamento positiva $\tau_{x'y'}$ atuassem sobre o elemento.

Se for necessário saber a deformação normal na direção y', poderemos obtê-la pela Equação 10.5 simplesmente substituindo $(\theta + 90°)$ por θ. O resultado será:

$$\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2}\,\text{sen}\,2\theta \tag{10.7}$$

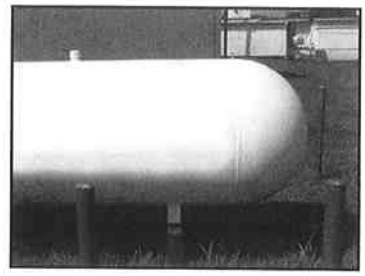
Observe a semelhança entre as três equações apresentadas e aquelas para transformação do estado plano de tensões (equações 9.1, 9.2 e 9.3). Fazendo uma comparação, σ_x, σ_y, $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ correspondem a ϵ_x, ϵ_y, $\epsilon_{x'}$, $\epsilon_{y'}$; e τ_{xy}, $\tau_{x'y'}$ correspondem a $\gamma_{xy}/2$, $\gamma_{x'y'}/2$.

Deformações Principais. Como na tensão, a orientação do elemento em um ponto é determinada de modo que a deformação do elemento seja representada por deformações normais, *sem* deformação por cisalhamento. Quando isso ocorre, as deformações normais são denominadas *deformações principais* e, se o material for isotrópico, os eixos ao longo dos quais elas ocorrem coincidem com os eixos que definem os planos de tensão principal.

Com base nas equações 9.4 e 9.5 e na correspondência entre eixo e deformação mencionada anteriormente, a direção dos eixos e os dois valores das deformações principais ϵ_1 e ϵ_2 são determinados por:

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \tag{10.8}$$

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \tag{10.9}$$



Tensões complexas são desenvolvidas geralmente nas costuras por onde os vasos se unem. Para determiná-las, fazem-se medições de deformação.

Deformação por Cisalhamento Máxima no Plano. Usando as equações 9.6, 9.7 e 9.8, determinam-se a direção do eixo, a deformação máxima por cisalhamento no plano e a deformação normal média associada, por meio das seguintes equações:

$$\operatorname{tg} 2\theta_c = -\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{\gamma_{xy}}\right) \tag{10.10}$$

$$\frac{\gamma_{\text{máx no plano}}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \tag{10.11}$$

$$\epsilon_{\text{méd}} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \tag{10.12}$$

PONTOS IMPORTANTES

- Devido ao efeito de Poisson, o estado plano de deformações não é um estado plano de tensões e vice-versa.
- Um ponto de determinado corpo está sujeito ao estado plano de tensões quando a superfície desse corpo está livre de tensões. A análise do estado plano de deformações é usada no estado plano de tensões para analisar os resultados dos extensômetros. Lembre-se, porém, de que existe uma deformação normal perpendicular a tais extensômetros.
- Quando o estado de deformação é representado pelas deformações principais, não há deformação por cisalhamento atuando sobre o elemento.
- O estado de deformação no ponto também é representado em termos da deformação por cisalhamento máxima no plano. Nesse caso, também atua sobre o elemento uma deformação normal média.
- O elemento que representa a deformação por cisalhamento máxima no plano e suas deformações normais médias associadas está a 45° do elemento que representa as deformações principais.

EXEMPLO 10.1

O elemento infinitesimal que representa um ponto do material está sujeito ao estado plano de deformações $\epsilon_x = 500(10^{-6})$, $\epsilon_y = -300(10^{-6})$, $\gamma_{xy} = 200(10^{-6})$, o qual tende a torcê-lo como mostra a Figura 10.6*a*. Determinar as deformações equivalentes que atuam sobre um elemento orientado no ponto a 30° no *sentido horário* em relação à posição original.

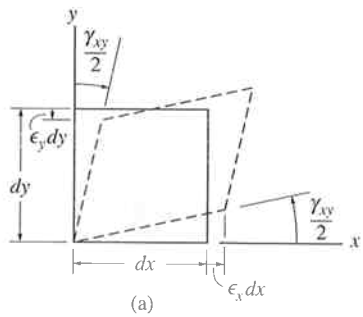
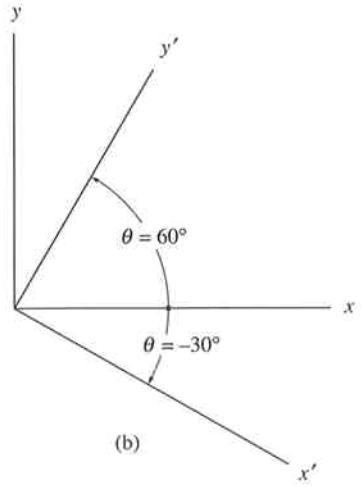


Figura 10.6

SOLUÇÃO

As equações de transformação da deformação 10.5 e 10.6 serão usadas para resolver o problema. Como θ é *positivo no sentido anti-horário*, então neste problema $\theta = -30°$. Assim:



(b)

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\operatorname{sen} 2\theta$$

$$= \left[\frac{500 + (-300)}{2}\right](10^{-6}) + \left[\frac{500 - (-300)}{2}\right](10^{-6})\cos(2(-30°))$$

$$+ \left[\frac{200(10^{-6})}{2}\right]\operatorname{sen}(2(-30°))$$

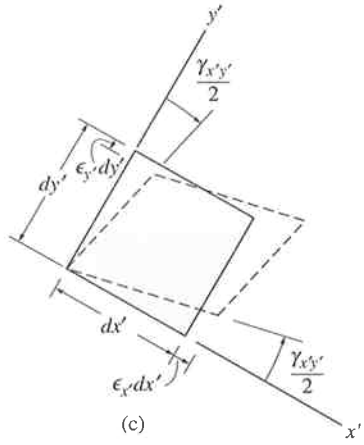
$$\epsilon_{x'} = 213(10^{-6}) \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)\operatorname{sen} 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta$$

$$= -\left[\frac{500 - (-300)}{2}\right](10^{-6})\operatorname{sen}(2(-30°)) + \frac{200(10^{-6})}{2}\cos(2(-30°))$$

$$\gamma_{x'y'} = 793(10^{-6}) \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

A deformação na direção y' é obtida pela Equação 10.7 com $\theta = -30°$. Entretanto, podemos também obter $\epsilon_{y'}$ usando a Equação 10.5 com $\theta = 60°$ ($\theta = -30° + 90°$) (Figura 10.6*b*). Temos, com $\epsilon_{y'}$ substituindo $\epsilon_{x'}$:



(c)

Figura 10.6

$$\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\operatorname{sen} 2\theta$$

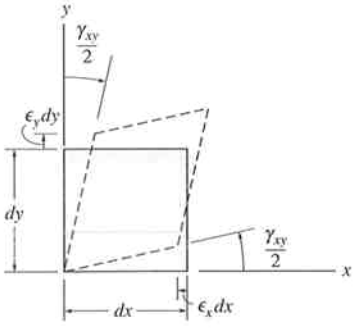
$$= \left[\frac{500 + (-300)}{2}\right](10^{-6}) + \left[\frac{500 - (-300)}{2}\right](10^{-6})\cos(2(60°))$$

$$+ \frac{200(10^{-6})}{2}\operatorname{sen}(2(60°))$$

$$\epsilon_{y'} = -13{,}4(10^{-6}) \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Esses resultados tendem a distorcer o elemento como mostra a Figura 10.6*c*.

EXEMPLO 10.2



(a)

Figura 10.7

O elemento infinitesimal que representa um ponto do material está sujeito ao estado plano de deformações $\epsilon_x = -350(10^{-6})$, $\epsilon_y = 200(10^{-6})$, $\gamma_{xy} = 80(10^{-6})$, o qual tende a torcê-lo como mostra a Figura 10.7*a*. Determinar as deformações principais no ponto e a orientação do elemento a elas correspondente.

SOLUÇÃO

Orientação do Elemento. A partir da Equação 10.8, temos:

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y}$$

$$= \frac{80(10^{-6})}{(-350 - 200)(10^{-6})}$$

Assim, $2\theta_p = -8{,}28°$ e $-8{,}28° + 180° = 172°$, de modo que:

$$\theta_p = -4{,}14° \text{ e } 85{,}9° \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Cada ângulo é medido *positivamente no sentido anti-horário*, a partir do eixo x para as normais externas em cada face do elemento (Figura 10.7*b*).

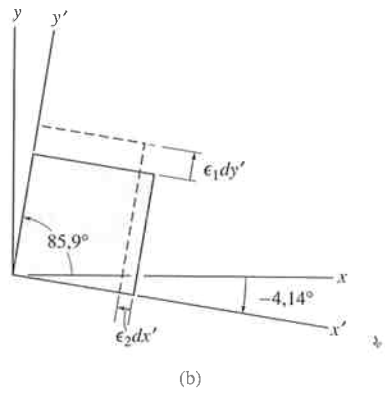
Deformações Principais. As deformações principais são determinadas pela Equação 10.9. Temos:

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{(-350 + 200)(10^{-6})}{2} \pm \left[\sqrt{\left(\frac{-350 - 200}{2}\right)^2 + \left(\frac{80}{2}\right)^2}\right](10^{-6})$$

$$= -75{,}0(10^{-6}) \pm 277{,}9(10^{-6})$$

$$\epsilon_1 = 203(10^{-6}) \qquad \epsilon_2 = -353(10^{-6}) \qquad \textbf{Resposta}$$



(b)

Figura 10.7

Podemos determinar qual dessas duas deformações (específicas) distorce o elemento na direção x' aplicando a Equação 10.5 com $\theta = -4{,}14°$. Assim:

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \operatorname{sen} 2\theta$$

$$= \left(\frac{-350 + 200}{2}\right)(10^{-6}) + \left(\frac{-350 - 200}{2}\right)(10^{-6}) \cos 2(-4{,}14°)$$

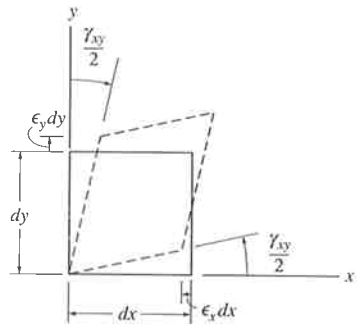
$$+ \frac{80(10^{-6})}{2} \operatorname{sen} 2(-4{,}14°)$$

$$\epsilon_{x'} = -353(10^{-6})$$

Portanto, $\epsilon_{x'} = \epsilon_2$. Quando submetido a deformações principais, o elemento distorce-se como mostra a Figura 10.7*b*.

EXEMPLO 10.3

O elemento infinitesimal que representa um ponto do material está sujeito ao estado plano de deformações $\epsilon_x = -350(10^{-6})$, $\epsilon_y = 200(10^{-6})$, $\gamma_{xy} = 80(10^{-6})$, o qual tende a torcê-lo como mostra a Figura 10.8*a*. Determinar a deformação por cisalhamento máxima no plano no ponto e a orientação do elemento correspondente.



(a)

Figura 10.8

SOLUÇÃO

Orientação do Elemento. Pela Equação 10.10, temos:

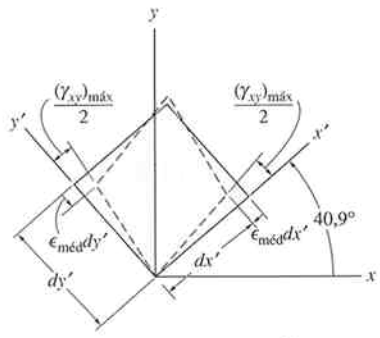
$$\operatorname{tg} 2\theta_s = -\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{\gamma_{xy}}\right) = -\frac{(-350 - 200)(10^{-6})}{80(10^{-6})}$$

Assim, $2\theta_s = 81{,}72°$ e $81{,}72° + 180° = 261{,}72°$, de modo que:

$$\theta_s = 40{,}9° \text{ e } 130{,}9°$$

Observe que, como esperado, essa orientação está a 45° em relação à mostrada na Figura 10.7*b* do Exemplo 10.2.

Deformação por Cisalhamento Máxima no Plano. Aplicando a Equação 10.11, temos:



(b)

Figura 10.8

$$\frac{\gamma_{máx}}{2}_{\text{no plano}} = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$= \left[\sqrt{\left(\frac{-350 - 200}{2}\right)^2 + \left(\frac{80}{2}\right)^2}\right](10^{-6})$$

$$\gamma_{\substack{máx \\ \text{no plano}}} = 556(10^{-6}) \qquad \textit{Resposta}$$

O sinal apropriado de $\gamma_{\substack{máx \\ \text{no plano}}}$ é obtido aplicando-se a Equação 10.6 com $\theta_s = 40{,}9°$. Temos:

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta$$

$$= -\left(\frac{-350 - 200}{2}\right)(10^{-6}) \operatorname{sen} 2(40{,}9°) + \frac{80(10^{-6})}{2} \cos 2(40{,}9°)$$

$$\gamma_{x'y'} = 556(10^{-6})$$

Assim, $\gamma_{\substack{máx \\ \text{no plano}}}$ tende a distorcer o elemento de modo que o ângulo reto entre dx' e dy' diminui (convenção de sinal positivo) (Figura 10.8*b*).

Há também deformações normais médias associadas impostas ao elemento, determinadas pela Equação 10.12:

$$\epsilon_{méd} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} = \frac{-350 + 200}{2}(10^{-6}) = -75(10^{-6})$$

Essas deformações tendem a contrair o elemento (Figura 10.8*b*).

*10.3 CÍRCULO DE MOHR — ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES

Como as equações de transformação para o estado plano de deformações são matematicamente semelhantes às equações de transformação para o estado plano de tensões, também podemos resolver os problemas que as envolvem usando o círculo de Mohr. Essa abordagem oferece a vantagem de tornar possível ver graficamente como os componentes das deformações normal e por cisalhamento em determinado ponto variam de uma orientação para outra.

Como no caso da tensão, o parâmetro θ nas equações 10.5 e 10.6 pode ser eliminado e o resultado pode ser reescrito sob a forma:

$$(\epsilon_x - \epsilon_{méd})^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2 = R^2 \tag{10.13}$$

onde:

$$\epsilon_{méd} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

A Equação 10.13 representa a equação do círculo de Mohr para a deformação. Ela tem seu centro no ponto $C(\epsilon_{méd}, 0)$ do eixo ϵ e raio R.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

O procedimento para desenhar o círculo de Mohr para a deformação segue o mesmo procedimento estabelecido para a tensão.

Construção do Círculo.

- Estabelecer um sistema de coordenadas tal que a abscissa represente a deformação normal ϵ, com *sentido positivo para a direita,* e a ordenada represente *metade* do valor da deformação por cisalhamento, $\gamma/2$, com *sentido positivo para baixo* (Figura 10.9).
- Usando a convenção de sinal positivo para ϵ_x, ϵ_y, γ_{xy}, como mostra a Figura 10.3, determinar o centro do círculo C, que está localizado no eixo ϵ a uma distância $\epsilon_{méd} = (\epsilon_x + \epsilon_y)/2$ da origem (Figura 10.9).
- Marcar o ponto de referência A de coordenadas $A\ (\epsilon_x, \gamma_{xy}/2)$. Esse ponto representa o caso em que o eixo x' coincide com o eixo x. Portanto, $\theta = 0°$ (Figura 10.9).
- Conectar o ponto A ao centro C e determinar o raio R pelo triângulo sombreado (Figura 10.9).
- Uma vez determinado R, traçar o círculo.

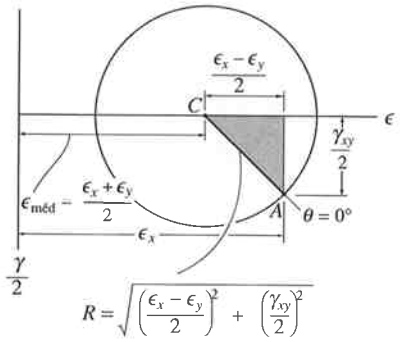


Figura 10.9

Deformações Principais.

- As deformações principais ϵ_1 e ϵ_2 são determinadas pelo círculo como coordenadas dos pontos B e D, onde $\gamma/2 = 0$ (Figura 10.10*a*).
- Determinar a orientação do plano sobre o qual ϵ_1 atua pelo círculo, calculando $2\theta_{p_1}$ por meio de trigonometria. Nesse caso, o ângulo é medido no sentido anti-horário *a partir* da reta de referência radial CA *até* a reta CB (Figura 10.10*a*). Lembrar que a *rotação* de θ_{p_1} deve ser nessa *mesma direção*, a partir do eixo de referência do elemento x para o eixo x' (Figura 10.10*b*).†
- Quando ϵ_1 e ϵ_2 são indicados como positivos, como na Figura 10.10*a*, o elemento da Figura 10.10*b* alonga-se nas direções x' e y' como mostra o contorno tracejado.

Deformação por Cisalhamento Máxima no Plano.

- A deformação normal média e metade da deformação por cisalhamento máxima no plano são determinadas no círculo de Mohr como coordenadas dos pontos E e F (Figura 10.10*a*).
- Determinar a orientação do plano sobre o qual $\gamma_{\substack{máx \\ no\ plano}}$ e $\epsilon_{méd}$ atuam pelo círculo, calculando $2\theta_{s_1}$ por meio de trigonometria. Nesse caso, o ângulo é medido no sentido horário *a partir* da reta de referência radial CA até a reta CE (Figura 10.10*a*). Lembrar que a *rotação* de θ_{s_1} deve ser nessa *mesma direção*, a partir do eixo de referência do elemento x para o eixo x' (Figura 10.10*c*).†

Deformações no Plano Arbitrário.

- Os componentes de deformação normal e por cisalhamento $\epsilon_{x'}$ e $\gamma_{x'y'}$ para um plano especificado por um ângulo θ (Figura 10.10*d*) são obtidos a partir do círculo, usando-se trigonometria para determinar as coordenadas do ponto P (Figura 10.10*a*).
- Para localizar P, o ângulo conhecido θ do eixo x' é medido no círculo como 2θ. A medição é feita *da* reta de referência radial CA *para* a reta radial CP. Lembrar que as medições de 2θ no círculo devem ter a mesma direção de θ para o eixo x'.†
- Se for necessário saber o valor de $\epsilon_{y'}$, determiná-lo calculando a coordenada ϵ do ponto Q na Figura 10.10*a*. A reta CQ localiza-se a 180° de CP e, desse modo, representa uma rotação de 90° do eixo x'.

† Se, em vez disso, o eixo $\gamma/2$ for construído com direção *positiva para cima*, então o ângulo 2θ do círculo deverá ser medido na *direção oposta* à orientação θ do plano.

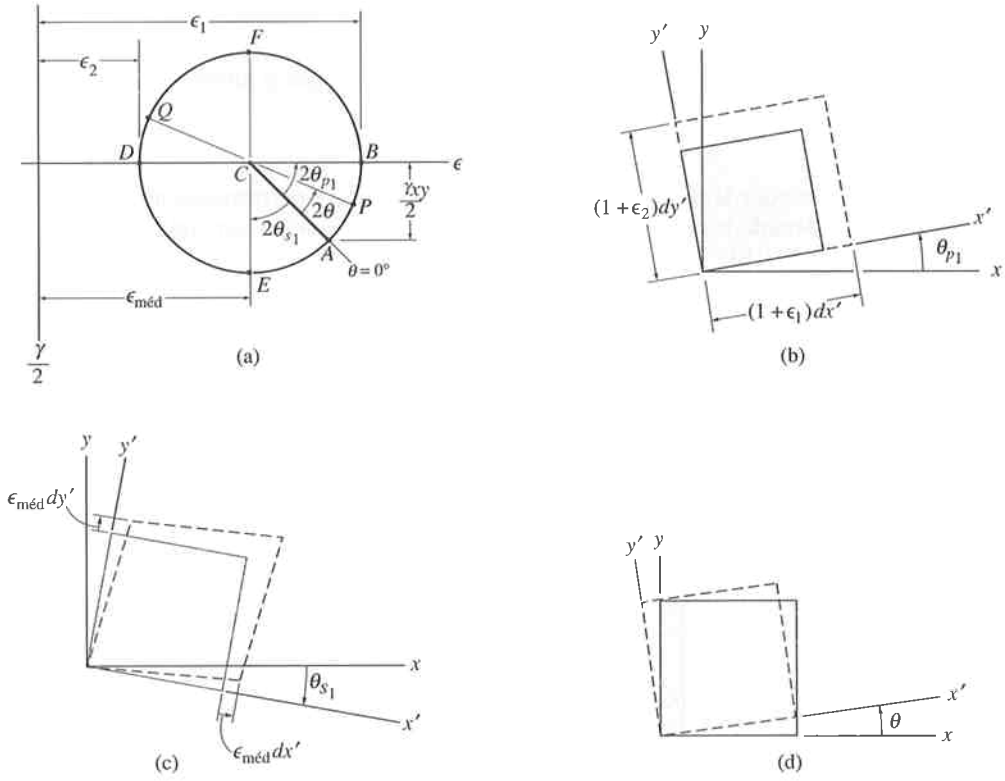


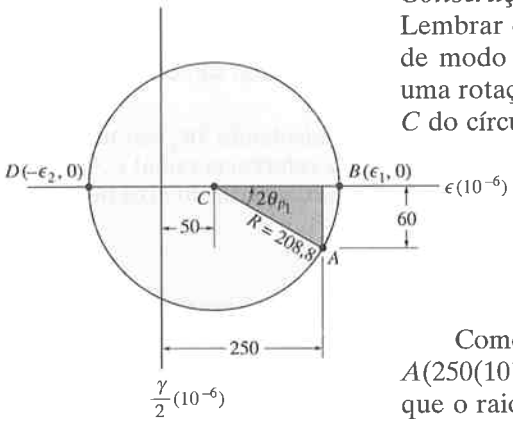
Figura 10.10

EXEMPLO 10.4

O estado plano de deformações em um ponto é representado pelos componentes $\epsilon_x = 250(10^{-6})$, $\epsilon_y = -150(10^{-6})$ e $\gamma_{xy} = 120(10^{-6})$. Determinar as deformações principais e a orientação do elemento.

SOLUÇÃO

Construção do Círculo. Os eixos ϵ e $\gamma/2$ estão definidos na Figura 10.11*a*. Lembrar que o sentido *positivo* do eixo $\gamma/2$ deve ser direcionado *para baixo*, de modo que rotações no *sentido anti-horário* do elemento correspondam a uma rotação no *sentido anti-horário* em torno do círculo e vice-versa. O centro C do círculo está localizado no eixo ϵ em:



(a)

Figura 10.11

$$\epsilon_{méd} = \frac{250 + (-150)}{2}(10^{-6}) = 50(10^{-6})$$

Como $\gamma_{xy}/2 = 60(10^{-6})$, o ponto de referência A ($\theta = 0°$) tem coordenadas $A(250(10^{-6}), 60(10^{-6}))$. Pelo triângulo sombreado na Figura 10.11*a*, concluímos que o raio do círculo é CA; isto é:

$$R = \left[\sqrt{(250 - 50)^2 + (60)^2}\right](10^{-6}) = 208{,}8(10^{-6})$$

Deformações Principais. As coordenadas ϵ dos pontos B e D representam as deformações principais, que são:

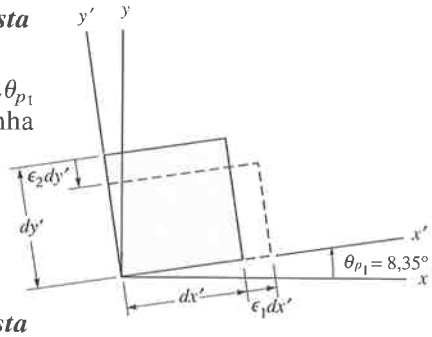
$$\epsilon_1 = (50 + 208{,}8)(10^{-6}) = 259(10^{-6}) \qquad \textit{Resposta}$$

$$\epsilon_2 = (50 - 208{,}8)(10^{-6}) = -159(10^{-6}) \qquad \textit{Resposta}$$

A direção positiva da deformação principal ϵ_1 é definida pelo ângulo $2\theta_{p_1}$ no *sentido anti-horário*, medido da linha de referência radial CA para a linha CB. Temos:

$$\text{tg}\, 2\theta_{p_1} = \frac{60}{(250 - 50)}$$

$$\theta_{p_1} = 8{,}35° \qquad \textit{Resposta}$$



(b)

Figura 10.11

Portanto, o lado dx' do elemento é orientado a 8,35° no *sentido anti-horário* como mostra a Figura 10.11*b*. Esse ângulo define também a direção de ϵ_1. A deformação do elemento também aparece na figura.

EXEMPLO 10.5

O estado plano de deformações em um ponto é representado pelos componentes $\epsilon_x = 250(10^{-6})$, $\epsilon_y = -150(10^{-6})$ e $\gamma_{xy} = 120(10^{-6})$. Determinar as deformações por cisalhamento máximas no plano e a orientação do elemento.

SOLUÇÃO

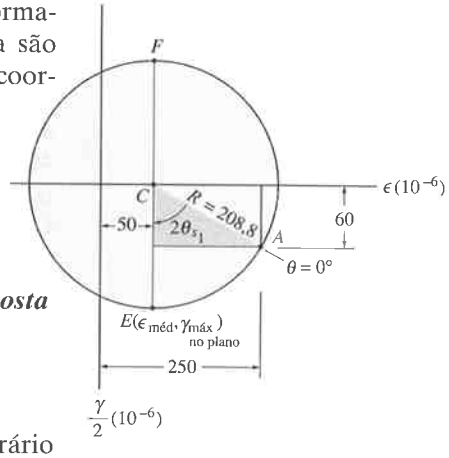
O círculo foi definido no exemplo anterior e é mostrado na Figura 10.12*a*.

Deformação por Cisalhamento Máxima no Plano. Metade da deformação por cisalhamento máxima no plano e a deformação normal média são representadas pelas coordenadas dos pontos E ou F no círculo. Pelas coordenadas do ponto E:

$$\frac{(\gamma_{x'y'})_{\substack{\text{máx} \\ \text{no plano}}}}{2} = 208{,}8(10^{-6})$$

$$(\gamma_{x'y'})_{\substack{\text{máx} \\ \text{no plano}}} = 418(10^{-6}) \qquad \textit{Resposta}$$

$$\epsilon_{\text{méd}} = 50(10^{-6})$$



(a)

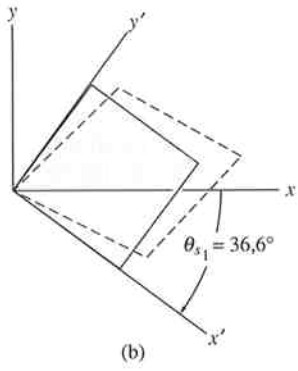
Figura 10.12

Para orientar o elemento, determinamos o ângulo $2\theta_{s_1}$ no sentido horário pelo círculo.

$$2\theta_{s_1} = 90° - 2(8{,}35°)$$

$$\theta_{s_1} = 36{,}6° \qquad \textit{Resposta}$$

Esse ângulo é mostrado na Figura 10.12*b*. Como a deformação por cisalhamento definida pelo ponto E no círculo tem valor positivo e a deformação normal média também é positiva, a tensão de cisalhamento positiva e a tensão normal média positiva correspondentes deformam o elemento até que ele adquira a forma tracejada mostrada na figura.



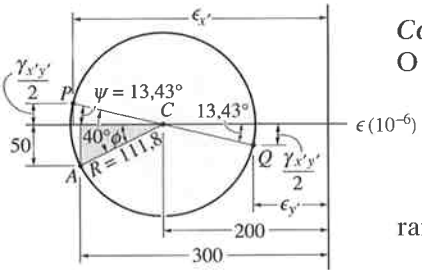
(b)

Figura 10.12

EXEMPLO 10.6

O estado plano de deformações em um ponto é representado pelos componentes $\epsilon_x = -300(10^{-6})$, $\epsilon_y = -100(10^{-6})$ e $\gamma_{xy} = 100(10^{-6})$. Determinar o estado de deformação em um elemento orientado a 20° no sentido horário em relação à posição informada.

SOLUÇÃO



(a)

Construção do Círculo. Os eixos ϵ e $\gamma/2$ estão definidos na Figura 10.13*a*. O centro do círculo está localizado no eixo ϵ em:

$$\epsilon_{méd} = \left(\frac{-300 - 100}{2}\right)(10^{-6}) = -200(10^{-6})$$

O ponto de referência A tem coordenadas $A(-300(10^{-6}), 50(10^{-6}))$. O raio CA determinado pelo triângulo sombreado é, portanto:

$$R = \left[\sqrt{(300 - 200)^2 + (50)^2}\right](10^{-6}) = 111,8(10^{-6})$$

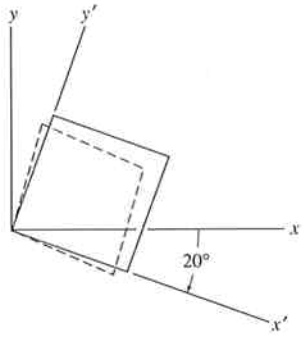
Deformações no Elemento Inclinado. Como o elemento deve ser orientado a 20° no *sentido horário*, devemos definir uma reta radial CP, $2(20°) = 40°$ no *sentido horário*, medida a partir de CA ($\theta = 0°$) (Figura 10.13*a*). As coordenadas do ponto P ($\epsilon_{x'}$, $-\gamma_{x'y'}/2$) são obtidas pela geometria do círculo. Observe que:

$$\phi = \text{tg}^{-1}\left(\frac{50}{(300 - 200)}\right) = 26,57°, \qquad \psi = 40° - 26,57° = 13,43°$$

Assim,

$$\epsilon_{x'} = -(200 + 111,8 \cos 13,43°)(10^{-6})$$
$$= -309(10^{-6}) \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -(111,8 \text{ sen } 13,43°)(10^{-6})$$
$$\gamma_{x'y'} = -52,0(10^{-6}) \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$



(b)

Figura 10.13

A deformação normal $\epsilon_{y'}$ é determinada pela coordenada ϵ do ponto Q no círculo (Figura 10.13*a*). Por quê?

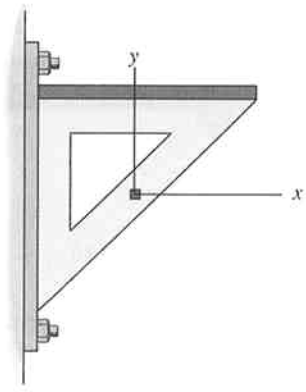
$$\epsilon_{y'} = -(200 - 111,8 \cos 13,43°)(10^{-6}) = -91,3(10^{-6}) \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Como resultado dessas deformações, o elemento distorce-se em relação aos eixos x' e y' como mostra a Figura 10.13*b*.

PROBLEMAS

10.1. Provar que a soma das deformações normais em direções perpendiculares é constante.

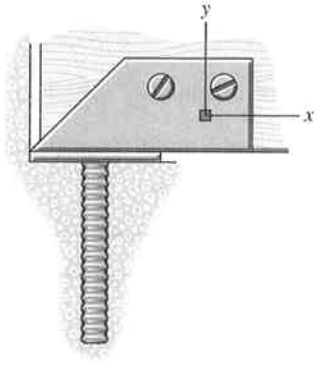
10.2. O estado de deformação no ponto do suporte tem componentes $\epsilon_x = -200(10^{-6})$, $\epsilon_y = -650(10^{-6})$, $\gamma_{xy} = -175\ (10^{-6})$. Usar as equações de transformação da deformação para determinar as deformações planas equivalentes em um elemento orientado a $\theta = 20°$ no sentido anti-horário em relação à posição original. Esquematizar no plano x–y o elemento distorcido em virtude dessas deformações.



Problema 10.2

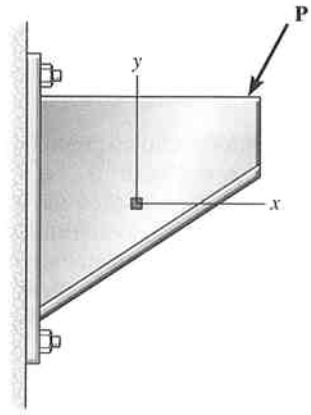
10.3. O elemento infinitesimal do suporte está sujeito a um estado plano de deformações com os seguintes componentes: $\epsilon_x = 150(10^{-6})$, $\epsilon_y = 200(10^{-6})$ e $\gamma_{xy} = -700(10^{-6})$. Usar as equações de transformação e determinar as deformações planas equivalentes em um elemento orientado a $\theta = 60°$ no sentido anti-horário em relação à posição original. Esquematizar no plano x–y o elemento distorcido em virtude dessas deformações.

***10.4.** Resolver o Problema 10.3 para um elemento orientado a $\theta = 30°$ no sentido horário.



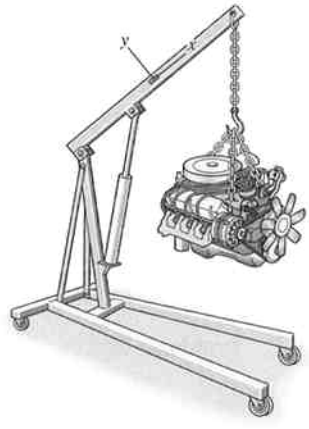
Problemas 10.3/10.4

10.5. Devido à carga **P**, o estado de deformação no ponto do suporte tem componentes $\epsilon_x = 500(10^{-6})$, $\epsilon_y = 350(10^{-6})$ e $\gamma_{xy} = -430(10^{-6})$. Usar as equações de transformação da deformação para determinar as deformações planas equivalentes em um elemento orientado a um ângulo $\theta = 30°$ no sentido horário em relação à posição original. Esquematizar no plano x–y o elemento distorcido em virtude dessas deformações.



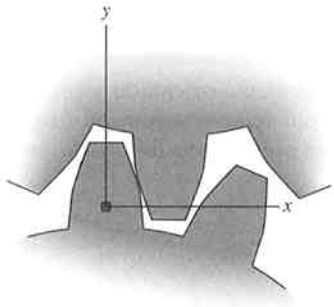
Problema 10.5

10.6. O estado de deformação no ponto da lança do guindaste hidráulico tem componentes $\epsilon_x = 250(10^{-6})$ $\epsilon_y = 300(10^{-6})$ e $\gamma_{xy} = -180(10^{-6})$. Usar as equações de transformação da deformação para determinar (*a*) as deformações principais no plano e (*b*) a deformação por cisalhamento máxima no plano e a deformação normal média. Especificar em cada caso a orientação do elemento e mostrar no plano x–y como as deformações o distorcem.



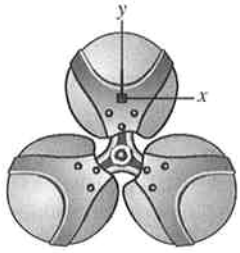
Problema 10.6

10.7. O estado de deformação no ponto do dente da engrenagem tem componentes $\epsilon_x = 850(10^{-6})$, $\epsilon_y = 480\ (10^{-6})$ e $\gamma_{xy} = 650(10^{-6})$. Usar as equações de transformação da deformação para determinar (*a*) as deformações principais no plano e (*b*) a deformação por cisalhamento máxima no plano e a deformação normal média. Especificar em cada caso a orientação do elemento e mostrar no plano x–y como as deformações o distorcem.



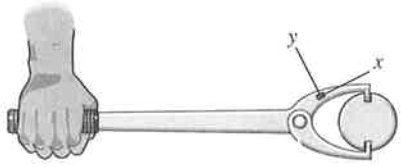
Problema 10.7

***10.8.** O estado de deformação no ponto da pá do ventilador tem componentes $\epsilon_x = 250(10^{-6})$, $\epsilon_y = -450(10^{-6})$ e $\gamma_{xy} = -825(10^{-6})$. Usar as equações de transformação da deformação para determinar (*a*) as deformações principais no plano e (*b*) a deformação por cisalhamento máxima no plano e a deformação normal média. Especificar em cada caso a orientação do elemento e mostrar no plano *x*–*y* como as deformações o distorcem.



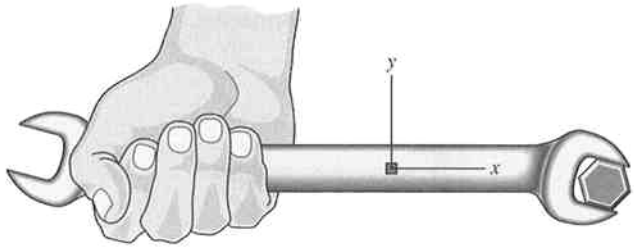
Problema 10.8

10.9. O estado de deformação no ponto da chave tem componentes $\epsilon_x = 260(10^{-6})$, $\epsilon_y = 320(10^{-6})$ e $\gamma_{xy} = 180(10^{-6})$. Usar as equações de transformação da deformação para determinar (*a*) as deformações principais no plano e (*b*) a deformação por cisalhamento máxima no plano e a deformação normal média. Especificar em cada caso a orientação do elemento e mostrar no plano *x*–*y* como as deformações o distorcem.



Problema 10.9

10.10. O estado de deformação no ponto da chave tem componentes $\epsilon_x = 120(10^{-6})$, $\epsilon_y = -180(10^{-6})$ e $\gamma_{xy} = 150(10^{-6})$. Usar as equações de transformação da deformação para determinar (*a*) as deformações principais no plano e (*b*) a deformação por cisalhamento máxima no plano e a deformação normal média. Especificar em cada caso a orientação do elemento e mostrar no plano *x*–*y* como as deformações o distorcem.



Problema 10.10

■ **10.11.** Considerar o caso genérico de estado plano de deformações em que ϵ_x, ϵ_y e γ_{xy} são conhecidos. Escrever um programa de computador que possa ser usado para determinar as deformações normal e por cisalhamento $\epsilon_{x'}$ e $\gamma_{x'y'}$ no plano de um elemento orientado a θ a partir da horizontal. Calcular também as deformações principais e a orientação do elemento, a deformação por cisalhamento máxima no plano, a deformação normal média e a orientação do elemento.

***10.12.** Resolver o Problema 10.2 usando o círculo de Mohr.

10.13. Resolver o Problema 10.3 usando o círculo de Mohr.

10.14. Resolver o Problema 10.4 usando o círculo de Mohr.

10.15. Resolver o Problema 10.5 usando o círculo de Mohr.

***10.16.** Resolver o Problema 10.8 usando o círculo de Mohr.

10.17. Resolver o Problema 10.6 usando o círculo de Mohr.

10.18. Resolver o Problema 10.7 usando o círculo de Mohr.

10.19. Resolver o Problema 10.9 usando o círculo de Mohr.

*10.4 DEFORMAÇÃO POR CISALHAMENTO MÁXIMA ABSOLUTA

Na Seção 9.7 foi salientado que, em três dimensões, o estado de tensão em um ponto é representado por um elemento orientado em uma direção específica, de forma que o elemento esteja sujeito somente a *tensões principais* com valores máximo, intermediário e mínimo ($\sigma_{máx}$, σ_{int} e $\sigma_{mín}$). Essas tensões

submetem o material a *deformações principais* associadas $\epsilon_{máx}$, ϵ_{int} e $\epsilon_{mín}$. Além disso, se o material for homogêneo e isotrópico, o elemento *não* estará sujeito a deformações por cisalhamento porque a tensão de cisalhamento nos planos principais será nula.

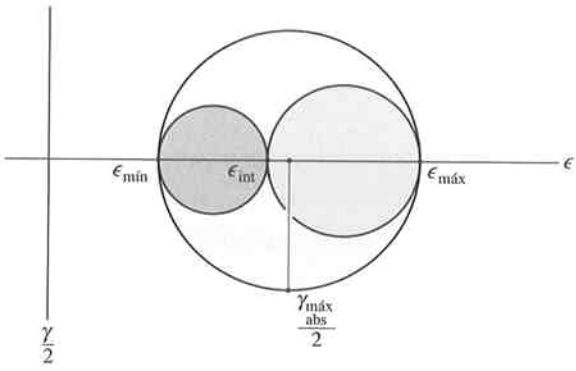
Admitamos que as três deformações principais provoquem alongamentos ao longo dos eixos x', y', z' como mostra a Figura 10.14*a*. Se virmos o elemento em duas dimensões, isto é, nos planos $x'-y'$, $x'-z'$ e $y'-z'$ (figuras 10.14*b*, 10.14*c* e 10.14*d*), poderemos usar o círculo de Mohr para determinar a *deformação por cisalhamento máxima no plano* em cada caso. Por exemplo: analisando o elemento no plano $x'-y'$ (Figura 10.14*b*), concluímos que o diâmetro do círculo de Mohr estende-se entre $\epsilon_{máx}$ e ϵ_{int} (Figura 10.14*e*). O círculo informa os componentes da deformação normal e por cisalhamento de cada elemento orientado em torno do eixo z'. Da mesma maneira, os círculos de Mohr para cada elemento orientado em torno dos eixos y' e x' também são mostrados na Figura 10.14*e*.

Pelos três círculos vê-se que a ***deformação por cisalhamento máxima absoluta*** é determinada no círculo de raio maior. Ela ocorre no elemento orientado a 45° em torno do eixo y' em relação ao elemento mostrado em sua posição original (figuras 10.14*a* ou 10.14*c*). Para essa condição:

$$\gamma_{\substack{máx \\ abs}} = \epsilon_{máx} - \epsilon_{mín} \tag{10.14}$$

e

$$\epsilon_{méd} = \frac{\epsilon_{máx} + \epsilon_{mín}}{2} \tag{10.15}$$



(e)

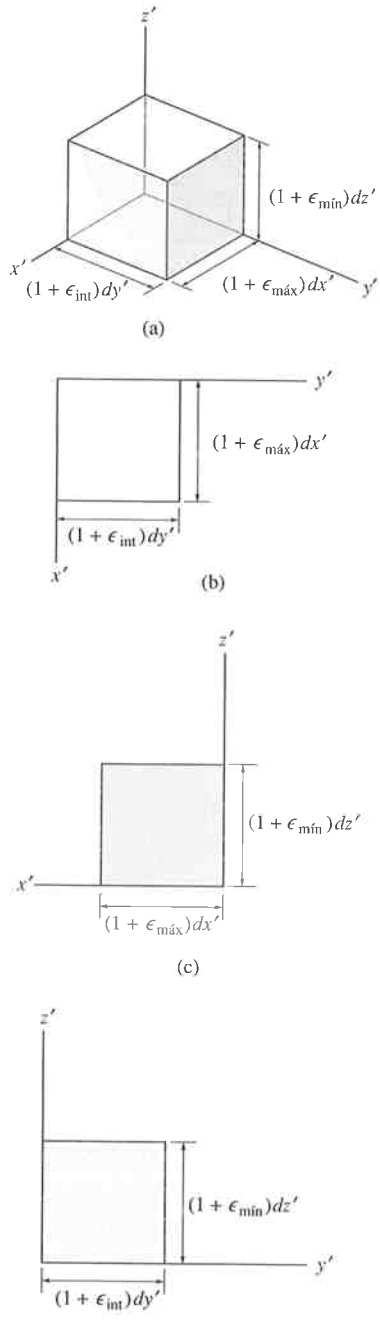
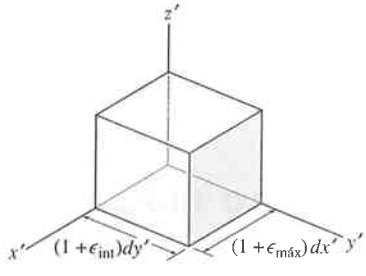


Figura 10.14

Estado Plano de Deformações. Como no caso do estado plano de tensões, a análise anterior tem implicação importante quando o material está sujeito a um *estado plano de deformações*, especialmente quando as *deformações principais* têm o *mesmo sinal*, isto é, ambas provocam alongamento ou ambas provocam contração. Por exemplo: se as deformações principais no plano forem $\epsilon_{máx}$ e ϵ_{int}, enquanto a deformação principal fora do plano for $\epsilon_{mín} = 0$ (Figura 10.15*a*), então os três círculos de Mohr que descrevem os componentes de deformação normal e por cisalhamento para elementos orientados em torno dos eixos x', y' e z' serão os mostrados na Figura 10.15*b*. Por inspeção, concluímos que o maior círculo tem raio $R = (\gamma_{x'z'})_{máx}/2$. Portanto:

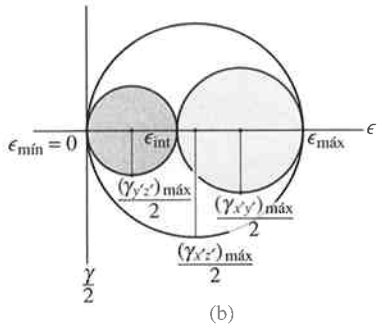
$$\gamma_{\substack{máx \\ abs}} = (\gamma_{x'z'})_{máx} = \epsilon_{máx}$$



Estado plano de deformações $x'-y'$

(a)

Figura 10.15



(b)

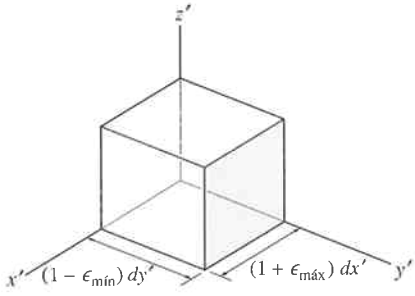
Figura 10.15

Esse valor representa a *deformação por cisalhamento máxima absoluta* para o material. Observe que ela é *superior* à deformação por cisalhamento máxima no plano, que é $(\gamma_{x'y'})_{máx} = \epsilon_{máx} - \epsilon_{int}$.

Por outro lado, se uma das deformações principais no plano tiver *sinal oposto* ao da outra, então $\epsilon_{máx}$ provocará alongamento, $\epsilon_{mín}$ provocará contração e a deformação principal fora do plano será $\epsilon_{int} = 0$ (Figura 10.16*a*). Os círculos de Mohr, que descrevem as deformações em cada orientação do elemento em torno dos eixos x', y' e z', são mostrados na Figura 10.16*b*. Nesse caso:

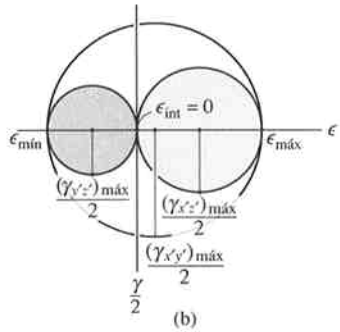
$$\gamma_{\substack{máx \\ abs}} = (\gamma_{x'y'})_{máx} = \epsilon_{máx} - \epsilon_{mín}$$

Assim, podemos resumir os dois pontos anteriores como segue. Se as deformações principais no plano tiverem o *mesmo sinal*, a *deformação por cisalhamento máxima absoluta* ocorrerá *fora do plano* e com valor $\gamma_{\substack{máx \\ abs}} = \epsilon_{máx}$. Entretanto, se as deformações principais no plano tiverem *sinais opostos*, a deformação por cisalhamento máxima absoluta será *igual* à deformação por cisalhamento máxima no plano.



Estado plano de deformações $x' - y'$

(a)



(b)

Figura 10.16

PONTOS IMPORTANTES

- O estado geral de deformação tridimensional em um ponto é representado por um elemento orientado de tal modo que apenas três deformações principais atuem sobre ele.
- A partir dessa orientação, obtém-se a orientação do elemento que representa a deformação por cisalhamento máxima absoluta girando o elemento 45° em torno do eixo que define a direção de ϵ_{int}.
- A deformação por cisalhamento máxima absoluta será *maior* que a deformação por cisalhamento máxima no plano sempre que as deformações principais no plano tiverem o *mesmo sinal*. Quando essa condição ocorre, a deformação por cisalhamento máxima absoluta atua fora do plano.

EXEMPLO 10.7

O estado plano de deformações no ponto é representado pelos componentes de deformação $\epsilon_x = -400(10^{-6})$, $\epsilon_y = 200(10^{-6})$ e $\gamma_{xy} = 150(10^{-6})$. Determinar a deformação por cisalhamento máxima no plano e a deformação por cisalhamento máxima absoluta.

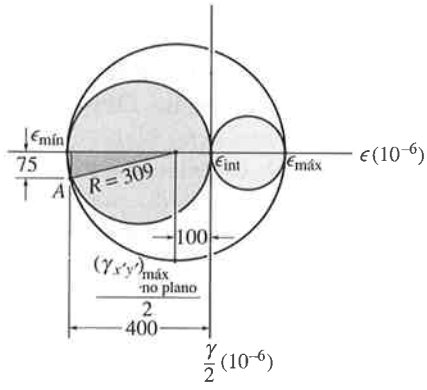


Figura 10.17

SOLUÇÃO

Deformação Máxima no Plano. Resolveremos o problema usando o círculo de Mohr. Pelos componentes de deformação, conclui-se que o centro do círculo localiza-se no eixo ϵ em:

$$\epsilon_{méd} = \frac{-400 + 200}{2}(10^{-6}) = -100(10^{-6})$$

Como $\gamma_{xy}/2 = 75(10^{-6})$, o ponto de referência tem coordenadas $A(-400(10^{-6}), 75(10^{-6}))$. Como mostra a Figura 10.17, o raio do círculo é, portanto:

$$R = \left[\sqrt{(400 - 100)^2 + (75)^2}\right](10^{-6}) = 309(10^{-6})$$

Calculando as deformações principais no plano, temos:

$$\epsilon_{máx} = (-100 + 309)(10^{-6}) = 209(10^{-6})$$
$$\epsilon_{mín} = (-100 - 309)(10^{-6}) = -409(10^{-6})$$

Pelo círculo, a deformação por cisalhamento máxima no plano é:

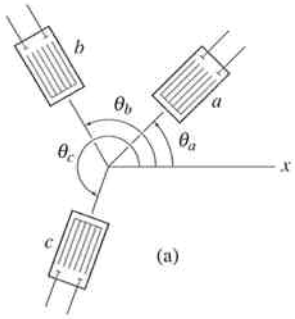
$$\gamma_{\substack{máx \\ no\ plano}} = \epsilon_{máx} - \epsilon_{mín} = [209 - (-409)](10^{-6}) = 618(10^{-6}) \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Deformação por Cisalhamento Máxima Absoluta. Pelos resultados apresentados, temos $\epsilon_{máx} = 209(10^{-6})$, $\epsilon_{int} = 0$, $\epsilon_{mín} = -409(10^{-6})$. Os três círculos de Mohr que descrevem as orientações do elemento em torno de cada um dos eixos x', y' e z' também são mostrados na Figura 10.17. Como as *deformações principais no plano têm sinais opostos*, a deformação por cisalhamento máxima no plano *também* é a deformação por cisalhamento máxima absoluta, ou seja:

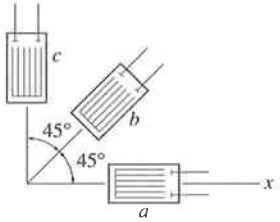
$$\gamma_{\substack{máx \\ abs}} = 618(10^{-6}) \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

10.5 ROSETAS

Mencionamos na Seção 3.1 que a deformação normal em um corpo-de-prova de teste de tração é medida usando-se um ***extensômetro de resistência elétrica***, que consiste em uma malha de filamentos ou um pedaço de folha de metal acoplado ao corpo-de-prova. Entretanto, no carregamento geral de um corpo, as *deformações normais* em um ponto da superfície livre são deter-

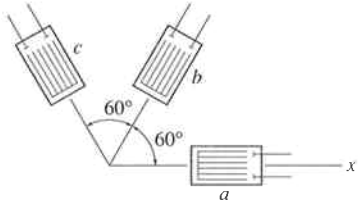


(a)



Roseta de 45°

(b)



Roseta de 60°

(c)

Figura 10.18

minadas em geral usando-se três extensômetros de resistência elétrica agrupados de acordo com um padrão específico. Esse padrão é denominado ***roseta*** e, uma vez feitas as leituras dos três aferidores, os dados são usados para especificar o estado de deformação no ponto. Deve ser observado, porém, que essas deformações são medidas *somente* no plano das malhas e, como o corpo não sofre tensões em sua superfície, os extensômetros podem estar sujeitos ao *estado plano de tensões*, mas *não* ao estado plano de deformações. A esse respeito, a reta normal para a superfície livre é um eixo principal de deformação e, desse modo, a deformação normal principal ao longo desse eixo *não* é medida pela roseta. O importante aqui é que o deslocamento fora do plano provocado por essa deformação principal *não* é afetado pelas medições dos aferidores no plano.

Geralmente, os eixos dos três aferidores estão posicionados nos ângulos θ_a, θ_b e θ_c como mostra a Figura 10.18*a*. Se fizermos as leituras ϵ_a, ϵ_b e ϵ_c, determinaremos os componentes de deformação ϵ_x, ϵ_y e γ_{xy} no ponto, aplicando a Equação da transformação de deformação 10.2 para cada aferidor. Temos:

$$\begin{aligned}\epsilon_a &= \epsilon_x \cos^2 \theta_a + \epsilon_y \operatorname{sen}^2 \theta_a + \gamma_{xy} \operatorname{sen} \theta_a \cos \theta_a \\ \epsilon_b &= \epsilon_x \cos^2 \theta_b + \epsilon_y \operatorname{sen}^2 \theta_b + \gamma_{xy} \operatorname{sen} \theta_b \cos \theta_b \\ \epsilon_c &= \epsilon_x \cos^2 \theta_c + \epsilon_y \operatorname{sen}^2 \theta_c + \gamma_{xy} \operatorname{sen} \theta_c \cos \theta_c\end{aligned} \tag{10.16}$$

Determinamos os valores de ϵ_x, ϵ_y e γ_{xy} resolvendo as três equações simultaneamente.

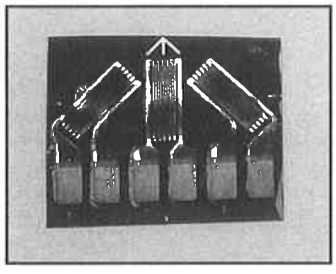
As rosetas são posicionadas geralmente em padrões de 45° ou 60°. No caso da roseta de 45° ou 'retangular' mostrada na Figura 10.18*b*, $\theta_a = 0°$, $\theta_b = 45°$ e $\theta_c = 90°$, de modo que a Equação 10.16 produz:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \epsilon_a \\ \epsilon_y &= \epsilon_c \\ \gamma_{xy} &= 2\epsilon_b - (\epsilon_a + \epsilon_c)\end{aligned}$$

Para a roseta de 60° da Figura 10.18*c*, $\theta_a = 0°$, $\theta_b = 60°$ e $\theta_c = 120°$. Nesse caso, a Equação 10.16 produz:

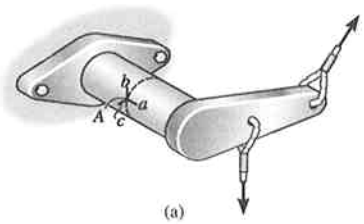
$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \epsilon_a \\ \epsilon_y &= \frac{1}{3}(2\epsilon_b + 2\epsilon_c - \epsilon_a) \\ \gamma_{xy} &= \frac{2}{\sqrt{3}}(\epsilon_b - \epsilon_c)\end{aligned} \tag{10.17}$$

Uma vez definidos ϵ_x, ϵ_y e γ_{xy}, as equações de transformação da Seção 10.2 ou o círculo de Mohr são usados para determinar, naquele ponto, as deformações principais no plano e a deformação por cisalhamento máxima no plano.



Roseta típica de resistência elétrica a 45°.

EXEMPLO 10.8



(a)

Figura 10.19

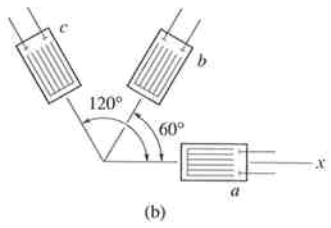
O estado de deformação no ponto *A* do suporte da Figura 10.19*a* é medido com o uso da roseta mostrada na Figura 10.19*b*. Devido às cargas, as leituras nos aferidores dão $\epsilon_a = 60(10^{-6})$, $\epsilon_b = 135(10^{-6})$ e $\epsilon_c = 264(10^{-6})$. Determinar as deformações principais no plano nesse ponto e as direções em que cada uma atua.

SOLUÇÃO

Usaremos a Equação 10.16 para a solução. Definindo um eixo x como mostra a Figura 10.19*b* e medindo os ângulos no sentido anti-horário a partir

do eixo $+x$ para as linhas de centro de cada extensômetro, temos $\theta_a = 0°$, $\theta_b = 60°$ e $\theta_c = 120°$. Substituindo esses resultados juntamente com os dados do problema na Equação 10.16, temos:

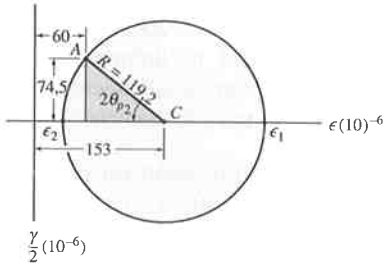
$$\begin{aligned} 60(10^{-6}) &= \epsilon_x \cos^2 0° + \epsilon_y \operatorname{sen}^2 0° + \gamma_{xy} \operatorname{sen} 0° \cos 0° \\ &= \epsilon_x \qquad (1) \\ 135(10^{-6}) &= \epsilon_x \cos^2 60° + \epsilon_y \operatorname{sen}^2 60° + \gamma_{xy} \operatorname{sen} 60° \cos 60° \\ &= 0{,}25\epsilon_x + 0{,}75\epsilon_y + 0{,}433\gamma_{xy} \qquad (2) \\ 264(10^{-6}) &= \epsilon_x \cos^2 120° + \epsilon_y \operatorname{sen}^2 120° + \gamma_{xy} \operatorname{sen} 120° \cos 120° \\ &= 0{,}25\epsilon_x + 0{,}75\epsilon_y - 0{,}433\gamma_{xy} \qquad (3) \end{aligned}$$



(b)

Usando a Equação (1) e resolvendo a (2) e a (3) simultaneamente, obtemos:

$$\epsilon_x = 60(10^{-6}) \qquad \epsilon_y = 246(10^{-6}) \qquad \gamma_{xy} = -149(10^{-6})$$



(c)

Os mesmos resultados também são obtidos de maneira mais direta pela Equação 10.17.

As deformações principais no plano são determinadas por meio do círculo de Mohr. O ponto de referência no círculo está em $A\ (60(10^{-6}), -74{,}5(10^{-6}))$ e o centro do círculo, C, está no eixo ϵ em $\epsilon_{méd} = 153(10^{-6})$ (Figura 10.19*c*). Pelo triângulo sombreado, o raio é:

$$R = \left[\sqrt{(153 - 60)^2 + (74{,}5)^2}\right](10^{-6}) = 119{,}2(10^{-6})$$

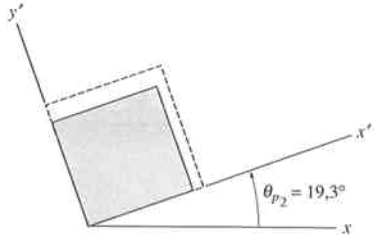
Portanto, as deformações principais no plano são:

$$\epsilon_1 = 153(10^{-6}) + 119{,}2(10^{-6}) = 272(10^{-6}) \qquad \textit{Resposta}$$

$$\epsilon_2 = 153(10^{-6}) - 119{,}2(10^{-6}) = 33{,}8(10^{-6}) \qquad \textit{Resposta}$$

$$2\theta_{p_2} = \operatorname{tg}^{-1}\frac{74{,}5}{(153 - 60)} = 38{,}7°$$

$$\theta_{p_2} = 19{,}3° \qquad \textit{Resposta}$$



(d)

Figura 10.19

O elemento deformado aparece na posição tracejada da Figura 10.19*d*. Compreenda que, devido ao efeito de Poisson, o elemento *também* está sujeito a uma deformação fora do plano, isto é, na direção z, apesar de esse valor não influenciar os resultados calculados.

PROBLEMAS

***10.20.** A deformação em um ponto tem componentes $\epsilon_x = -480(10^{-6})$, $\epsilon_y = 650(10^{-6})$, $\gamma_{xy} = 780(10^{-6})$ e $\epsilon_z = 0$. Determinar (*a*) as deformações principais, (*b*) a deformação por cisalhamento máxima no plano x–y e (*c*) a deformação por cisalhamento máxima absoluta.

10.21. A deformação em um ponto tem componentes $\epsilon_x = -480(10^{-6})$, $\epsilon_y = 300(10^{-6})$, $\gamma_{xy} = -650(10^{-6})$ e $\epsilon_z = 0$. Determinar (*a*) as deformações principais, (*b*) a deformação por cisalhamento máxima no plano x–y e (*c*) a deformação por cisalhamento máxima absoluta.

10.22. A deformação em um ponto tem componentes $\epsilon_x = 130(10^{-6})$, $\epsilon_y = 280(10^{-6})$, $\gamma_{xy} = 75(10^{-6})$ e $\epsilon_z = 0$. Determinar (*a*) as deformações principais no ponto, (*b*) a deformação por cisalhamento máxima no plano x–y e (*c*) a deformação por cisalhamento máxima absoluta.

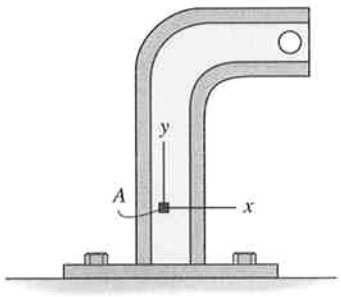
10.23. A deformação em um ponto tem componentes $\epsilon_x = -520(10^{-6})$, $\epsilon_y = -350(10^{-6})$, $\gamma_{xy} = 720(10^{-6})$ e $\epsilon_z = 0$. Determinar (*a*) as deformações principais no ponto, (*b*) a deformação por cisalhamento máxima no plano x–y e (*c*) a deformação por cisalhamento máxima absoluta.

***10.24.** A deformação em um ponto tem componentes $\epsilon_x = 350(10^{-6})$, $\epsilon_y = -460(10^{-6})$, $\gamma_{xy} = -560(10^{-6})$ e $\epsilon_z = 0$. Determinar (*a*) as deformações principais no ponto, (*b*) a deformação por cisalhamento máxima no plano *x*–*y* e (*c*) a deformação por cisalhamento máxima absoluta.

10.25. A deformação em um ponto tem componentes $\epsilon_x = 450(10^{-6})$, $\epsilon_y = 825(10^{-6})$, $\gamma_{xy} = 275(10^{-6})$ e $\epsilon_z = 0$. Determinar (*a*) as deformações principais no ponto, (*b*) a deformação por cisalhamento máxima no plano *x*–*y* e (*c*) a deformação por cisalhamento máxima absoluta.

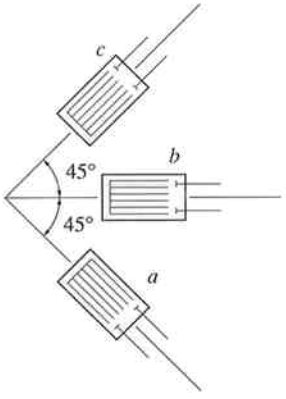
10.26. A deformação em um ponto tem componentes $\epsilon_x = -400(10^{-6})$, $\epsilon_y = -200(10^{-6})$, $\gamma_{xy} = -250(10^{-6})$ e $\epsilon_z = 0$. Determinar (*a*) as deformações principais no ponto, (*b*) a deformação por cisalhamento máxima no plano *x*–*y* e (*c*) a deformação por cisalhamento máxima absoluta.

10.27. A deformação no ponto *A* do suporte tem componentes $\epsilon_x = 300(10^{-6})$, $\epsilon_y = 550(10^{-6})$, $\gamma_{xy} = -650(10^{-6})$, $\epsilon_z = 0$. Determinar (*a*) as deformações principais em *A*, (*b*) a deformação por cisalhamento máxima no plano *x*–*y* e (*c*) a deformação por cisalhamento máxima absoluta.



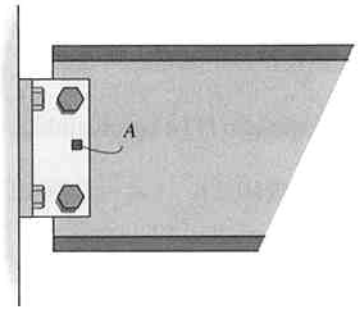
Problema 10.27

***10.28.** A roseta de 45° está montada em um eixo de aço. As seguintes leituras foram obtidas em cada aferidor: $\epsilon_a = 300(10^{-6})$, $\epsilon_b = 180(10^{-6})$ e $\epsilon_c = -250(10^{-6})$. Determinar as deformações principais no plano e suas orientações.



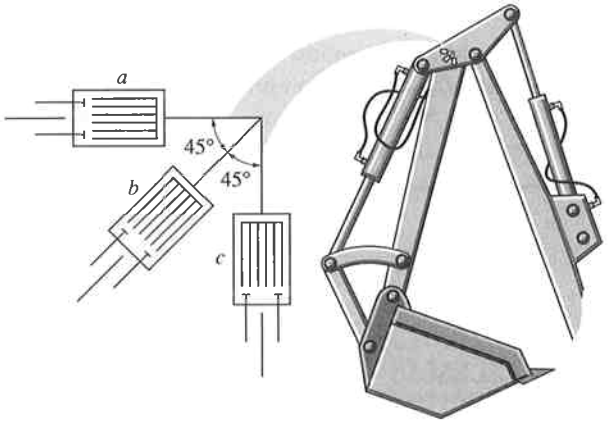
Problema 10.28

10.29. A deformação no ponto *A* da aba da cantoneira tem componentes $\epsilon_x = -140(10^{-6})$, $\epsilon_y = 180(10^{-6})$, $\gamma_{xy} = -125(10^{-6})$, $\epsilon_z = 0$. Determinar (*a*) as deformações principais em *A*, (*b*) a deformação por cisalhamento máxima no plano *x*–*y* e (*c*) a deformação por cisalhamento máxima absoluta.



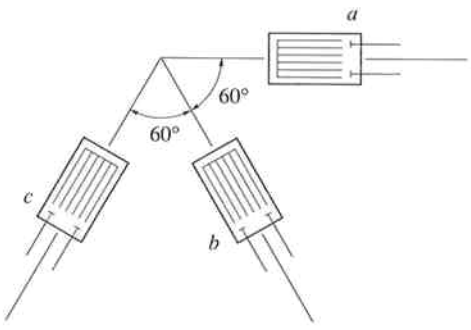
Problema 10.29

10.30. A roseta de 45° está montada no elo da retroescavadeira. As seguintes leituras foram obtidas em cada aferidor: $\epsilon_a = 650(10^{-6})$, $\epsilon_b = -300(10^{-6})$ e $\epsilon_c = 480(10^{-6})$. Determinar (*a*) as deformações principais no plano, (*b*) a deformação por cisalhamento máxima no plano e a deformação normal média associada.



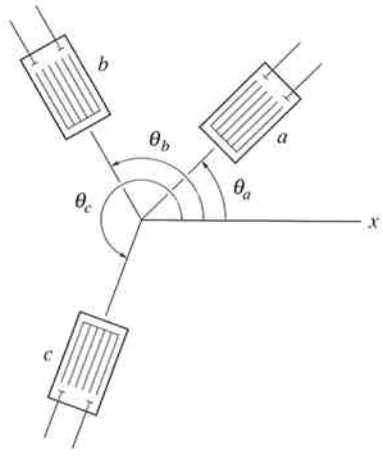
Problema 10.30

10.31. A roseta de 60° está montada na superfície de uma chapa de alumínio. As seguintes leituras foram obtidas em cada aferidor: $\epsilon_a = 950(10^{-6})$, $\epsilon_b = 380(10^{-6})$ e $\epsilon_c = -220(10^{-6})$. Determinar as deformações principais no plano e suas orientações.



Problema 10.31

■*10.32. Considerar a orientação geral de três aferidores de deformação em um ponto como mostrado. Escrever um programa de computador que possa ser usado para determinar, nesse ponto, as deformações principais no plano e a deformação por cisalhamento máxima no plano. Mostrar uma aplicação do programa usando os valores $\theta_a = 40°$, $\epsilon_a = 160(10^{-6})$, $\theta_b = 125°$, $\epsilon_b = 100(10^{-6})$, $\theta_c = 220°$ e $\epsilon_c = 80(10^{-6})$.



Problema 10.32

10.6 RELAÇÕES MATERIAL–PROPRIEDADE

Agora que os princípios gerais de tensão e de deformação multiaxial foram apresentados, vamos usá-los para desenvolver algumas relações importantes que envolvem as propriedades dos materiais. Para isso, vamos supor que os materiais sejam homogêneos e isotrópicos e comportem-se de maneira linear-elástica.

Lei de Hooke Generalizada. Se o material está sujeito a um estado de tensão triaxial σ_x, σ_y e σ_z em determinado ponto (Figura 10.20*a*), desenvolvem-se nele as deformações normais associadas ϵ_x, ϵ_y e ϵ_z. As tensões são relacionadas às deformações por meio do princípio da superposição, da relação de Poisson ($\epsilon_{lat} = -\nu\epsilon_{long}$) e da lei de Hooke aplicada na direção uniaxial ($\epsilon = \sigma/E$). Para mostrar como isso é feito, consideraremos primeiro a deformação normal do elemento na direção x, provocada pela aplicação separada de cada tensão normal. Quando σ_x é aplicada (Figura 10.20*b*), o elemento alonga-se na direção x e a deformação ϵ'_x nessa direção é:

$$\epsilon'_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

A aplicação de σ_y provoca contração do elemento com deformação ϵ''_x na direção x (Figura 10.20*c*). Nesse caso:

$$\epsilon''_x = -\nu\frac{\sigma_y}{E}$$

De maneira semelhante, a aplicação de σ_z (Figura 10.20*d*) provoca contração na direção x tal que:

$$\epsilon'''_x = -\nu\frac{\sigma_z}{E}$$

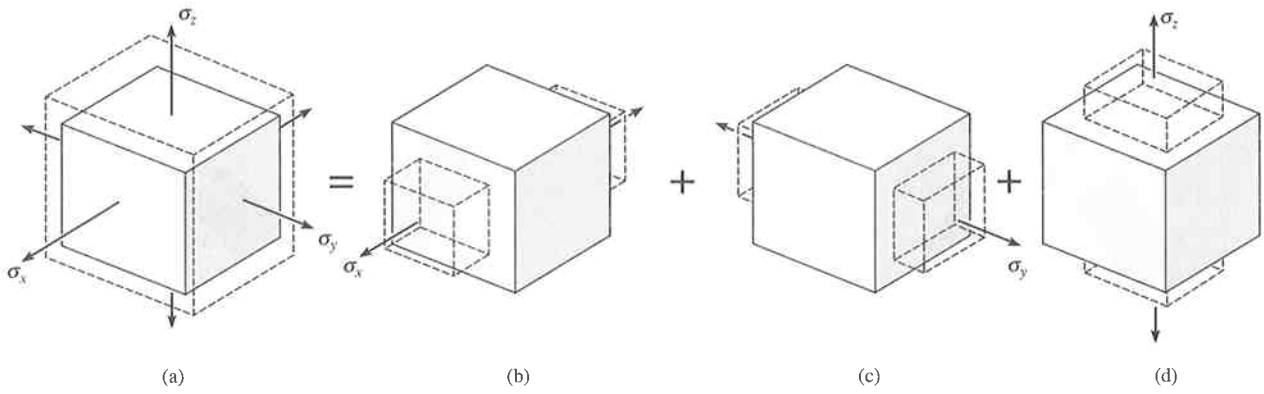


Figura 10.20

Ao superpor essas três deformações normais, determinamos a deformação normal ϵ_x para o estado de tensão mostrado na Figura 10.20*a*. Equações semelhantes podem ser desenvolvidas para as deformações normais nas direções y e z. Os resultados finais serão escritos como:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right]$$
$$\epsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right]$$
$$\epsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] \qquad (10.18)$$

Essas três equações expressam a forma geral da lei de Hooke para um estado de tensão triaxial. Como observado na dedução, elas são válidas somente se a superposição se aplicar, o que requer uma resposta *linear-elástica* do material e a aplicação de deformações que não alterem severamente sua forma, isto é, apenas pequenas deformações são aceitas. Observe que, ao aplicar as equações, consideramos as tensões de tração quantidades positivas e as tensões de compressão quantidades negativas. Se uma deformação normal resultante é *positiva*, isso indica que o material se *alonga*, enquanto uma deformação normal *negativa* indica que o material se *contrai*.

Como o material é isotrópico, o elemento da Figura 10.20*a* *permanecerá um bloco retangular* quando submetido a tensões normais; isto é, *não serão produzidas deformações por cisalhamento* no material. Se aplicarmos agora uma tensão de cisalhamento τ_{xy} ao elemento (Figura 10.21*a*), observações experimentais indicam que o material se deformará devido *somente* a uma deformação por cisalhamento γ_{xy}; isto é, τ_{xy} não provocará outras deformações no material. Da mesma maneira, τ_{yz} e τ_{xz} provocarão apenas deformações por cisalhamento γ_{yz} e γ_{xz}, respectivamente. A lei de Hooke para tensão de cisalhamento e deformação por cisalhamento é então escrita como:

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \qquad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} \qquad \gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz} \qquad (10.19)$$

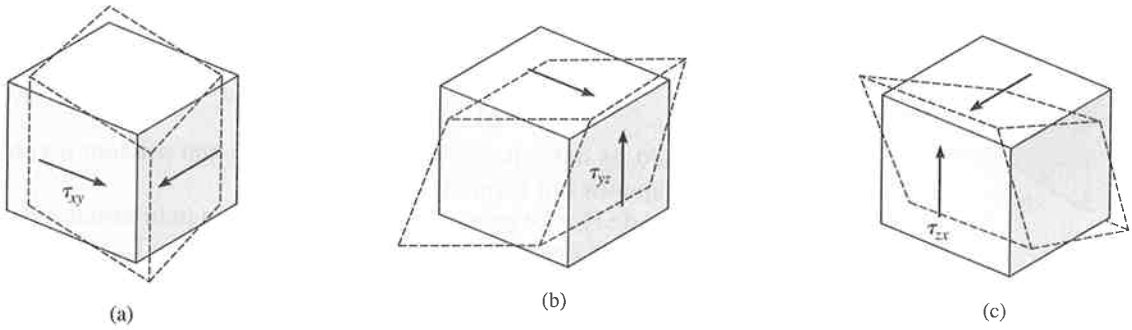


Figura 10.21

Relação entre E, ν e G. Foi mostrado na Seção 3.7 que o módulo de elasticidade E relaciona-se ao módulo de cisalhamento G pela Equação 3.11, ou seja:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \tag{10.20}$$

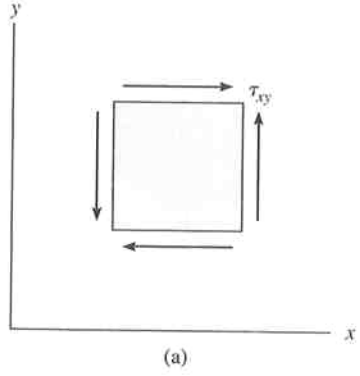
Um dos modos de deduzir essa relação é considerar um elemento do material sujeito a cisalhamento puro ($\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$) (Figura 10.22*a*). Aplicando a Equação 9.5 para obter as tensões principais, temos: $\sigma_{máx} = \tau_{xy}$ e $\sigma_{mín} = -\tau_{xy}$. Pela Equação 9.4, o elemento deve ser orientado $\theta_{p1} = 45°$ no sentido anti-horário a partir do eixo x a fim de definir a direção do plano em que $\sigma_{máx}$ atua (Figura 10.22*b*). Se as três tensões principais $\sigma_{máx} = \tau_{xy}$, $\sigma_{int} = 0$, e $\sigma_{mín} = -\tau_{xy}$ forem substituídas na primeira Equação 10.18, a deformação principal $\epsilon_{máx}$ poderá ser relacionada à tensão de cisalhamento τ_{xy}. O resultado será:

$$\epsilon_{máx} = \frac{\tau_{xy}}{E}(1 + \nu) \tag{10.21}$$

Essa deformação, que distorce o elemento ao longo do eixo x', também pode ser relacionada à deformação por cisalhamento γ_{xy} por meio das equações de transformação ou do círculo de Mohr para deformação. Para isso, observar primeiro que, visto que $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$, então, pela Equação 10.18, $\epsilon_x = \epsilon_y = 0$. Substituindo esses resultados na Equação de transformação 10.9, obtemos:

$$\epsilon_1 = \epsilon_{máx} = \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

Pela lei de Hooke, $\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G$, de modo que $\epsilon_{máx} = \tau_{xy}/2G$. Substituindo na Equação 10.21 e rearranjando os termos, temos o resultado final, ou seja, a Equação 10.20.



Dilatação e Módulo de Compressibilidade. Quando um material elástico é submetido a tensão normal, seu volume muda. A fim de calcular essa mudança, consideremos um elemento de volume que esteja submetido às tensões principais σ_x, σ_y e σ_z. Seus lados são originalmente dx, dy e dz (Figura 10.23*a*); entretanto, após a aplicação da tensão, eles se tornam $(1 + \epsilon_x)\,dx$, $(1 + \epsilon_y)\,dy$, $(1 + \epsilon_z)\,dz$, respectivamente (Figura 10.23*b*). A mudança de volume do elemento é, então:

$$\delta V = (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z)\,dx\,dy\,dz - dx\,dy\,dz$$

Desprezando os produtos das deformações, uma vez que estas são muito pequenas, temos:

$$\delta V = (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)\,dx\,dy\,dz$$

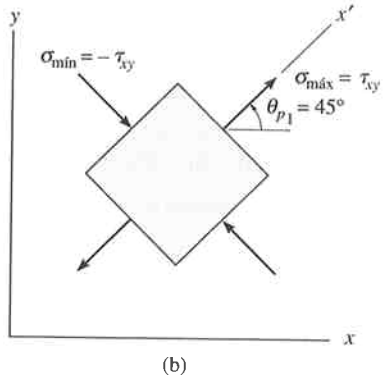


Figura 10.22

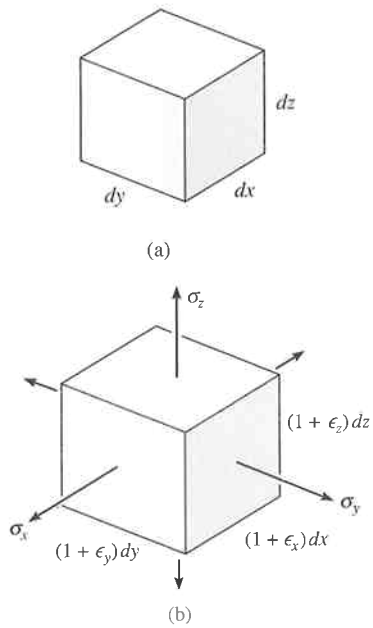


Figura 10.23

A mudança de volume por unidade de volume é chamada 'deformação volumétrica' ou ***dilatação*** *e*. Ela pode ser escrita como:

$$e = \frac{\delta V}{dV} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \tag{10.22}$$

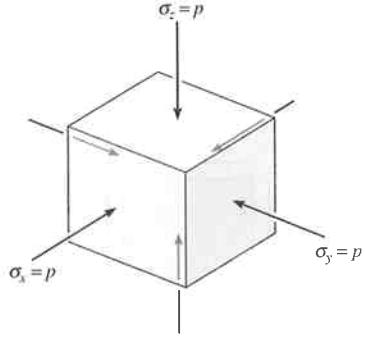
Por comparação, as deformações por cisalhamento *não* mudam o volume do elemento, mas apenas seu formato retangular.

Se usarmos a lei de Hooke generalizada como definida pela Equação 10.18, poderemos escrever a dilatação em termos da tensão aplicada. Teremos, então:

$$\boxed{e = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)} \tag{10.23}$$

Quando um elemento de volume do material é submetido à pressão uniforme p de um líquido, a pressão no corpo é a mesma em todas as direções e é sempre normal em qualquer superfície sobre a qual atua. *Não há* tensões de cisalhamento, uma vez que a resistência de um líquido é nula. Esse estado de carga 'hidrostática' requer que as tensões normais sejam iguais em todas as direções e, portanto, que um elemento do corpo esteja sujeito às tensões principais $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$ (Figura 10.24). Substituindo na Equação 10.23 e rearranjando os termos, temos:

$$\frac{p}{e} = -\frac{E}{3(1-2\nu)} \tag{10.24}$$



Tensão hidrostática

Figura 10.24

O termo da direita consiste *somente* das propriedades E e ν do material. É igual à relação entre a tensão normal uniforme p e a dilatação ou 'deformação volumétrica'. Como essa relação é *similar* à relação entre a tensão linear-elástica e a deformação, que define E, isto é, $\sigma/\epsilon = E$, os termos da direita formam o chamado *módulo de elasticidade do volume* ou ***módulo de compressibilidade***. Ele tem as mesmas unidades da tensão e será simbolizado pela letra k, isto é:

$$\boxed{k = \frac{E}{3(1-2\nu)}} \tag{10.25}$$

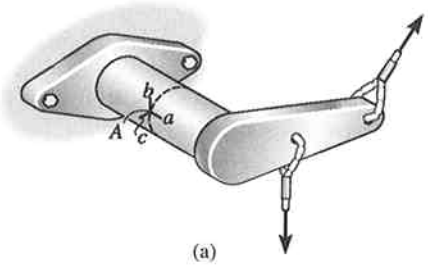
Observe que, para a maioria dos metais, $\nu \approx \frac{1}{3}$ de modo que $k \approx E$. Se existisse um material que não mudasse seu volume, $\delta V = 0$, k teria de ser infinito. Pela Equação 10.25, o valor teórico *máximo* do coeficiente de Poisson é, portanto, $\nu = 0{,}5$. Durante o escoamento, não se observa mudança de volume real do material e, desse modo, quando ocorre escoamento plástico, usa-se o valor $\nu = 0{,}5$.

PONTOS IMPORTANTES

- Quando um material homogêneo e isotrópico é submetido a um estado de tensão triaxial, a deformação em uma das direções da tensão é influenciada pelas deformações produzidas por *todas* as tensões. Isso ocorre em virtude do efeito de Poisson e resulta em uma lei de Hooke generalizada.
- Uma tensão de cisalhamento aplicada a material homogêneo e isotrópico produz apenas tensão de cisalhamento no mesmo plano.
- As constantes do material, E, G e ν, estão relacionadas matematicamente.
- *A dilatação* ou *deformação volumétrica* é provocada apenas por tensão normal e não por deformação por cisalhamento.
- O *módulo de compressibilidade* mede a rigidez em determinado volume do material. Essa propriedade do material proporciona um limite superior para o coeficiente de Poisson de $\nu = 0{,}5$, que permanece nesse valor enquanto ocorre escoamento plástico.

EXEMPLO 10.9

O suporte do Exemplo 10.8 (Figura 10.25*a*) é feito de aço, para o qual $E_{aço}$ = 200 GPa, $\nu_{aço}$ = 0,3. Determinar as tensões principais no ponto *A*.



(a)

Figura 10.25

SOLUÇÃO I

No Exemplo 10.8, as deformações principais foram determinadas como:

$$\epsilon_1 = 272(10^{-6})$$
$$\epsilon_2 = 33{,}8(10^{-6})$$

Como o ponto *A* está na *superfície* do suporte para a qual não há carregamento, a tensão na superfície é nula e, assim, o ponto *A* está submetido a um estado plano de tensões. Aplicando a lei de Hooke com $\sigma_3 = 0$, temos:

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_2; \qquad 272(10^{-6}) = \frac{\sigma_1}{200(10^9)} - \frac{0{,}3}{200(10^9)}\sigma_2$$

$$54{,}4(10^6) = \sigma_1 - 0{,}3\sigma_2 \tag{1}$$

$$\epsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_1; \qquad 33{,}8(10^{-6}) = \frac{\sigma_2}{200(10^9)} - \frac{0{,}3}{200(10^9)}\sigma_1$$

$$6{,}76(10^6) = \sigma_2 - 0{,}3\sigma_1 \tag{2}$$

Resolvendo as equações (1) e (2) simultaneamente, temos:

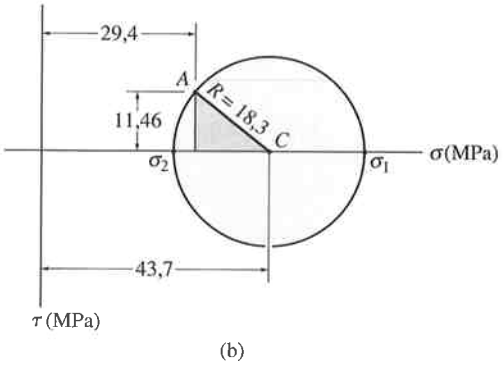
$$\sigma_1 = 62{,}0 \text{ MPa} \qquad \textit{Resposta}$$
$$\sigma_2 = 25{,}4 \text{ MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

SOLUÇÃO II

Também é possível resolver o problema usando o estado de deformação,

$$\epsilon_x = 60(10^{-6}) \qquad \epsilon_y = 246(10^{-6}) \qquad \gamma_{xy} = -149(10^{-6})$$

como especificado no Exemplo 10.8. Aplicando a lei de Hooke no plano *x*–*y*, temos:



(b)

Figura 10.25

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_y; \qquad 60(10^{-6}) = \frac{\sigma_x}{200(10^9)\text{ Pa}} - \frac{0{,}3\sigma_y}{200(10^9)\text{ Pa}}$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_x; \qquad 246(10^{-6}) = \frac{\sigma_y}{200(10^9)\text{ Pa}} - \frac{0{,}3\sigma_x}{200(10^9)\text{ Pa}}$$

$$\sigma_x = 29{,}4\text{ MPa} \qquad \sigma_y = 58{,}0\text{ MPa}$$

Determina-se tensão de cisalhamento usando a lei de Hooke para cisalhamento. Primeiro, porém, devemos calcular G.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{200\text{ GPa}}{2(1+0{,}3)} = 76{,}9\text{ GPa}$$

Então,

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}; \qquad \tau_{xy} = 76{,}9(10^9)[-149(10^{-6})] = -11{,}46\text{ MPa}$$

O círculo de Mohr para esse estado plano de tensões tem ponto de referência $A(29{,}4\text{ MPa}, -11{,}46\text{ MPa})$ e centro em $\sigma_{méd} = 43{,}7$ MPa (Figura 10.25*b*). O raio é determinado pelo triângulo sombreado.

$$R = \sqrt{(43{,}7 - 29{,}4)^2 + (11{,}46)^2} = 18{,}3\text{ MPa}$$

Portanto:

$$\sigma_1 = 43{,}7\text{ MPa} + 18{,}3\text{ MPa} = 62{,}0\text{ MPa} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

$$\sigma_2 = 43{,}7\text{ MPa} - 18{,}3\text{ MPa} = 25{,}4\text{ MPa} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Observe que cada uma dessas soluções é válida desde que o material seja tanto linear-elástico como isotrópico, visto que, nesse caso, os planos principais de tensão e de deformação coincidirão.

EXEMPLO 10.10

A barra de cobre da Figura 10.26 está submetida a um carregamento uniforme ao longo de suas bordas como mostrado. Se ela tiver comprimento $a = 300$ mm, largura $b = 50$ mm e espessura $t = 20$ mm antes de a carga ser aplicada, determinar seus novos comprimento, largura e espessura após o carregamento. Adotar $E_{cu} = 120$ GPa, $\nu_{cu} = 0{,}34$.

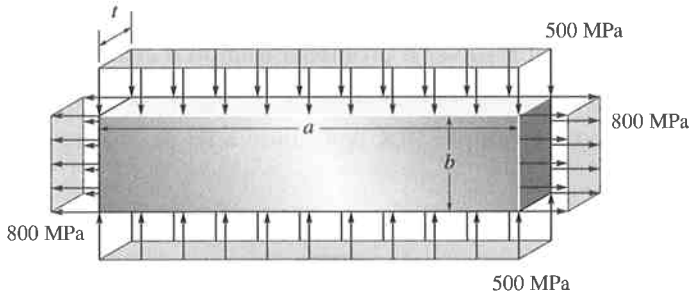


Figura 10.26

SOLUÇÃO

Por inspeção, concluímos que a barra está submetida a um estado plano de tensões. Com base no carregamento, temos:

$$\sigma_x = 800\text{ MPa} \qquad \sigma_y = -500\text{ MPa} \qquad \tau_{xy} = 0 \qquad \sigma_z = 0$$

As deformações normais associadas são determinadas pela lei de Hooke generalizada (Equação 10.18), ou seja:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z)$$

$$= \frac{800 \text{ MPa}}{120(10^3) \text{ MPa}} - \frac{0{,}34}{120(10^3) \text{ MPa}}(-500 \text{ MPa}) = 0{,}00808$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z)$$

$$= \frac{-500 \text{ MPa}}{120(10^3) \text{ MPa}} - \frac{0{,}34}{120(10^3) \text{ MPa}}(800 \text{ MPa} + 0) = -0{,}00643$$

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$= 0 - \frac{0{,}34}{120(10^3) \text{ MPa}}(800 \text{ MPa} - 500 \text{ MPa}) = -0{,}000850$$

Os novos comprimento, largura e espessura são, portanto:

$a' = 300 \text{ mm} + 0{,}00808(300 \text{ mm}) = 302{,}4 \text{ mm}$ ***Resposta***

$b' = 50 \text{ mm} + (-0{,}00643)(50 \text{ mm}) = 49{,}68 \text{ mm}$ ***Resposta***

$t' = 20 \text{ mm} + (-0{,}000850)(20 \text{ mm}) = 19{,}98 \text{ mm}$ ***Resposta***

EXEMPLO 10.11

Se o bloco retangular da Figura 10.27 estiver submetido a uma pressão uniforme $p = 20$ psi, quais serão a dilatação e a mudança de comprimento em cada lado? Adotar $E = 600$ psi, $\nu = 0{,}45$.

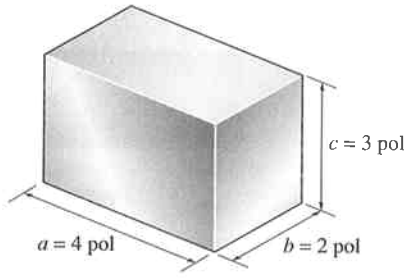


Figura 10.27

SOLUÇÃO

Dilatação. A dilatação é determinada usando-se a Equação 10.23 com $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -20$ psi. Temos:

$$e = \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$= \frac{1 - 2(0{,}45)}{600 \text{ psi}}[3(-20 \text{ psi})]$$

$$= -0{,}01 \text{ pol}^3/\text{pol}^3$$ ***Resposta***

Mudança de Comprimento. A deformação normal em cada lado é determinada pela lei de Hooke (Equação 10.18), isto é:

$$\epsilon = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$= \frac{1}{600 \text{ psi}}[-20 \text{ psi} - (0{,}45)(-20 \text{ psi} - 20 \text{ psi})] = -0{,}00333 \text{ pol/pol}$$

Desse modo, a mudança de comprimento em cada lado será:

$$\delta a = -0{,}00333(4 \text{ pol}) = -0{,}0133 \text{ pol} \qquad \textit{Resposta}$$
$$\delta b = -0{,}00333(2 \text{ pol}) = -0{,}00667 \text{ pol} \qquad \textit{Resposta}$$
$$\delta c = -0{,}00333(3 \text{ pol}) = -0{,}0100 \text{ pol} \qquad \textit{Resposta}$$

O sinal negativo indica que cada dimensão decresce.

PROBLEMAS

10.33. Para o caso do estado plano de tensões, mostrar que a lei de Hooke é escrita como:

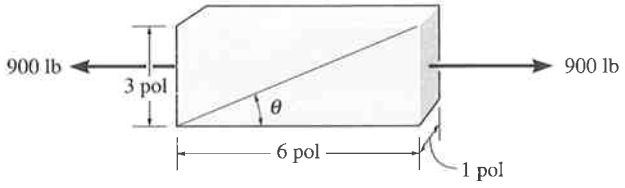
$$\sigma_x = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\epsilon_x + \nu\epsilon_y), \qquad \sigma_y = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\epsilon_y + \nu\epsilon_x)$$

10.34. Usar a lei de Hooke (Equação 10.18) para desenvolver as equações de transformação da deformação (equações 10.5 e 10.6), a partir das equações de transformação da tensão 9.1 e 9.2.

10.35. Determinar o módulo de compressibilidade do ferro fundido se $E_{fe} = 14(10^3)$ ksi e $\nu_{fe} = 0{,}20$.

***10.36.** Determinar o módulo de compressibilidade da ebonite se $E_{ebo} = 0{,}68(10^3)$ ksi e $\nu_{ebo} = 0{,}43$.

10.37. A barra de cloreto de polivinil está sujeita a uma força axial de 900 lb. Supondo que ela tenha as dimensões originais mostradas, determinar o valor do coeficiente de Poisson se o ângulo θ decrescer $\Delta\theta = 0{,}01°$ depois que a carga for aplicada. $E_{pvc} = 800(10^3)$ psi.

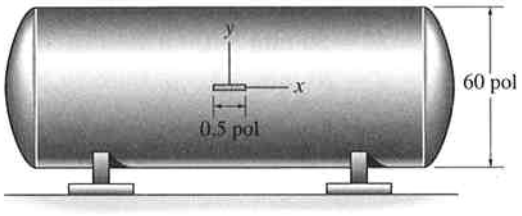


Problema 10.37

10.38. A haste é feita de alumínio 2014-T6. Se estiver sujeita a uma carga de tração de 700 N e seu diâmetro for de 20 mm, quais serão as deformações principais em um ponto de sua superfície?

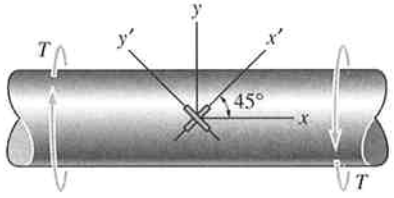
Problema 10.38

10.39. O extensômetro é colocado sobre a superfície de uma caldeira de aço de paredes finas como mostrado. Se o extensômetro tiver 0,5 pol de comprimento, qual será a pressão na caldeira quando ele se alongar $0{,}2(10^{-3})$ pol? A caldeira tem espessura de 0,5 pol e diâmetro interno de 60 pol. Determinar também a deformação por cisalhamento máxima no plano x–y do material. $E_{aço} = 29\ (10^3)$ ksi, $\nu_{aço} = 0{,}3$.



Problema 10.39

***10.40.** O eixo tem raio de 15 mm e é feito de aço ferramenta L-2. Determinar as deformações nas direções x' e y' se for aplicado ao eixo um torque $T = 2$ kN · m.



Problema 10.40

10.41. Determinar as deformações principais que ocorrem em um ponto de um membro de aço onde as tensões principais são $\sigma_{máx} = 18$ ksi, $\sigma_{int} = 15$ ksi, $\sigma_{mín} = -28$ ksi. $E_{aço} = 29\ (10^3)$ ksi e $\nu_{aço} = 0{,}3$.

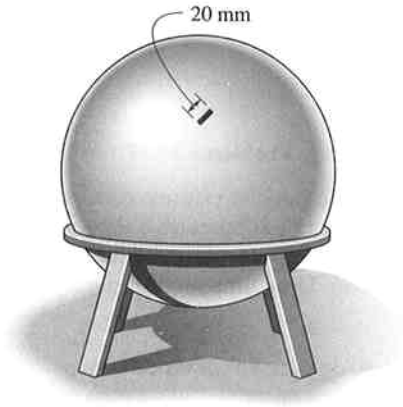
10.42. Uma barra de plástico com diâmetro de 0,5 pol está com carga em uma máquina de tração e foi determinado que $\epsilon_x = 530(10^{-6})$ quando a carga é de 80 lb. Determinar o módulo de elasticidade, E_p, e a dilatação, e_p, do plástico ($\nu_p = 0{,}26$).

10.43. Uma haste tem raio de 10 mm. Supondo que seja submetida a uma carga axial de 15 N tal que sua deformação axial seja $\epsilon_x = 2{,}75(10^{-6})$, determinar o módulo de elasticidade E e a mudança em seu diâmetro ($\nu = 0{,}23$).

***10.44.** Por experiência, sabe-se que as deformações principais em um ponto de um plano de certo invólucro de aço são $\epsilon_1 = 350(10^{-6})$ e $\epsilon_2 = -250(10^{-6})$. Supondo $E_{aço} = 200$ GPa e $\nu_{aço} = 0{,}3$, determinar as tensões principais nesse plano.

10.45. As tensões principais e deformações associadas em um ponto de um plano são $\sigma_1 = 40$ ksi, $\sigma_2 = 25$ ksi, $\epsilon_1 = 1{,}15(10^{-3})$ e $\epsilon_2 = 0{,}450(10^{-3})$. Supondo que esse seja um caso de estado plano de tensões, determinar o módulo de elasticidade e a relação de Poisson.

10.46. O vaso de pressão esférico tem diâmetro interno de 2 m e espessura de 10 mm. Um extensômetro com 20 mm de comprimento é acoplado a ele, e observa-se um aumento de comprimento de 0,012 mm quando o vaso é pressurizado. Determinar a pressão que provoca a deformação e encontrar a tensão de cisalhamento máxima no plano e a tensão de cisalhamento máxima absoluta em um ponto da superfície externa. O material é aço, para o qual $E_{aço} = 200$ GPa e $\nu_{aço} = 0{,}3$.

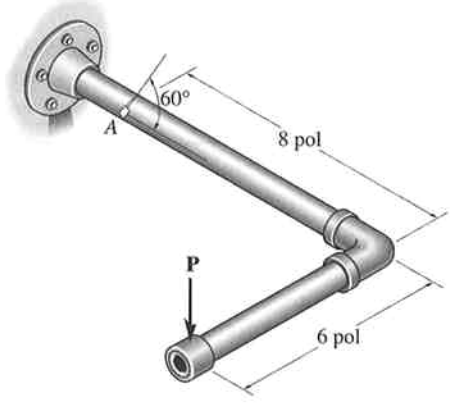


Problema 10.46

10.47. As deformações principais em um ponto, medidas experimentalmente na fuselagem de alumínio de um avião a jato, são $\epsilon_1 = 630(10^{-6})$ e $\epsilon_2 = 350(10^{-6})$. Supondo que esse seja um caso de estado plano de tensões, determinar as tensões principais associadas a esse ponto no mesmo plano. $E_{al} = 10(10^3)$ ksi e $\nu_{al} = 0{,}33$.

***10.48.** Um extensômetro, colocado no plano vertical da superfície externa e, com ângulo de 60° em relação ao eixo do tubo, dá uma leitura no ponto A de $\epsilon_A = -250(10^{-6})$. Determinar a força vertical P, considerando que o tubo tenha diâmetro externo de 1 pol e diâmetro interno de 0,6 pol e seja feito de bronze C86100.

10.49. Um extensômetro, colocado no plano vertical da superfície externa e com ângulo de 60° em relação ao eixo do tubo, dá uma leitura no ponto A de $\epsilon_A = -250(10^{-6})$. Determinar as tensões principais nesse ponto. O tubo tem diâmetro externo de 1 pol, diâmetro interno de 0,6 pol e é feito de bronze C86100.

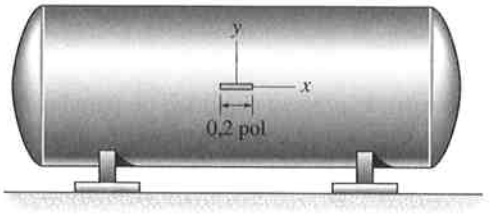


Problemas 10.48/10.49

10.50. O ar é bombeado através de C para um vaso de pressão de paredes finas. Se as extremidades do vaso estão fechadas por dois pistões acoplados a uma haste AB, qual será o aumento de diâmetro quando a pressão manométrica interna for 5 MPa? Além disso, qual será o esforço de tração na haste AB se ela tiver diâmetro de 100 mm? O raio interno do vaso é de 400 mm e sua espessura é de 10 mm. $E_{aço} = 200$ GPa e $\nu_{aço} = 0{,}3$.

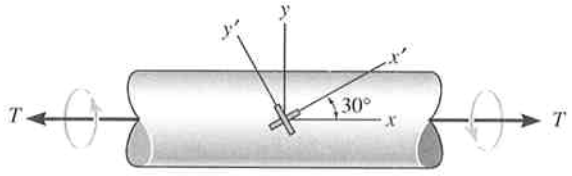
Problema 10.50

10.51. O extensômetro é colocado sobre a superfície de uma caldeira de aço de paredes finas como mostrado. Supondo que ele tenha 0,2 pol de comprimento, qual será a pressão na caldeira quando ele se alongar $0{,}08(10^{-3})$ pol? A caldeira tem espessura de 0,5 pol, diâmetro interno de 30 pol e é feita de aço inoxidável 304. Determinar também a deformação por cisalhamento máxima no plano x–y e a deformação por cisalhamento máxima absoluta no material.



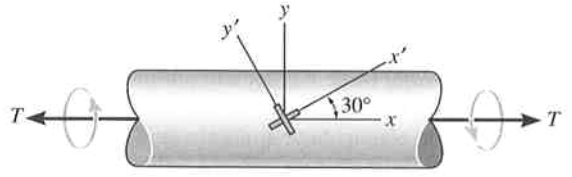
Problema 10.51

***10.52.** O eixo tem raio de 15 mm e é feito de aço ferramenta L2. Determinar as deformações nas direções x' e y' se lhe for aplicado um torque $T = 2$ kN · m.



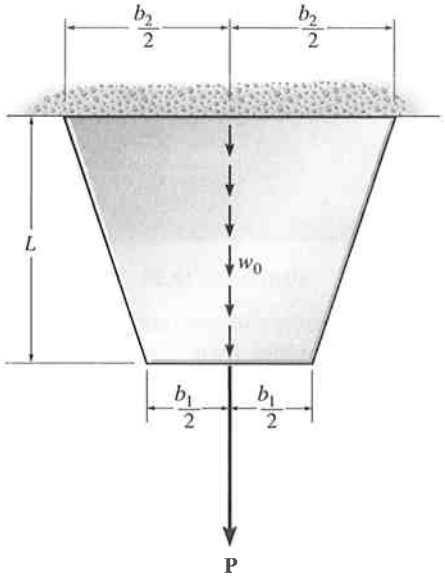
Problema 10.52

10.53. O eixo tem raio de 15 mm e é feito de aço ferramenta L2. Determinar o torque T se os dois extensômetros, acoplados à superfície, informaram deformações de $\epsilon_{x'} = -45(10^{-6})$ e $\epsilon_{y'} = 45(10^{-6})$. Calcular também as deformações que atuam nas direções x e y.



Problema 10.53

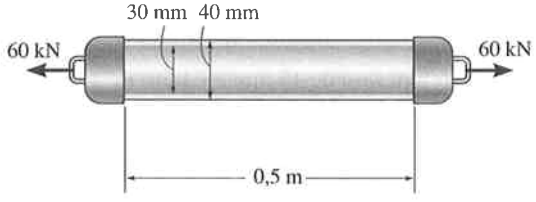
10.54. Determinar a mudança de volume da chapa cônica quando está submetida à carga axial **P**. O material tem espessura t, módulo de elasticidade E e o coeficiente de Poisson é ν.



Problema 10.54

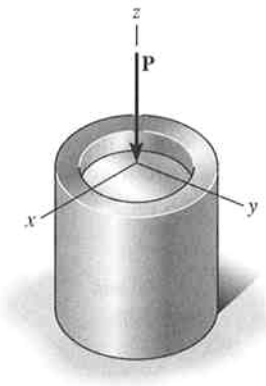
10.55. Um vaso de pressão cilíndrico de paredes finas tem raio interno r, espessura t e comprimento L. Mostra que, se for submetido a uma pressão interna p, o aumento em seu raio interno será $\delta r = pr^2(2 - \nu)/2Et$ e o aumento em seu comprimento será $\delta L = pLr(1 - 2\nu)/2Et$. Usando esses resultados, mostrar que a mudança no volume interno é $\delta V = \pi r^2(1 + \epsilon_1)^2(1 + \epsilon_2)L - \pi r^2 L$. Como ϵ_1 e ϵ_2 são quantidades pequenas, mostrar ainda que a mudança de volume por unidade de volume, chamada *deformação volumétrica*, é escrita como $\delta V/V = (pr/2Et)(5 - 4\nu)$.

***10.56.** Um tubo de aço A-36 está submetido a uma carga axial de 60 kN. Determinar a mudança de volume no material depois que a carga for aplicada.



Problema 10.56

10.57. Um material mole é colocado em um cilindro rígido que repousa sobre um suporte rígido. Determinar o fator pelo qual o módulo de elasticidade aparente será aumentado por não estar confinado quando a carga é aplicada. Adotar $\nu = 0{,}3$ para o material.

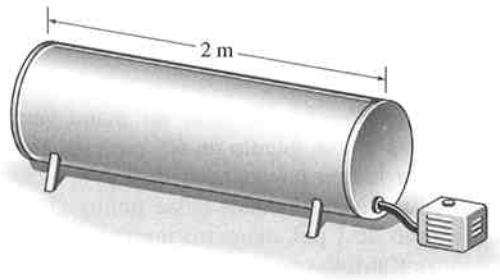


Problema 10.57

10.58. Um vaso de pressão esférico com paredes finas, raio interno r e espessura t é submetido a uma pressão interna p. Mostrar que o aumento de volume em seu interior é $\delta V = (2p\pi r^4/Et)(1 - \nu)$. Usar uma análise para pequenas deformações.

10.59. Um vaso de pressão cilíndrico com paredes finas, raio interno r e espessura t é submetido a uma pressão interna p. Se as constantes do material forem E e ν, quais serão as deformações nas direções circunferencial e longitudinal? Usando esses resultados, calcular o aumento de diâmetro e de comprimento em um vaso de pressão feito de aço e cheio de ar, com pressão manométrica interna de 20 MPa. O vaso tem 2 m de comprimento, raio interno de 0,4 m e espessura de 10 mm. $E_{aço} = 200$ GPa e $\nu_{aço} = 0{,}3$.

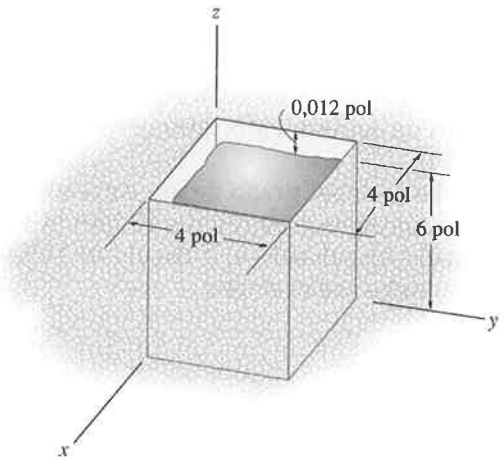
***10.60.** Estimar o aumento de volume no reservatório do Problema 10.59. *Sugestão*: usar os resultados do Problema 10.55 para verificação.



Problemas 10.59/10.60

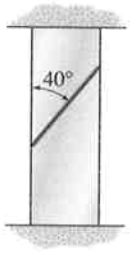
10.61. A cavidade do corpo rígido está cheia de alumínio 6061-T6 líquido. Quando resfriado, ele fica a 0,012 pol do topo da cavidade. Supondo que esse topo seja coberto e a temperatura aumentada 200° F, determinar os componentes de tensão σ_x, σ_y e σ_z no alumínio. *Dica*: usar a Equação 10.18 com um termo de deformação adicional $\alpha\Delta T$ (Equação 4.4).

10.62. A cavidade do corpo rígido está cheia de alumínio 6061-T6 líquido. Quando resfriado, ele fica a 0,012 pol do topo da cavidade. Supondo que esse topo não seja coberto e a temperatura seja aumentada 200° F, determinar os componentes de deformação ϵ_x, ϵ_y e ϵ_z no alumínio. *Dica*: usar a Equação 10.18 com um termo de deformação adicional $\alpha\Delta T$ (Equação 4.4).



Problemas 10.61/10.62

10.63. O bloco está instalado entre os apoios fixos. Supondo que a junta resista a uma tensão de cisalhamento máxima $\tau_{adm} = 2$ ksi, determinar o aumento de temperatura que provocará sua falha. Adotar $E = 10(10^3)$ ksi, $\nu = 0{,}2$ e $\alpha = 6{,}0(10^{-6})/°F$. *Dica*: usar a Equação 10.18 com um termo de deformação adicional $\alpha\Delta T$ (Equação 4.4).



Problema 10.63

*10.7 TEORIAS DA FALHA

Quando precisa elaborar um projeto com um material específico, o engenheiro deve estabelecer um *limite* superior para o estado de tensão que defina a falha do material. Se o material for *dúctil*, geralmente a falha será especificada pelo início do *escoamento*; se o material for *frágil*, ela será especificada pela *fratura*. Esses modos de falha são prontamente definidos se o elemento estiver submetido a um estado de tensão uniaxial, como no caso de tensão simples; entretanto, se ele estiver submetido a tensões biaxial ou triaxial, o critério para a falha torna-se mais difícil de estabelecer.

Nesta seção discutiremos quatro teorias freqüentemente usadas na prática da engenharia para prever a falha de um material submetido a um estado de tensão *multiaxial*. Essas teorias, e outras como estas, também são usadas para determinar as tensões admissíveis descritas em muitas normas de projeto. Nenhuma teoria da falha, no entanto, aplica-se *sempre* a determinado material, pois ele se comportará de maneira dúctil ou frágil, conforme a temperatura, a taxa de carga, o ambiente químico, o tipo de material ou, ainda, seu processo de fabricação. Ao usar uma teoria da falha em particular, é necessário calcular primeiro os componentes das tensões normal e de cisalhamento nos pontos do elemento em que estas são maiores. Calculam-se tais componentes aplicando os princípios da resistência dos materiais e os fatores de concentração de tensões, quando cabíveis; em situações complexas, os componentes maiores da tensão são determinados por meio tanto de uma análise matemática baseada na teoria da elasticidade como de uma técnica experimental apropriada. Em qualquer caso, uma vez estabelecido o estado de tensão, as *tensões principais* são determinadas para os pontos críticos, visto que todas as teorias apresentadas a seguir se baseiam no conhecimento das tensões principais.

Materiais Dúcteis

Teoria da Tensão de Cisalhamento Máxima. O caso mais comum de *escoamento de um material dúctil*, como o aço, é o *deslizamento*, que ocorre ao longo dos planos de contato dos cristais que, aleatoriamente ordenados, formam o próprio material. Esse *deslizamento* deve-se à *tensão de cisalhamento*

Figura 10.28

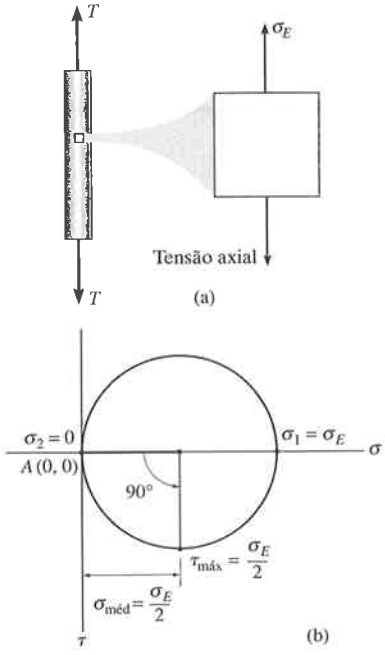
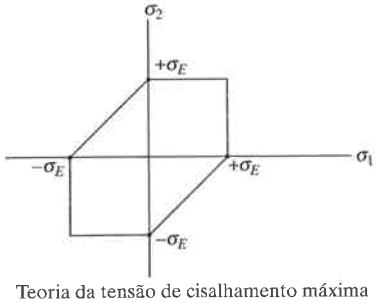


Figura 10.29



Teoria da tensão de cisalhamento máxima

Figura 10.30

e, se fizermos um corpo-de-prova com uma tira fina altamente polida e a submetermos a um teste de tração simples, veremos como a tensão provoca o *escoamento* do material (Figura 10.28). As bordas dos planos de deslizamento que aparecem na superfície da tira são denominadas *linhas de Lüder*. Essas linhas indicam claramente os planos de deslizamento, que ocorrem a aproximadamente 45° do eixo da tira.

Consideremos um elemento do material tirado de um corpo-de-prova de tração, sujeito apenas ao limite de escoamento σ_E (Figura 10.29*a*). A tensão de cisalhamento máxima é determinada desenhando-se o círculo de Mohr para o elemento (Figura 10.29*b*). Os resultados indicam que:

$$\tau_{máx} = \frac{\sigma_E}{2} \tag{10.26}$$

Além disso, a tensão de cisalhamento atua nos planos a 45° a partir dos planos de tensão principal (Figura 10.29*c*), os quais *coincidem* com a direção das linhas de Lüder mostradas no corpo-de-prova, indicando que a falha ocorre, na verdade, por cisalhamento.

Usando essa idéia de que os materiais dúcteis falham por cisalhamento, Henri Tresca propôs, em 1868, a ***teoria da tensão de cisalhamento máxima*** ou ***critério do escoamento de Tresca***. Essa teoria é usada para prever a tensão de falha de um material dúctil submetido a qualquer tipo de carga. A teoria da tensão de cisalhamento máxima diz que o escoamento do material começa quando a tensão de cisalhamento máxima absoluta atinge o valor da tensão de cisalhamento que provoca escoamento do material quando ele está submetido *apenas* a tensão axial. Segundo essa teoria, para evitar a falha, que $\tau_{\substack{máx \\ abs}}$ do material seja menor ou igual a $\sigma_E/2$, onde σ_E é determinada por um teste de tração simples.

Para aplicação, vamos expressar a tensão de cisalhamento máxima absoluta em termos das *tensões principais*. O procedimento de cálculo foi discutido na Seção 9.7 em relação ao *estado plano de tensões*, isto é, quando a tensão principal fora do plano é nula. Se as duas tensões principais no plano tiverem o *mesmo sinal*, ou seja, se ambas forem de tração ou compressão, então a falha ocorrerá *fora do plano* e, pela Equação 9.15:

$$\tau_{\substack{máx \\ abs}} = \frac{\sigma_{máx}}{2}$$

Por outro lado, se as tensões principais no plano tiverem *sinais opostos*, então a falha ocorrerá no plano e, pela Equação 9.16:

$$\tau_{\substack{máx \\ abs}} = \frac{\sigma_{máx} - \sigma_{mín}}{2}$$

A partir dessas equações e da Equação 10.26, a teoria da tensão de cisalhamento máxima para o *estado plano de tensões* pode ser expressa para quaisquer tensões principais no plano como σ_1 e σ_2, de acordo com o seguinte critério:

$$\left.\begin{aligned} |\sigma_1| &= \sigma_E \\ |\sigma_2| &= \sigma_E \end{aligned}\right\} \ \sigma_1 \text{ e } \sigma_2 \text{ têm sinais iguais}$$

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_E \ \} \ \sigma_1 \text{ e } \sigma_2 \text{ têm sinais opostos} \tag{10.27}$$

Um gráfico dessas equações é mostrado na Figura 10.30. Evidentemente, se qualquer ponto do material estiver sujeito a um estado plano de tensões e

suas tensões principais no plano forem representadas pelas coordenadas (σ_1, σ_2) marcadas *no limite* ou *fora* da área hexagonal sombreada, o material escoará no ponto e ocorrerá a falha.

Teoria da Energia de Distorção Máxima. Na Seção 3.5 foi dito que um material, quando deformado por uma carga externa, tende a armazenar energia *internamente* em todo o seu volume. A energia por unidade de volume do material é chamada ***densidade de energia de deformação*** e, se ele estiver sujeito a uma tensão uniaxial, σ, essa densidade, definida pela Equação 3.6, será escrita como:

$$u = \frac{1}{2}\sigma\epsilon \tag{10.28}$$

É possível definir um critério de falha baseado nas distorções provocadas pela energia de deformação. Antes, porém, precisamos determinar a densidade de energia de deformação em um elemento de volume do material submetido às três tensões principais σ_1, σ_2 e σ_3 (Figura 10.31*a*). Nesse caso, cada tensão principal contribuirá com uma parte da densidade de energia de deformação total, de modo que:

$$u = \frac{1}{2}\sigma_1\epsilon_1 + \frac{1}{2}\sigma_2\epsilon_2 + \frac{1}{2}\sigma_3\epsilon_3$$

Se o material comporta-se de maneira linear-elástica, a lei de Hooke se aplica. Portanto, substituindo a Equação 10.18 na equação anterior e simplificando, obtemos:

$$u = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3\sigma_2)] \tag{10.29}$$

Essa densidade de energia de deformação é considerada a soma de duas partes, uma das quais representa a energia necessária para provocar uma *mudança de volume* do elemento sem mudar sua forma; e a outra, a energia necessária para *distorcer* o elemento. Especificamente, a energia armazenada no elemento como resultado da sua mudança de volume é provocada pela aplicação da tensão principal média, $\sigma_{méd} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$, uma vez que essa tensão provoca deformações principais iguais no material (Figura 10.31*b*). A parte restante da tensão, $(\sigma_1 - \sigma_{méd})$, $(\sigma_2 - \sigma_{méd})$ e $(\sigma_3 - \sigma_{méd})$, provoca a energia de distorção (Figura 10.31*c*).

Experimentos demonstraram que os materiais não escoam quando submetidos a uma tensão uniforme (hidrostática), tal como a $\sigma_{méd}$ discutida anteriormente. Com base nisso, em 1904 M. Huber propôs que ocorre escoamento em um material dúctil quando a *energia de distorção* por unidade de volume do material é igual ou maior que a energia de distorção por unidade de volume do mesmo material quando ele é submetido a escoamento em um teste de tração simples. Essa teoria é chamada ***teoria da energia de distorção máxima*** e, como foi redefinida posteriormente por R. von Mises e H. Hencky, às vezes também leva seus nomes.

Para obter a energia de distorção por unidade de volume, substituiremos as tensões σ_1, σ_2 e σ_3 por $(\sigma_1 - \sigma_{méd})$, $(\sigma_2 - \sigma_{méd})$ e $(\sigma_3 - \sigma_{méd})$, respectivamente, na Equação 10.29, levando em conta que $\sigma_{méd} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$. Desenvolvendo e simplificando, obtemos:

$$u_d = \frac{1+\nu}{6E}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

No caso do *estado plano de tensões*, $\sigma_3 = 0$, e essa equação reduz-se a:

$$u_d = \frac{1+\nu}{3E}(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)$$

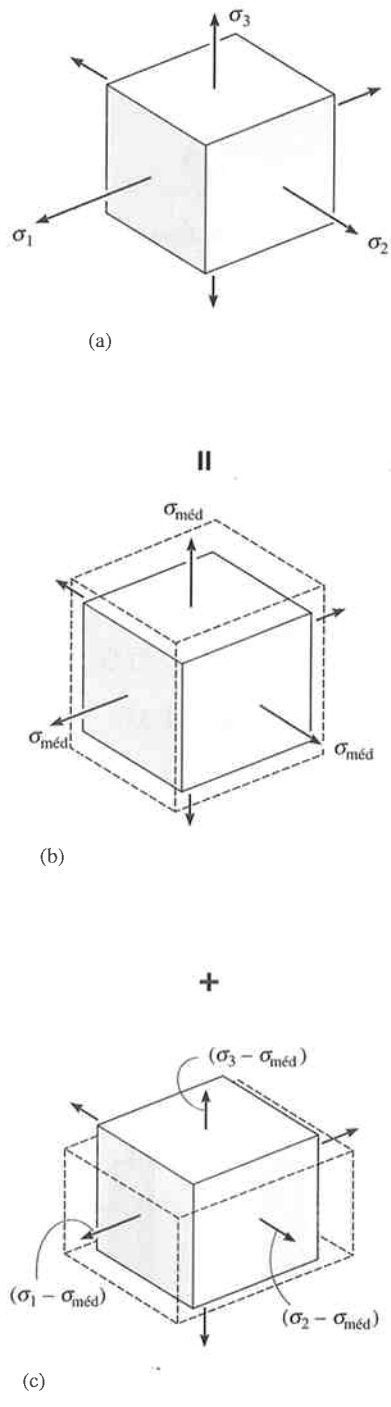
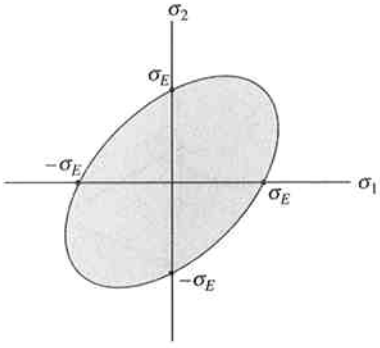


Figura 10.31



Teoria da energia de distorção máxima

Figura 10.32

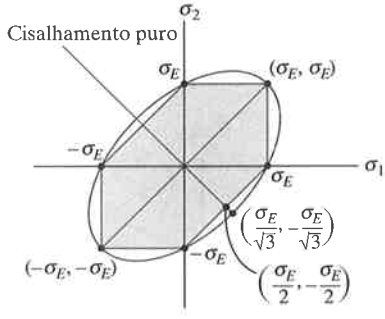


Figura 10.33

Em um teste de tração *uniaxial*, $\sigma_1 = \sigma_E$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ e assim:

$$(u_d)_E = \frac{1 + \nu}{3E}\sigma_E{}^2$$

Como a teoria da energia de distorção máxima requer que $u_d = (u_d)_E$, para o caso de tensão no plano ou biaxial temos:

$$\boxed{\sigma_1{}^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2{}^2 = \sigma_E{}^2} \tag{10.30}$$

Essa equação representa uma curva elíptica (Figura 10.32). Assim, se um ponto do material estiver tracionado de tal forma que a coordenada da tensão (σ_1, σ_2) esteja posicionada no limite ou fora da área sombreada, diz-se que o material falhou.

A comparação dos dois critérios anteriores é mostrada na Figura 10.33. Observe que as duas teorias levam os mesmos resultados quando as tensões principais são iguais, ou seja, pelas equações 10.27 e 10.30, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_E$, ou quando uma das tensões principais for zero e a outra tiver intensidade de σ_E. Por outro lado, se o material estiver sujeito a cisalhamento puro, τ, as teorias apresentarão maior discrepância na previsão da falha. A coordenada da tensão desses pontos nas curvas foi determinada com base no elemento mostrado na Figura 10.34*a*. Pelo círculo de Mohr associado a esse estado de tensão (Figura 10.34*b*), obtemos as tensões principais $\sigma_1 = \tau$ e $\sigma_2 = -\tau$. Por meio das equações 10.27 e 10.30, a teoria da tensão de cisalhamento máxima e a teoria da energia de distorção máxima afirmam que $\sigma_1 = \sigma_E/2$ e $\sigma_1 = \sigma_E/\sqrt{3}$, respectivamente (Figura 10.33).

Testes de torção, usados para desenvolver a condição de cisalhamento puro em um corpo-de-prova dúctil, mostraram que a teoria da energia de distorção máxima oferece resultados mais precisos para falha de cisalhamento puro que a teoria da tensão de cisalhamento máxima. De fato, como $(\sigma_E/\sqrt{3})/(\sigma_E/2) = 1{,}15$ a tensão de cisalhamento para escoamento do material obtida pela teoria da energia de distorção máxima é 15% mais precisa que a obtida pela teoria da tensão de cisalhamento máxima.

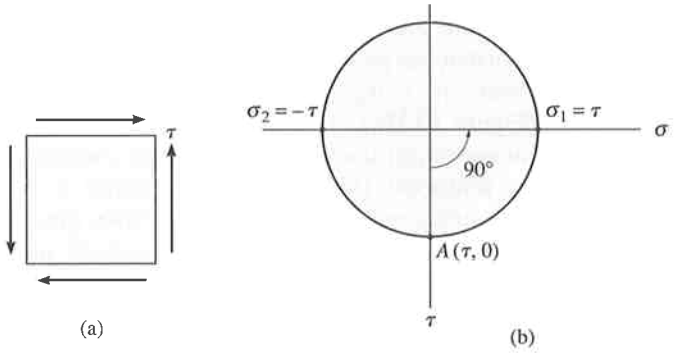
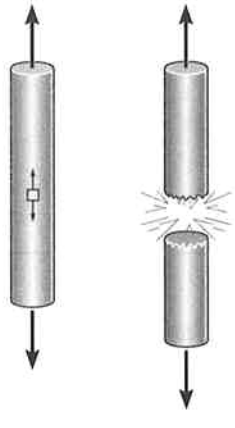


Figura 10.34



Falha de um material frágil sob tração

(a)

Figura 10.35

Materiais Frágeis

Teoria da Tensão Normal Máxima. Afirmamos anteriormente que materiais frágeis, como o ferro fundido, tendem a falhar subitamente por *fratura* sem escoamento aparente. Em um *teste de tração*, a fratura ocorre quando a tensão normal atinge o limite de resistência, σ_r (Figura 10.35*a*). Além disso, em um *teste de torção*, a fratura ocorre devido à *tensão de tração máxima*, uma vez que o plano de fratura do elemento está a 45° em relação à direção do cisalhamento (Figura 10.35*b*). A superfície da fratura é, portanto, helicoidal como mostrado.[1]

[1] Um giz se rompe quando suas extremidades são torcidas.

Além disso, experimentos mostraram que durante a torção a resistência do material *não é afetada* pela presença da tensão de compressão principal associada em ângulos retos à tensão de tração principal. Conseqüentemente, a tensão de tração necessária para fraturar um corpo-de-prova em um teste de torção é aproximadamente a mesma necessária para fraturar um corpo-de-prova sob tração simples. Por essa razão, a ***teoria da tensão normal máxima*** estabelece que um material frágil falha quando a tensão principal máxima σ_1 atinge um valor-limite igual ao limite de resistência que o material suporta quando submetido a tração simples.

Se o material estiver sujeito ao *estado plano de tensões* requer-se que:

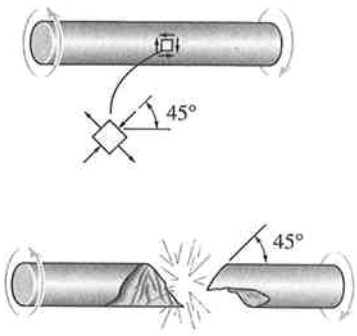
$$\begin{aligned} |\sigma_1| &= \sigma_r \\ |\sigma_2| &= \sigma_r \end{aligned} \tag{10.31}$$

Essas equações são mostradas graficamente na Figura 10.36. Aqui se vê que, caso a coordenada da tensão (σ_1, σ_2) em um ponto do material caia no limite ou fora da área sombreada, supõe-se que o material sofrerá fratura. Essa teoria é creditada geralmente a W. Rankine, que a propôs em meados de 1800. Foi determinado experimentalmente que ela concorda com o comportamento dos materiais frágeis cujos diagramas tensão-deformação sejam *similares* tanto sob tração quanto sob compressão.

Critério de Falha de Mohr. Em alguns materiais frágeis, porém, as propriedades da tração e da compressão são *diferentes*. Nesse caso, usa-se um critério baseado no círculo de Mohr para prever a falha do material. O método foi desenvolvido por Otto Mohr e, às vezes, é denominado ***critério de falha de Mohr***. Para aplicá-lo, executam-se primeiro *três testes* no material. Um teste de tração uniaxial e um de compressão uniaxial são usados para determinar os limites de resistência à tração e à compressão $(\sigma_r)_t$ e $(\sigma_r)_c$, respectivamente. Além disso, realiza-se um teste de torção para determinar o limite de resistência ao cisalhamento, τ_r, do material. O círculo de Mohr para cada uma dessas condições de tensão é então construído como mostra a Figura 10.37. O círculo A representa a condição de tensão $\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -(\sigma_r)_c$; o círculo B representa as condições de tensão $\sigma_1 = (\sigma_r)_t$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$; e o círculo C representa a condição de cisalhamento puro provocada por τ_r. Os três círculos estão contidos em um 'envelope de falha' indicado pela curva colorida extrapolada, desenhada tangencialmente a eles. Se o estado plano de tensões em determinado ponto é representado por um círculo contido dentro do envelope, diz-se que o material não falhará. Se, no entanto, o círculo tiver um ponto de tangência com o envelope ou se estender além do limite deste, então ocorrerá falha.

Podemos também representar o critério em um gráfico de tensões principais σ_1 e σ_2 ($\sigma_3 = 0$). Essa condição é mostrada na Figura 10.38. Nesse caso, a falha ocorre quando o valor absoluto de qualquer uma das tensões principais atinge um valor igual ou maior que $(\sigma_r)_t$ ou $(\sigma_r)_c$ ou, em geral, se o estado de tensão em um ponto é definido pela coordenada da tensão (σ_1, σ_2) localizada no limite ou fora da área sombreada.

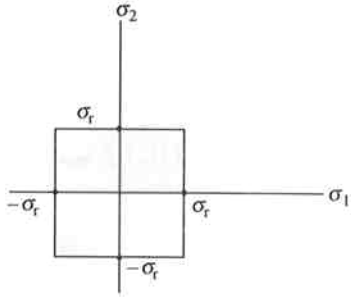
Qualquer um dos dois critérios anteriores é usado na prática para prever a falha de um material frágil. Entretanto, deve-se compreender que sua utilidade é bastante limitada. A fratura por tração ocorre muito subitamente e, em geral, seu início depende das concentrações de tensão desenvolvidas em imperfeições microscópicas do material, tais como inclusões ou vazios, entalhes na superfície e pequenas trincas. Como cada uma dessas irregularidades varia de corpo-de-prova para corpo-de-prova, torna-se difícil definir a falha com base em um único teste. Por outro lado, trincas e outras irregularidades tendem a fechar-se quando o corpo-de-prova é comprimido e, portanto, não constituem pontos de falha como ocorreria se o corpo-de-prova fosse submetido a tração.



Falha de um material frágil sob torção

(b)

Figura 10.35



Teoria da tensão normal máxima

Figura 10.36

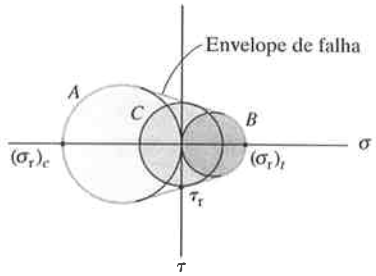
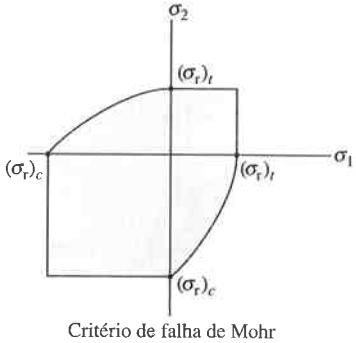


Figura 10.37



Critério de falha de Mohr

Figura 10.38

PONTOS IMPORTANTES

- Se o material é *dúctil*, a falha é definida pelo início do *escoamento*; se é *frágil*, é definida pela *fratura*.
- A *falha dúctil* se dá quando ocorre *deslizamento* entre os cristais que compõem o material. Esse deslizamento deve-se à *tensão de cisalhamento*, fato no qual se baseia a *teoria da tensão de cisalhamento máxima*.
- A *energia de deformação* armazena-se em um material quando ele é submetido a tensão normal. A *teoria da energia de distorção máxima* depende da *energia de deformação* que *distorce* o material e não da parte que aumenta seu volume.
- A fratura de um *material frágil* é provocada somente pelo *esforço de tração máximo* e não pelo esforço de compressão. Essa é a base da *teoria da tensão normal máxima* e é aplicável se o diagrama tensão-deformação do material for *similar* tanto sob tração quanto sob compressão.
- Se um *material frágil* tiver diagramas tensão-deformação *diferentes* sob tração e sob compressão, então se usará o *critério de falha de Mohr* para prever a falha.
- Devido às imperfeições do material, é *difícil prever* a *fratura por tração* de um material frágil e, assim, as teorias da falha para esse tipo de material devem ser usadas com cautela.

EXEMPLO 10.12

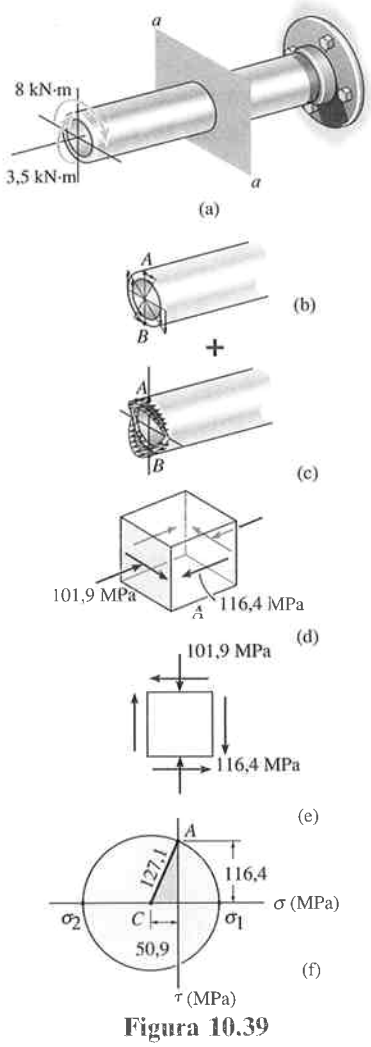


Figura 10.39

O tubo de aço mostrado na Figura 10.39*a* tem diâmetro interno de 60 mm e diâmetro externo de 80 mm. Supondo que esteja sujeito a um momento de torção de 8 kN · m e a um momento fletor de 3,5 kN · m, determinar se essas cargas provocam a falha definida pela teoria da energia de distorção máxima. O limite de escoamento encontrado em um teste de tração é $\sigma_E = 250$ MPa.

SOLUÇÃO

Para resolver esse problema devemos investigar um ponto no tubo que esteja sujeito a um estado de máxima tensão crítica. Tanto o momento de torção quanto o fletor são uniformes ao longo do comprimento do tubo. Na seção arbitrária *a–a* (Figura 10.39*a*), essas cargas produzem as distribuições de tensão mostradas nas figuras 10.39*b* e 10.39*c*. Por inspeção, concluímos que os pontos *A* e *B* estão sujeitos ao mesmo estado crítico de tensões. Aqui vamos investigar o estado de tensão em *A*. Desse modo:

$$\tau_A = \frac{Tc}{J} = \frac{(8.000\ \text{N} \cdot \text{m})(0{,}04\ \text{m})}{(\pi/2)[(0{,}04\ \text{m})^4 - (0{,}03\ \text{m})^4]} = 116{,}4\ \text{MPa}$$

$$\sigma_A = \frac{Mc}{I} = \frac{(3.500\ \text{N} \cdot \text{m})(0{,}04\ \text{m})}{(\pi/4)[(0{,}04\ \text{m})^4 - (0{,}03\ \text{m})^4]} = 101{,}9\ \text{MPa}$$

Esses resultados podem ser conferidos em uma vista tridimensional de um elemento do material no ponto *A* (Figura 10.39) e, além disso, como o material está submetido ao estado plano de tensões, é mostrado em duas dimensões (Figura 10.39*e*).

O círculo de Mohr para o estado plano de tensões tem centro localizado em:

$$\sigma_{\text{méd}} = \frac{0 - 101{,}9}{2} = -50{,}9\ \text{MPa}$$

O ponto de referência $A(0, -116{,}4\ \text{MPa})$ foi marcado, e o círculo foi construído (Figura 10.39*f*). Nesse caso, o raio calculado pelo triângulo sombreado é $R = 127{,}1$ e, desse modo, as tensões principais no plano são:

$$\sigma_1 = -50{,}9 + 127{,}1 = 76{,}2 \text{ MPa}$$
$$\sigma_2 = -50{,}9 - 127{,}1 = -178{,}0 \text{ MPa}$$

Usando a Equação 10.30, requer-se que:

$$(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2) \leq \sigma_E^2$$
$$[(76{,}2)^2 - (76{,}2)(-178{,}0) + (-178{,}0)^2] \overset{?}{\leq} (250)^2 \; 51.100 < 62.500 \text{ OK}$$

Como o critério foi satisfeito, de acordo com a teoria da energia de distorção máxima o material do tubo *não* escoará ('falhará').

EXEMPLO 10.13

O eixo maciço de ferro fundido mostrado na Figura 10.40*a* está sujeito ao torque $T = 400$ lb · pés. Determinar o menor raio de modo que não ocorra falha, de acordo com a teoria da tensão normal máxima. Um corpo-de-prova de ferro fundido, testado sob tração, tem limite de resistência $(\sigma_r)_t = 20$ ksi.

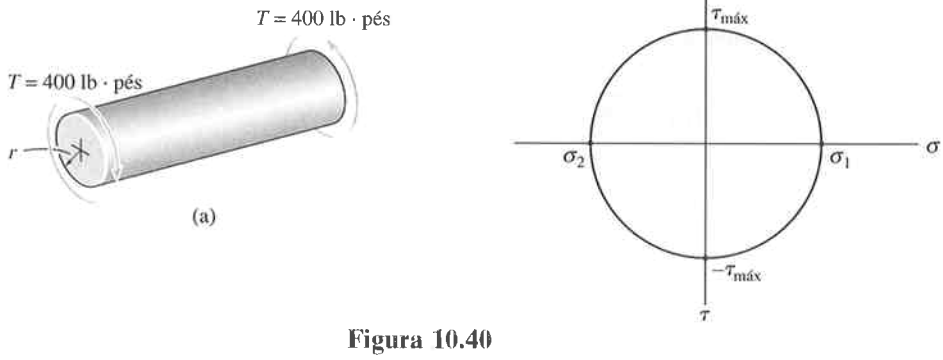


Figura 10.40

SOLUÇÃO

A tensão máxima ou crítica ocorre em um ponto localizado na superfície do eixo. Supondo que o eixo tenha raio r, a tensão de cisalhamento é:

$$\tau_{máx} = \frac{Tc}{J} = \frac{(400 \text{ lb} \cdot \text{pés})(12 \text{ pol/pé})r}{(\pi/2)r^4} = \frac{3.055{,}8 \text{ lb} \cdot \text{pol}}{r^3}$$

O círculo de Mohr para esse estado de tensão (cisalhamento puro) é mostrado na Figura 10.40*b*. Como $R = \tau_{máx}$, então:

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_{máx} = \frac{3.055{,}8 \text{ lb} \cdot \text{pol}}{r^3}$$

A teoria da tensão normal máxima (Equação 10.31), requer:

$$|\sigma_1| \leq \sigma_r$$
$$\frac{3.055{,}8 \text{ lb} \cdot \text{pol}}{r^3} \leq 20.000 \text{ lb/pol}^2$$

Desse modo, o menor raio do eixo é determinado por:

$$\frac{3.055{,}8 \text{ lb} \cdot \text{pol.}}{r^3} = 20.000 \text{ lb/pol}^2$$
$$r = 0{,}535 \text{ pol} \qquad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 10.14

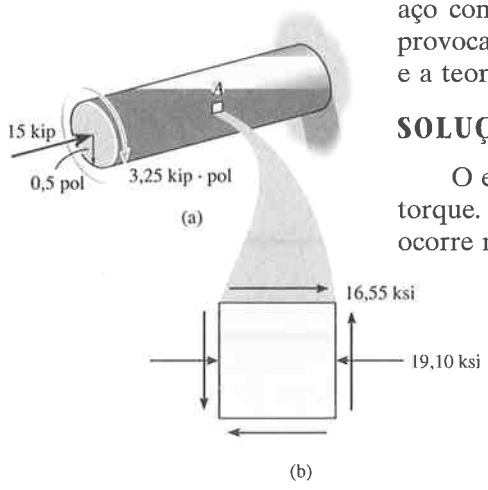


Figura 10.41

O eixo maciço mostrado na Figura 10.14*a* tem raio de 0,5 pol e é feito de aço com limite de escoamento $\sigma_E = 36$ ksi. Determinar se o carregamento provocará sua falha, de acordo com a teoria da tensão de cisalhamento máxima e a teoria da energia de distorção máxima.

SOLUÇÃO

O estado de tensão no eixo é provocado tanto pela força axial como pelo torque. Visto que a tensão de cisalhamento máxima provocada pelo torque ocorre na superfície externa do material, temos:

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{15 \text{ kip}}{\pi(0{,}5 \text{ pol})^2} = 19{,}10 \text{ ksi}$$

$$\tau_{xy} = \frac{Tc}{J} = \frac{3{,}25 \text{ kip} \cdot \text{pol}(0{,}5 \text{ pol})}{\frac{\pi}{2}(0{,}5 \text{ pol})^4} = 16{,}55 \text{ ksi}$$

Os componentes de tensão são mostrados atuando sobre um elemento do material no ponto A da Figura 10.41*b*. Em vez de usar o círculo de Mohr, também podemos obter as tensões principais por meio das equações de transformação (Equação 9.5).

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \frac{-19{,}10 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-19{,}10 - 0}{2}\right)^2 + (16{,}55)^2}$$

$$= -9{,}55 \pm 19{,}11$$

$$\sigma_1 = 9{,}56 \text{ ksi}$$

$$\sigma_2 = -28{,}66 \text{ ksi}$$

Teoria da Tensão de Cisalhamento Máxima. Como as tensões principais têm *sinais opostos*, então, de acordo com a Seção 9.7, a tensão de cisalhamento máxima absoluta ocorrerá no plano e, portanto, aplicando a segunda Equação 10.27, teremos:

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \leq \sigma_E$$

$$|9{,}56 - (-28{,}66)| \stackrel{?}{\leq} 36$$

$$38{,}2 > 36$$

Logo, de acordo com essa teoria, ocorrerá falha do material por cisalhamento.

Teoria da Energia de Distorção Máxima. Aplicando a Equação 10.30, temos:

$$(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2) \leq \sigma_E$$

$$[(9{,}56)^2 - (9{,}56)(-28{,}66) + (-28{,}66)^2] \stackrel{?}{\leq} (36)^2$$

$$1.187 \leq 1.296$$

Segundo essa teoria não ocorrerá falha.

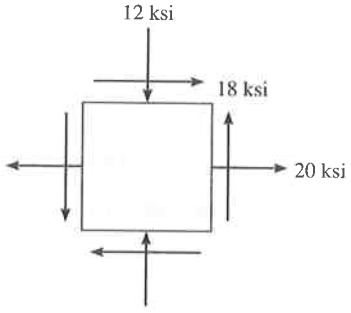
PROBLEMAS

***10.64.** Um material está sujeito ao estado plano de tensões. Expressar a teoria da falha relativa à tensão de cisalhamento máxima em termos de σ_x, σ_y e τ_{xy}. Supor que as tensões principais tenham sinais algébricos diferentes.

10.65. Um material está sujeito ao estado plano de tensões. Expressar a teoria da falha relativa à energia de distorção máxima em termos de σ_x, σ_y e τ_{xy}.

10.66. O estado plano de tensões em um ponto crítico do suporte de aço de uma máquina é mostrado. Supondo que o limite de escoamento do aço seja σ_E = 36 ksi, determinar se ocorrerá escoamento usando a teoria da energia de distorção máxima.

10.67. Resolver o Problema 10.66 usando a teoria da tensão de cisalhamento máxima.



Problemas 10.66/10.67

***10.68.** O limite de escoamento de uma liga de zircônio-magnésio é σ_E = 15,3 ksi. Supondo que uma peça de máquina seja feita desse material e um ponto crítico seja submetido às tensões principais no plano σ_1 e $\sigma_2 = -0{,}5\sigma_1$, determinar a intensidade de σ_1 que provocará escoamento, de acordo com a teoria da tensão de cisalhamento máxima.

10.69. Resolver o Problema 10.68 usando a teoria da energia de distorção máxima.

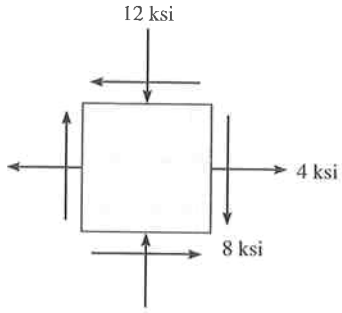
10.70. O limite de escoamento de uma liga de berílio-cobre tratada termicamente é σ_E = 130 ksi. Se esse material for submetido ao estado plano de tensões e ocorrer falha elástica quando uma das tensões principais for 145 ksi, qual será a menor intensidade da outra tensão principal? Usar a teoria da energia de distorção máxima.

10.71. O limite de escoamento de um material plástico é σ_E = 110 MPa. Se esse material for submetido ao estado plano de tensões e ocorrer falha elástica quando uma das tensões principais for 120 MPa, qual será a menor intensidade da outra tensão principal? Usar a teoria da energia de distorção máxima.

***10.72.** Resolver o Problema 10.71 usando a teoria da tensão de cisalhamento máxima. Ambas as tensões principais têm sinais opostos.

10.73. O elemento está sujeito às tensões mostradas. Se σ_E = 36 ksi, determinar o fator de segurança para o carregamento com base na teoria da tensão de cisalhamento máxima.

10.74. Resolver o Problema 10.73 usando a teoria da energia de distorção máxima.



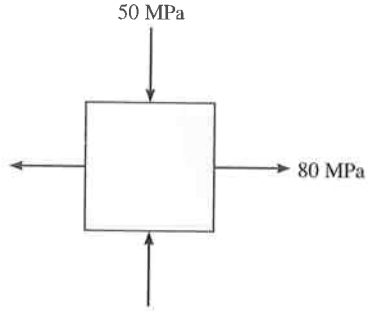
Problemas 10.73/10.74

10.75. Uma barra com área da seção transversal circular é feita de aço carbono SAE 1045, cujo limite de escoamento é σ_E = 150 ksi. Se a barra for submetida a um torque de 30 kip · pol a um momento fletor de 56 kip · pol, qual diâmetro ela precisará ter, de acordo com a teoria da energia de distorção máxima? Usar um fator de segurança 2 em relação ao escoamento.

***10.76.** Uma barra com área da seção transversal quadrada é feita de um material cujo limite de escoamento é σ_E = 120 ksi. Se a barra for submetida a um momento fletor de 75 kip · pol, quais dimensões ela precisará ter, de acordo com a teoria da energia de distorção máxima? Usar um fator de segurança 1,5 em relação ao escoamento.

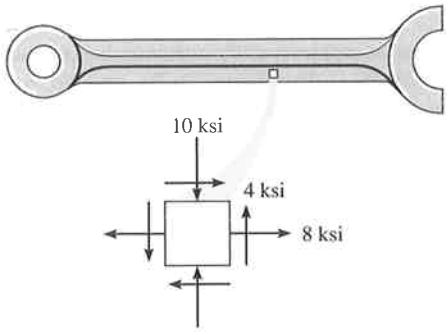
10.77. Resolver o Problema 10.76 usando a teoria da tensão de cisalhamento máxima.

10.78. As tensões principais no plano que atuam sobre o elemento infinitesimal são mostradas. Supondo que o material seja aço de construção de máquinas com limite de escoamento σ_E = 700 MPa, determinar o fator de segurança em relação ao escoamento se for considerada a teoria da tensão de cisalhamento máxima.



Problema 10.78

10.79. O estado de tensão que atua em um ponto crítico do elemento de máquina é mostrado na figura. Determinar o menor limite de escoamento para o aço a ser selecionado para a peça, baseando-se na teoria da tensão de cisalhamento máxima.



Problema 10.79

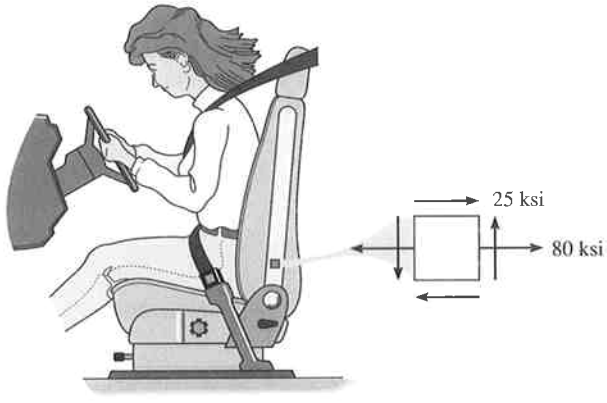
***10.80.** Deduzir uma expressão para um torque equivalente T_e que, se aplicado sozinho a um eixo maciço com seção transversal circular, provocaria a mesma energia de distorção que a combinação do momento fletor M com o torque T.

10.81. Supondo que um eixo seja feito de níquel para o qual $\sigma_E = 65$ ksi, determinar o esforço de torção máximo requerido para provocar escoamento usando (*a*) a teoria da tensão de cisalhamento máxima e (*b*) a teoria da energia de distorção máxima.

10.82. Deduzir uma expressão para um momento fletor equivalente M_e que, se aplicado sozinho a uma barra maciça com seção transversal circular, provocaria a mesma tensão de cisalhamento máxima que a combinação do momento M com o torque T. Supor que as tensões principais tenham sinais algébricos opostos.

10.83. O estado de tensão que atua sobre a estrutura do assento de um automóvel durante uma trombada é mostrado na figura. Determinar o menor limite de escoamento para o aço a ser selecionado para o elemento, baseando-se na teoria da tensão de cisalhamento máxima.

***10.84.** Resolver o Problema 10.83 usando a teoria da energia de distorção máxima.



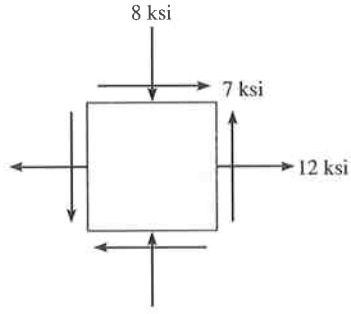
Problemas 10.83/10.84

10.85. Supondo que uma peça de máquina seja feita de titânio (Ti-6A1-4V) e um ponto crítico do material esteja sujeito ao estado plano de tensões, tal que as tensões principais sejam σ_1 e $\sigma_2 = 0{,}5\sigma_1$, determinar a intensidade de σ_1 em MPa que provocará escoamento de acordo com (*a*) a teoria da tensão de cisalhamento máxima e (*b*) a teoria da energia de distorção máxima.

10.86. Uma liga de alumínio 6061-T6 deve ser usada em um eixo de acionamento para que transmita 50 hp a 1.800 rev/min. Usando um fator de segurança F.S. = 2, em relação ao escoamento, determinar o menor diâmetro de eixo que pode ser selecionado com base na teoria da energia de distorção máxima.

10.87. Resolver o Problema 10.86 usando a teoria da tensão de cisalhamento máxima.

***10.88.** O elemento está submetido às tensões mostradas. Se $\sigma_E = 50$ ksi, determinar o fator de segurança para o carregamento com base (*a*) na teoria da tensão de cisalhamento máxima e (*b*) na teoria da energia de distorção máxima.



Problema 10.88

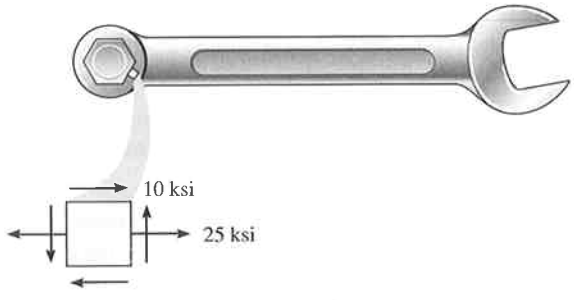
10.89. Uma liga de alumínio 6061-T6 deve ser usada em um eixo de acionamento para que transmita 40 hp a 2.400 rev/min. Usando um fator de segurança F.S. = 2, em relação ao escoamento, determinar o menor diâmetro de eixo que pode ser selecionado com base na teoria da tensão de cisalhamento máxima.

10.90. Resolver o Problema 10.89 usando a teoria da energia de distorção máxima.

10.91. As tensões principais que atuam em determinado ponto de um vaso de pressão cilíndrico de paredes finas são $\sigma_1 = pr/t$, $\sigma_2 = pr/2t$ e $\sigma_3 = 0$. Supondo que o limite de escoamento seja σ_E, determinar o valor máximo de p segundo (*a*) a teoria da tensão de cisalhamento máxima e (*b*) a teoria da energia de distorção máxima.

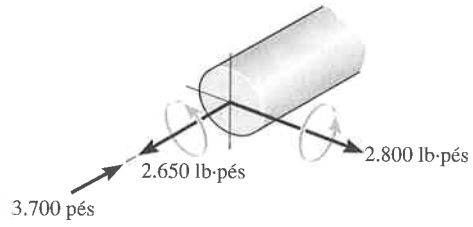
***10.92.** O estado de tensão que atua no ponto crítico de uma chave é mostrado na figura. Determinar o menor limite de escoamento do aço que pode ser escolhido para a peça, segundo a teoria da energia de distorção máxima.

10.93. O estado de tensão que atua no ponto crítico de uma chave é mostrado na figura. Determinar o menor limite de escoamento do aço que pode ser escolhido para a peça, segundo a teoria da tensão de cisalhamento máxima.



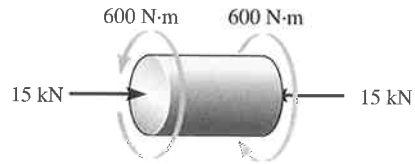
Problemas 10.92/10.93

10.94. Os carregamentos internos na seção crítica ao longo do eixo de acionamento de um navio foram calculados para um torque de 2.650 lb · pés, um momento fletor de 2.800 lb · pés e uma propulsão axial de 3.700 lb. Supondo que o material seja o aço e os limites de escoamento para tração e cisalhamento sejam $\sigma_E = 100$ ksi e $\tau_E = 50$ ksi, respectivamente, determinar o diâmetro que o eixo precisa ter, de acordo com a teoria da tensão de cisalhamento máxima.



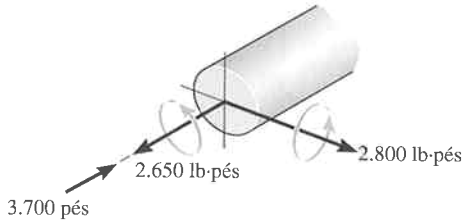
Problema 10.94

10.95. O cilindro de ferro fundido com diâmetro de 100 mm está submetido a um torque de 600 N · m e a uma força de compressão de 15 kN. Determinar se ele falhará de acordo com a teoria da energia de distorção máxima. O limite de resistência do ferro fundido é $\sigma_r = 170$ MPa.



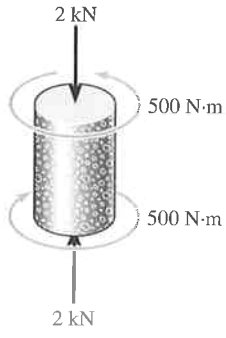
Problema 10.95

***10.96.** Os carregamentos internos na seção crítica ao longo do eixo de acionamento de um navio foram calculados para um torque de 2.650 lb · pés, um momento fletor de 2.800 lb · pés e uma propulsão axial de 3.700 lb. Supondo que o material seja o aço e os limites de escoamento para tração e cisalhamento sejam $\sigma_E = 100$ ksi e $\tau_E = 50$ ksi, respectivamente, determinar o diâmetro que o eixo precisa ter, de acordo com a teoria da energia de distorção máxima.



Problema 10.96

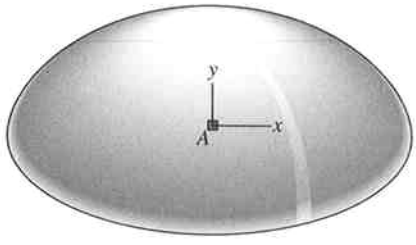
10.97. O pequeno cilindro de concreto com diâmetro de 50 mm está sujeito a um torque de 500 N · m e a uma força de compressão axial de 2 kN. Determinar se ele falhará de acordo com a teoria da tensão normal máxima. O limite de resistência do concreto é $\sigma_r = 28$ MPa.



Problema 10.97

PROBLEMAS DE REVISÃO

10.98. A deformação no ponto A da calota esférica tem componentes $\epsilon_x = 250(10^{-6})$, $\epsilon_y = 400(10^{-6})$, $\gamma_{xy} = 275(10^{-6})$, $\epsilon_z = 0$. Determinar (*a*) as deformações principais em A, (*b*) a deformação por cisalhamento máxima no plano x–y e (*c*) a deformação por cisalhamento máxima absoluta.

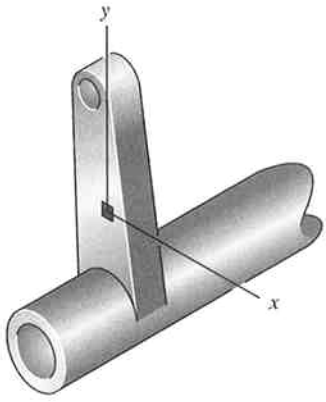


Problema 10.98

10.99. Supondo que um eixo maciço com diâmetro d seja submetido a um torque $\mathbf{T}$ e a um momento $\mathbf{M}$, mostrar que pela teoria da tensão de cisalhamento máxima a tensão de cisalhamento máxima admissível é $\tau_{adm} = (16/\pi d^3)\sqrt{M^2 + T^2}$. Supor que as tensões principais tenham sinais algébricos opostos.

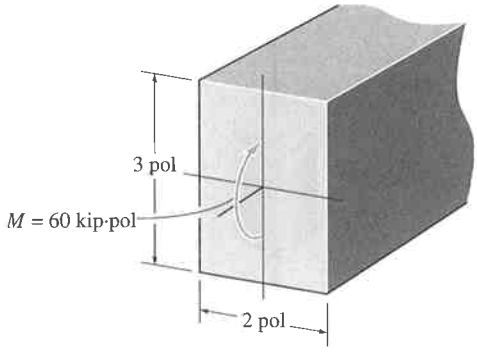
***10.100.** Deduzir uma expressão para um momento fletor equivalente M_e que, se aplicado sozinho a uma barra maciça com seção transversal circular, provocaria a mesma energia de distorção que a combinação do momento fletor M com o torque T.

10.101. O estado de deformação em um ponto do braço tem componentes $\epsilon_x = 250(10^{-6})$, $\epsilon_y = -450(10^{-6})$, $\gamma_{xy} = -825(10^{-6})$. Usar as equações de transformação da deformação para determinar (*a*) as deformações principais no plano; (*b*) a deformação por cisalhamento máxima no plano e a deformação normal média. Especificar em cada caso a orientação do elemento e mostrar como as deformações o distorcem no plano x–y.



Problema 10.101

10.102. A viga de alumínio tem a seção transversal retangular mostrada. Supondo que seja submetida ao momento fletor $M = 60$ kip · pol, determinar o aumento na dimensão de 2 pol em seu topo e a diminuição da dimensão na parte inferior. $E_{al} = 10(10^3)$ ksi e $\nu_{al} = 0{,}3$.

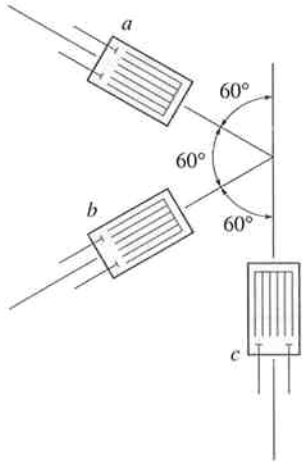


Problema 10.102

10.103. Determinar o módulo de compressibilidade de cada um dos seguintes materiais: (*a*) borracha, $E_{borr} = 0{,}4$ ksi, $\nu_{borr} = 0{,}48$; e (*b*) vidro, $E_{vidro} = 8(10^3)$ ksi, $\nu_{vidro} = 0{,}24$.

***10.104.** Um vaso de pressão esférico com paredes finas tem raio interno r, espessura t e está submetido a uma pressão interna p. Se as constantes do material forem E e ν, qual será a deformação na direção circunferencial em termos dos parâmetros indicados?

10.105. A roseta de 60° está instalada em uma viga. As seguintes leituras foram obtidas em cada aferidor: $\epsilon_a = 600(10^{-6})$, $\epsilon_b = -700(10^{-6})$ e $\epsilon_c = 350(10^{-6})$. Determinar (*a*) as deformações principais no plano; (*b*) a deformação por cisalhamento máxima no plano e a deformação normal média. Mostrar, em cada caso, o elemento distorcido em virtude dessas deformações.

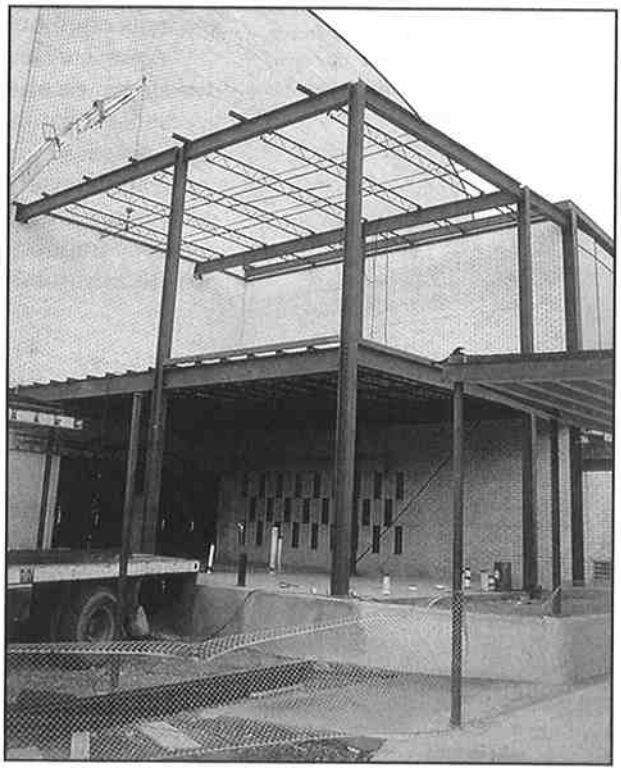


Problema 10.105

11 Projeto de Vigas e Eixos

Objetivos do Capítulo

Neste capítulo discutiremos como projetar uma viga de modo que ela seja capaz de resistir tanto a carregamentos de flexão como de cisalhamento. Especificamente, serão desenvolvidos métodos para projetar vigas prismáticas e determinar a forma de vigas totalmente solicitadas. No final do capítulo consideraremos o projeto de eixos baseado na resistência aos momentos fletores e de torção.



Vigas são membros estruturais importantes usados para suportar cargas de coberturas e pisos.

11.1 Base para o Projeto da Viga

Vigas são elementos estruturais projetados para suportar carregamentos aplicados perpendicularmente ao seu eixo longitudinal. Devido ao carregamento, as vigas desenvolvem força cortante interna e momento fletor que, em geral, variam de ponto para ponto ao longo do eixo. Algumas vigas também estão sujeitas a uma força axial interna; entretanto, os efeitos dessa força muitas vezes são desprezados no projeto, pois a tensão axial geralmente é muito menor que as tensões desenvolvidas por cisalhamento e flexão. Diz-se que uma viga selecionada para resistir às tensões de cisalhamento e flexão é projetada com *base na resistência*. Dessa maneira, o projeto requer o uso das fórmulas do cisalhamento e da flexão desenvolvidas nos Capítulos 6 e 7.

A aplicação dessas fórmulas, no entanto, limita-se a vigas feitas de material homogêneo que tenha comportamento linear-elástico.

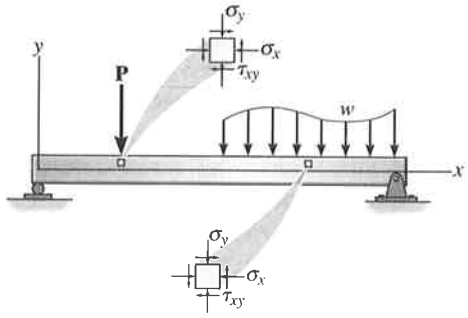
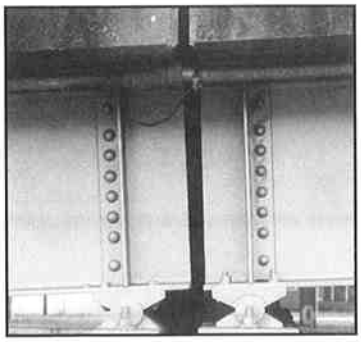


Figura 11.1



Normalmente, as vigas suportam grande carga de cisalhamento nos seus apoios. Por essa razão, acopla-se um reforço metálico na alma da viga, como mostrado aqui, para evitar deformações localizadas.

A análise de tensão de uma viga geralmente despreza os efeitos provocados por carregamentos externos distribuídos e forças concentradas. Como mostra a Figura 11.1, essas cargas criam tensões adicionais na viga *diretamente sob a carga*. Assim, desenvolve-se uma tensão de compressão σ_y, além da tensão de flexão σ_x e da tensão de cisalhamento τ_{xy}, discutidas anteriormente. Usando-se métodos de análise avançados, como os da teoria da elasticidade, pode-se mostrar, no entanto, que a tensão σ_y diminui rapidamente com a altura da viga e, para a *maioria* das vigas usadas na prática da engenharia, o valor máximo de σ_y representa apenas uma pequena porcentagem em comparação com o esforço de flexão σ_x, isto é, $\sigma_x >> \sigma_y$. Além disso, no projeto em geral se evita a aplicação direta de cargas concentradas. Para tanto, usam-se *chapas de assento* que distribuem tais cargas mais equilibradamente sobre a superfície da viga.

Apesar de as vigas serem projetadas sobretudo para robustez, também devem ser escoradas adequadamente ao longo dos seus lados para que não apresentem flambagem ou tornem-se instáveis de repente. Em alguns casos, as vigas devem ser projetadas para resistir a uma quantidade limitada de *deflexão*, como ao suportar tetos feitos de materiais frágeis como gesso. Os métodos para determinar a deflexão das vigas serão apresentados no Capítulo 12, e as limitações impostas à sua flambagem em geral são discutidas nas normas de projeto estrutural ou mecânico.

11.2 PROJETO DE VIGA PRISMÁTICA

Para projetar uma viga com base na *resistência*, o engenheiro deve impedir que o esforço de flexão e a tensão de cisalhamento excedam o esforço de flexão e a tensão de cisalhamento admissíveis para o material, como definido nas normas estruturais e mecânicas. Se o vão livre da viga for relativamente grande, fazendo com que os momentos internos tornem-se grandes, deve-se considerar, em primeiro lugar, um projeto baseado na flexão e verificar a resistência ao cisalhamento. Esse tipo de projeto de flexão exige que se determine o ***módulo de resistência*** da viga, que consiste na relação entre I e c, ou seja, $S = I/c$. Usando a fórmula da flexão, $\sigma = Mc/I$, temos:

$$S_{\text{nec}} = \frac{M}{\sigma_{\text{adm}}} \tag{11.1}$$

Nesse caso, M será determinado pelo diagrama de momento da viga e o esforço de flexão admissível, σ_{adm}, especificado em normas de projeto. Em muitos casos, o peso desconhecido da viga é pequeno e desprezível em comparação com as cargas que ela deve suportar. Entretanto, se o momento adicional provocado pelo peso tiver de ser incluído no projeto, a escolha de S será feita de modo que *exceda* levemente S_{nec}.

As duas vigas de piso estão acopladas a uma viga-mestra que transmite a carga para as colunas desta estrutura de prédio. Na análise das forças, os acoplamentos são considerados pinos.

Uma vez que S_{nec} seja conhecido, se a seção transversal da viga tiver uma forma simples, como um quadrado, um círculo ou um retângulo de proporções largura-altura conhecidas, suas *dimensões* serão determinadas diretamente a partir de S_{nec}, uma vez que, por definição, $S_{\text{nec}} = I/c$. Entretanto, se a seção transversal estiver composta por vários elementos, como ocorre com vigas de abas largas, poderemos determinar um número infinito de dimensões da alma e da aba que satisfaçam o valor de S_{nec}. Na prática, porém, os engenheiros escolhem uma viga em particular que satisfaça o requisito $S > S_{\text{nec}}$ nos manuais que relacionam os padrões disponíveis dos fabricantes. Em geral, várias vigas

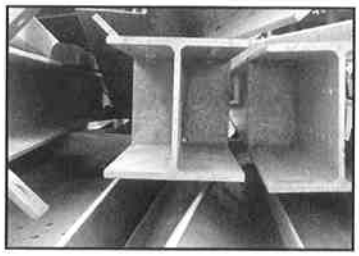
que tenham o mesmo módulo de resistência podem ser escolhidas nas tabelas. Se as deflexões não representarem restrições, geralmente a viga que possui a menor área de seção transversal será a escolhida, pois é feita com menos quantidade de material e, portanto, mais leve e barata que as outras.

A discussão anterior supõe que a tensão de flexão admissível do material é a *mesma* tanto sob tração como sob compressão. Nesse caso, a viga com seção transversal *simétrica* em relação ao eixo neutro deve ser escolhida. Entretanto, se as tensões de flexão admissível sob tração e compressão *não* forem as mesmas, a escolha de uma seção transversal assimétrica será mais eficiente. Nessas condições, a viga deve ser projetada para resistir *tanto* ao maior momento positivo *quanto* ao maior momento negativo no vão.

Uma vez selecionada a viga, podemos usar a fórmula do cisalhamento $\tau_{adm} \geq VQ/It$ para verificar se a tensão de cisalhamento admissível não será excedida. Em geral esse requisito não apresenta problema. Entretanto, se a viga for 'curta' e suportar cargas concentradas grandes, a limitação da tensão de cisalhamento determinará seu tamanho. Essa limitação é particularmente importante no projeto de vigas de madeira, porque esta tende a rachar ao longo de suas fibras devido ao cisalhamento (ver Figura 7.6).

Vigas Fabricadas. Como as vigas geralmente são feitas de aço ou madeira, vamos discutir agora algumas propriedades tabeladas das vigas feitas desses materiais.

Perfis de Aço. A maioria das vigas de aço é produzida por meio da laminação a quente de um lingote de aço até que se otenha o formato desejado. Tais formatos, denominados *perfis laminados*, têm propriedades tabeladas no manual do American Institute of Steel Construction (AISC) — Instituto Norte-americano de Aço de Construção. Uma relação representativa de vigas de abas largas desse manual é oferecida no Apêndice B. Como observado nesse apêndice, as vigas de abas largas são projetadas segundo sua altura e peso por unidade de comprimento; por exemplo, W18 × 46 indica um perfil de abas largas (W) com altura de 18 pol e peso de 46 lb/pé (Figura 11.2). São informados para qualquer perfil tabelado o peso por comprimento, as dimensões, a área da seção transversal, o momento de inércia e o módulo de resistência. Consta ainda o raio de giração r, uma propriedade relacionada com a resistência à flambagem do perfil, que será discutida no Capítulo 13. O Apêndice B e o *Manual AISC* também relacionam dados de outros elementos, tais como vigas em U e cantoneiras.



Vista do perfil típico de uma viga de abas largas feita de aço.

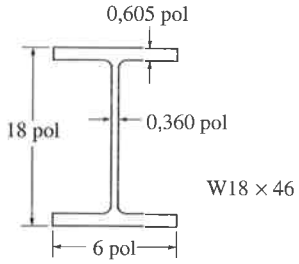
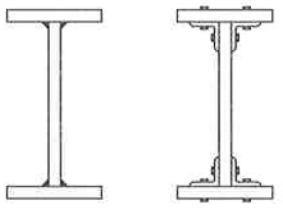


Figura 11.2

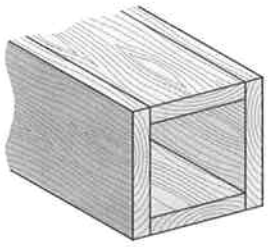
Seções de Madeira. A maioria das vigas de madeira tem seção transversal retangular porque assim se tornam fáceis de fabricar e manusear. Os manuais, como o da National Forest Products Association (Associação Nacional de Produtos Florestais), relacionam as dimensões da madeira usada no projeto de vigas. Em geral, tanto a dimensão nominal quanto a real são informadas. A madeira é identificada por suas dimensões *nominais*, tais como 2 × 4

(2 pol por 4 pol); no entanto, suas dimensões reais ou 'acabadas' são menores, 1,5 pol por 3,5 pol. A redução das dimensões ocorre devido à necessidade de se obter superfícies lisas a partir da madeira em estado bruto. Obviamente, devem-se usar as *dimensões reais* ao executar os cálculos de esforço para vigas de madeira.



Vigas-mestras de chapa de aço

Figura 11.3



Viga-caixão de madeira

(a)

Viga de lâminas coladas

(b)

Figura 11.4

Seções Compostas. Uma *seção composta* é construída com dois ou mais elementos unidos para formar uma única estrutura. Como indicado pela Equação 11.1, a capacidade de a viga resistir a um momento varia diretamente conforme seu módulo de resistência S e, como $S = I/c$, então S *aumenta* se I *aumentar*. A fim de aumentar I, *a maior parte do material* deve ser colocada tão *longe* do eixo neutro quanto possível. Naturalmente, é essa condição que torna a viga de abas largas tão eficiente para resistir a um momento. No caso de cargas muito grandes, entretanto, o perfil de aço laminado disponível pode não ter o módulo de resistência suficiente para suportar dado momento. Em vez de usar várias vigas para suportar a carga, os engenheiros geralmente 'constroem' uma viga com chapas e cantoneiras. A viga em duplo T alta arquitetada dessa forma é chamada *viga mestra de chapa*. As vigas mestras da Figura 11.3, por exemplo, têm duas abas de chapas soldadas ou parafusadas, por meio de cantoneiras, à alma.

As vigas de madeira também são 'construídas', geralmente sob a forma de seção em caixão (Figura 11.4*a*). São feitas com alma de madeira compensada e tábuas mais largas para as abas. Nos vãos muito grandes, são usadas *vigas de lâminas coladas*. Esses elementos são feitos de várias tábuas coladas para formar uma única unidade (Figura 11.4*b*).

Como no caso de seções laminadas ou vigas feitas de uma única peça, o projeto das seções compostas requer que a flexão e o cisalhamento sejam verificados. Além do mais, a tensão de cisalhamento deve ser verificada nas peças de fixação, tais como solda, cola, pregos etc., para assegurar que a viga atue como peça única. Os princípios para essa verificação foram descritos na Seção 7.4.

PONTOS IMPORTANTES

- As vigas suportam carregamentos aplicados perpendicularmente a seus eixos. Se forem projetadas com base na resistência, devem resistir às tensões de flexão e de cisalhamento admissíveis.
- Admite-se que o esforço de flexão máximo na viga é muito maior que as tensões localizadas provocadas pela aplicação de cargas em sua superfície.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

Fundamentado na discussão anterior, o procedimento seguinte oferece um método racional para projetar uma viga com base na resistência.

Diagramas de Força Cortante e Momento Fletor.

- Determinar a força cortante e o momento fletor máximos na viga. Em geral se obtêm tais valores construindo os diagramas de força cortante e momento fletor.
- Nas vigas compostas, esses diagramas são úteis para identificar as *regiões* em que a força cortante e o momento fletor são excessivamente grandes e podem requerer reforço estrutural ou peças de fixação adicionais.

Tensão Normal Média.

- Se a viga for relativamente longa, os engenheiros vão projetá-la determinando seu módulo de resistência por meio da fórmula da flexão $S_{nec} = M_{máx}/\sigma_{adm}$.
- Uma vez determinado S_{nec}, calculam-se as dimensões da seção transversal para formas simples, visto que $S_{nec} = I/c$.
- Se usarmos perfis de aço laminado, poderemos selecionar diversos valores de S nas tabelas do Apêndice B. Entre eles, escolheremos o que tenha a menor área da seção transversal, uma vez que essa viga tem o menor peso e, portanto, é a mais econômica.
- Deve-se assegurar, ainda, que o módulo de resistência selecionado, S, é *ligeiramente maior* que S_{nec}, de modo que o momento adicional criado pelo peso da viga seja considerado.

Tensão de Cisalhamento.

- Normalmente, vigas curtas que suportam cargas grandes, especialmente as feitas de madeira, são projetadas para resistir ao cisalhamento em primeiro lugar e depois verificadas em relação aos requisitos de tensão de flexão admissível.
- Verificar, por meio da fórmula de cisalhamento, se a tensão de cisalhamento não foi excedida; ou seja, usar $\tau_{adm} \geq V_{máx}\,Q/It$.
- Se a viga tem seção transversal *retangular* maciça, a fórmula do cisalhamento torna-se $\tau_{adm} \geq 1{,}5(V_{máx}/A)$ (Equação 7.5); se a seção transversal representa uma *aba larga*, em geral é apropriado supor que a tensão de cisalhamento seja *constante* sobre a área da seção transversal da alma, de modo que $\tau_{adm} \geq V_{máx}/A_{alma}$, onde A_{alma} é determinada pela altura da viga multiplica pela espessura da alma (ver Seção 7.3).

Adequação das Peças de Fixação.

- A adequação das peças de fixação usadas em vigas compostas depende da tensão de cisalhamento a que tais peças podem resistir. Especificamente, o espaçamento necessário entre pregos ou parafusos de um tamanho particular é determinado pelo fluxo de cisalhamento admissível, $q_{adm} = VQ/I$, calculado nos pontos da seção transversal em que se localizam as peças de fixação (ver Seção 7.4).

EXEMPLO 11.1

Uma viga é feita de aço com tensão de flexão admissível $\sigma_{adm} = 24$ ksi e tensão de cisalhamento admissível $\tau_{adm} = 14{,}5$ ksi. Selecionar um perfil em W apropriado para suportar o carregamento mostrado na Figura 11.5*a*.

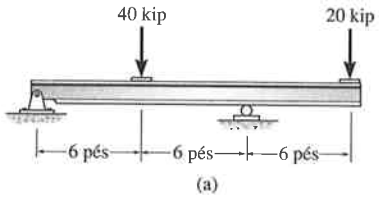
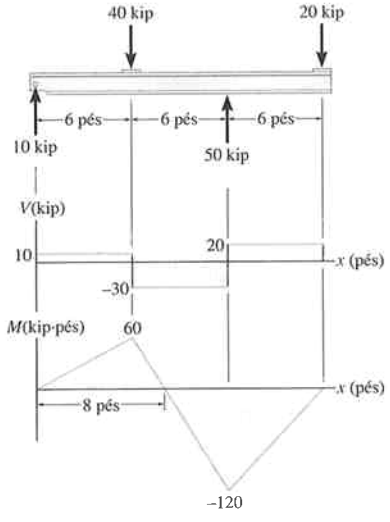


Figura 11.5

SOLUÇÃO

Diagramas de Força Cortante e Momento Fletor. As reações de apoio foram calculadas e os diagramas de força cortante e momento estão mostrados na Figura 11.5*b*. Segundo os diagramas, $V_{máx} = 30$ kip e $M_{máx} = 120$ kip · pés.



(b)

Figura 11.5

Tensão de Flexão. O módulo de resistência que a viga precisa ter é determinado pela fórmula da flexão.

$$S_{nec} = \frac{M_{máx}}{\sigma_{adm}} = \frac{120 \text{ kip} \cdot \text{pés}(12 \text{ pol/pé})}{24 \text{ kip/pol}^2} = 60 \text{ pol}^3$$

De acordo com a tabela do Apêndice B, as seguintes vigas são adequadas:

W18 × 40	$S = 68{,}4 \text{ pol}^3$
W16 × 45	$S = 72{,}7 \text{ pol}^3$
W14 × 43	$S = 62{,}7 \text{ pol}^3$
W12 × 50	$S = 64{,}7 \text{ pol}^3$
W10 × 54	$S = 60{,}0 \text{ pol}^3$
W8 × 67	$S = 60{,}4 \text{ pol}^3$

A viga com o menor peso por pé é escolhida, ou seja:

W18 × 40

O momento máximo *real* $M_{máx}$, que inclui o peso da viga, pode ser calculado, e a adequação da viga escolhida pode ser verificada. Em comparação com as cargas aplicadas, no entanto, o peso da viga, (0,040 kip/pé)(18 pés) = 0,720 kip, *aumenta* S_{nec} apenas *ligeiramente*. Apesar disso:

$$S_{nec} = 60 \text{ pol}^3 < 68{,}4 \text{ pol}^3 \qquad \text{OK}$$

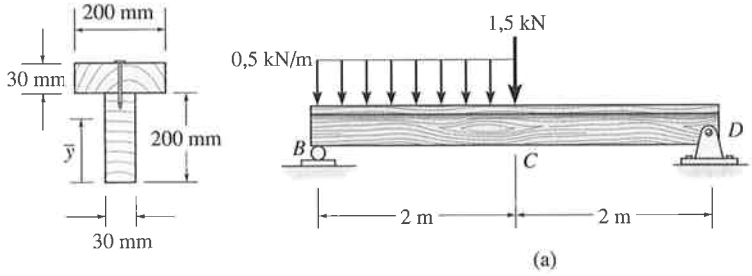
Tensão de Cisalhamento. Como a viga consiste em uma *seção de abas largas*, a *tensão de cisalhamento média* na alma será considerada. Nesse caso, admite-se que a alma estenda-se do extremo da parte superior até o extremo da parte inferior da viga. Pelo Apêndice B, para um perfil W18 × 40, $d = 17{,}90$ pol, $t_{alma} = 0{,}315$ pol. Assim,

$$\tau_{méd} = \frac{V_{máx}}{A_{alma}} = \frac{30 \text{ kip}}{(17{,}90 \text{ pol})(0{,}315 \text{ pol})} = 5{,}32 \text{ ksi} < 14{,}5 \text{ ksi} \qquad \text{OK}$$

Usar um perfil W18 × 40. ***Resposta***

EXEMPLO 11.2

A viga em T de madeira mostrada na Figura 11.6*a* é feita de duas tábuas de 200 mm × 30 mm. Se a tensão de flexão admissível for $\sigma_{adm} = 12$ MPa e a tensão de cisalhamento admissível for $\tau_{adm} = 0{,}8$ MPa, a viga suportará com segurança o carregamento mostrado? Especificar também o espaço máximo entre os pregos necessário para prender as duas tábuas, supondo que cada prego resiste com segurança a 1,50 kN sob cisalhamento.

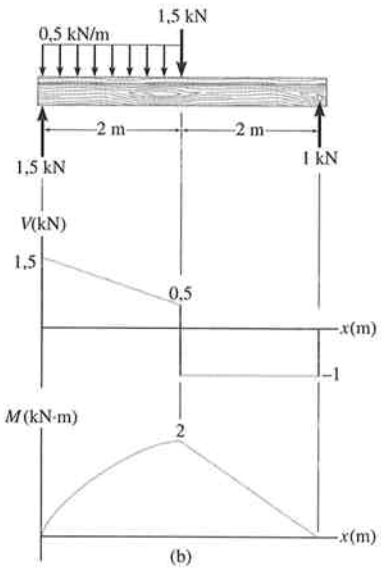


(a)

Figura 11.6

SOLUÇÃO

Diagramas de Força Cortante e Momento Fletor. As reações da viga são mostradas e os diagramas de força cortante e momento fletor estão desenhados na Figura 11.6*b*. Nesse caso, $V_{máx} = 1{,}5$ kN e $M_{máx} = 2$ kN · m.



Tensão de Flexão. O eixo neutro (centróide) será localizado a partir da parte inferior da viga. Trabalhando em unidades métricas, temos:

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} A}{\Sigma A}$$

$$= \frac{(0{,}1\text{ m})(0{,}03\text{ m})(0{,}2\text{ m}) + 0{,}215\text{ m}(0{,}03\text{ m})(0{,}2\text{ m})}{0{,}03\text{ m}(0{,}2\text{ m}) + 0{,}03\text{ m}(0{,}2\text{ m})} = 0{,}1575\text{ m}$$

Assim:

$$I = \left[\frac{1}{12}(0{,}03\text{ m})(0{,}2\text{ m})^3 + (0{,}03\text{ m})(0{,}2\text{ m})(0{,}1575\text{ m} - 0{,}1\text{ m})^2\right]$$
$$+ \left[\frac{1}{12}(0{,}2\text{ m})(0{,}03\text{ m})^3 + (0{,}03\text{ m})(0{,}2\text{ m})(0{,}215\text{ m} - 0{,}1575\text{ m})^2\right]$$
$$= 60{,}125(10^{-6})\text{ m}^4$$

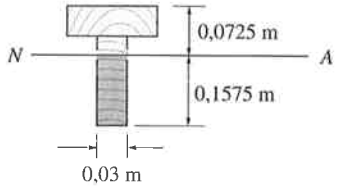
Como $c = 0{,}1575$ m (não 0,230 m – 0,1575 m = 0,0725 m), requer-se que:

$$\sigma_{adm} \geq \frac{M_{máx} c}{I}$$

$$12(10^3)\text{ kPa} \geq \frac{2\text{ kN} \cdot \text{m}(0{,}1575\text{ m})}{60{,}125(10^{-6})\text{ m}^4} = 5{,}24(10^3)\text{ kPa} \qquad \text{OK}$$

Tensão de Cisalhamento. A tensão de cisalhamento máxima na viga depende das grandezas de Q e t. Ela ocorre no eixo neutro, uma vez que Q chega ao máximo aí e o eixo neutro está na alma, onde a espessura $t = 0{,}03$ m é a menor na seção transversal. Para simplificar, usaremos a área retangular abaixo do eixo neutro para calcular Q, em vez da área composta de duas partes acima do eixo (Figura 11.6*c*). Temos:

$$Q = \bar{y}'A' = \left(\frac{0{,}1575\text{ m}}{2}\right)[(0{,}1575\text{ m})(0{,}03\text{ m})] = 0{,}372(10^{-3})\text{ m}^3$$



(c)

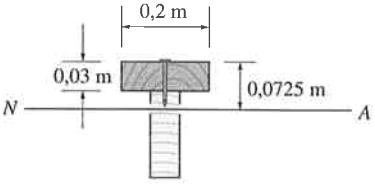
De modo que:

$$\tau_{adm} \geq \frac{M_{máx} Q}{It}$$

$$800\text{ kPa} \geq \frac{1{,}5\text{ kN}[0{,}372(10^{-3})]\text{ m}^3}{60{,}125(10^{-6})\text{ m}^4(0{,}03\text{ m})} = 309\text{ kPa} \qquad \text{OK}$$

Espaço entre os Pregos. Pelo diagrama de força cortante vê-se que o cisalhamento varia ao longo de todo o vão. Como o espaço ente os pregos depende da intensidade do cisalhamento na viga, para simplificar (e ser econômicos), projetaremos o espaçamento com base em $V = 1{,}5$ kN para a região BC e $V = 1$ kN para a região CD. Como os pregos prendem a aba à alma (Figura 11.6*d*), temos:

$$Q = \bar{y}'A' = (0{,}0725\text{ m} - 0{,}015\text{ m})[(0{,}2\text{ m})(0{,}03\text{ m})] = 0{,}345(10^{-3})\text{ m}^3$$



(d)

Figura 11.6

O fluxo de cisalhamento em cada região é, portanto:

$$q_{BC} = \frac{V_{BC}Q}{I} = \frac{1{,}5 \text{ kN}[0{,}345(10^{-3})] \text{ m}^3}{60{,}125(10^{-6}) \text{ m}^4} = 8{,}61 \text{ kN/m}$$

$$q_{CD} = \frac{V_{CD}Q}{I} = \frac{1 \text{ kN}[0{,}345(10^{-3})] \text{ m}^3}{60{,}125(10^{-6}) \text{ m}^4} = 5{,}74 \text{ kN/m}$$

Um prego resiste a 1,50 kN sob cisalhamento, de modo que o espaço deve ser:

$$s_{BC} = \frac{1{,}50 \text{ kN}}{8{,}61 \text{ kN/m}} = 0{,}174 \text{ m}$$

$$s_{CD} = \frac{1{,}50 \text{ kN}}{5{,}74 \text{ kN/m}} = 0{,}261 \text{ m}$$

Para facilitar a medição, usaremos:

$s_{BC} = 150$ mm ***Resposta***

$s_{CD} = 250$ mm ***Resposta***

EXEMPLO 11.3

A viga de madeira compensada mostrada na Figura 11.7*a* suporta uma carga distribuída uniforme de 12 kN/m. Se a viga tiver uma relação altura/largura de 1,5, determinar sua largura mínima. A tensão de flexão admissível é $\sigma_{adm} = 9$ MPa, e a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 0{,}6$ MPa. Desprezar o peso da viga.

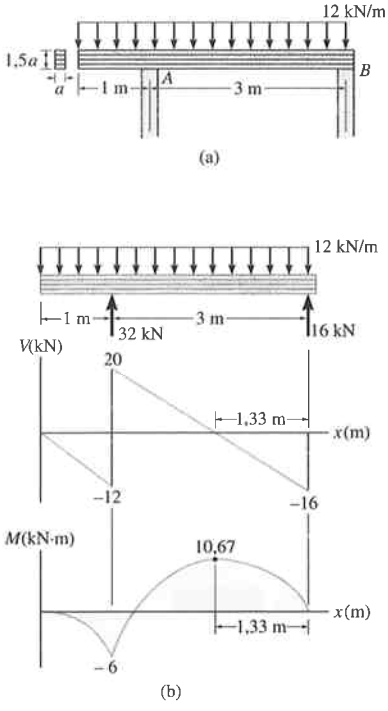


Figura 11.7

SOLUÇÃO

Diagramas de Força Cortante e Momento Fletor. As reações dos apoios em A e B foram calculadas, e os diagramas de força cortante e momento fletor estão mostrados na Figura 11.7*b*. Nesse caso, $V_{máx} = 20$ kN e $M_{máx} = 10{,}67$ kN · m.

Tensão de Flexão. Aplicando a fórmula da flexão, temos:

$$S_{nec} = \frac{M_{máx}}{\sigma_{adm}} = \frac{10{,}67 \text{ kN} \cdot \text{m}}{9(10^3) \text{ kN/m}^2} = 0{,}00119 \text{ m}^3$$

Admitindo que a largura seja a, a altura será $h = 1{,}5a$ (Figura 11.7*a*). Assim:

$$S_{nec} = \frac{I}{c} = \frac{\frac{1}{12}(a)(1{,}5a)^3}{(0{,}75a)} = 0{,}00119 \text{ m}^3$$

$$a^3 = 0{,}003160 \text{ m}^3$$

$$a = 0{,}147 \text{ m}$$

Tensão de Cisalhamento. Aplicando a fórmula de cisalhamento para seções retangulares (um caso especial de $\tau_{máx} = VQ/It$), temos:

$$\tau_{máx} = 1{,}5 \frac{V_{máx}}{A} = (1{,}5) \frac{20 \text{ kN}}{(0{,}147 \text{ m})(1{,}5)(0{,}147 \text{ m})}$$

$$= 0{,}929 \text{ MPa} > 0{,}6 \text{ MPa}$$

EQUAÇÃO

Como o critério de cisalhamento falhou, a viga deve ser reprojetada com base no cisalhamento.

$$\tau_{adm} = \frac{3}{2}\frac{V_{máx}}{A}$$

$$600 \text{ kN/m}^2 = \frac{3}{2}\frac{20 \text{ kN}}{(a)(1{,}5a)}$$

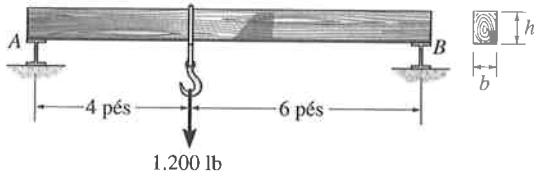
$$a = 0{,}183 \text{ m} = 183 \text{ mm} \qquad \textit{Resposta}$$

Essa seção maior resistirá adequadamente também à tensão normal.

PROBLEMAS

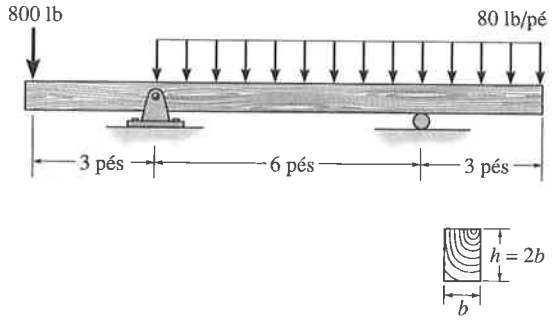
11.1. A viga de madeira tem seção transversal retangular e é usada para suportar uma carga de 1.200 lb. Supondo que a tensão de flexão admissível seja $\sigma_{adm} = 2$ ksi e a tensão de cisalhamento admissível seja $\tau_{adm} = 750$ psi, determinar a altura h da seção transversal, com aproximação de $\frac{1}{4}$ pol, se ela for retangular e tiver largura $b = 3$ pol. Supor, também, que os apoios A e B exercem apenas reações verticais sobre a viga.

11.2. Resolver o Problema 11.1 supondo que a seção transversal tenha largura desconhecida, mas deva ser quadrada, isto é, $h = b$.



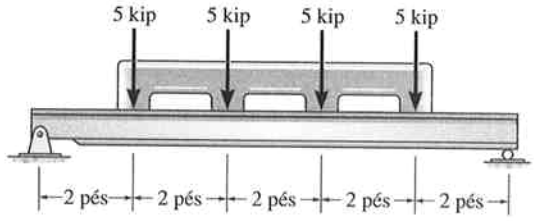
Problemas 11.1/11.2

11.3. A viga é feita de abeto Douglas com tensão de flexão admissível $\sigma_{adm} = 1{,}1$ ksi e tensão de cisalhamento admissível $\tau_{adm} = 0{,}70$ ksi. Determinar sua largura b se sua altura for $h = 2b$.



Problema 11.3

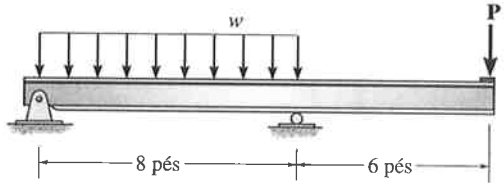
***11.4.** Selecionar a viga de abas largas de aço com o menor peso do Apêndice B que suporte com segurança a carga da máquina mostrada. A tensão de flexão admissível é $\sigma_{adm} = 24$ ksi, e a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 14$ ksi.



Problema 11.4

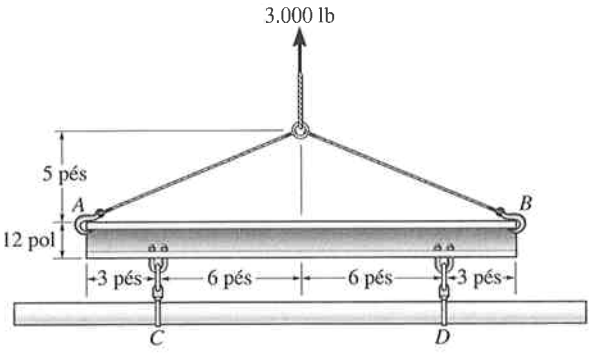
11.5. Selecionar a viga de abas largas de aço com o menor peso do Apêndice B que suporte com segurança a carga mostrada, onde $w = 6$ kip/pé e $P = 5$ kip. A tensão de flexão admissível é $\sigma_{adm} = 24$ ksi, e a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 14$ ksi.

11.6. Selecionar a viga de abas largas de aço com o menor peso do Apêndice B que suporte com segurança a carga mostrada, onde $w = 0$ e $P = 10$ kip. A tensão de flexão admissível é $\sigma_{adm} = 24$ ksi, e a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 14$ ksi.



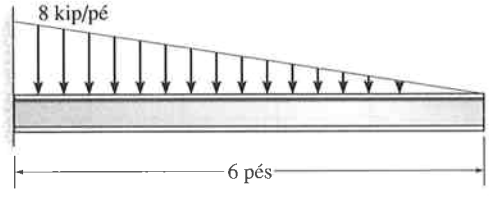
Problemas 11.5/11.6

11.7. A aba da viga AB é usada para levantar vagarosamente o tubo de 3.000 lb, que se encontra centralizado entre as alças em C e D. Se a viga for um perfil W12 × 45, poderá suportar a carga com segurança? A tensão de flexão admissível é $\sigma_{adm} = 22$ ksi, e a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 12$ ksi.



Problema 11.7

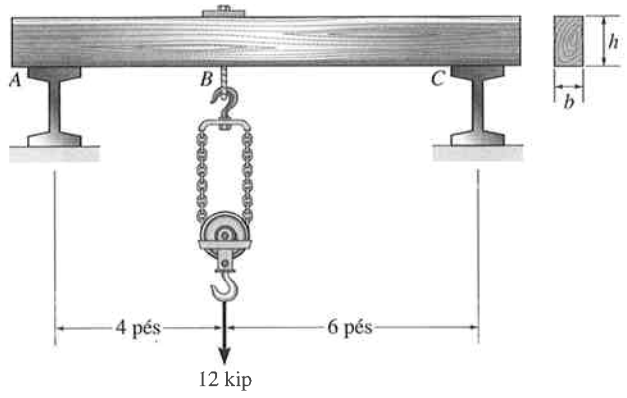
***11.8.** Selecionar no Apêndice B a viga de abas largas de aço estrutural com o menor peso e a menor altura capaz de suportar com segurança a carga mostrada. A tensão de flexão admissível é $\sigma_{adm} = 24$ ksi, e a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 14$ ksi.



Problema 11.8

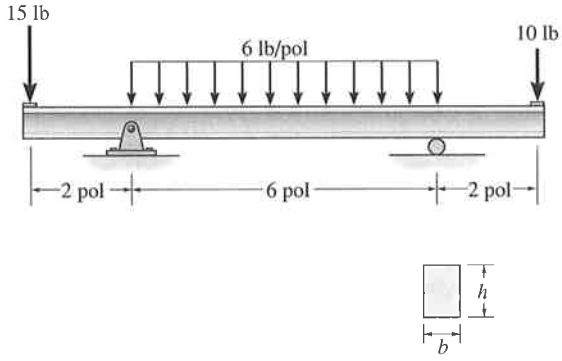
11.9. A viga de madeira tem seção transversal retangular e é usada para apoiar um guincho de corrente que suporta uma carga de 12 kip. Supondo que a tensão de flexão admissível seja $\sigma_{adm} = 26$ ksi e a tensão de cisalhamento admissível seja $\tau_{adm} = 12$ ksi, determinar a altura da seção transversal com aproximação de $\frac{1}{4}$ pol, se ela for retangular e tiver largura $b = 3$ pol.

11.10. A viga de madeira tem seção transversal retangular e é usada para apoiar um guincho de corrente que suporta uma carga de 12 kip. Supondo que a tensão de flexão admissível seja $\sigma_{adm} = 26$ ksi e a tensão de cisalhamento admissível seja $\tau_{adm} = 12$ ksi, determinar a altura da seção transversal com aproximação de $\frac{1}{4}$ pol, se ela tiver largura desconhecida e for quadrada, isto é, $h = b$.



Problemas 11.9/11.10

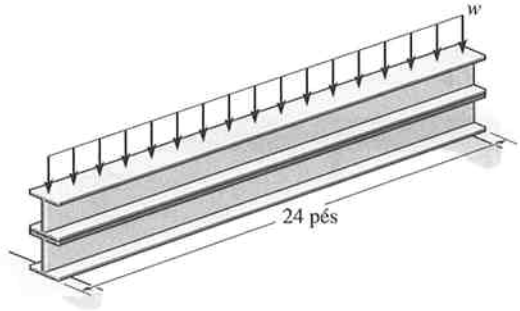
11.11. A viga é feita de material cerâmico com tensão de flexão admissível $\sigma_{adm} = 735$ psi e tensão de cisalhamento admissível $\tau_{adm} = 400$ psi. Determinar a largura b da viga se sua altura for $h = 2b$.



Problema 11.11

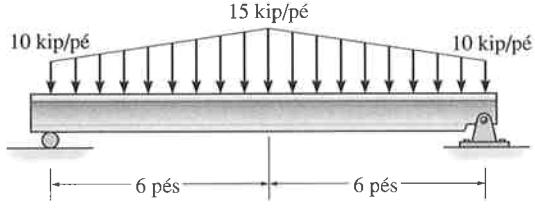
***11.12.** A viga simplesmente apoiada é composta de dois perfis W12 × 22 como mostrado. Determinar a carga uniforme máxima w que ela pode suportar se a tensão de flexão admissível é $\sigma_{adm} = 22$ ksi e a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 14$ ksi.

11.13. A viga simplesmente apoiada é composta de dois perfis W12 × 22 como mostrado. Determinar se a viga suporta com segurança a carga $w = 2$ kip/pé. A tensão de flexão admissível é $\sigma_{adm} = 22$ ksi, e a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 14$ ksi.



Problemas 11.12/11.13

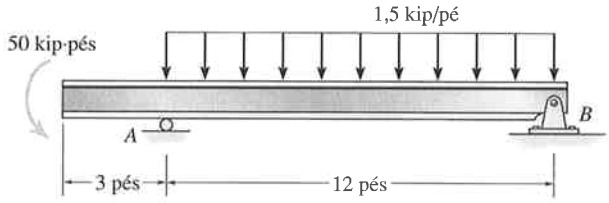
11.14. Selecionar no Apêndice B a mais leve viga de abas largas de aço capaz de suportar com segurança a carga mostrada. A tensão de flexão admissível é $\sigma_{adm} = 24$ ksi, e a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 14$ ksi.



Problema 11.14

11.15. Desenhar os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga W12 × 14 e verificar se ela suporta com segurança o carregamento. A tensão de flexão admissível é $\sigma_{adm} = 22$ ksi, e a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 12$ ksi.

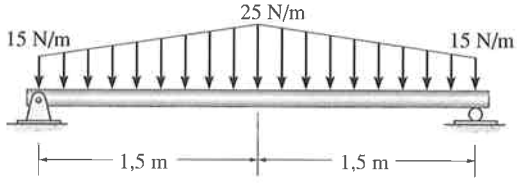
***11.16.** Selecionar no Apêndice B a mais leve viga de abas largas de aço capaz de suportar com segurança a carga mostrada. A tensão de flexão admissível é $\sigma_{adm} = 22$ ksi, e a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 12$ ksi.



Problemas 11.15/11.16

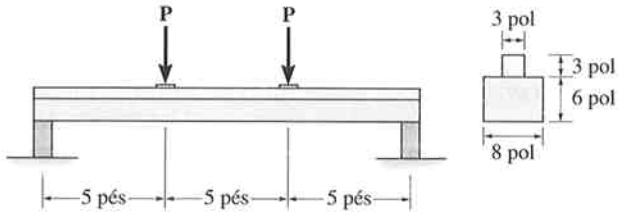
11.17. Determinar a haste de menor diâmetro que suporte com segurança a carga mostrada. A tensão de flexão admissível é $\sigma_{adm} = 167$ MPa, e a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 97$ MPa.

11.18. O tubo tem diâmetro externo de 15 mm. Determinar o menor diâmetro interno de modo que a viga suporte com segurança a carga mostrada. A tensão de flexão admissível é $\sigma_{adm} = 167$ MPa, e a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 97$ MPa.



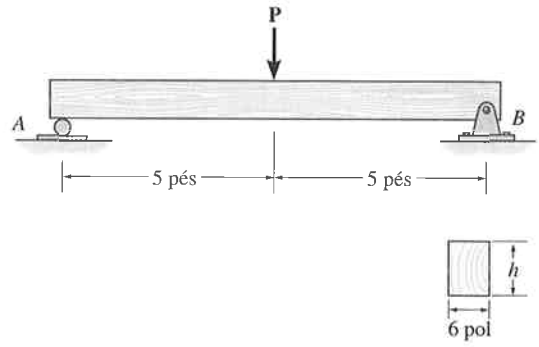
Problemas 11.17/11.18

11.19. Dois elementos de plástico de acetila devem ser colados e usados para suportar a carga mostrada. Supondo que a tensão de flexão admissível do plástico seja $\sigma_{adm} = 13$ ksi e a tensão de cisalhamento admissível seja $\tau_{adm} = 4$ ksi, determinar a maior carga P que pode ser suportada e especificar a capacidade de tensão de cisalhamento que a cola deve ter.



Problema 11.19

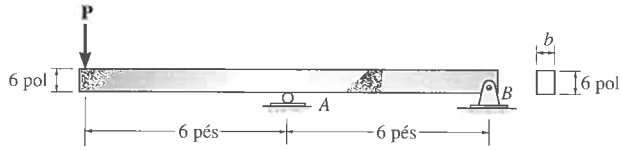
***11.20.** A viga de madeira tem seção transversal retangular. Supondo que sua largura seja 6 pol, determinar a altura h, de modo que ela atinja simultaneamente sua tensão de flexão admissível $\sigma_{adm} = 1{,}50$ ksi e uma tensão de cisalhamento admissível $\tau_{adm} = 50$ psi. Além disso, qual carga máxima P ela suportará nessas condições?



Problema 11.20

11.21. Determinar a largura mínima b da viga, com aproximação de $\frac{1}{4}$ pol, que suporte com segurança a carga $P = 8$ kip. A tensão de flexão admissível é $\sigma_{adm} = 24$ ksi, e a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 15$ ksi.

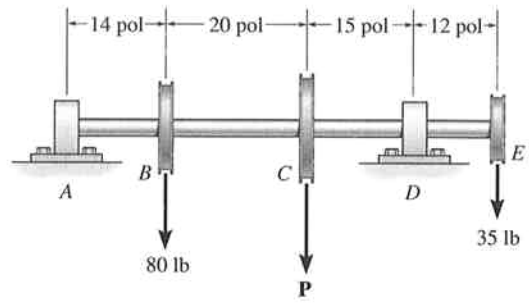
11.22. Resolver o Problema 11.21 com $P = 10$ kip.



Problemas 11.21/11.22

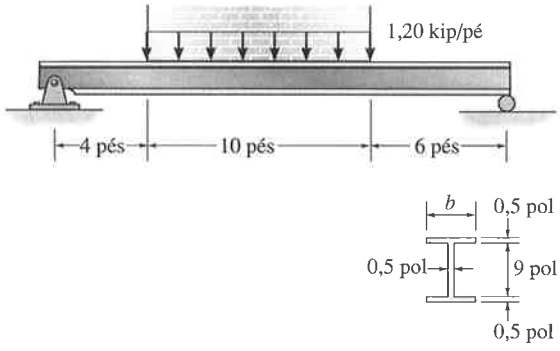
11.23. Desenhar os diagramas de força cortante e momento fletor para o eixo e determinar o diâmetro que ele precisa ter, com aproximação de $\frac{1}{4}$ pol, se $\sigma_{adm} = 7$ ksi e $\tau_{adm} = 3$ ksi. Os mancais em A e D exercem apenas reações verticais sobre o eixo. A carga é aplicada nas polias em B, C e E. Adotar $P = 110$ lb.

***11.24.** Desenhar os diagramas de força cortante e momento fletor para o eixo e determinar o diâmetro que ele precisa ter, com aproximação de $\frac{1}{4}$ pol, se $\sigma_{adm} = 7$ ksi e $\tau_{adm} = 3$ ksi. Os mancais em A e D exercem apenas reações verticais sobre o eixo. A carga é aplicada nas polias em B, C e E. Adotar $P = 80$ lb.



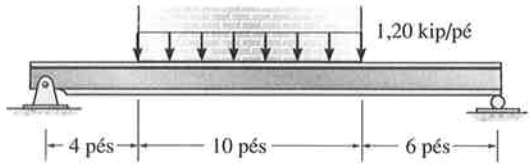
Problemas 11.23/11.24

11.25. A parede de tijolos exerce uma carga distribuída uniforme de 1,20 kip/pé sobre a viga. Supondo que a tensão de flexão admissível seja $\sigma_{adm} = 22$ ksi, determinar, com aproximação de $\frac{1}{4}$ pol, a largura b que a aba precisa ter.



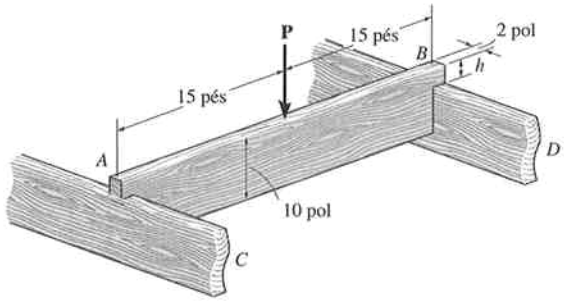
Problema 11.25

11.26. A parede de tijolos exerce uma carga distribuída uniforme de 1,20 kip/pé sobre a viga. Supondo que a tensão de flexão admissível seja σ_{adm} = 22 ksi e a tensão de cisalhamento admissível seja τ_{adm} = 12 ksi, selecionar, do Apêndice B, o perfil em duplo T mais leve e com menor altura que suporte com segurança a carga.



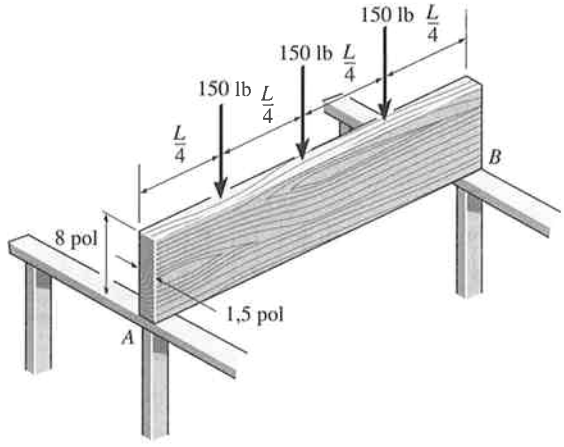
Problema 11.26

11.27. A viga simplesmente apoiada é usada na construção do assoalho de um prédio. A fim de manter o assoalho baixo em relação às vigas de apoio C e D, as extremidades das vigas têm um entalhe como mostrado. Supondo que a tensão de cisalhamento admissível para a madeira seja τ_{adm} = 350 psi e a tensão de flexão admissível seja σ_{adm} = 1.500 psi, determinar a altura h que fará a viga atingir ambas as tensões admissíveis ao mesmo tempo. Além disso, qual carga P provoca essa condição? Desprezar a concentração de tensões no entalhe.



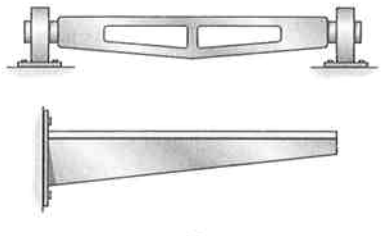
Problema 11.27

***11.28.** A viga AB usada na construção de residências deve ser feita de tábuas de pinho de 8 pol por 1,5 pol. Supondo que a carga de projeto sobre cada tábua seja colocada como mostrado, determinar a maior largura do cômodo L que as tábuas podem abarcar. A tensão de flexão admissível para a madeira é σ_{adm} = 2 ksi e a tensão de cisalhamento admissível é τ_{adm} = 180 psi. Supor que a viga seja simplesmente apoiada pelas paredes em A e B.



Problema 11.28

*11.3 VIGAS TOTALMENTE SOLICITADAS



(a)

Figura 11.8

Na seção anterior desenvolvemos um método para determinar as dimensões da seção transversal de uma *viga prismática*, de modo que ela resista ao momento máximo, $M_{máx}$, em seu vão. Como o momento na viga *varia* ao longo do seu comprimento, a escolha de uma viga prismática em geral é ineficiente, uma vez que ela nunca é totalmente solicitada nos pontos ao longo do seu comprimento nos quais $M < M_{máx}$. Para aperfeiçoar o projeto a fim de reduzir o peso da viga, os engenheiros às vezes escolhem uma viga com área da seção transversal *variável*, de modo que em cada seção transversal ao longo dessa viga a tensão de flexão atinja seu valor admissível máximo. As vigas com área da seção transversal variável são denominadas *vigas não-prismáticas*. Elas são usadas com freqüência em máquinas, pois podem ser fundidas rapidamente. Na Figura 11.8*a* encontramos exemplos disso. Em estruturas, tais vigas são 'aumentadas' em suas extremidades como mostra a Figura 11.8*b*. As vigas também são 'compostas' ou

fabricadas em uma oficina a partir de chapas. Um exemplo é a viga-mestra feita de uma viga prismática laminada coberta com chapas, soldadas a ela na região em que o momento chega ao máximo (Figura 11.8*c*).

A análise da tensão de uma viga não-prismática geralmente é muito difícil de executar e está além do escopo deste livro. Tais formatos são analisados com mais freqüência por meio de métodos experimentais ou da teoria da elasticidade. Os resultados obtidos nesse tipo de análise, no entanto, indicam que as hipóteses usadas na dedução da fórmula da flexão são aproximadamente corretas para prever os esforços de flexão nas seções não-prismáticas, desde que a conicidade ou o declive do limite superior ou inferior da viga não sejam muito severos. Por outro lado, a fórmula do cisalhamento não pode ser usada no projeto de vigas não-prismáticas, uma vez que os resultados obtidos levam a conclusões erradas.

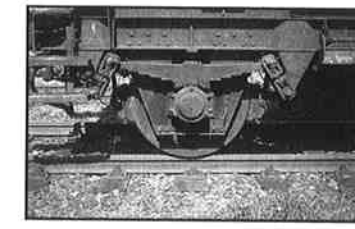
Viga de concreto com extremidades aumentadas
(b)

Viga-mestra de aço coberta com chapas
(c)

Figura 11.8

Apesar de aconselharmos precaução ao aplicar a fórmula da flexão no projeto de vigas não-prismáticas, mostraremos de que maneira essa fórmula é usada como valor aproximado para obter o formato geral da viga. As *dimensões* da seção transversal de uma viga não-prismática que suporta dada carga são determinadas usando-se a fórmula da flexão escrita como:

$$S = \frac{M}{\sigma_{adm}}$$

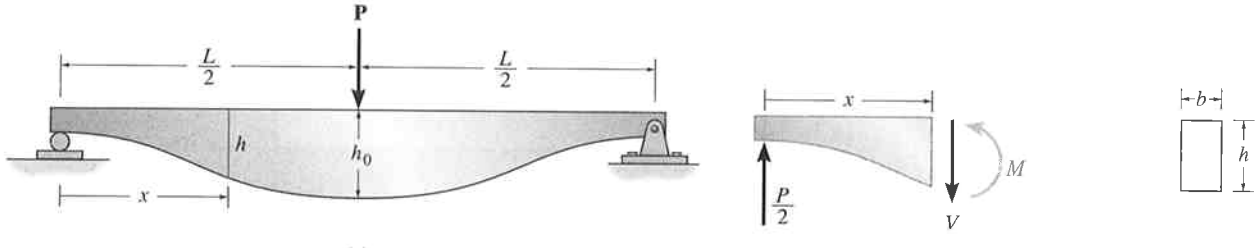


O feixe de molas que suporta este vagão representa uma viga não-prismática.

Se expressarmos o momento interno M em termos de sua posição x ao longo da viga, então, como σ_{adm} é uma constante conhecida, o módulo de resistência S ou as dimensões da viga vão se tornar uma função de x. A viga projetada dessa maneira será denominada ***viga totalmente solicitada***. Apesar de terem sido considerados *apenas* os esforços de flexão na aproximação de sua forma final, também se deve assegurar que a viga resista a cisalhamento, especialmente nos pontos em que são aplicadas cargas concentradas. Como resultado, o formato ideal da viga não será determinado inteiramente só pela fórmula da flexão.

EXEMPLO 11.4

Determinar a forma de uma viga totalmente solicitada e simplesmente apoiada que suporta uma carga concentrada em seu ponto médio (Figura 11.9*a*). A viga tem tensão admissível σ_{adm} e seção transversal retangular de largura constante b.



(a) (b)

Figura 11.9

SOLUÇÃO

O momento interno na viga (Figura 11.9*b*), expresso em função da posição, $0 \leq x < L/2$, é:

$$M = \frac{P}{2}x$$

Portanto, o módulo de resistência requerido é:

$$S = \frac{M}{\sigma_{adm}} = \frac{P}{2\sigma_{adm}}\, x$$

Como $S = I/c$, para uma área da seção transversal h por b temos:

$$\frac{I}{c} = \frac{\frac{1}{12} bh^3}{h/2} = \frac{P}{2\sigma_{adm}} x$$

$$h^2 = \frac{3P}{\sigma_{adm} b} x$$

Se $h = h_0$ em $x = L/2$, então:

$$h_0{}^2 = \frac{3PL}{2\sigma_{adm} b}$$

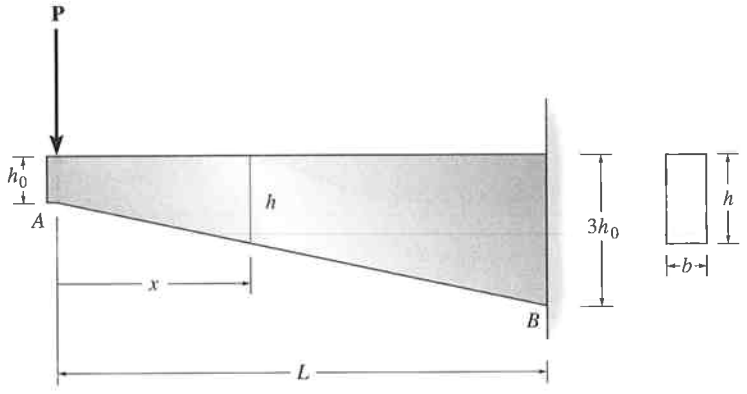
de modo que:

$$h^2 = \left(\frac{2h_0{}^2}{L}\right) x \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Por inspeção, verifica-se que a altura h deve variar de maneira *parabólica* de acordo com a distância x. Na prática, esse *formato* é a base do projeto dos feixes de molas usados para suportar os eixos traseiros da maioria dos caminhões pesados. Observe que, apesar de o resultado indicar que $h = 0$ em $x = 0$, é necessário que a viga resista a uma tensão de cisalhamento nos apoios e, assim, falando em termos práticos, requer-se $h > 0$ nos apoios (Figura 11.9*a*).

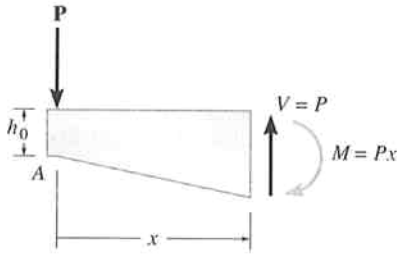
EXEMPLO 11.5

A viga em balanço mostrada na Figura 11.10*a* tem formato trapezoidal de altura h_0 em A e $3h_0$ em B. Se ela suporta uma carga **P** em sua extremidade, determinar a tensão normal máxima absoluta nela desenvolvida. Sua seção transversal retangular tem largura constante b.



(a)

Figura 11.10



(b)

Figura 11.10

SOLUÇÃO

Em qualquer seção transversal, a tensão normal máxima ocorre nas superfícies superior e inferior da viga. Entretanto, como $\sigma_{máx} = M/S$ e o módulo de resistência S aumenta à medida que x aumenta, a tensão normal máxima absoluta *não* ocorre necessariamente na parede B, onde o momento fletor é máximo. Usando a fórmula da flexão, podemos expressar a tensão normal máxima em uma seção arbitrária em termos de sua posição x (Figura 11.10*b*). Aqui o momento fletor interno tem grandeza $M = Px$. Como o declive da parte inferior da viga é $2h_0/L$ (Figura 11.10*a*), a altura da viga na posição x é:

$$h = \frac{2h_0}{L}x + h_0 = \frac{h_0}{L}(2x + L)$$

Aplicando a fórmula da flexão, temos:

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{Px(h/2)}{(\frac{1}{12}bh^3)} = \frac{6PL^2x}{bh_0^2(2x + L)^2} \tag{1}$$

Para determinar a posição x onde a tensão normal máxima absoluta ocorre, devemos calcular a derivada de σ em relação a x e igualá-la a zero. Isso produz:

$$\frac{d\sigma}{dx} = \left(\frac{6PL^2}{bh_0^2}\right)\frac{1(2x + L)^2 - x(2)(2x + L)(2)}{(2x + L)^4} = 0$$

Assim:

$$4x^2 + 4xL + L^2 - 8x^2 - 4xL = 0$$
$$L^2 - 4x^2 = 0$$
$$x = \frac{1}{2}L$$

Substituindo na Equação 1 e simplificando, temos que a tensão normal máxima absoluta é:

$$\sigma_{\substack{máx \\ abs}} = \frac{3}{4}\frac{PL}{bh_0^2} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Observe que na parede, B, a tensão normal máxima é:

$$(\sigma_{máx})_B = \frac{Mc}{I} = \frac{PL(1{,}5h_0)}{[\frac{1}{12}b(3h_0)^3]} = \frac{2}{3}\frac{PL}{bh_0^2}$$

a qual é 11,1% menor que $\sigma_{\substack{máx \\ abs}}$.

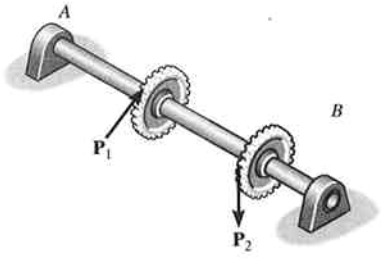
É necessário lembrar que a fórmula da flexão foi deduzida supondo-se que a viga fosse *prismática*. Como esse não é o caso aqui, espera-se algum erro nesta análise e na do Exemplo 11.4. Uma análise matemática mais exata, pela teoria da elasticidade, revela que a aplicação da fórmula da flexão, como no exemplo anterior, produz apenas pequenos erros quanto à tensão normal

quando o ângulo de inclinação da viga é pequeno. Por exemplo: se o ângulo for de 15°, a tensão calculada da forma como foi apresentada será cerca de 5% maior que a obtida pela análise mais exata. Vale a pena lembrar também que o cálculo de $(\sigma_{máx})_B$ foi feito apenas para fins ilustrativos, uma vez que, pelo princípio de Saint-Venant, a distribuição de tensão real no apoio (parede) é altamente irregular.

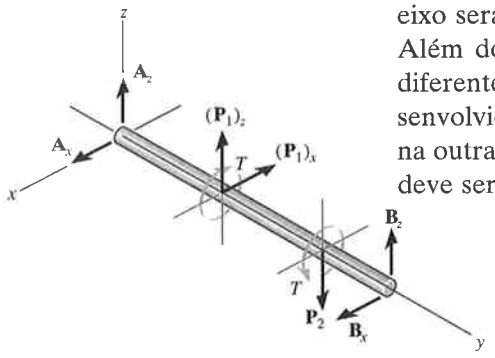
*11.4 PROJETO DE EIXOS

Eixos com seções transversais circulares são freqüentemente usados em muitos tipos de equipamento mecânico e maquinaria. Como resultado, sofrem uma tensão cíclica ou de fadiga, provocada por cargas combinadas de flexão e de torção que devem transmitir ou suportar. Além dessas cargas, podem existir concentrações de tensão no eixo devido a chavetas, acoplamentos e transições bruscas na área de sua seção transversal (Seção 5.8). Logo, a fim de projetar o eixo adequadamente, é necessário levar em consideração todos esses efeitos.

Discutiremos nesta seção alguns aspectos importantes do projeto de eixos uniformes usados para transmitir potência. Tais eixos são submetidos com freqüência a cargas aplicadas por polias e engrenagens acopladas, tais como a mostrada na Figura 11.11*a*. Como as cargas podem ser aplicadas ao eixo em vários ângulos, os momentos internos fletor e de torção em qualquer seção transversal são determinados substituindo-se antes as cargas por suas contrapartidas estaticamente equivalentes e, depois, desdobrando-se essas mesmas cargas em componentes nos dois planos perpendiculares (Figura 11.11*b*). Os diagramas de momento fletor das cargas *em cada plano* podem então ser desenhados, e o momento da resultante interna em qualquer seção ao longo do eixo será determinado por adição vetorial, $M = \sqrt{M_x^2 + M_z^2}$ (Figura 11.11*c*). Além do momento, os segmentos do eixo também sofrem torques internos diferentes (Figura 11.11*b*). Vemos aqui que, para o equilíbrio, o torque desenvolvido em uma engrenagem deve contrabalançar o torque desenvolvido na outra. Para considerar a variação geral do torque ao longo do eixo, também deve ser desenhado um ***diagrama de torque*** (Figura 11.11*d*).



(a)



(b)

Diagrama de momento provocado pelas cargas no plano y–z

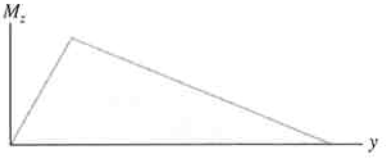


Diagrama de momento provocado pelas cargas no plano x–y

(c)

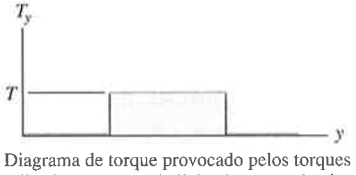
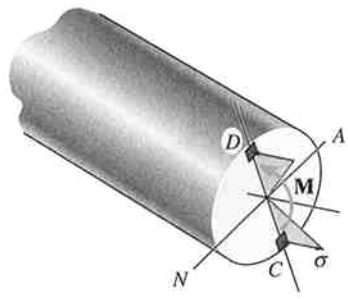


Diagrama de torque provocado pelos torques aplicados em torno da linha de centro do eixo

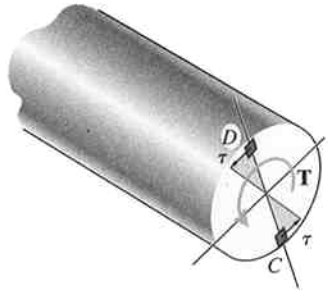
(d)

Figura 11.11

Uma vez estabelecidos os diagramas de momento fletor e torque, podemos então investigar certas seções críticas ao longo do eixo em que a *combinação* de um momento resultante **M** e um torque **T** cria a pior situação de tensão. Com respeito a essa situação, verifica-se que o momento de inércia do eixo é o *mesmo* em torno de *qualquer* eixo diametral e, como tal eixo diametral representa um *eixo principal de inércia* para a seção transversal, podemos aplicar a fórmula da flexão usando o *momento resultante* para obter a tensão de flexão máxima. Como mostra a Figura 11.11*e*, essa tensão ocorrerá em dois elementos, *C* e *D*, cada qual localizado em um limite externo do eixo. Se um torque **T** também for resistido na seção, a tensão de cisalhamento máxima também se desenvolverá nesses elementos (Figura 11.11*f*). Além do mais, as forças externas também criam tensão de cisalhamento no eixo, determinada por $\tau = VQ/It$; entretanto, essa tensão geralmente contribui com uma distribuição de tensão na seção transversal muito menor em comparação com a desenvolvida por flexão e torção. Em alguns casos ela deve ser investigada, mas, para simplificar, vamos desprezar seu efeito na análise que se segue. Em geral, então, o elemento crítico *D* (ou *C*) no eixo está sujeito ao *estado plano de tensões* como mostra a Figura 11.11*g*, onde:



(e)



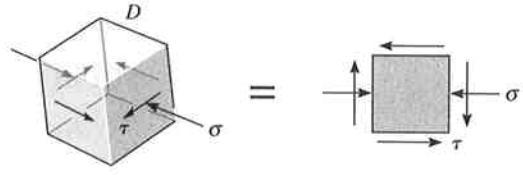
(f)

$$\sigma = \frac{Mc}{I} \qquad \text{e} \qquad \tau = \frac{Tc}{J}$$

Se a tensão normal ou de cisalhamento admissíveis para o material são conhecidas, determina-se o tamanho do eixo, então com base nessas equações e na escolha de uma teoria da falha apropriada. Por exemplo: se sabemos que o material é dúctil, a teoria da tensão de cisalhamento máxima pode ser apropriada. Como mencionamos na Seção 10.7, essa teoria requer que a tensão de cisalhamento admissível — determinada pelos resultados de um teste de tração simples — seja igual à tensão de cisalhamento máxima no elemento. Aplicando a equação de transformação de tensão (Equação 9.7), ao estado de tensão da Figura 11.11*g*, temos:

$$\tau_{\text{adm}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{Mc}{2I}\right)^2 + \left(\frac{Tc}{J}\right)^2}$$



(g)

Figura 11.11

Como $I = \pi c^4/4$ e $J = \pi c^4/2$, essa equação torna-se:

$$\tau_{\text{adm}} = \frac{2}{\pi c^3}\sqrt{M^2 + T^2}$$

Solucionando para o raio do eixo, temos:

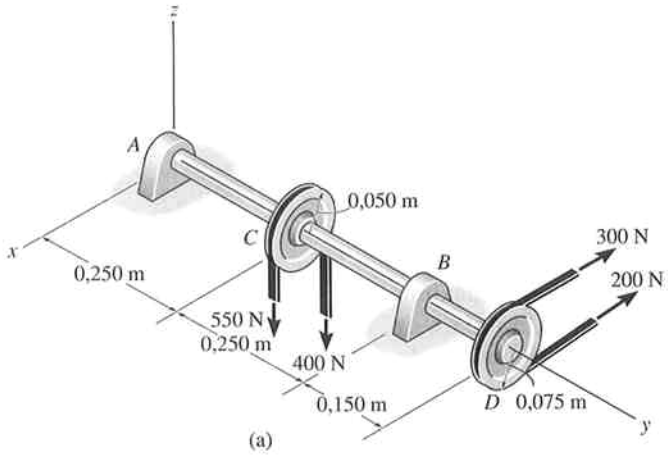
$$c = \left(\frac{2}{\pi \tau_{\text{adm}}}\sqrt{M^2 + T^2}\right)^{1/3} \qquad (11.2)$$

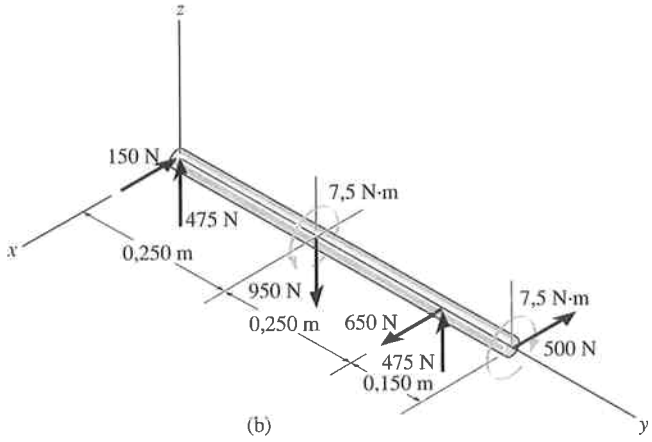
A aplicação de qualquer outra teoria da falha leva a uma fórmula diferente para *c*. Entretanto, em todos os casos é necessário aplicar essa fórmula em várias 'seções críticas' ao longo do eixo, a fim de determinar a combinação particular de *M* e *T* que produz o maior valor de *c*.

O exemplo seguinte ilustra o procedimento numericamente.

EXEMPLO 11.6

O eixo da Figura 11.12*a* é apoiado por mancais de deslizamento em *A* e *B*. Devido à transmissão de potência para e a partir dele, as correias nas polias estão sujeitas às tensões mostradas. Determinar o menor diâmetro do eixo usando a teoria da tensão de cisalhamento máxima, com $\tau_{\text{adm}} = 50$ MPa.

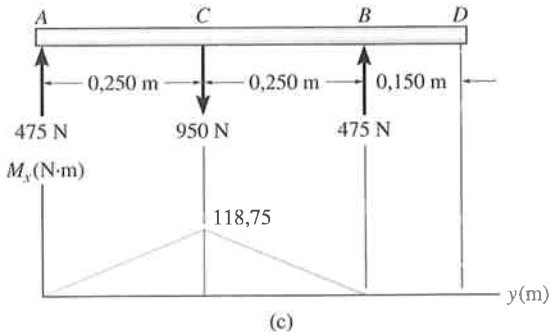




SOLUÇÃO

As reações dos apoios foram calculadas e estão mostradas no diagrama de corpo livre do eixo (Figura 11.12*b*). Os diagramas de momento fletor M_x e M_z são mostrados nas Figuras 11.12*c* e 11.12*d*, respectivamente. O diagrama de torque é mostrado na Figura 11.12*e*. Por inspeção, concluímos que os pontos críticos do momento fletor ocorrem tanto em C como em B. Além disso, à direita de C *e* em B o momento de torção é 7,5 N · m. Em C o momento resultante é:

$$M_C = \sqrt{(118{,}75\ \text{N} \cdot \text{m})^2 + (37{,}5\ \text{N} \cdot \text{m})^2} = 124{,}5\ \text{N} \cdot \text{m}$$



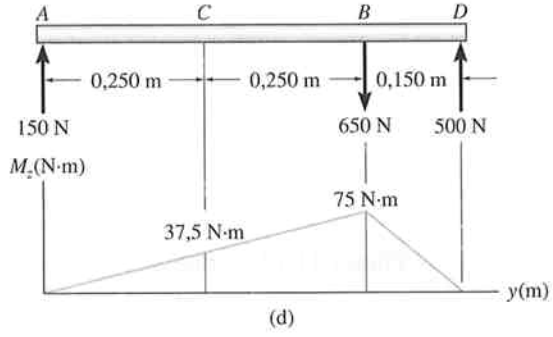


Figura 11.12

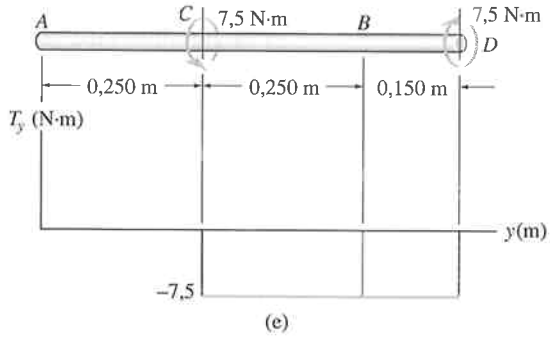


Figura 11.12

enquanto em B é menor:

$$M_B = 75 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Como o projeto baseia-se na teoria da tensão de cisalhamento máxima, aplica-se a Equação 11.2. O radical $\sqrt{M^2 + T^2}$ será maior na seção à direita de C. Temos:

$$c = \left(\frac{2}{\pi \tau_{\text{adm}}}\sqrt{M^2 + T^2}\right)^{1/3}$$

$$= \left(\frac{2}{\pi(50)(10^6)\ \text{N/m}^2}\sqrt{(124{,}5\ \text{N} \cdot \text{m})^2 + (7{,}5\ \text{N} \cdot \text{m})^2}\right)^{1/3}$$

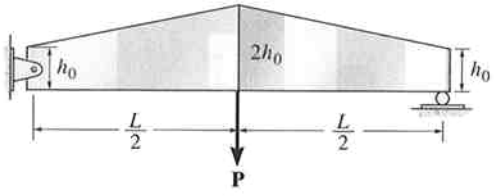
$$= 0{,}0117 \text{ m}$$

Assim, o menor diâmetro admissível é:

$$d = 2(0{,}0117 \text{ m}) = 23{,}3 \text{ mm} \qquad \textit{Resposta}$$

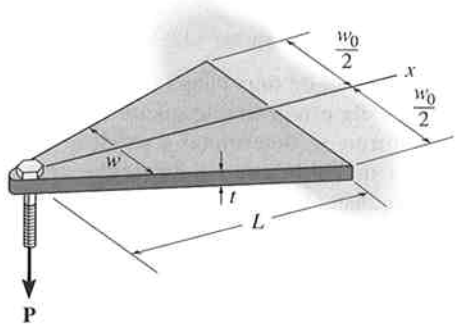
PROBLEMAS

11.29. A viga de formato irregular suporta uma força concentrada **P** em seu centro. Supondo que seja feita de uma chapa de largura constante b, determinar a tensão de flexão máxima absoluta nela desenvolvida.



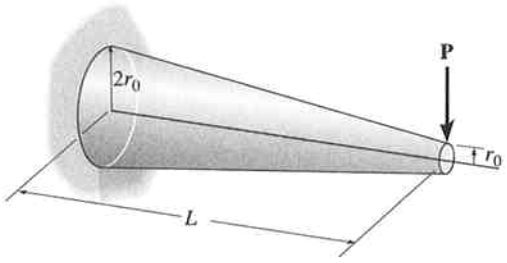
Problema 11.29

11.30. Determinar a variação na largura w, em função de x, da viga em balanço que suporta uma força concentrada **P** em sua extremidade, de modo que ela mantenha uma tensão de flexão máxima σ_{adm} ao longo de seu comprimento. A viga tem espessura constante t.



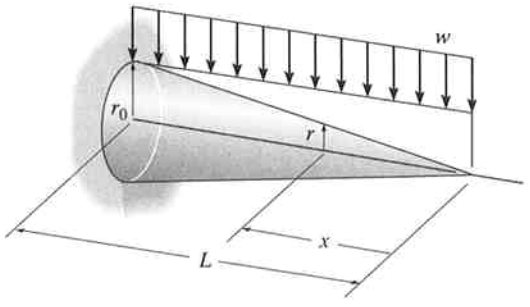
Problema 11.30

11.31. A viga cônica em balanço suporta a força concentrada **P** em sua extremidade. Determinar a tensão de flexão máxima absoluta nela desenvolvida.



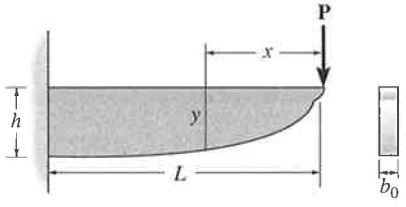
Problema 11.31

***11.32.** Determinar a variação do raio r da viga em balanço que suporta uma carga distribuída uniformemente, de modo que ela tenha uma tensão de flexão máxima constante $\sigma_{máx}$ ao longo de seu comprimento.



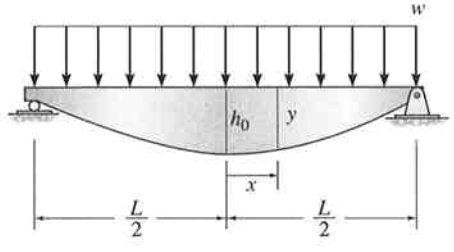
Problema 11.32

11.33. Determinar a variação na altura de uma viga em balanço que suporta uma força concentrada **P** em sua extremidade, de modo que ela tenha uma tensão de flexão máxima constante σ_{adm} ao longo de seu comprimento. A viga tem largura constante b_0.



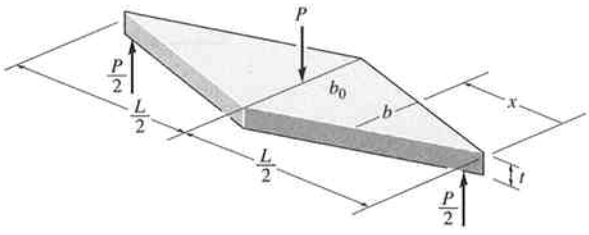
Problema 11.33

11.34. A viga é feita de uma chapa de espessura constante b. Supondo que ela esteja simplesmente apoiada e suporte uma carga uniforme w, determinar a variação de sua altura em função de x de modo que ela mantenha uma tensão de flexão máxima constante σ_{adm} ao longo de seu comprimento.



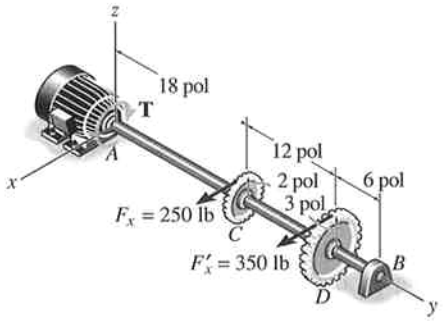
Problema 11.34

11.35. A viga é feita de uma chapa de espessura constante t e largura que varia como mostrado. Supondo que suporte uma força concentrada **P** em seu centro, determinar a tensão de flexão máxima absoluta nela desenvolvida e especificar a localização x dessa tensão, $0 < x < L/2$.



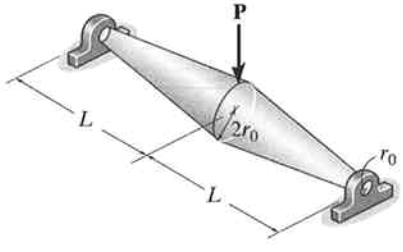
Problema 11.35

***11.36.** O motor em A gira o eixo com razão constante e, assim, o torque **T** que ele desenvolve cria reações horizontais nas engrenagens em C e D de 250 lb e 350 lb, respectivamente. O eixo é apoiado por um mancal no motor em A e um mancal de rolamento em B, que exercem componentes de força sobre ele apenas nas direções x e z. Supondo que a tensão de cisalhamento admissível para o eixo seja $\tau_{adm} = 10$ ksi, determinar, com aproximação de $\frac{1}{8}$ pol, o menor diâmetro que ele pode ter a fim de suportar a carga. Usar a teoria da falha relativa à tensão de cisalhamento máxima.



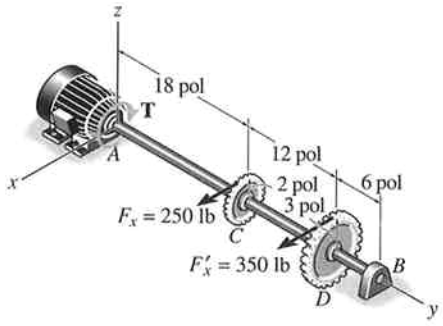
Problema 11.36

11.37. A viga cônica simplesmente apoiada suporta a força concentrada **P** em seu ponto médio. Determinar a tensão de flexão máxima absoluta nela desenvolvida.



Problema 11.37

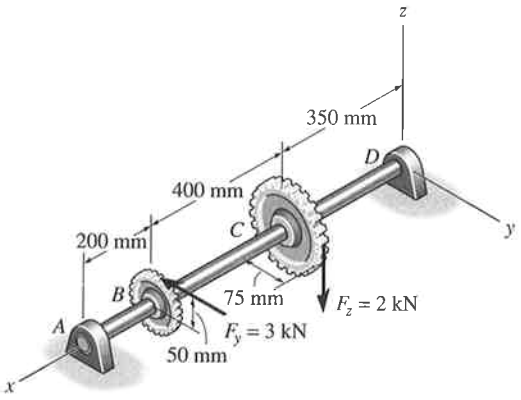
11.38. Resolver o Problema 11.36 usando a teoria da falha relativa à energia de distorção máxima, com $\sigma_{adm} = 20$ ksi.



Problema 11.38

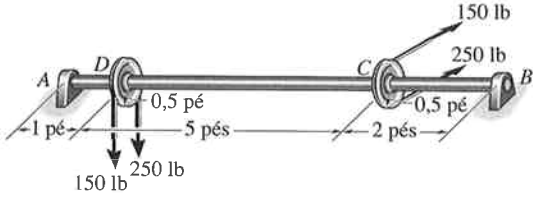
11.39. Os mancais em A e D exercem apenas os componentes de força y e z sobre o eixo. Se $\tau_{adm} = 60$ MPa, determinar, com aproximação de um milímetro, o menor diâmetro do eixo que suportará o carregamento mostrado. Usar a teoria da falha relativa à tensão de cisalhamento máxima.

***11.40.** Resolver o Problema 11.39 usando a teoria da energia de distorção máxima. $\sigma_{adm} = 130$ MPa.



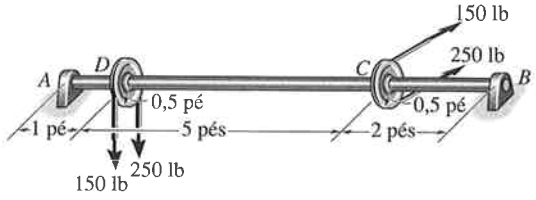
Problemas 11.39/11.40

11.41. As polias acopladas ao eixo estão carregadas como mostrado. Supondo que os mancais em A e B exerçam apenas forças horizontais e verticais sobre o eixo, determinar qual diâmetro ele deve ter, com aproximação de $\frac{1}{8}$ pol, usando a teoria da falha relativa à tensão de cisalhamento máxima. $\tau_{adm} = 12$ ksi.



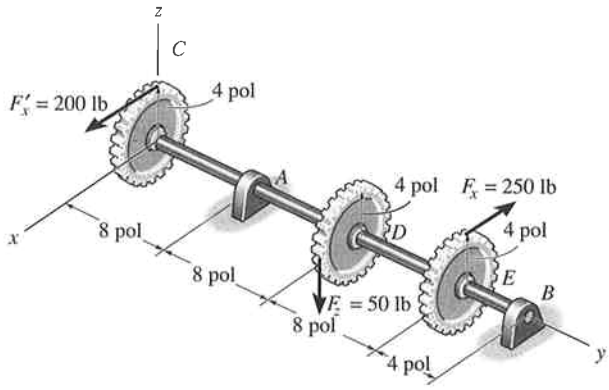
Problema 11.41

11.42. As polias acopladas ao eixo estão carregadas como mostrado. Supondo que os mancais em A e B exerçam apenas forças horizontais e verticais sobre o eixo, determinar qual diâmetro ele deve ter, com aproximação de $\frac{1}{8}$ pol, usando a teoria da falha relativa à energia de distorção máxima. $\sigma_{adm} = 20$ ksi.



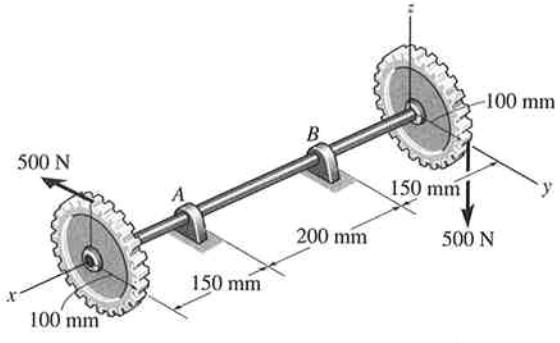
Problema 11.42

11.43. O eixo é apoiado por mancais em A e B, os quais exercem componentes de força sobre ele apenas nas direções x e z. Supondo que a tensão normal admissível para o eixo seja $\sigma_{adm} = 15$ ksi, determinar, com aproximação de $\frac{1}{8}$ pol, o menor diâmetro que ele pode ter a fim de suportar a carga das engrenagens. Usar a teoria da falha relativa à energia de distorção máxima.



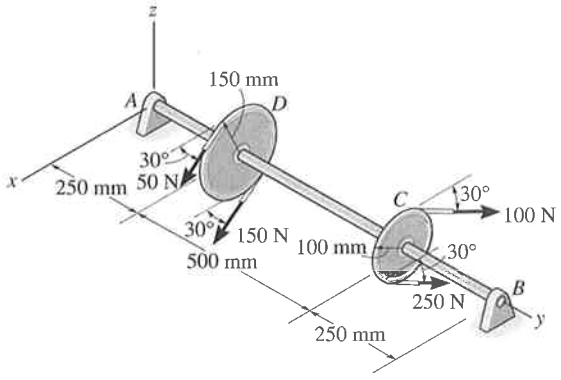
Problema 11.43

***11.44.** Determinar, com aproximação de um milímetro, o diâmetro do eixo maciço se ele estiver sujeito à carga das engrenagens. Os mancais em A e B exercem sobre ele apenas os componentes de força nas direções y e z. Basear o projeto na teoria da falha relativa à energia de distorção máxima, com $\sigma_{adm} = 150$ MPa.



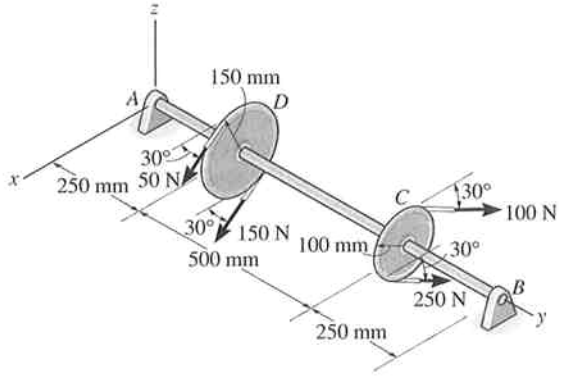
Problema 11.44

11.45. O eixo apóia-se em mancais de deslizamento que não oferecem resistência a carga axial. Supondo que a tensão normal admissível para o eixo seja $\sigma_{adm} = 80$ MPa, determinar, com aproximação de um milímetro, o menor diâmetro que ele pode ter a fim de suportar a carga. Usar a teoria da falha relativa à energia de distorção máxima.



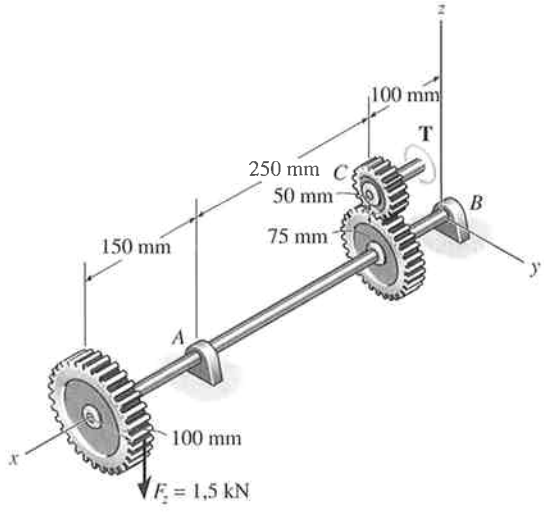
Problema 11.45

11.46. O eixo apóia-se em mancais de deslizamento que não oferecem resistência a carga axial. Supondo que a tensão de cisalhamento admissível para o eixo seja $\tau_{adm} = 35$ MPa, determinar, com aproximação de um milímetro, o menor diâmetro que ele pode ter a fim de suportar a carga. Usar a teoria da falha relativa à tensão de cisalhamento máxima.



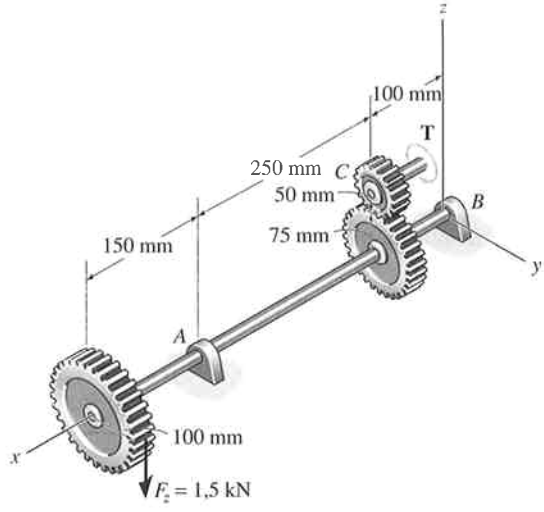
Problema 11.46

11.47. A engrenagem acoplada à extremidade do eixo está submetida ao carregamento mostrado. Supondo que os mancais em A e B exerçam apenas os componentes de força y e z sobre o eixo, determinar o torque de equilíbrio T na engrenagem C e, depois, o menor diâmetro do eixo, com aproximação de um milímetro, que suportará a carga. Usar a teoria da falha relativa à tensão de cisalhamento máxima, com $\tau_{adm} = 60$ MPa.



Problema 11.47

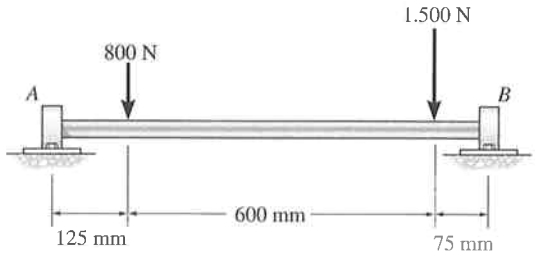
***11.48.** Resolver o Problema 11.47 usando a teoria da falha relativa à energia de distorção máxima, com $\sigma_{adm} = 80$ MPa.



Problema 11.48

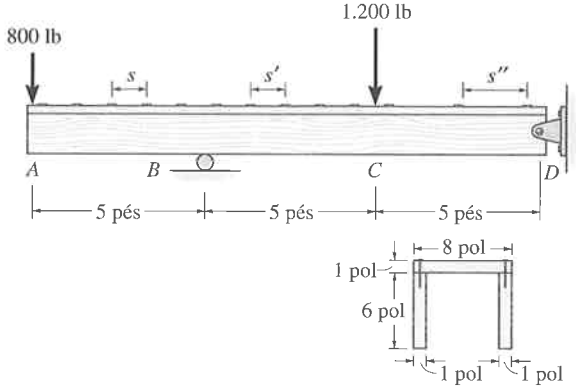
PROBLEMAS DE REVISÃO

11.49. Desenhar os diagramas de força cortante e momento fletor para o eixo e depois determinar o diâmetro que ele precisa ter, com aproximação de um milímetro, se $\sigma_{adm} = 140$ MPa e $\tau_{adm} = 80$ MPa. Os mancais em A e B exercem apenas reações verticais sobre o eixo.



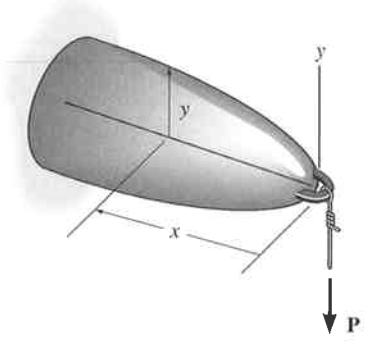
Problema 11.49

11.50. A viga compõe-se de três tábuas como mostrado. Supondo que cada prego suporte uma força cortante de 50 lb, determinar o espaçamento máximo s, s' e s'' entre eles, com aproximação de $\frac{1}{8}$ pol, para as regiões AB, BC e CD, respectivamente.



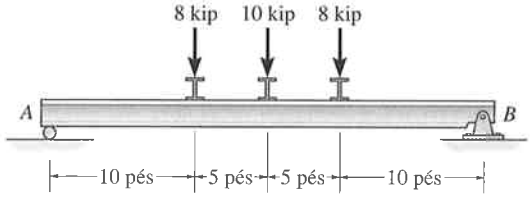
Problema 11.50

11.51. A viga em balanço tem seção transversal circular. Supondo que ela suporte uma força **P** em sua extremidade, determinar seu raio y em função de x, de modo que esteja sujeita a uma tensão de flexão máxima constante σ_{adm} ao longo de seu comprimento.



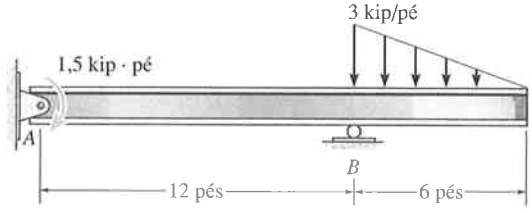
Problema 11.51

*11.52. Selecionar, no Apêndice B, a mais leve viga de abas largas de aço capaz de suportar com segurança o carregamento mostrado. A tensão de flexão admissível é $\sigma_{adm} = 22$ ksi, e a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 12$ ksi.



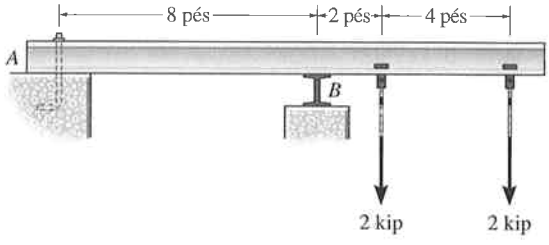
Problema 11.52

11.53. Desenhar os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga. Selecionar depois, no apêndice B, a mais leve viga de abas largas de aço capaz de suportar com segurança a carga indicada. Adotar $\sigma_{adm} = 22$ ksi e $\tau_{adm} = 12$ ksi.



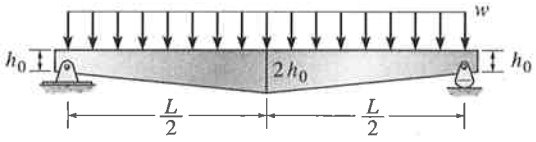
Problema 11.53

11.54. Selecionar, no Apêndice B, a mais leve viga de abas largas de aço com extremidade em balanço capaz de suportar com segurança a carga. Supor que o apoio em A seja um pino e o apoio em B, um rolete. A tensão de flexão admissível é $\sigma_{adm} = 24$ ksi, e a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 14$ ksi.



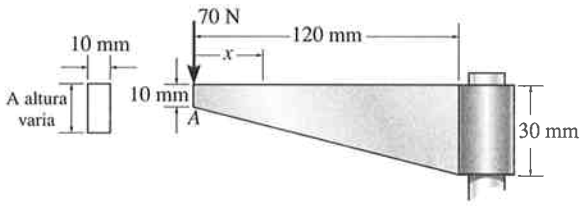
Problema 11.54

11.55. A viga de seção irregular suporta uma carga distribuída uniforme w. Supondo que seja feita de uma chapa de largura constante b, determinar a tensão de flexão máxima absoluta nela desenvolvida.



Problema 11.55

***11.56.** O suporte de 10 mm de largura resiste a uma força de 70 N em sua extremidade A. Determinar a tensão de flexão máxima absoluta nele desenvolvida e especificar a localização x dessa tensão.



Problema 11.56

12 Deflexão de Vigas e Eixos

Objetivos do Capítulo

Freqüentemente é preciso estabelecer limites para o valor da deflexão que uma viga ou um eixo podem suportar quando submetidos a cargas; por conta disso, neste capítulo discutiremos diversos métodos para determinar a deflexão e a inclinação em pontos específicos de vigas e eixos. Os métodos analíticos incluem o método da integração direta, o uso de funções de descontinuidade e o método da superposição. Além deles, será apresentada uma técnica semigráfica denominada método dos momento de área. No fim do capítulo, usaremos todos esses métodos para determinar as reações dos apoios em vigas ou eixos estaticamente indeterminados.

O carregamento das prateleiras provoca deflexão considerável nas vigas de suporte, que pode ser calculada usando os métodos mostrados neste capítulo.

12.1 A Linha Elástica

Antes de determinar a inclinação ou o deslocamento de um ponto da viga (ou do eixo), é conveniente esquematizar a forma defletida da viga sob carga, a fim de 'visualizar' todos os resultados calculados e, assim, verificá-los parcialmente. O diagrama de deflexão do eixo longitudinal que passa pelo centróide de cada área da seção transversal da viga é denominado *linha elástica*. A linha elástica da maioria das vigas é esquematizada sem muita dificuldade. Ao fazer o diagrama, entretanto, é necessário saber como os vários tipos de apoio limitam a inclinação ou o deslocamento. Em geral, os apoios que resistem a *forças*, como um pino, limitam o *deslocamento* e os que resistem a *momento*, como uma parede, limitam a *rotação* ou a *inclinação*, bem como o deslocamento. Com essas idéias em mente, vemos na Figura 12.1 dois exemplos típicos de linhas elásticas de vigas (ou eixos) com carga, traçadas em escala exagerada.

Se a linha elástica da viga for difícil de traçar, sugere-se desenhar antes seu diagrama de momento fletor. Segundo a convenção de sinal estabelecida na Seção 6.1, o momento fletor interno positivo tende a curvar a viga com a concavidade para cima (Figura 12.2*a*). O momento fletor negativo, ao contrário, tende a curvá-la com a concavidade para baixo (Figura 12.2*b*). Portanto, se o diagrama de momento fletor for *conhecido*, será mais fácil construir a linha elástica. Como exemplo, consideremos a viga da Figura 12.3*a* e seu diagrama de momento fletor, mostrado na Figura 12.3*b*. Devido aos apoios de rolete e de pino, o deslocamento em B e D deve ser nulo. Na região de momento negativo, AC (Figura 12.3*b*), a linha elástica deve ser côncava para baixo; na região de momento positivo, CD, ela deve ser côncava para cima. Portanto, deve haver um *ponto de inflexão* no ponto C, onde a curva muda a concavidade de cima para baixo, uma vez que se trata de um ponto em que o momento

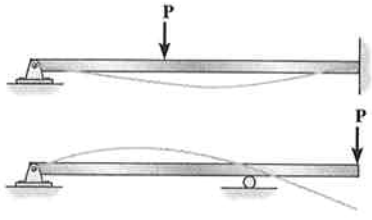


Figura 12.1

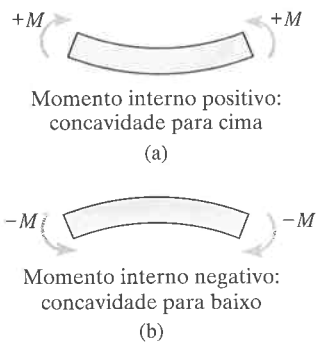


Figura 12.2

fletor é nulo. Com base nesses fatos, a linha elástica da viga é desenhada em escala exagerada na Figura 12.3*c*. Deve ser observado também, que os deslocamentos Δ_A e Δ_E são especialmente críticos. No ponto E a *inclinação* da curva elástica é *nula*, portanto a *deflexão* da viga deve ser *máxima*. O fato de Δ_E ser realmente maior que Δ_A ou não depende das intensidades relativas de $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ e da localização do rolete em B.

Seguindo esses mesmos princípios, observe como a linha elástica da Figura 12.4 foi construída. Nesse caso, a viga está em balanço, engastada no apoio fixo em A — logo, a linha elástica deve ter tanto o deslocamento como a inclinação nulos nesse ponto. Além disso, o maior deslocamento ocorrerá em D, onde a inclinação é nula, ou em C.

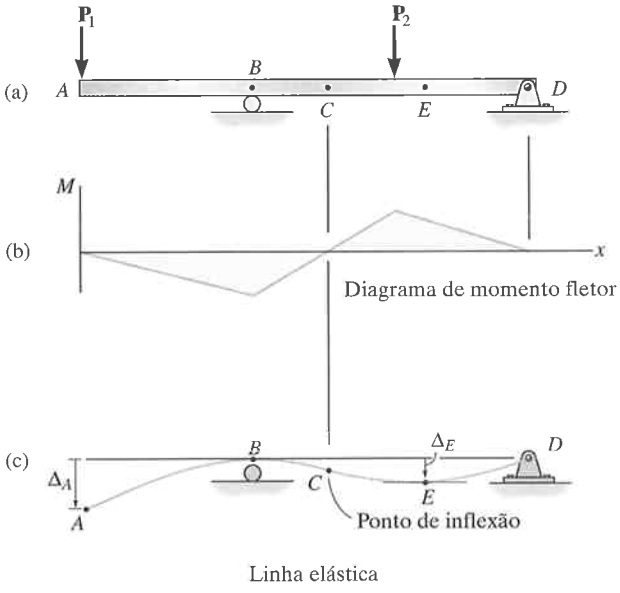


Figura 12.3

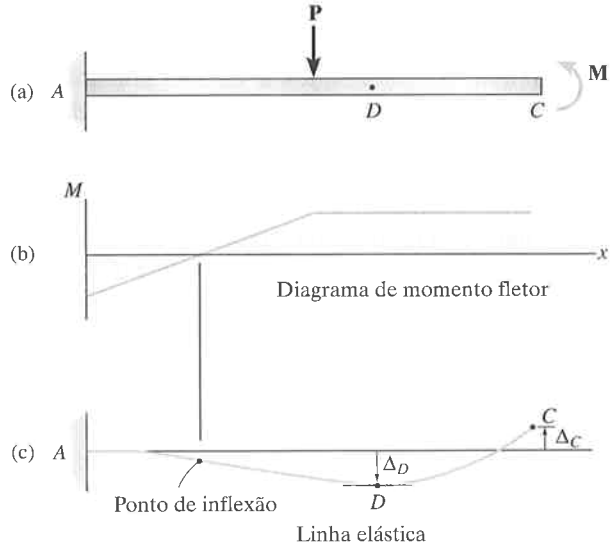


Figura 12.4

Relação Momento-Curvatura. Desenvolveremos agora uma relação importante entre o momento fletor interno da viga e o raio de curvatura ρ da linha elástica em determinado ponto. A equação resultante será usada em todo o capítulo como base de todos os métodos apresentados, cuja finalidade é determinar a inclinação e o deslocamento da linha elástica de uma viga (ou de um eixo).

A análise que se segue, nesta e na próxima seção, requer o uso de três coordenadas. Como mostra a Figura 12.5*a*, o eixo x é positivo para a direita, ao longo do eixo longitudinal da viga, inicialmente reto. Ele é usado para localizar o elemento infinitesimal que tem largura não deformada dx. O eixo v é *positivo para cima* a partir do eixo x. Ele mede o *deslocamento* do centróide da área da seção transversal do elemento. Com essas duas coordenadas, definiremos mais tarde a equação da linha elástica, v, em função de x. Finalmente, uma coordenada y 'localizada' é usada para especificar a posição de uma fibra no elemento da viga. Ela é *positiva para cima* a partir do eixo neutro, como mostra a Figura 12.5*b*. Lembre-se de que essa mesma convenção de sinal foi usada na dedução da fórmula da flexão.

Para deduzir a relação entre o momento fletor interno e ρ, limitaremos a análise a um caso bem comum: uma viga inicialmente reta deforma-se elasticamente pelas cargas aplicadas perpendicularmente ao seu eixo x, localizado no plano de simetria $x-v$ da área da seção transversal. Devido ao carregamento, a deformação da viga é provocada tanto pela força de cisalhamento interna como pelo momento fletor. Se a viga tiver comprimento muito maior que sua

altura, a maior deformação será provocada pela flexão e, portanto, concentraremos nossa atenção em seus efeitos. Deflexões provocadas por cisalhamento serão discutidas mais adiante neste capítulo.

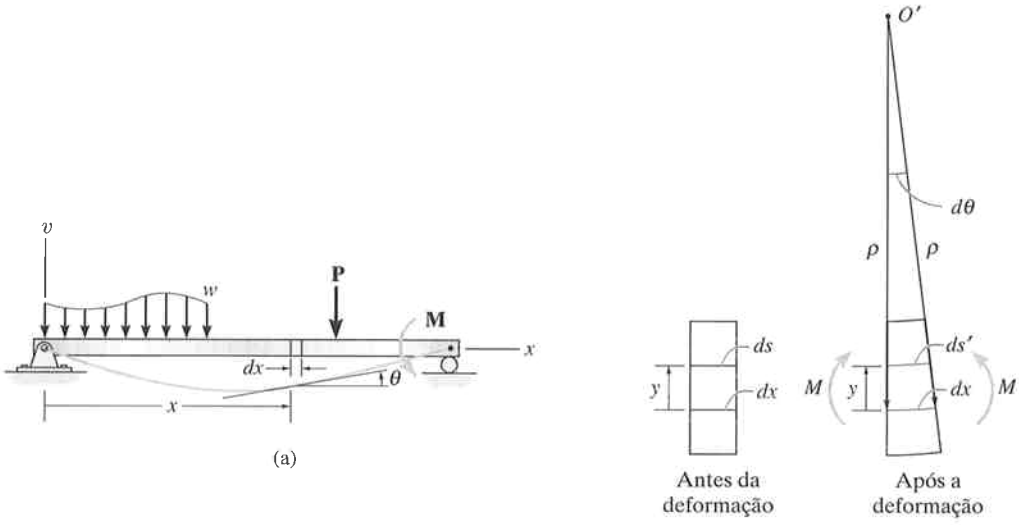


Figura 12.5

Quando o momento fletor interno M deforma o elemento da viga, o ângulo entre as seções transversais torna-se $d\theta$ (Figura 12.5*b*). O arco dx representa a parte da linha elástica que intercepta o eixo neutro em cada seção transversal. O *raio de curvatura* desse arco é definido como a distância ρ, medida do *centro de curvatura* O' para dx. Qualquer outro arco do elemento estará sujeito a uma deformação normal. Por exemplo, a deformação no arco ds, localizado a uma distância y do eixo neutro, é $\epsilon = (ds' - ds)/ds$. No entanto, $ds = dx = \rho\, d\theta$ e $ds' = (\rho - y)\, d\theta$ e, assim, $\epsilon = [(\rho - y)d\theta - \rho d\theta]/\rho d\theta$, ou:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\epsilon}{y} \tag{12.1}$$

Se o material é homogêneo e comporta-se de maneira linear-elástica, aplica-se a lei de Hooke ($\epsilon = \sigma/E$). Além disso, aplica-se a fórmula da flexão, $\sigma = -My/I$. Combinando essas duas equações e substituindo-as na equação anterior, temos:

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}} \tag{12.2}$$

onde:

- $\rho =$ raio de curvatura em um ponto específico da curva elástica ($1/\rho$ seria a própria *curvatura*)
- $M =$ momento fletor interno da viga no ponto em que ρ deve ser determinado
- $E =$ módulo de elasticidade do material
- $I =$ momento de inércia da viga calculado em torno do eixo neutro

O produto EI nessa equação, denominado *rigidez à flexão*, é sempre uma quantidade positiva. O sinal de ρ depende, portanto, da direção do momento fletor. Como mostra a Figura 12.6, quando M é *positivo*, ρ prolonga-se *para cima* da viga, isto é, na direção positiva de v; quando M é *negativo*, ρ prolonga-se *para baixo* da viga, ou na direção negativa de v.

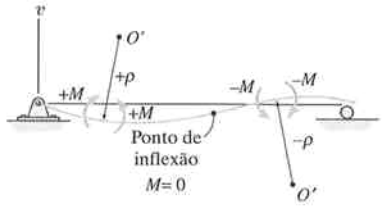


Figura 12.6

Usando a fórmula da flexão, $\sigma = -My/I$, podemos também expressar a curvatura em termos da tensão na viga, ou seja:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\sigma}{Ey} \tag{12.3}$$

Tanto a Equação 12.2 quanto a 12.3 são válidas para raios de curvatura pequenos ou grandes. Entretanto, o valor de ρ é quase sempre calculado como uma *quantidade muito grande*. Como exemplo, consideremos uma viga de aço A-36 feita com um perfil W14 × 53 (Apêndice B), para $E_{aço} = 29(10^3)$ ksi e $\sigma_E = 36$ ksi. Quando o material das fibras externas, $y = \pm 7$ pol, está próximo do *escoamento*, então, pela Equação 12.3, $\rho = \pm 5.639$ pol. Os valores de ρ calculados em outros pontos ao longo da linha elástica da viga podem ser ainda *maiores*, uma vez que σ não pode exceder σ_E nas fibras externas.

12.2 INCLINAÇÃO E DESLOCAMENTO PELO MÉTODO DA INTEGRAÇÃO DIRETA

A linha elástica de uma viga é expressa matematicamente como $v = f(x)$. Para obter essa equação, devemos primeiro representar a curvatura $(1/\rho)$ em termos de v e x. Segundo a maioria dos livros de cálculo, essa relação consiste em:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2v/dx^2}{[1 + (dv/dx)^2]^{3/2}}$$

Substituindo na Equação 12.2, obtemos:

$$\frac{d^2v/dx^2}{[1 + (dv/dx)^2]^{3/2}} = \frac{M}{EI} \tag{12.4}$$

O momento de inércia do apoio desta ponte varia ao longo de seu comprimento — tal condição deve ser levada em conta no cálculo de sua deflexão.

Essa equação representa uma equação infinitesimal não-linear de segunda ordem. Sua solução, denominada *elástica*, dá a forma exata da linha elástica, admitindo-se, naturalmente, que as deflexões da viga ocorram somente devido à flexão. Por meio da matemática superior, foram obtidas soluções da elástica apenas para casos simples de geometria e carregamento de vigas.

A fim de facilitar a solução de um número maior de problemas de deflexão, a Equação 12.4 pode ser modificada. A maioria das normas de projeto da engenharia especifica os *limites* de tolerância e estética das deflexões e, como resultado, as deflexões da elástica para a maioria das vigas e dos eixos formam uma curva rasa. Conseqüentemente, a inclinação da curva elástica determinada por dv/dx é *muito pequena* e seu quadrado desprezível em comparação com a unidade.[1] Portanto, a curvatura, como definida anteriormente, pode ser aproximada por $1/\rho = d^2v/dx^2$. De acordo com essa simplificação, a Equação 12.4 pode ser escrita como:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \tag{12.5}$$

Também é possível escrevê-la de duas formas alternativas. Se diferenciarmos cada lado da equação em relação a x e substituirmos $V = dM/dx$ (Equação 6.2), obteremos:

$$\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right) = V(x) \tag{12.6}$$

Diferenciando novamente e usando $-w = dV/dx$ (Equação 6.1), teremos:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right) = -w(x) \tag{12.7}$$

[1] Ver o Exemplo 12.1.

Na maioria dos problemas, a rigidez à flexão é constante ao longo do comprimento da viga. Nesse caso, os resultados anteriores podem ser reordenados no seguinte conjunto de equações:

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = -w(x) \tag{12.8}$$

$$EI\frac{d^3v}{dx^3} = V(x) \tag{12.9}$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M(x) \tag{12.10}$$

A solução de qualquer uma dessas equações requer integrações sucessivas para se obter a deflexão v da linha elástica. Em cada integração é preciso introduzir uma 'constante de integração' e depois resolver todas as constantes para obter a solução única de um problema em particular. Por exemplo: se a carga distribuída for expressa em função de x e usarmos a Equação 12.8, deveremos calcular quatro constantes de integração; entretanto, se o momento fletor interno M estiver determinado e usarmos a Equação 12.10, precisaremos determinar apenas duas constantes. A escolha da equação a ser utilizada depende do problema. Geralmente, no entanto, é mais fácil determinar o momento fletor interno M em função de x, integrar duas vezes e calcular apenas duas constantes de integração.

Lembrar da Seção 6.1 que, se o carregamento da viga for descontínuo, isto é, consistir de uma série de várias cargas distribuídas e concentradas, então devem ser escritas diversas funções do momento fletor interno, cada uma válida na região entre as descontinuidades. Além disso, para facilitar a 'composição' da expressão de cada momento, *a origem* de cada coordenada x pode ser *escolhida arbitrariamente*. Como exemplo, consideremos a viga mostrada na Figura 12.7*a*. O momento fletor interno nas regiões AB, BC e CD é escrito em termos das coordenadas escolhidas x_1, x_2 e x_3, como mostram tanto a Figura 12.7*b* quanto a 12.7*c*, ou de qualquer maneira que resulte em $M = f(x)$ da forma mais simples possível. Uma vez que as funções estejam integradas, com o uso da Equação 12.10, e as constantes de integração estejam determinadas, as funções darão a inclinação e a deflexão (linha elástica) de cada região da viga para a qual sejam válidas.

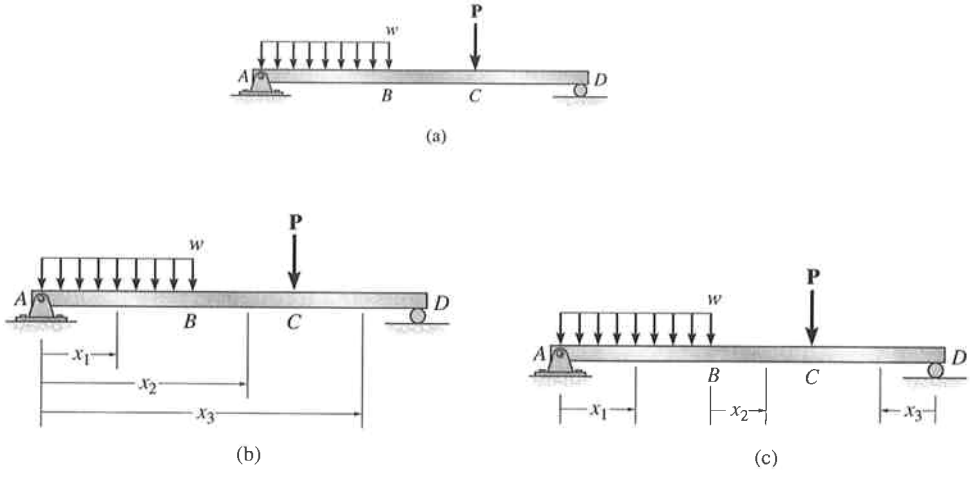
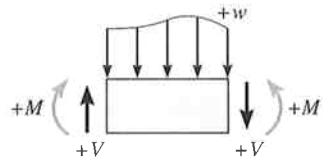
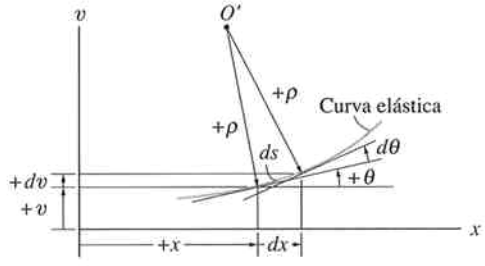


Figura 12.7



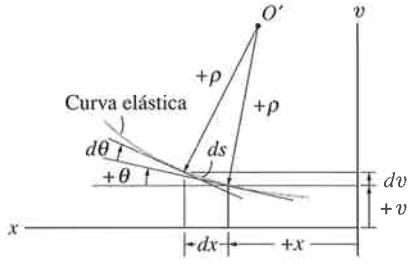
Convenção de sinal positivo

(a)



Convenção de sinal positivo

(b)



Convenção de sinal positivo

(c)

Figura 12.8

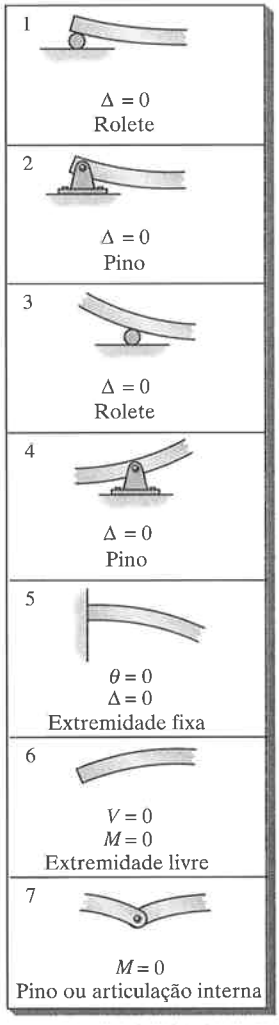


Tabela 12.1

Convenção de Sinal e Coordenadas. Ao aplicar as equações 12.8, 12.9 e 12.10, é importante usar os sinais adequados para M, V e w, como estabelecido pela convenção de sinal usada na dedução dessas equações. A título de recordação, a Figura 12.8*a* mostra os termos com suas *direções positivas*. Além disso, lembre-se de que a *deflexão positiva v* é *para cima* e, como conseqüência, a *inclinação positiva do ângulo* θ é medida no *sentido anti-horário* a partir do eixo x, que, por sua vez, é *positivo para a direita*. A razão de tal condição é mostrada na Figura 12.8*b*. Nesse caso, os aumentos positivos dx e dv em x e v dão origem ao aumento de θ no sentido anti-horário. Por outro lado, se x *positivo* for orientado para a *esquerda*, então θ será *positivo* no *sentido horário* (Figura 12.8*c*).

Saliente-se que, se a relação dv/dx for muito pequena, o comprimento horizontal original do eixo da viga e o arco de sua linha elástica serão aproximadamente iguais. Em outras palavras, ds nas figuras 12.8*b* e 12.8*c* é aproximadamente igual a dx, uma vez que $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dv)^2} = \sqrt{1 + (dv/dx)^2}\ dx \approx dx$. Como conseqüência, supõe-se que os pontos da linha elástica são *deslocados verticalmente* e não horizontalmente. Além do mais, como a *inclinação do ângulo* θ é *muito pequena*, seu valor em radianos é determinado *diretamente* por $\theta \approx \text{tg}\ \theta = dv/dx$.

Condições de Contorno e Continuidade. As constantes de integração são determinadas pelo cálculo das funções de cisalhamento, momento fletor, inclinação ou deslocamento em certo ponto da viga no qual o valor de tal função seja conhecido. Esses valores são chamados ***condições de contorno***. Várias condições de contorno possíveis usadas com freqüência para resolver problemas de deflexão de vigas (ou eixos) estão relacionadas na Tabela 12.1. Por exemplo: se a viga for apoiada por um rolete ou pino (1, 2, 3, 4), o deslocamento nesses pontos terá de ser *nulo*. Além disso, se esses apoios estiverem localizados nas *extremidades da viga* (1, 2), o momento interno da viga também deverá ser nulo. No apoio fixo (5), a inclinação e o deslocamento são ambos nulos, enquanto a viga de extremidade livre (6) tem momento e cisalhamento nulos. Finalmente, se dois segmentos de uma viga forem acoplados por pino ou articulação 'interna' (7), o momento deverá ser nulo no acoplamento.

Se uma única coordenada x não puder ser usada para expressar a equação da inclinação ou da linha elástica da viga, então devem ser usadas ***condições de continuidade*** para calcular algumas das constantes de integração. Como exemplo, consideremos a viga da Figura 12.9*a*. Nesse caso, ambas as coordenadas x são escolhidas com origem em A. Cada uma é válida apenas nas regiões $0 \leq x_1 \leq a$ e $a \leq x_2 \leq (a + b)$. Uma vez obtidas as funções da inclinação e da deflexão, elas devem dar os *mesmos valores* para a inclinação e para a deflexão no ponto B, de modo que a linha elástica seja fisicamente *contínua*. Expressa matematicamente, essa condição requer que $\theta_1(a) = \theta_2(a)$ e $v_1(a) = v_2(a)$. Essas equações são então usadas para calcular duas constantes de integração. Por outro lado, se a linha elástica for expressa em termos das coordenadas $0 \leq x_1 \leq a$ e $0 \leq x_2 \leq b$, mostradas na Figura 12.9*b*, a continuidade da inclinação e da deflexão exigirá que $\theta_1(a) = -\theta_2(b)$ e $v_1(a) = v_2(b)$. Nesse caso particular, o sinal *negativo* é necessário para comparar as inclinações em B, uma vez que x_1 é positivo para a direita, enquanto x_2 é positivo para a esquerda. Conseqüentemente, θ_1 é positivo no sentido anti-horário e θ_2 é positivo no sentido horário. Veja as figuras 12.8*b* e 12.8*c*.

Para projetar um sistema de cobertura, é preciso considear cuidadosamente a deflexão. A água da chuva, por exemplo, pode acumular-se provocando poças que levarão à deflexão adicional ou até à falha do material.

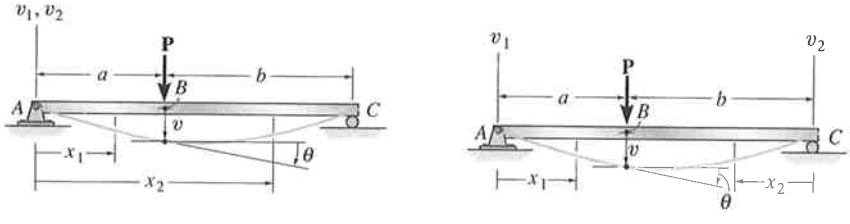


Figura 12.9

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

Para determinar a inclinação e a deflexão da viga (ou do eixo) pelo método da integração direta, usa-se o seguinte procedimento.

Linha Elástica.

- Desenhar uma vista exagerada da linha elástica da viga. Lembrar que ocorrem inclinação e deslocamento nulos em todos os apoios fixos e ocorre deslocamento nulo em todos os apoios de pino e de rolete.
- Estabelecer os eixos de coordenadas x e v. O eixo x deve ser paralelo à viga sem deflexão e pode ter origem em qualquer ponto ao longo dela, com sentido positivo tanto para a direita como para a esquerda.
- Se estiverem presentes diversas cargas descontínuas, estabelecer coordenadas x que sejam válidas para cada região da viga entre as descontinuidades. Escolher as coordenadas de modo que simplifiquem o trabalho algébrico subseqüente.
- Em todos os casos, o eixo v associado positivo deve ser orientado para cima.

Função do Carregamento ou do Momento Fletor.

- Em cada região em que haja uma coordenada x, expressar a carga w ou o momento fletor M em função de x. Em particular, supor que M *sempre* atua na *direção positiva* ao aplicar a equação de equilíbrio de momento fletor para determinar $M = f(x)$.

Inclinação e Linha Elástica.

- Desde que EI seja constante, aplicar tanto a equação de carga $EI\, d^4v/dx^4 = -w(x)$, que requer quatro integrações para obter $v = v(x)$, como a equação de momento $EI\, d^2v/dx^2 = M(x)$, que exige apenas duas integrações. É importante incluir em cada integração uma constante de integração.
- Calcular as constantes usando as condições de contorno para os apoios (Tabela 12.1) e as condições de continuidade que se aplicam à inclinação e ao deslocamento nos pontos em que as duas funções se encontram. Uma vez que as constantes estejam determinadas e substituídas nas equações da inclinação e da deflexão, podem-se determinar a inclinação e o deslocamento em *pontos específicos* da linha elástica.
- Verificar graficamente os valores numéricos obtidos comparando-os com o desenho da linha elástica. Observar que os valores *positivos* da *inclinação* serão no *sentido anti-horário* se a direção do eixo x for *positiva* para a *direita,* e no *sentido horário* se a direção do eixo x for *positiva* para a *esquerda*. Em qualquer caso, o *deslocamento positivo é para cima.*

EXEMPLO 12.1

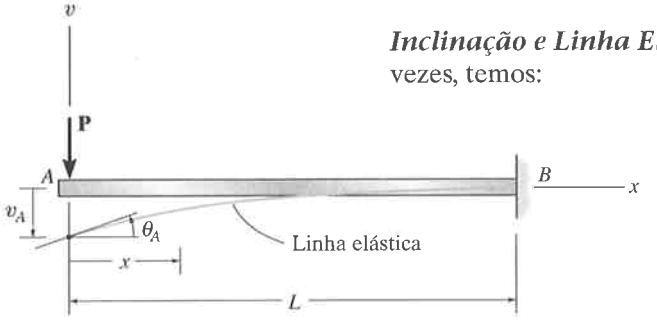
A viga em balanço mostrada na Figura 12.10*a* está submetida a uma carga vertical **P** na extremidade. Determinar a equação da linha elástica. *EI* é constante.

SOLUÇÃO I

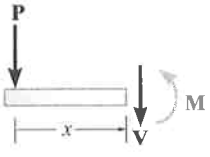
Linha Elástica. A carga tende a defletir a viga como mostra a Figura 12.10*a*. Por inspeção, vemos que o momento fletor interno pode ser representado em toda a viga por meio de uma única coordenada x.

Função do Momento Fletor. Pelo diagrama de corpo livre, com **M** atuando na direção positiva (Figura 12.10*b*), temos:

$$M = -Px$$



(a)



(b)

Figura 12.10

Inclinação e Linha Elástica. Aplicando a Equação 12.10 e integrando duas vezes, temos:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -Px \tag{1}$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -\frac{Px^2}{2} + C_1 \tag{2}$$

$$EI\,v = -\frac{Px^3}{6} + C_1x + C_2 \tag{3}$$

Se usamos condições de contorno $dv/dx = 0$ em $x = L$ e $v = 0$ em $x = L$, as equações 2 e 3 tornam-se:

$$0 = -\frac{PL^2}{2} + C_1$$

$$0 = -\frac{PL^3}{6} + C_1L + C_2$$

Assim, $C_1 = PL^2/2$ e $C_2 = -PL^3/3$. Substituindo esses resultados nas equações 2 e 3 com $\theta = dv/dx$, temos:

$$\theta = \frac{P}{2EI}(L^2 - x^2)$$

$$v = \frac{P}{6EI}(-x^3 + 3L^2x - 2L^3) \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

A inclinação e o deslocamento máximos ocorrem no ponto A ($x = 0$), para o qual:

$$\theta_A = \frac{PL^2}{2EI} \tag{4}$$

$$v_A = -\frac{PL^3}{3EI} \tag{5}$$

O resultado *positivo* para θ_A indica rotação no *sentido anti-horário* e o resultado *negativo* para v_A indica que v_A estende-se *para baixo*. Isso está de acordo com os resultados esquematizados na Figura 12.10*a*.

A fim de ter alguma idéia da *intensidade* real da inclinação e do deslocamento na extremidade A, consideremos que a viga da Figura 12.10*a* tenha comprimento de 15 pés, suporte uma carga $P = 6$ kip e seja feita de aço A-36, sendo $E_{aço} = 29(10^3)$ ksi. Segundo os métodos da Seção 11.3, se a viga foi projetada sem fator de segurança e a tensão normal admissível é igual ao limite de escoamento $\sigma_{adm} = 36$ ksi, então um perfil W12 × 26 seria adequado ($I = 204$ pol^4). Pelas equações 4 e 5, temos:

$$\theta_A = \frac{6\ \text{kip}(15\ \text{pés})^2(12\ \text{pol/pé})^2}{2[29(10^3)\ \text{kip/pol}^2](204\ \text{pol}^4)} = 0{,}0164\ \text{rad}$$

$$v_A = -\frac{6\ \text{kip}(15\ \text{pés})^3(12\ \text{pol/pé})^3}{3[29(10^3)\ \text{kip/pol}^2](204\ \text{pol}^4)} = -1{,}97\ \text{pol}$$

Como $\theta_A^2 = (dv/dx)^2 = 0{,}000270\ \text{rad}^2 \ll 1$, devemos usar a Equação 12.10, em vez da 12.4, mais precisa, para calcular a deflexão de vigas. Além disso, como essa aplicação é para *vigas em balanço*, obtivemos *valores maiores* de θ e v do que teríamos obtido se a viga fosse apoiada por pinos, roletes ou outros apoios fixos.

SOLUÇÃO II

Este problema também pode ser resolvido por meio da Equação 12.8, $EI\, d^4v/dx^4 = -w(x)$. Nesse caso, $w(x) = 0$ para $0 \leq x \leq L$ (Figura 12.10*a*), de modo que, após integrar uma vez, obtemos a forma da Equação 12.9, isto é:

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = 0$$

$$EI\frac{d^3v}{dx^3} = C_1' = V$$

A constante de cisalhamento C'_1 também é calculada em $x = 0$, visto que $V_A = -P$ (negativa de acordo com a convenção de sinal para vigas, Figura 12.8*a*). Assim, $C'_1 = -P$. Integrando novamente, temos a forma da Equação 12.10, isto é:

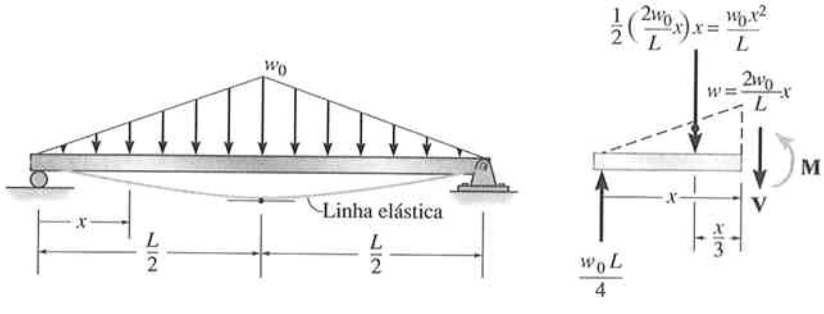
$$EI\frac{d^3v}{dx^3} = -P$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -Px + C'_2 = M$$

Nesse caso, $M = 0$ em $x = 0$, de modo que $C'_2 = 0$ e, como resultado, obtém-se a Equação 1 e a solução continua a mesma de antes.

EXEMPLO 12.2

A viga simplesmente apoiada da Figura 12.11*a* suporta um carregamento triangular distribuído. Determinar sua deflexão máxima. Considerar EI constante.



(a) (b)

Figura 12.11

SOLUÇÃO I

Linha Elástica. Devido à simetria, apenas uma coordenada x é necessária para a solução, neste caso $0 \leq x \leq L/2$. A viga se desloca como mostra a Figura 12.11*a*. Observe que a deflexão máxima ocorre no centro, uma vez que a inclinação nesse ponto é nula.

Função do Momento Fletor. O carregamento distribuído atua para baixo e, portanto, de acordo com nossa convenção de sinal, é positivo. Um diagrama de corpo livre do segmento à direita é mostrado na Figura 12.11*b*. A equação do carregamento distribuído é:

$$w = \frac{2w_0}{L}x \tag{1}$$

Portanto:

$$\circlearrowleft^{+} \Sigma M_{EN} = 0; \qquad M + \frac{w_0 x^2}{L}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{w_0 L}{4}(x) = 0$$

$$M = -\frac{w_0 x^3}{3L} + \frac{w_0 L}{4}x$$

Inclinação e Linha Elástica. Usando a Equação 12.10 e integrando duas vezes, temos:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M = -\frac{w_0}{3L}x^3 + \frac{w_0 L}{4}x \tag{2}$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -\frac{w_0}{12L}x^4 + \frac{w_0 L}{8}x^2 + C_1$$

$$EIv = -\frac{w_0}{60L}x^5 + \frac{w_0 L}{24}x^3 + C_1 x + C_2$$

Obtemos as constantes de integração aplicando a condição de contorno, $v = 0$ em $x = 0$, e a condição de simetria, $dv/dx = 0$ em $x = L/2$. Isso leva a:

$$C_1 = -\frac{5w_0 L^3}{192} \qquad C_2 = 0$$

Portanto:

$$EI\frac{dv}{dx} = -\frac{w_0}{12L}x^4 + \frac{w_0 L}{8}x^2 - \frac{5w_0 L^3}{192}$$

$$EIv = -\frac{w_0}{60L}x^5 + \frac{w_0 L}{24}x^3 - \frac{5w_0 L^3}{192}x$$

Determinando o deslocamento máximo em $x = L/2$, temos:

$$v_{\text{máx}} = -\frac{w_0 L^4}{120EI} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

SOLUÇÃO II

Começando com o carregamento distribuído (Equação 1) e aplicando a Equação 12.8, temos:

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = -\frac{2w_0}{L}x$$

$$EI\frac{d^3v}{dx^3} = V = -\frac{w_0}{L}x^2 + C_1'$$

Como $V = +w_0L/4$ em $x = 0$, então $C_1' = w_0L/4$. Integrando novamente, temos:

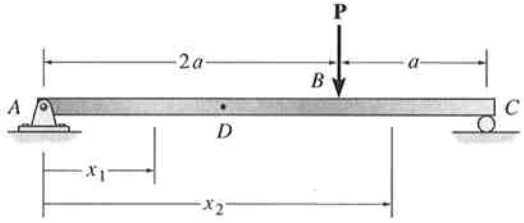
$$EI\frac{d^3v}{dx^3} = V = -\frac{w_0}{L}x^2 + \frac{w_0L}{4}$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M = -\frac{w_0}{3L}x^3 + \frac{w_0L}{4}x + C_2'$$

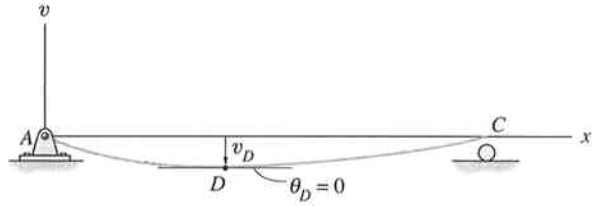
Nesse caso, $M = 0$ em $x = 0$, de modo que $C_2' = 0$, o que leva à Equação 2. A solução continua a mesma.

EXEMPLO 12.3

A viga simplesmente apoiada mostrada na Figura 12.12*a* está submetida à força concentrada **P**. Determinar seu deslocamento máximo. Considerar *EI* constante.



(a)

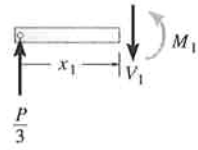


(b)

SOLUÇÃO

Linha Elástica. A viga se deflete como mostra a Figura 12.12*b*. Devemos usar duas coordenadas, visto que o momento fletor torna-se descontínuo em *P*. Nesse caso, admitiremos que x_1 e x_2 tenham a *mesma origem* em *A*, de modo que $0 \leq x_1 < 2a$ e $2a < x_2 \leq 3a$.

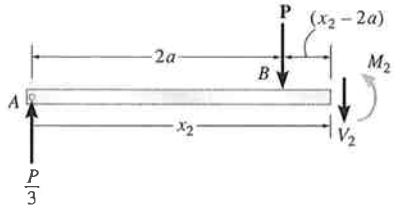
Função do Momento Fletor. Pelos diagramas de corpo livre mostrados na Figura 12.12*c*,



$$M_1 = \frac{P}{3}x_1$$

$$M_2 = \frac{P}{3}x_2 - P\,(x_2 - 2a) = \frac{2P}{3}\,(3a - x_2)$$

Inclinação e Linha Elástica. Aplicando a Equação 12.10 para M_1 e integrando duas vezes, temos:



(c)

Figura 12.12

$$EI\frac{d^2v_1}{dx_1^2} = \frac{P}{3}x_1$$

$$EI\frac{dv_1}{dx^1} = \frac{P}{6}x_1^2 + C_1 \qquad (1)$$

$$EIv_1 = \frac{P}{18}x_1^3 + C_1x_1 + C_2 \qquad (2)$$

De maneira semelhante para M_2:

$$EI\frac{d^2v_2}{dx_2^2} = \frac{2P}{3}(3a - x_2)$$

$$EI\frac{dv_2}{dx_2} = \frac{2P}{3}\left(3ax_2 - \frac{x_2^2}{2}\right) + C_3 \tag{3}$$

$$EIv_2 = \frac{2P}{3}\left(\frac{3}{2}ax_2^2 - \frac{x_2^3}{6}\right) + C_3x_2 + C_4 \tag{4}$$

Calculamos as quatro constantes usando *duas* condições de contorno, ou seja, $x_1 = 0$, $v_1 = 0$ e $x_2 = 3a$, $v_2 = 0$. Além disso, devem ser aplicadas *duas* condições de continuidade em B, isto é, $dv_1/dx_1 = dv_2/dx_2$ em $x_1 = x_2 = 2a$ e $v_1 = v_2$ em $x_1 = x_2 = 2a$. Substituindo como especificado, resultam as quatro equações seguintes:

$v_1 = 0$ em $x_1 = 0$; $\quad 0 = 0 + 0 + C_2$

$v_2 = 0$ em $x_2 = 3a$; $\quad 0 = \frac{2P}{3}\left(\frac{3}{2}a(3a)^2 - \frac{(3a)^3}{6}\right) + C_3(3a) + C_4$

$\frac{dv_1(2a)}{dx_1} = \frac{dv_2(2a)}{dx_2}$; $\quad \frac{P}{6}(2a)^2 + C_1 = \frac{2P}{3}\left(3a(2a) - \frac{(2a)^2}{2}\right) + C_3$

$v_1(2a) = v_2(2a)$; $\quad \frac{P}{18}(2a)^3 + C_1(2a) + C_2 = \frac{2P}{3}\left(\frac{3}{2}a(2a)^2 - \frac{(2a)^3}{6}\right) + C_3(2a) + C_4$

Resolvendo essas equações, obtemos:

$$C_1 = -\frac{4}{9}Pa^2 \qquad C_2 = 0$$

$$C_3 = -\frac{22}{9}Pa^2 \qquad C_4 = \frac{4}{3}Pa^3$$

Desse modo, as equações de 1 a 4 tornam-se:

$$\frac{dv_1}{dx_1} = \frac{P}{6EI}x_1^2 - \frac{4}{9}\frac{Pa^2}{EI} \tag{5}$$

$$v_1 = \frac{P}{18EI}x_1^3 - \frac{4}{9}\frac{Pa^2}{EI}x_1 \tag{6}$$

$$\frac{dv_2}{dx_2} = \frac{2Pa}{EI}x_2 - \frac{P}{3EI}x_2^2 - \frac{22}{9}\frac{Pa^2}{EI} \tag{7}$$

$$v_2 = \frac{Pa}{EI}x_2^2 - \frac{P}{9EI}x_2^3 - \frac{22}{9}\frac{Pa^2}{EI}x_2 + \frac{4}{3}\frac{Pa^3}{EI} \tag{8}$$

Analisando a linha elástica (Figura 12.12*b*), conclui-se que a deflexão máxima ocorre em D, em algum lugar da região AB. Nesse ponto a inclinação é nula. Pela Equação 5:

$$\frac{1}{6}x_1^2 - \frac{4}{9}a^2 = 0$$

$$x_1 = 1{,}633a$$

Substituindo na Equação 6:

$$v_{máx} = -0{,}484\frac{Pa^3}{EI} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

O sinal negativo indica que o deslocamento ocorre para baixo.

EXEMPLO 12.4

A viga da Figura 12.13*a* está submetida a uma força concentrada **P** na extremidade. Determinar o deslocamento em *C*. Considerar *EI* constante.

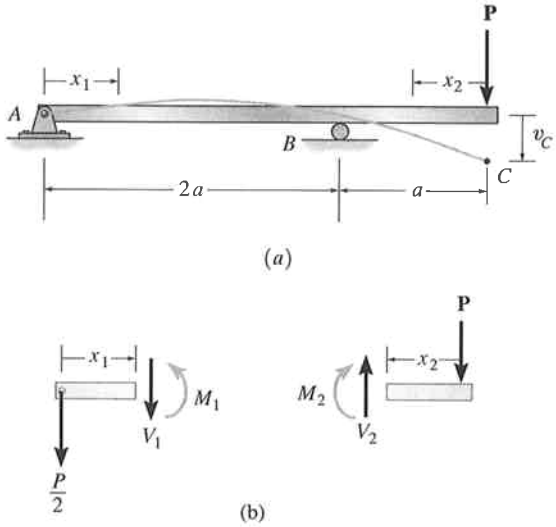


Figura 12.13

SOLUÇÃO

Linha Elástica. A viga se deflete até adquirir a forma mostrada na Figura 12.13*a*. Devido ao carregamento, devem ser consideradas duas coordenadas x, ou seja, $0 \leq x_1 < 2a$ e $0 \leq x_2 < a$, onde x_2 orienta-se para a esquerda a partir de *C*, uma vez que o momento interno é fácil de expressar.

Função do Momento Fletor. Usando os diagramas de corpo livre mostrados na Figura 12.13*b*, temos:

$$M_1 = -\frac{P}{2}x_1 \qquad M_2 = -Px_2$$

Inclinação e Linha Elástica. Aplicando a Equação 12.10, temos:

para $0 \leq x_1 < 2a$, $\quad EI\,\dfrac{d^2v_1}{dx_1^{\,2}} = -\dfrac{P}{2}x_1$

$$EI\frac{dv_1}{dx_1} = -\frac{P}{4}x_1^{\,2} + C_1 \tag{1}$$

$$EIv_1 = -\frac{P}{12}x_1^{\,3} + C_1x_1 + C_2 \tag{2}$$

Para $0 \leq x_2 < a$, $\quad EI\,\dfrac{d^2v_2}{dx_2^{\,2}} = -Px_2$

$$EI\frac{dv_2}{dx_2} = -\frac{P}{2}x_2^{\,2} + C_3 \tag{3}$$

$$EIv_2 = -\frac{P}{6}x_2^{\,3} + C_3x_2 + C_4 \tag{4}$$

Determinam-se as *quatro* constantes de integração usando *três* condições de contorno, ou seja, $v_1 = 0$ em $x_1 = 0$, $v_1 = 0$ em $x_1 = 2a$ e $v_2 = 0$ em $x_2 = a$ e *uma* equação de continuidade. Nesse caso, a continuidade da inclinação no rolete requer $dv_1/dx_1 = -dv_2/dx_2$ em $x_1 = 2a$ e $x_2 = a$. Por que há um sinal negativo nessa equação? (Observe que a continuidade do deslocamento

em B foi considerada indiretamentre nas condições de contorno, uma vez que $v_1 = v_2 = 0$ em $x_1 = 2a$ e $x_2 = a$). Aplicando essas quatro condições, temos:

$$v_1 = 0 \text{ em } x_1 = 0; \qquad 0 = 0 + 0 + C_2$$

$$v_1 = 0 \text{ em } x_1 = 2a; \qquad 0 = -\frac{P}{12}(2a)^3 + C_1(2a) + C_2$$

$$v_2 = 0 \text{ em } x_2 = a; \qquad 0 = -\frac{P}{6}a^3 + C_3 a + C_4$$

$$\frac{dv_1(2a)}{dx_1} = -\frac{dv_2(a)}{dx_2}; \qquad -\frac{P}{4}(2a)^2 + C_1 = -\left(-\frac{P}{2}(a)^2 + C_3\right)$$

Resolvendo, obtemos:

$$C_1 = \frac{Pa^2}{3} \qquad C_2 = 0 \qquad C_3 = \frac{7}{6}Pa^2 \qquad C_4 = -Pa^3$$

Substituindo C_3 e C_4 na Equação 4, temos:

$$v_2 = -\frac{P}{6EI}x_2^3 + \frac{7Pa^2}{6EI}x_2 - \frac{Pa^3}{EI}$$

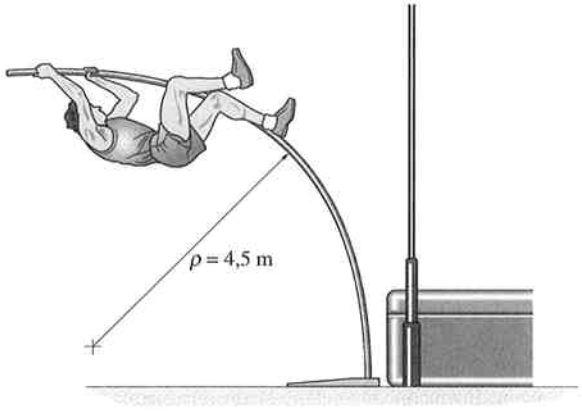
O deslocamento em C é determinado fazendo-se $x_2 = 0$. Obtemos:

$$v_C = -\frac{Pa^3}{EI}$$ ***Resposta***

PROBLEMAS

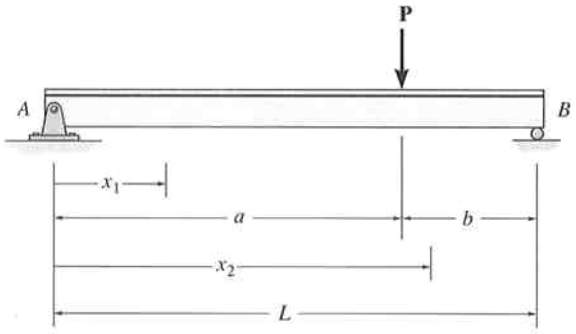
12.1. Uma tira de aço A-36 com espessura de 10 mm e largura de 20 mm é dobrada em um arco circular de raio ρ = 10 m. Determinar a tensão de flexão máxima nela desenvolvida.

12.2. Um homem está executando um salto com vara. O raio de curvatura mínimo da vara mede 4,5 m. Se a vara tem diâmetro de 40 mm e é feita de plástico reforçado com fibra de vidro, para o qual E_{fibra} = 131 GPa, qual a tensão de flexão máxima nela desenvolvida?



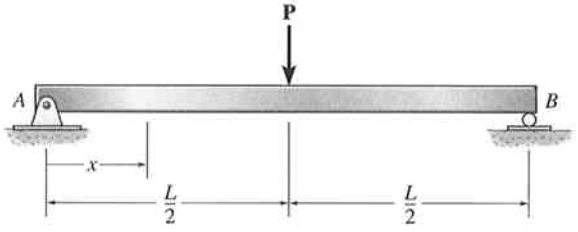
Problema 12.2

12.3. Determinar as equações da linha elástica usando as coordenadas x_1 e x_2. Considerar EI constante.



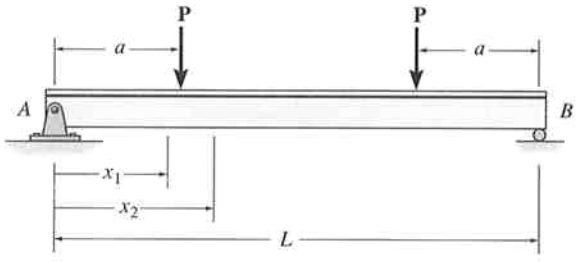
Problema 12.3

***12.4.** Determinar a equação da linha elástica da viga usando a coordenada x válida para $0 \leq x < L/2$. Especificar a inclinação em A e a deflexão máxima. Considerar EI constante.



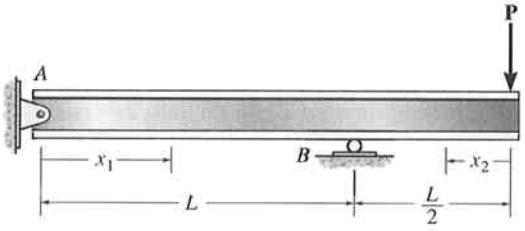
Problema 12.4

12.5. Determinar as equações da linha elástica da viga usando as coordenadas x_1 e x_2. Especificar a inclinação em A e a deflexão máxima. Considerar EI constante.



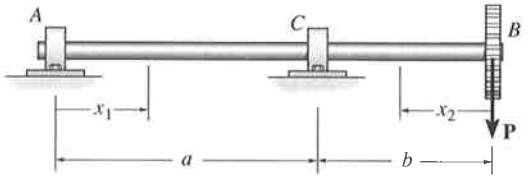
Problema 12.5

12.6. Determinar as equações da linha elástica da viga usando as coordenadas x_1 e x_2. Especificar a deflexão máxima considerando EI constante.



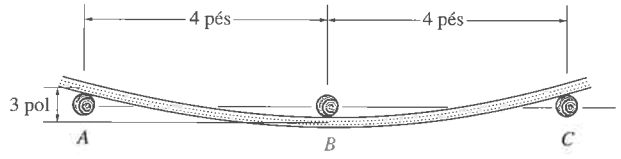
Problema 12.6

12.7. O eixo apóia-se em A por um mancal, que exerce apenas reações verticais sobre ele, e em C por um mancal de encosto que exerce reações horizontal e vertical sobre tal eixo. Determinar as equações da linha elástica usando as coordenadas x_1 e x_2. Considerar EI constante.



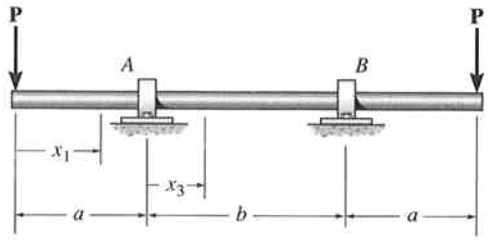
Problema 12.7

***12.8.** A tábua da cerca ondula entre três postes lisos fixos. Supondo que os postes localizem-se ao longo da mesma reta, determinar a tensão de flexão máxima na tábua. Sua largura é 6 pol e sua espessura 0,5 pol. $E_{mad} = 1{,}60(10^3)$ ksi. Supor, também, que o deslocamento de cada extremidade da tábua, em relação ao seu centro, seja de 3 pol.



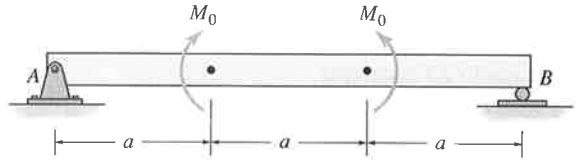
Problema 12.8

12.9. Determinar as equações da linha elástica do eixo usando as coordenadas x_1 e x_3. Especificar a deflexão máxima da viga considerando EI constante.



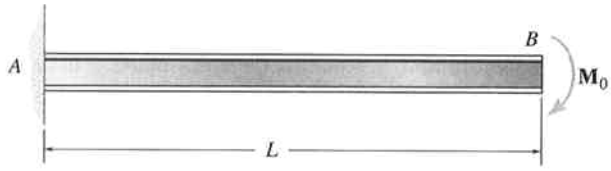
Problema 12.9

12.10. Determinar a deflexão máxima da viga e a inclinação em A. Considerar EI constante.



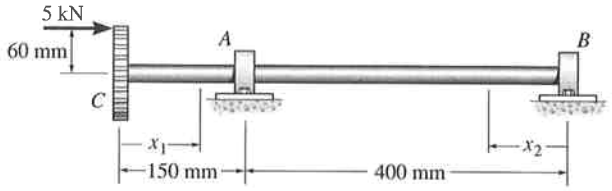
Problema 12.10

12.11. A viga de aço A-36 tem altura de 10 pol e está submetida a um momento constante $\mathbf{M}_0$, que faz a tensão nas fibras externas tornar-se $\sigma_E = 36$ ksi. Determinar o raio de curvatura da viga, bem como a inclinação e a deflexão máximas.



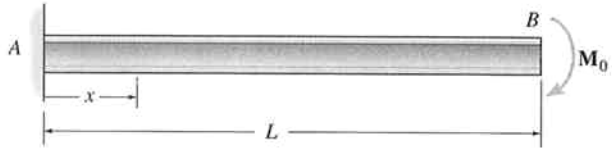
Problema 12.11

***12.12.** O eixo apóia-se em A por um mancal, que exerce apenas reações verticais sobre ele, e em B por um mancal de encosto que exerce reações horizontal e vertical sobre tal eixo. Desenhar o diagrama do momento fletor no eixo e, por meio dele, traçar a deflexão ou a linha elástica. Determinar as equações da linha elástica usando as coordenadas x_1 e x_2. Considerar EI constante.



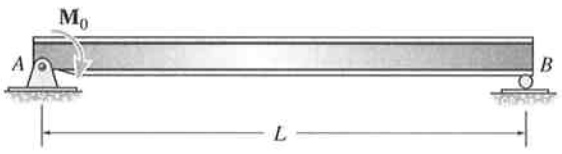
Problema 12.12

12.13. Determinar a equação da linha elástica da viga em balanço que está submetida ao conjugado $\mathbf{M}_0$. Calcular também a inclinação e a deflexão máximas. Considerar EI constante.



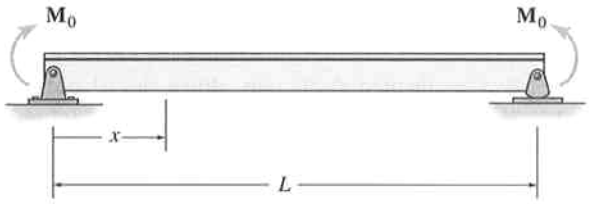
Problema 12.13

12.14. Determinar a inclinação e a deflexão máximas da viga simplesmente apoiada que está submetida ao conjugado $\mathbf{M}_0$. Considerar EI constante.



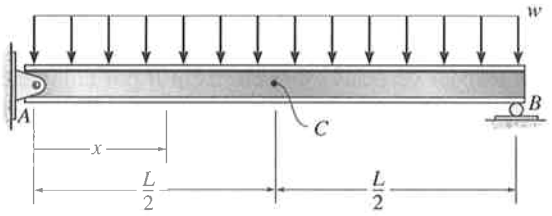
Problema 12.14

12.15. Determinar a equação da linha elástica da viga simplesmente apoiada que está submetida aos conjugados $\mathbf{M}_0$. Calcular também a inclinação e a deflexão máximas considerando EI constante.



Problema 12.15

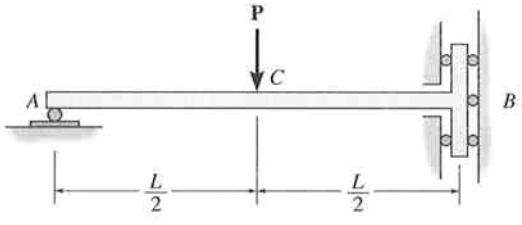
***12.16.** Determinar a equação da linha elástica usando a coordenada x e especificar a inclinação no ponto A e a deflexão no ponto C. Considerar EI constante.



Problema 12.16

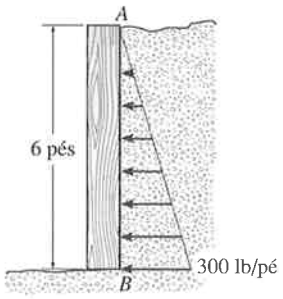
12.17. A barra é suportada por um rolete contido em B, que permite seu deslocamento vertical, mas resiste a carga axial e momento. Supondo que a barra seja submetida ao carregamento mostrado, determinar a inclinação em A e a deflexão em C. Considerar EI constante.

12.18. Determinar a deflexão em B da barra do Problema 12.17.



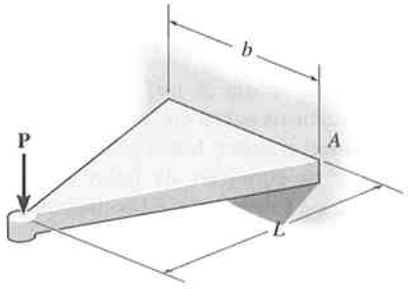
Problemas 12.17/12.18

12.19. São usados postes de madeira para conter um muro de 3 pol de diâmetro. Se a pressão do solo ao longo do poste varia de zero no topo ao máximo de 300 lb/pé na extremidade inferior B, quais são a inclinação e o deslocamento no topo? $E_{mad} = 1{,}6(10^3)$ ksi.



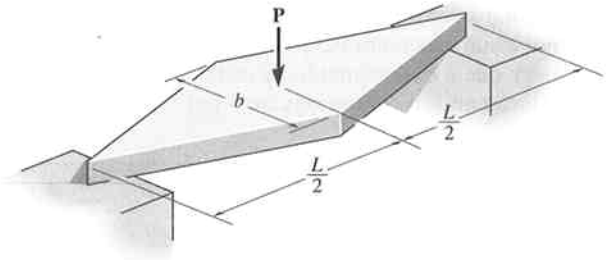
Problema 12.19

***12.20.** A viga cônica tem seção transversal retangular. Determinar a deflexão em sua extremidade em termos da carga P, do comprimento L, do módulo de elasticidade E e momento de inércia I_0 referente a essa extremidade.



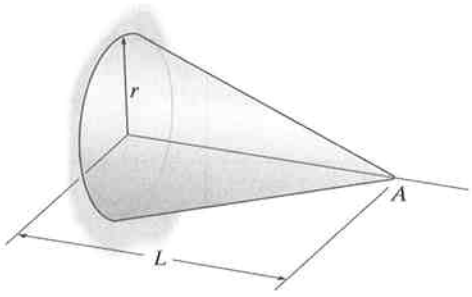
Problema 12.20

12.21. A viga cônica tem seção transversal retangular. Determinar a deflexão no centro em termos da carga P, do comprimento L, do módulo de elasticidade E e momento de inércia I_c referente a tal centro.



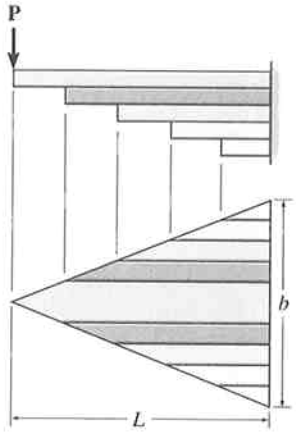
Problema 12.21

12.22. A viga é feita de um material com peso específico γ. Determinar o deslocamento e a inclinação em sua extremidade A devido ao seu peso. O módulo de elasticidade do material é E.



Problema 12.22

12.23. A viga é feita de uma chapa com espessura constante t e largura que varia linearmente. A chapa foi cortada em tiras para formar uma série de folhas, as quais foram empilhadas em um feixe de molas composta por n folhas. Determinar a deflexão na extremidade da viga quando esta estiver carregada. Desprezar o atrito entre as folhas.

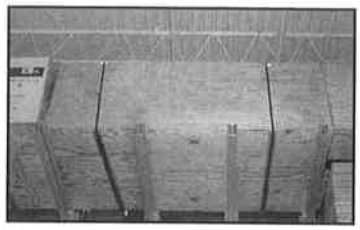


Problema 12.23

*12.3 FUNÇÕES DE DESCONTINUIDADE

O método da integração direta, usado para determinar a equação da linha elástica de vigas ou eixos, será conveniente se a carga ou o momento interno puderem ser expressos como uma *função contínua* ao longo de *todo o comprimento* da viga. Se, no entanto, várias cargas diferentes atuam sobre ela, a aplicação do método torna-se cansativa, porque devem ser escritas funções separadas de carga ou de momento para cada região. Além do mais, a integração dessas funções requer o cálculo das constantes de integração por meio de condições de contorno e/ou continuidade. Para a viga da Figura 12.14, por exemplo, é preciso escrever quatro funções de momento fletor que descrevam os momentos fletores nas regiões AB, BC, CD e DE. Ao aplicar a relação entre momento fletor e curvatura, $EI\, d^2v/dx^2 = M$, e integrar cada equação de momento fletor duas vezes, devemos calcular *oito* constantes de integração. Elas envolvem *duas* condições de contorno que implicam deslocamento nulo nos pontos A e E e *seis* condições de continuidade, tanto para a inclinação como para o deslocamento nos pontos B, C e D.

Nesta seção discutiremos um método para encontrar a equação da linha elástica de uma *viga com carregamentos múltiplos* usando uma *única expressão* em termos da carga na viga, $w = w(x)$, ou de seu momento interno, $M = M(x)$. Se a expressão de w for substituída em $EI\, d^4v/dx^4 = -w(x)$ e integrada quatro vezes, ou se a expressão de M for substituída em $EI\, d^2v/dx^2 = M(x)$ e integrada duas vezes, as constantes de integração serão determinadas a partir apenas das condições de contorno. Uma vez que as equações de continuidade não serão envolvidas, a análise ficará muito simplificada.



Por medida de segurança, estas vigas em balanço foram projetadas tanto para resistir como para limitar a deflexão.

Funções de Descontinuidade. A fim de informar a carga da viga ou seu momento interno em uma única expressão, usaremos dois tipos de operadores matemáticos conhecidos como *funções de descontinuidade.*

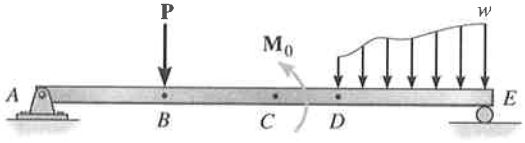


Figura 12.14

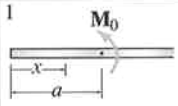
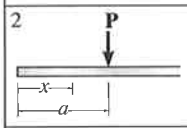
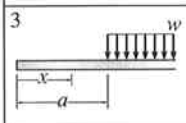
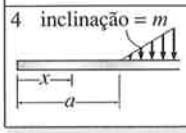
Carga	Função da carga $w = w(x)$	Cisalhamento $V = -\int w(x)dx$	Momento $M = \int V dx$
1 	$w = M_0\langle x-a\rangle^{-2}$	$V = -M_0\langle x-a\rangle^{-1}$	$M = -M_0\langle x-a\rangle^{0}$
2 	$w = P\langle x-a\rangle^{-1}$	$V = -P\langle x-a\rangle^{0}$	$M = -P\langle x-a\rangle^{1}$
3 	$w = w_0\langle x-a\rangle^{0}$	$V = -w_0\langle x-a\rangle^{1}$	$M = -\frac{w_0}{2}\langle x-a\rangle^{2}$
4 	$w = m\langle x-a\rangle^{1}$	$V = \frac{-m}{2}\langle x-a\rangle^{2}$	$M = \frac{-m}{6}\langle x-a\rangle^{3}$

Tabela 12.2

Funções de Macaulay. Para o caso de deflexão de vigas ou eixos, as funções de Macaulay, assim denominadas em homenagem ao matemático W.H. Macaulay, podem ser usadas para descrever ***cargas distribuídas***. Elas podem ser escritas desta forma geral:

$$\langle x-a\rangle^n = \begin{cases} 0 & \text{para } x < a \\ (x-a)^n & \text{para } x \geq a \end{cases} \qquad n \geq 0 \tag{12.11}$$

Nesse caso, x representa a coordenada da posição de um ponto ao longo da viga e a, o local da viga em que ocorre a 'descontinuidade', ou seja, o ponto em que a carga distribuída *começa*. Observe que a função de Macaulay $\langle x-a\rangle^n$ é escrita entre colchetes para distingui-la da função ordinária $(x-a)^n$ grafada entre parênteses. Como descrito pela função, somente quando $x \geq a$ temos $\langle x-a\rangle^n = (x-a)^n$, caso contrário a função é nula. Além disso, tais funções são válidas apenas para valores exponenciais $n \geq 0$. A integração das funções de Macaulay segue as mesmas regras das funções comuns, isto é:

$$\int \langle x-a\rangle^n \, dx = \frac{\langle x-a\rangle^{n+1}}{n+1} + C \tag{12.12}$$

Observe como as funções de Macaulay descrevem tanto o *carregamento uniforme* w_0 ($n = 0$) como o *carregamento triangular* ($n = 1$), mostrado na Tabela 12.2, itens 3 e 4. Esse tipo de descrição estende-se, naturalmente, a carregamentos distribuídos com outros formatos. É possível também usar a superposição de cargas uniforme e triangular para criar a função de Macaulay para carregamento trapezoidal. As funções de Macaulay para cisalhamento, $V = -\int w(x)\,dx$, e momento fletor, $M = \int V\,dx$, também são mostradas na tabela, usando integração.

Funções de Singularidade. Essas funções são usadas apenas para descrever a localização do ponto de forças concentradas ou conjugados que atuam sobre uma viga ou um eixo. Especificamente, uma ***força concentrada*** **P** pode ser considerada um caso especial de carga distribuída, no qual a intensidade da carga é $w = P/\epsilon$ tal que sua largura seja ϵ, onde $\epsilon \to 0$ (Figura 12.15). A área

do diagrama de carga é equivalente a P e *positiva para baixo*, por isso, usaremos a função de singularidade:

$$w = P\langle x - a\rangle^{-1} = \begin{cases} 0 & \text{para } x \neq a \\ P & \text{para } x = a \end{cases} \tag{12.13}$$

para descrever a força P. Observe que nesse caso $n = -1$, de modo que a unidade de w é força por comprimento, como deveria ser. Além disso, a função supõe o valor de $\mathbf{P}$ somente no ponto $x = a$ em que a carga ocorre, caso contrário tal função seria nula.

De maneira similar, o conjugado $\mathbf{M}_0$, considerado *positivo no sentido anti-horário*, é uma limitação, como $\epsilon \to 0$, de duas cargas distribuídas como mostra a Figura 12.16. Nesse caso, a seguinte função descreve seu valor:

$$w = M_0\langle x - a\rangle^{-2} = \begin{cases} 0 & \text{para } x \neq a \\ M_0 & \text{para } x = a \end{cases} \tag{12.14}$$

O expoente $n = -2$ garante que a unidade de w, força por comprimento, seja mantida.

A integração das duas funções de singularidade anteriores segue as regras operacionais do cálculo e produz resultados *diferentes* dos obtidos com as funções de Macaulay. Explicitamente:

$$\int \langle x - a\rangle^n = \langle x - a\rangle^{n+1}, \; n = -1, -2 \tag{12.15}$$

Nesse caso, apenas o expoente de n aumenta uma unidade e nenhuma constante de integração é associada com a operação. Ao usar a fórmula, observe como M_0 e P, descritos nos itens 1 e 2 da Tabela 12.2, são integrados uma vez e depois duas vezes, até que se obtenham o cisalhamento interno e o momento na viga.

As equações 12.11 a 12.15 oferecem, pois, um modo mais direto de expressar o carregamento ou o momento interno de uma viga em função de x. Ao usar essa alternativa, preste atenção nos sinais dos carregamentos externos. Como dissemos anteriormente e como mostra a Tabela 12.2, *forças concentradas e cargas distribuídas são positivas para baixo, ao passo que conjugados são positivos no sentido anti-horário*. Se a convenção de sinal for seguida, o cisalhamento interno e o momento fletor estarão de acordo com a convenção de sinal para vigas estabelecida na Seção 6.1.

Como exemplo de aplicação das funções de descontinuidade para descrever a carga ou o momento interno em uma viga, consideremos a viga carregada da Figura 12.17*a*. Nesse caso, a força de reação $\mathbf{R}_1$ criada pelo pino (Figura 12.17*b*) é negativa, visto que atua para cima, e $\mathbf{M}_0$ é negativo, uma vez que atua no sentido horário. Pela Tabela 12.2, a carga em qualquer ponto x da viga é, portanto,

$$w = -R_1\langle x - 0\rangle^{-1} + P\langle x - a\rangle^{-1} - M_0\langle x - b\rangle^{-2} + w_0\langle x - c\rangle^0$$

A força de reação no rolete não foi incluída, uma vez que aqui x nunca é maior que L e, além disso, esse valor não influi no cálculo da inclinação ou da deflexão. Observe que quando $x = a$, $w = P$ e todos os outros termos são nulos. Além disso, quando $x > c$, $w = w_0$ etc.

Integrando essa equação duas vezes, obtemos a expressão que descreve o momento interno na viga. As constantes de integração serão ignoradas nesse caso, visto que tanto as condições de contorno como o cisalhamento final e o momento foram calculados ($V = R_1$ e $M = 0$) e esses valores estão incorporados na carga w. Pode-se também obter esse resultado diretamente pela Tabela 12.2. Em qualquer um dos casos:

$$M = R_1\langle x - 0\rangle - P\langle x - a\rangle + M_0\langle x - b\rangle^0 - \tfrac{1}{2}w_0\langle x - c\rangle^2 \tag{12.16}$$

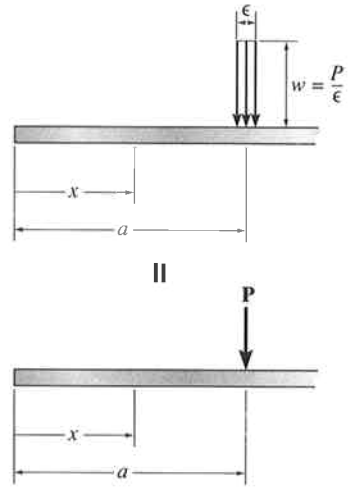


Figura 12.15

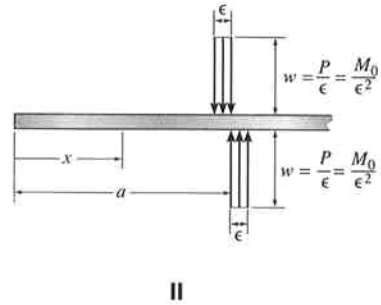


Figura 12.16

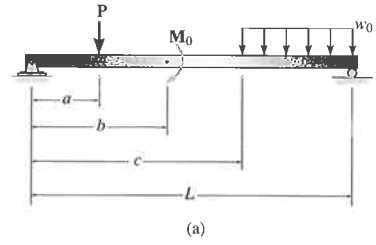


Figura 12.17

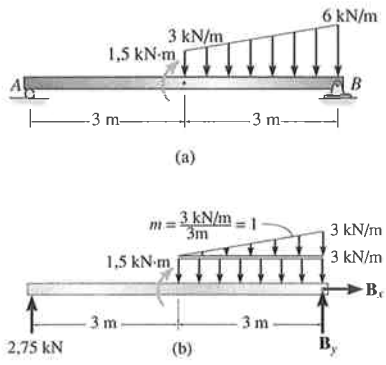


Figura 12.18

A validade dessa expressão pode ser verificada pelo método das seções, digamos, na região $b < x < c$ (Figura 12.17*b*). Para o momento de equilíbrio, é preciso que:

$$M = R_1 x - P(x - a) + M_0 \tag{12.17}$$

Esse resultado está de acordo com o obtido pelas funções de descontinuidade, uma vez que pelas equações 12.11, 12.13 e 12.14 somente o último termo da Equação 12.16 é nulo quando $x < c$.

Como segundo exemplo, consideremos a viga da Figura 12.18*a*. A reação de apoio em A foi calculada na Figura 12.18*b* e o carregamento trapezoidal foi separado em um carregamento triangular e outro com distribuição uniforme. Pela Tabela 12.2, o carregamento é:

$$w = -2{,}75\ \text{kN}\langle x - 0\rangle^{-1} - 1{,}5\ \text{kN} \cdot \text{m}\langle x - 3\ \text{m}\rangle^{-2} + 3\ \text{kN/m}\langle x - 3\ \text{m}\rangle^{0} + 1\ \text{kN/m}^2\langle x - 3\ \text{m}\rangle^{1}$$

Podemos determinar a expressão do momento diretamente da Tabela 12.2 em vez de integrar essa expressão duas vezes. Em qualquer um dos casos,

$$M = 2{,}75\ \text{kN}\langle x - 0\rangle^{1} + 1{,}5\ \text{kN} \cdot \text{m}\langle x - 3\ \text{m}\rangle^{0} - \frac{3\ \text{kN/m}}{2}\langle x - 3\ \text{m}\rangle^{2} - \frac{1\ \text{kN/m}^2}{6}\langle x - 3\ \text{m}\rangle^{3}$$

$$= 2{,}75x + 1{,}5\langle x - 3\rangle^{0} - 1{,}5\langle x - 3\rangle^{2} - \frac{1}{6}\langle x - 3\rangle^{3}$$

A deflexão da viga pode ser determinada integrando-se duas vezes sucessivas essa equação, e as constantes de integração são calculadas usando-se as condições de contorno para o deslocamento nulo em A e B.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

Veja a seguir como usar as funções de descontinuidade para determinar a equação da linha elástica de uma viga. O método é particularmente vantajoso para resolver problemas que envolvam vigas ou eixos sujeitos a *vários carregamentos*, uma vez que as constantes de integração são calculadas usando-se *apenas* condições de contorno, ao mesmo tempo que as condições de compatibilidade são satisfeitas automaticamente.

Linha Elástica.

- Esquematizar a linha elástica da viga e identificar as condições de contorno nos apoios.
- Em todos os apoios de pino e rolete ocorre deslocamento nulo, ao passo que ocorrem inclinação e deslocamento nulos nos apoios fixos.
- Estabelecer o eixo x de modo que se prolongue para a direita e tenha origem na extremidade esquerda da viga.

Função do Carregamento ou do Momento Fletor.

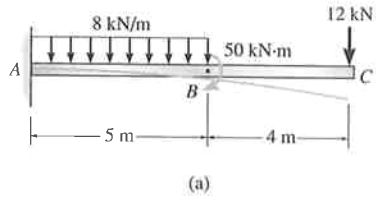
- Calcular as reações dos apoios e, depois, usar as funções de descontinuidade da Tabela 12.2 para expressar a carga w ou o momento interno M em função de x. Ao aplicar as equações, assegurar-se de seguir a convenção de sinal para cada carregamento.
- Observar que, para ser válidos, os carregamentos distribuídos devem estender-se até a extremidade direita da viga. Se não ocorrer essa condição, usar o método da superposição ilustrado no Exemplo 12.5.

Inclinação e Linha Elástica.

- Substituir w na equação $EI\, d^4v/dx^4 = -w(x)$ ou M na relação momento-curvatura $EI\, d^2v/dx^2 = M$ e integrar para obter as equações da inclinação e da deflexão.
- Calcular as constantes de integração usando as condições de contorno; em seguida, substituir tais constantes nas equações da inclinação e da deflexão para obter os resultados finais.
- Quando as equações da inclinação e da deflexão são calculadas em qualquer ponto da viga, a inclinação *positiva* ocorre *no sentido anti-horário* e o *deslocamento positivo* ocorre *para cima*.

EXEMPLO 12.5

Determinar a equação da linha elástica da viga em balanço mostrada na Figura 12.19*a*. Considerar *EI* constante.

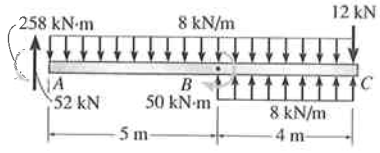


(a)

SOLUÇÃO

Linha Elástica. As cargas fazem com que a viga se deflita como mostra a Figura 12.19*a*. As condições de contorno exigem inclinação e deslocamento nulos em *A*.

Função do Carregamento. As reações de apoio em *A* foram calculadas pela estática e aparecem no diagrama de corpo livre da Figura 12.19*b*. Uma vez que o carregamento distribuído da Figura 12.19*a* não se estende até *C* como requerido, usaremos a superposição de forças mostrada na Figura 12.19*b* para representar o mesmo efeito. Pela nossa convenção de sinal, o conjugado de 50 kN · m, a força de 52 kN em *A* e a carga distribuída de *B* para *C* na parte inferior da viga são todos negativos. O carregamento da viga é, portanto:



(b)

Figura 12.19

$$w = -52\ \text{kN}\langle x-0\rangle^{-1} + 258\ \text{kN}\cdot\text{m}\langle x-0\rangle^{-2} + 8\ \text{kN/m}\langle x-0\rangle^{0} - 50\ \text{kN}\cdot\text{m}\langle x-5\ \text{m}\rangle^{-2} - 8\ \text{kN/m}\langle x-5\ \text{m}\rangle^{0}$$

A carga de 12 kN *não foi incluída* porque x não pode ser maior que 9 m. Como $dv/dx = -w(x)$, integrando — e desprezando a constante de integração, uma vez que as reações foram incluídas na função de carga — temos:

$$V = 52\langle x-0\rangle^{0} - 258\langle x-0\rangle^{-1} - 8\langle x-0\rangle^{1} + 50\langle x-5\rangle^{-1} + 8\langle x-5\rangle^{1}$$

Além do mais, $dM/dx = V$, de modo que integrando de novo temos:

$$M = -258\langle x-0\rangle^{0} + 52\langle x-0\rangle^{1} - \frac{1}{2}(8)\langle x-0\rangle^{2} + 50\langle x-5\rangle^{0} + \frac{1}{2}(8)\langle x-5\rangle^{2}$$
$$= (-258 + 52x - 4x^2 + 4\langle x-5\rangle^{2} + 50\langle x-5\rangle^{0})\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

Esse mesmo resultado pode ser obtido *diretamente* pela Tabela 12.2.

Inclinação e Linha Elástica. Aplicando a Equação 12.10 e integrando duas vezes, temos:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -258 + 52x - 4x^2 + 50\langle x-5\rangle^{0} + 4\langle x-5\rangle^{2}$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -258x + 26x^2 - \frac{4}{3}x^3 + 50\langle x-5\rangle^{1} + \frac{4}{3}\langle x-5\rangle^{3} + C_1$$

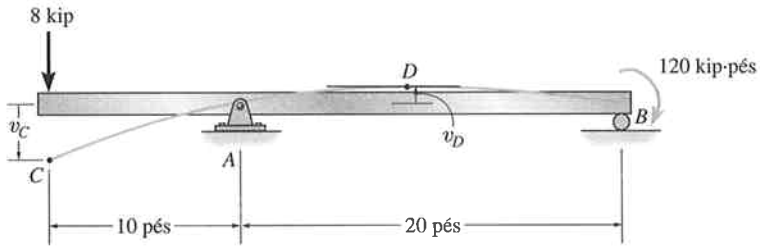
$$EIv = -129x^2 + \frac{26}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + 25\langle x-5\rangle^{2} + \frac{1}{3}\langle x-5\rangle^{4} + C_1x + C_2$$

Como $dv/dx = 0$ em $x = 0$, $C_1 = 0$; e $v = 0$ em $x = 0$, então $C_2 = 0$. Assim:

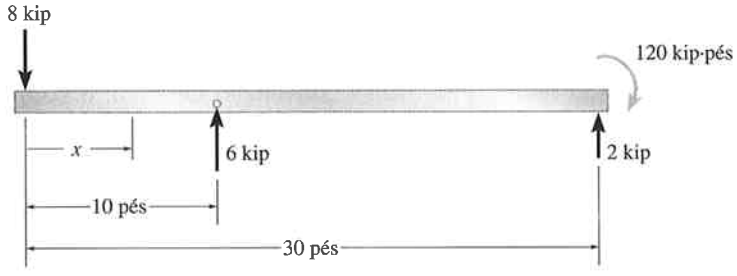
$$v = \frac{1}{EI}\left(-129x^2 + \frac{26}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + 25\langle x-5\rangle^{2} + \frac{1}{3}\langle x-5\rangle^{4}\right)\text{m} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

EXEMPLO 12.6

Determinar a deflexão máxima da viga mostrada na Figura 12.20*a*. Considerar *EI* constante.



(a)



(b)

Figura 12.20

SOLUÇÃO

Linha Elástica. A viga se deflete como mostra a Figura 12.20*a*. As condições de contorno exigem deslocamentos nulos em A e B.

Função do Carregamento. As reações foram calculadas e aparecem no diagrama de corpo livre na Figura 12.20*b*. A função de carregamento da viga é escrita como:

$$w = 8\ \text{kip}\langle x - 0\rangle^{-1} - 6\ \text{kip}\langle x - 10\ \text{pés}\rangle^{-1}$$

O conjugado e a força em B não estão incluídos porque se localizam na extremidade direita da viga e x não pode ser maior que 30 pés. Aplicando $dV/dx = -w(x)$, obtemos:

$$V = -8\langle x - 0\rangle^{0} + 6\langle x - 10\rangle^{0}$$

De maneira semelhante, $dM/dx = V$ resulta em:

$$\begin{aligned} M &= -8\langle x - 0\rangle^{1} + 6\langle x - 10\rangle^{1} \\ &= (-8x + 6\langle x - 10\rangle^{1})\ \text{kip} \cdot \text{pés} \end{aligned}$$

Observe que a equação também pode ser estabelecida *diretamente* a partir dos resultados para momento da Tabela 12.2.

Inclinação e Linha Elástica. Integrando duas vezes, temos:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -8x + 6\langle x - 10\rangle^{1}$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -4x^2 + 3\langle x - 10\rangle^{2} + C_1$$

$$EIv = -\frac{4}{3}x^3 + \langle x - 10\rangle^{3} + C_1x + C_2 \qquad (1)$$

Pela Equação 1, a condição de contorno $v = 0$ em $x = 10$ pés e $v = 0$ em $x = 30$ pés resulta em:

$$0 = -1.333 + (10 - 10)^3 + C_1(10) + C_2$$

$$0 = -36.000 + (30 - 10)^3 + C_1(30) + C_2$$

Resolvendo essas equações simultaneamente para C_1 e C_2, obtemos $C_1 = 1.333$ e $C_2 = -12.000$. Então:

$$EI\frac{dv}{dx} = -4x^2 + 3\langle x - 10\rangle^2 + 1.333 \tag{2}$$

$$EIv = -\frac{4}{3}x^3 + \langle x - 10\rangle^3 + 1.333x - 12.000 \tag{3}$$

Pela Figura 12.20*a*, o deslocamento máximo pode ocorrer tanto em C como em D, onde a inclinação $dv/dx = 0$. Para obter o deslocamento de C, fazemos $x = 0$ na Equação 3. Obtemos:

$$v_C = -\frac{12.000 \text{ kip} \cdot \text{pés}^3}{EI}$$

O sinal *negativo* indica que o deslocamento se dá *para baixo*, como mostra a Figura 12.20*a*. Para localizar o ponto D, usamos a Equação 2 com $x > 10$ pés e $dv/dx = 0$, o que leva a:

$$0 = -4x_D^2 + 3(x_D - 10)^2 + 1.333$$
$$x_D^2 + 60x_D - 1.633 = 0$$

Resolvendo para a raiz positiva:

$$x_D = 20{,}3 \text{ pés}$$

Então, pela Equação 3:

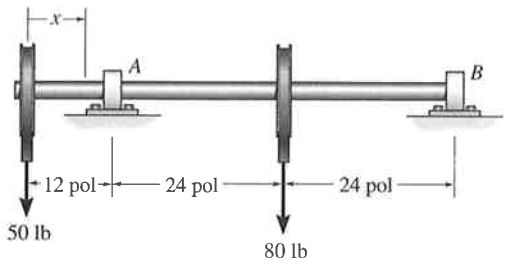
$$EIv_D = -\frac{4}{3}(20{,}3)^3 + (20{,}3 - 10)^3 + 1.333(20{,}3) - 12.000$$

$$v_D = \frac{5.000 \text{ kip} \cdot \text{pés}^3}{EI} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Comparando esse valor com v_C, vemos que $v_{máx} = v_C$.

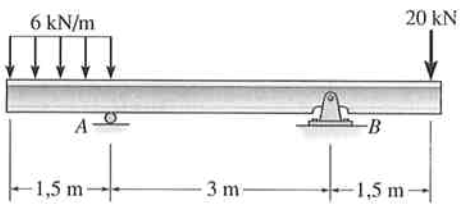
PROBLEMAS

***12.24.** O eixo suporta as cargas das duas polias mostradas. Determinar sua inclinação nos mancais A e B, que exercem apenas reações verticais sobre ele. Considerar EI constante.



Problema 12.24

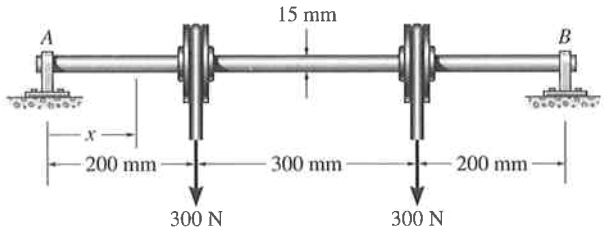
12.25. A viga está submetida à carga mostrada. Determinar a equação da linha elástica. Considerar EI constante.



Problema 12.25

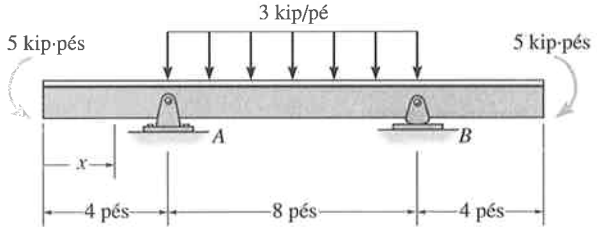
12.26. O eixo é feito de aço inoxidável 304 e tem diâmetro de 15 mm. Determinar sua deflexão máxima. Os mancais em A e B exercem apenas reações verticais sobre ele.

12.27. O eixo é feito de aço inoxidável 304 e tem diâmetro de 15 mm. Determinar a equação da linha elástica e encontrar as inclinações nos mancais A e B, os quais exercem apenas reações verticais sobre o eixo.



Problemas 12.26/12.27

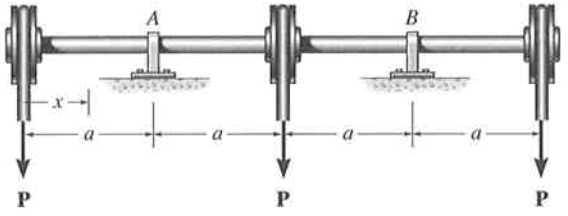
***12.28.** A viga está submetida à carga mostrada. Determinar a equação da linha elástica considerando *EI* constante.



Problema 12.28

12.29. O eixo suporta as cargas das três polias mostradas. Determinar a equação da linha elástica. Os mancais em *A* e *B* exercem apenas reações verticais sobre o eixo. Qual é a deflexão máxima? Considerar *EI* constante.

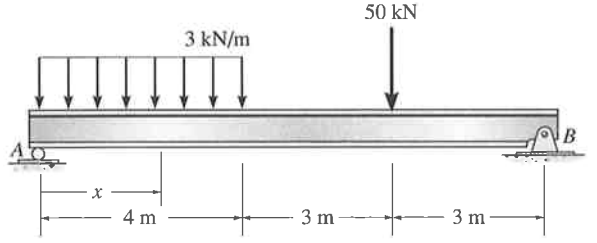
12.30. O eixo suporta as cargas das três polias mostradas. Determinar a deflexão em seu centro e sua inclinação em *A* e *B*. Os mancais exercem apenas reações verticais sobre ele e *EI* é constante.



Problemas 12.29/12.30

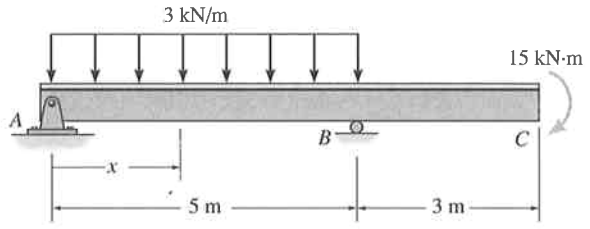
12.31. A viga está submetida à carga mostrada. Determinar a equação da linha elástica considerando *EI* constante.

***12.32.** A viga está submetida à carga mostrada. Determinar o deslocamento em $x = 7$ m e a inclinação em *A*. Considerar *EI* constante.



Problemas 12.31/12.32

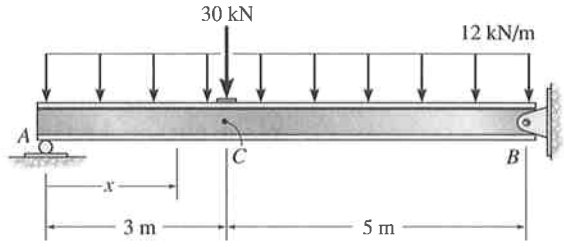
12.33. A viga está submetida à carga mostrada. Determinar as equações da inclinação e da linha elástica. Considerar *EI* constante.



Problema 12.33

12.34. A viga está submetida à carga mostrada. Determinar a equação da linha elástica considerando *EI* constante.

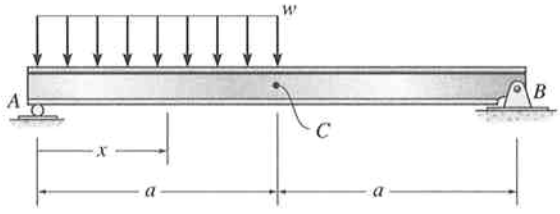
12.35. A viga está submetida à carga mostrada. Determinar as inclinações em *A* e *B* e o deslocamento em *C*. Considerar *EI* constante.



Problemas 12.34/12.35

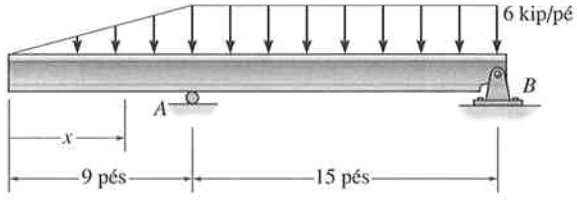
***12.36.** Determinar a equação da linha elástica. Especificar a inclinação em *A* e o deslocamento em *C*. Considerar *EI* constante.

12.37. Determinar a equação da linha elástica e especificar as inclinações em *A* e *B*. Considerar *EI* constante.



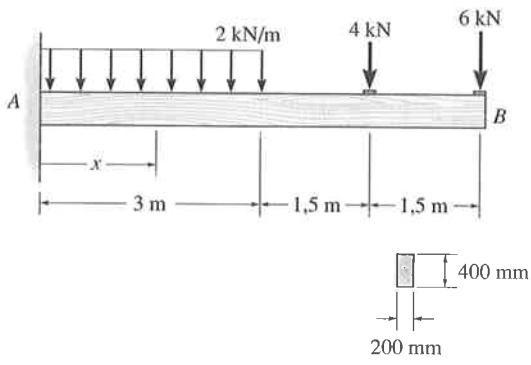
Problemas 12.36/12.37

12.38. A viga está submetida à carga mostrada. Determinar a equação da linha elástica considerando *EI* constante.



Problema 12.38

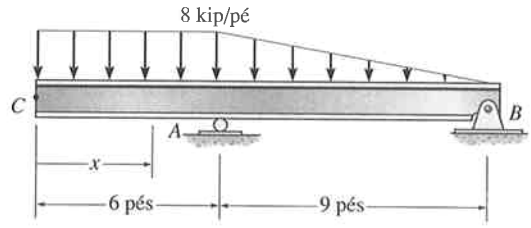
12.39. A viga de madeira está submetida à carga mostrada. Determinar a equação da linha elástica. Supondo $E_{mad} = 12$ GPa, determinar também a deflexão e a inclinação na extremidade *B*.



Problema 12.39

***12.40.** A viga está submetida à carga mostrada. Determinar a equação da linha elástica.

12.41. Determinar o deslocamento em C e a inclinação em A.

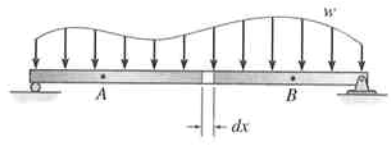


Problemas 12.40/12.41

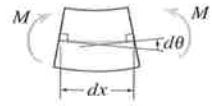
*12.4 INCLINAÇÃO E DESLOCAMENTO PELO MÉTODO DOS MOMENTOS DE ÁREAS

O método dos momentos de áreas oferece uma técnica pseudográfica para determinar a inclinação e o deslocamento em *pontos específicos* da linha elástica de uma viga ou um eixo. Sua aplicação exige o cálculo das áreas associadas ao diagrama de momento da viga; desse modo, se o diagrama consistir de formas simples, o método será muito conveniente. Normalmente, esse é o caso quando a viga está carregada com forças concentradas e conjugados.

Para desenvolver o método dos momentos de áreas, estabeleceremos as mesmas hipóteses usadas para o método da integração direita: a viga, inicialmente reta, deforma-se elasticamente em virtude das cargas, de modo que a inclinação e a deflexão da curva elástica são muito pequenas e as deformações são provocadas por flexão. O método dos momentos de áreas baseia-se em dois teoremas usados para determinar a inclinação e o deslocamento em um ponto da linha elástica.



(a)



(b)

Teorema 1. Consideremos a viga simplesmente apoiada e sua linha elástica (Figura 12.21*a*). Um segmento infinitesimal da viga, dx, está isolado na Figura 12.21*b*. Observa-se que o momento interno M deforma o elemento de tal modo que as *tangentes* à curva elástica › cada lado do elemento interceptam-se no ângulo $d\theta$. Esse ângulo é determinado pela Equação 12.10, escrita como:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = EI\frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right) = M$$

Como a *inclinação* é *pequena*, $\theta = dv/dx$ e, assim:

$$d\theta = \frac{M}{EI}\,dx \qquad (12.18)$$

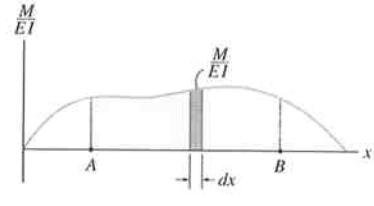


Diagrama $\frac{M}{EI}$

(c)

Figura 12.21

Se o diagrama de momento da viga for construído e dividido pelo produto da multiplicação do momento da inércia pelo módulo de elasticidade E da viga (Figura 12.21*c*), a Equação 12.18 indicará que $d\theta$ é igual à *área* sob o 'diagrama

M/EI' do segmento da viga dx. Integrando entre dois pontos selecionados da linha elástica A e B, temos:

$$\theta_{B/A} = \int_A^B \frac{M}{EI}\, dx \tag{12.19}$$

Essa equação é a base do primeiro teorema dos momentos de áreas.

Teorema 1: *O ângulo entre as tangentes em quaisquer dois pontos da linha elástica é igual à área sob o diagrama M/EI entre esses mesmos dois pontos.*

A notação $\theta_{B/A}$ indica o ângulo da tangente em B medido *em relação à* tangente em A. Pela demonstração, é evidente que esse ângulo é medido no *sentido anti-horário*, a partir da tangente A até a tangente B, se a área sob o diagrama M/EI é *positiva*. Inversamente, se a área é *negativa*, ou seja, fica abaixo do eixo x, o ângulo $\theta_{B/A}$ é medido no sentido horário da tangente A para a tangente B. Além disso, pelas unidades da Equação 12.19, $\theta_{B/A}$ é *medido* em *radianos*.

Teorema 2. O segundo teorema dos momentos de áreas baseia-se no desvio relativo das tangentes em relação à linha elástica. Uma vista muito ampliada do desvio vertical dt das tangentes a cada lado do elemento infinitesimal dx é mostrada na Figura 12.22*a*. Tal desvio, provocado pela curvatura do elemento, foi medido ao longo de uma reta vertical que passa pelo ponto A da linha elástica. Como se supõe que a inclinação da linha elástica e sua deflexão são muito pequenas, é aceitável aproximar o comprimento de cada tangente por x e o arco ds' por dt. Usando a fórmula do arco circular $s = \theta r$, onde r é o comprimento x e s é dt, podemos escrever $dt = x\, d\theta$. Substituindo a Equação 12.18 nessa equação e integrando entre A e B, podemos determinar o desvio vertical da tangente em A *em relação* à tangente em B, ou seja:

$$t_{A/B} = \int_A^B x \frac{M}{EI}\, dx \tag{12.20}$$

Como o centróide de uma área é dado por $\bar{x} \int dA = \int x\, dA$, e $\int (M/EI)dx$ representa a área sob o diagrama M/EI, podemos escrever também:

$$t_{A/B} = \bar{x} \int_A^B \frac{M}{EI}\, dx \tag{12.21}$$

Aqui, $\bar{x}$ é a distância de A até o *centróide* da área sob o diagrama M/EI entre A e B (Figura 12.22*b*).

O segundo teorema dos momentos de áreas pode, então, ser expresso como segue.

Teorema 2: *O desvio vertical da tangente em um ponto (A) da linha elástica em relação à tangente traçada a partir de outro ponto (B) é igual ao momento da área sob o diagrama M/EI entre os dois pontos (A e B). Esse momento é calculado em relação ao ponto (A), onde o desvio vertical ($t_{A/B}$) deve ser determinado.*

A distância $t_{A/B}$ usada no teorema também é interpretada como o deslocamento vertical do ponto localizado no prolongamento da tangente traçada de B para o ponto A na linha elástica. Observe que $t_{A/B}$ *não* é igual a $t_{B/A}$, como mostra a Figura 12.22*c*. Especificamente, o momento da área sob o diagrama M/EI entre A e B é calculado em relação ao ponto A para determinar $t_{A/B}$ (Figura 12.22*b*) e em relação ao ponto B para determinar $t_{B/A}$ (Figura 12.22*c*).

Se encontramos um momento da área *positiva* M/EI de A até B para $t_{B/A}$, isso indica que o ponto B está *acima* da tangente traçada pelo ponto A (Figura 12.22*a*). Áreas *negativas* M/EI, ao contrário, indicam que o ponto B está *abaixo* da tangente traçada a partir do ponto A. Essa mesma regra aplica-se a $t_{A/B}$.

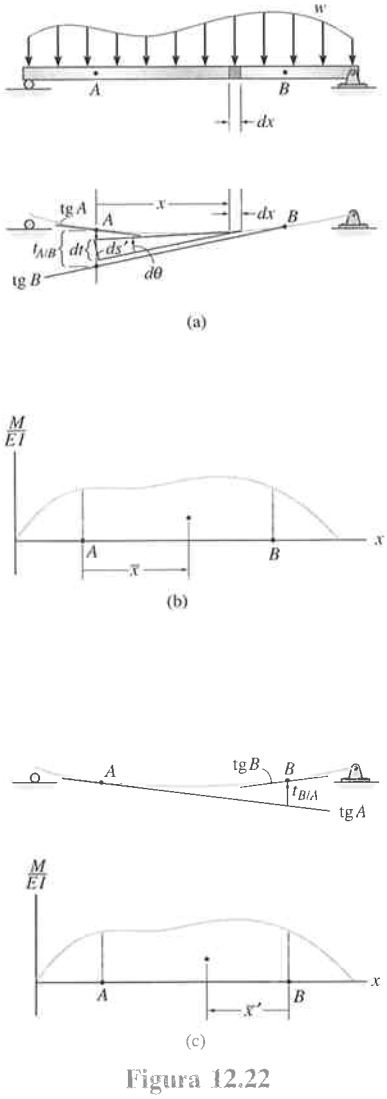


Figura 12.22

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

Veja a seguir como aplicar os dois teoremas dos momentos de áreas.

Diagrama M/EI.

- Determinar as reações de apoio e desenhar o diagrama M/EI da viga. Se a viga estiver carregada com forças concentradas, tal diagrama consistirá em uma série de segmentos de retas e as áreas e seus momentos requeridos pelos teoremas dos momentos de áreas serão relativamente simples de calcular. Se o carregamento consistir em uma série de cargas distribuídas, o diagrama M/EI será formado por curvas parabólicas ou talvez de ordem superior; sugerimos então usar a tabela que consta no final do livro para localizar a área e o centróide sob cada curva.

Linha Elástica.

- Desenhar uma vista ampliada da linha elástica da viga. Lembrar que os pontos de inclinação e deslocamento nulos ocorrem sempre em apoio fixo, e em todos os apoios de pino e rolete ocorre deslocamento nulo.
- Se estiver difícil desenhar a forma geral da linha elástica, usar o diagrama de momento fletor (ou o diagrama M/EI). Compreender que, quando a viga está submetida a *momento positivo*, flete-se com *concavidade para cima*, enquanto, o *momento* for *negativo*, ela se flete com *concavidade para baixo*. Além disso, um ponto de inflexão ou de mudança de curvatura ocorre onde o momento da viga (ou M/EI) for nulo.
- O deslocamento e a inclinação desconhecidos a ser determinados devem ser indicados na linha elástica.
- Como os teoremas dos momentos de áreas aplicam-se *somente entre duas tangentes*, deve-se prestar atenção a quais tangentes devem ser traçadas, de modo que os ângulos ou desvios entre elas levem à solução do problema. A esse respeito, *as tangentes nos apoios devem ser consideradas*, visto que geralmente a viga tem deslocamento e/ou inclinação nulos nos apoios.

Teoremas dos Momentos de Áreas.

- Aplicar o Teorema 1 para determinar o *ângulo* entre duas tangentes à linha elástica quaisquer e o Teorema 2 para determinar o *desvio tangencial*.
- O sinal algébrico da resposta é verificado pelo ângulo ou desvio indicado na linha elástica.
- $\theta_{B/A}$ *positivo* representa rotação da tangente em B no *sentido anti-horário* em relação à tangente em A e $t_{B/A}$ *positivo* indica que o ponto B da curva elástica localiza-se *acima* da tangente traçada a partir do ponto A.

EXEMPLO 12.7

Determinar as inclinações da viga mostrada na Figura 12.23*a* nos pontos B e C. Considerar EI constante.

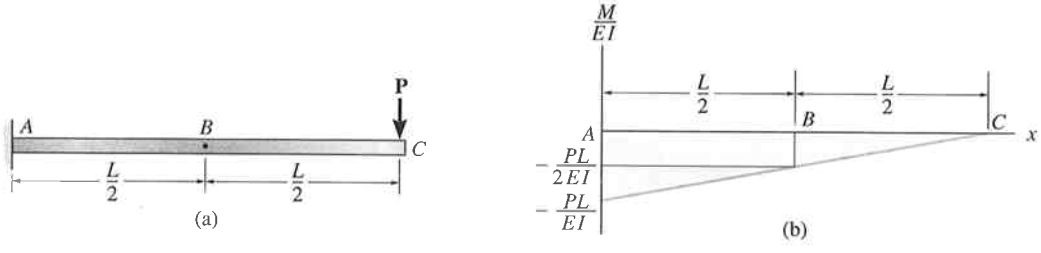


Figura 12.23

SOLUÇÃO

Diagrama M/EI. Veja a Figura 12.23*b*.

Linha Elástica. A força P provoca deflexão na viga como mostra a Figura 12.23*c*. (A linha elástica é côncava para baixo, uma vez que M/EI é negativo.) As tangentes em B e C estão indicadas porque é necessário determinar θ_B e θ_C. Também consta da figura a tangente no apoio (A). *Sabe-se* que essa tangente tem inclinação nula. Pela construção, o ângulo entre tg A e tg B, ou seja, $\theta_{B/A}$, equivale a θ_B, ou:

$$\theta_B = \theta_{B/A}$$

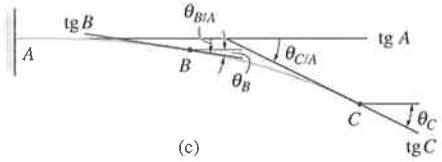


Figura 12.23

Além disso:

$$\theta_C = \theta_{C/A}$$

Teorema dos Momentos de Áreas. De acordo com Teorema 1, $\theta_{B/A}$ é igual à área sob o diagrama M/EI entre os pontos A e B, isto é:

$$\theta_B = \theta_{B/A} = \left(-\frac{PL}{2EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{PL}{2EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$= -\frac{3PL^2}{8EI} \qquad \textit{Resposta}$$

O *sinal negativo* indica que o ângulo medido da tangente em A até a tangente em B orienta-se no *sentido horário*. A condição é comprovada, uma vez que a viga se inclina para baixo em B.

De modo semelhante, a área sob o diagrama M/EI entre os pontos A e C é igual a $\theta_{C/A}$. Temos:

$$\theta_C = \theta_{C/A} = \frac{1}{2}\left(-\frac{PL}{EI}\right)L$$

$$= -\frac{PL^2}{2EI} \qquad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 12.8

Determinar o deslocamento dos pontos B e C da viga mostrada na Figura 12.24*a*. Considerar EI constante.

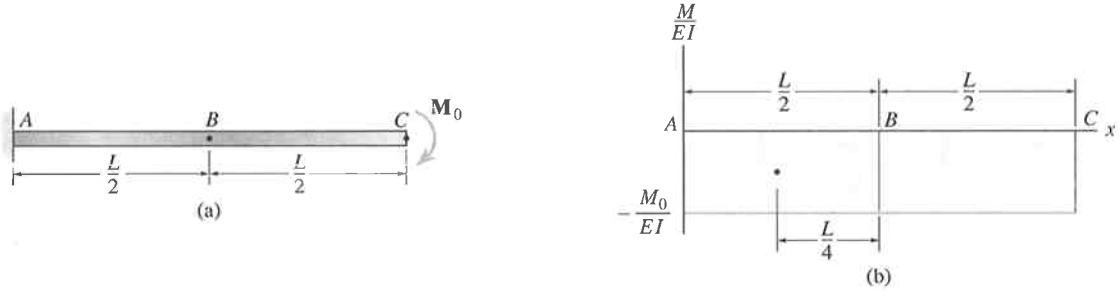


Figura 12.24

SOLUÇÃO

Diagrama M/EI. Veja a Figura 12.24*b*.

Linha Elástica. O momento em C provoca deflexão na viga como mostra a Figura 12.24*c*. As tangentes em B e C estão indicadas, uma vez que é necessário determinar Δ_B e Δ_C. Além disso, por ser horizontal, a tangente no apoio (A) também consta da figura. Os deslocamentos requeridos são então

relacionados diretamente aos desvios entre as tangentes em B e A e em C e A. Explicitamente, Δ_B é igual ao desvio entre tg A e tg B, isto é:

$$\Delta_B = t_{B/A}$$

$$\Delta_C = t_{C/A}$$

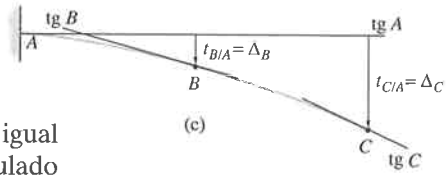


Figura 12.24

Teorema dos Momentos de Áreas. De acordo com o Teorema 2, $t_{B/A}$ é igual ao momento da área sombreada sob o diagrama M/EI entre A e B, calculado em relação ao ponto B (o ponto na linha elástica), visto ser esse o ponto em que o desvio da tangente deve ser calculado. Então, pela Figura 12.24*b*:

$$\Delta_B = t_{B/A} = \left(\frac{L}{4}\right)\left[\left(-\frac{M_0}{EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\right] = -\frac{M_0L^2}{8EI} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Da mesma maneira, para $t_{C/A}$ devemos determinar o momento da área sob *todo* o diagrama M/EI de A para C em relação ao ponto C (o ponto da curva elástica). Temos:

$$\Delta_C = t_{C/A} = \left(\frac{L}{2}\right)\left[\left(-\frac{M_0}{EI}\right)(L)\right] = -\frac{M_0L^2}{2EI} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Como ambas as respostas são *negativas*, isso indica que os pontos B e C localizam-se abaixo da tangente em A, o que se comprova na Figura 12.24*c*.

EXEMPLO 12.9

Determinar a inclinação da viga da Figura 12.25*a*. Considerar EI constante.

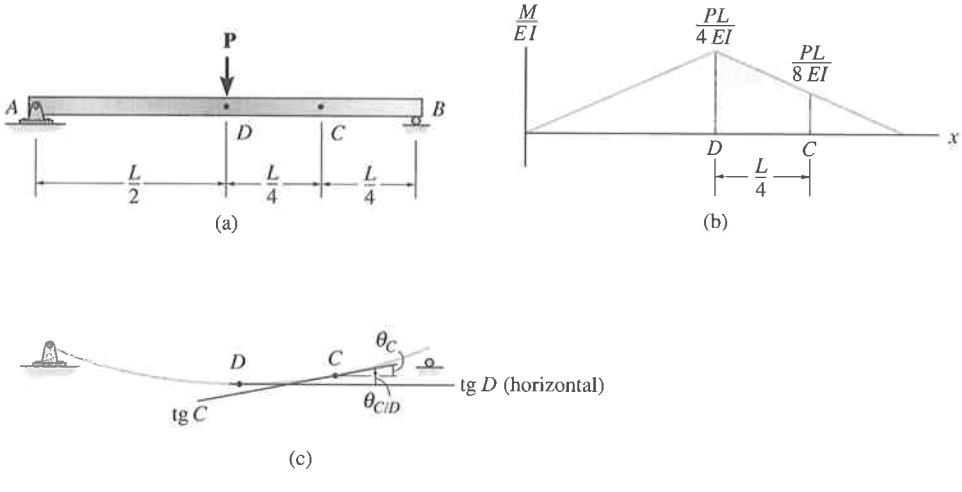


Figura 12.25

SOLUÇÃO

Diagrama M/EI. Veja a Figura 12.25*b*.

Linha Elástica. Como o carregamento é aplicado simetricamente à viga, a linha elástica é simétrica e a tangente em D é horizontal (Figura 12.25*c*). A tangente em C também foi traçada, uma vez que devemos determinar a inclinação θ_C. Pela construção, o ângulo $\theta_{C/D}$ entre a tg D e a tg C é igual a θ_C, isto é:

$$\theta_C = \theta_{C/D}$$

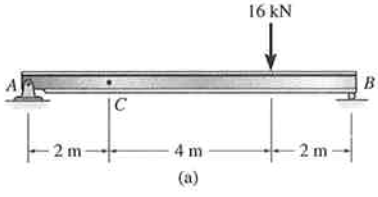
Teorema dos Momentos de Áreas. De acordo com o Teorema 1, $\theta_{C/D}$ é igual à área sob o diagrama M/EI entre os pontos D e C. Temos:

$$\theta_C = \theta_{C/D} = \left(\frac{PL}{8EI}\right)\left(\frac{L}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{PL}{4EI} - \frac{PL}{8EI}\right)\left(\frac{L}{4}\right) = \frac{3PL^2}{64EI} \qquad \textbf{Resposta}$$

O que indica o resultado positivo?

EXEMPLO 12.10

Determinar a inclinação no ponto C da viga de aço mostrada na Figura 12.26*a*. Adotar $E_{aço} = 200$ GPa, $I = 17(10^6)$ mm^4.

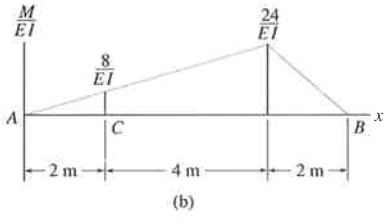


SOLUÇÃO

Diagrama M/EI. Veja a Figura 12.26*b*.

Linha Elástica. A linha elástica é mostrada na Figura 12.26*c*. A tangente em C também foi traçada — visto que é necessário determinar θ_C —, assim como as tangentes nos *apoios* A e B. O ângulo $\theta_{C/A}$ é o ângulo entre as tangentes em A e C. Determina-se a inclinação em A, θ_A, na Figura 12.26*c*, usando $|\theta_A| = |t_{B/A}|/L_{AB}$. A equação é válida uma vez que $t_{B/A}$ é, na verdade, muito pequeno, de modo que $t_{B/A}$, em radianos, pode ser aproximado pelo comprimento do arco circular definido pelo raio $L_{AB} = 8$ m e pela varredura de θ_A. (Lembrar que $s = \theta r$.) Pela geometria da Figura 12.26*c*, temos:

$$|\theta_C| = |\theta_A| - |\theta_{C/A}| = \left|\frac{t_{B/A}}{8}\right| - |\theta_{C/A}| \qquad (1)$$



Observe que o Exemplo 12.9 também pode ser resolvido por esse método.

Teoremas dos Momentos de Áreas. De acordo com o Teorema 1, $\theta_{C/A}$ equivale à área sob o diagrama M/EI entre os pontos A e C, ou seja:

$$\theta_{C/A} = \frac{1}{2}(2\text{ m})\left(\frac{8\text{ kN}\cdot\text{m}}{EI}\right) = \frac{8\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI}$$

Já segundo o Teorema 2, $t_{B/A}$ equivale ao momento da área sob o diagrama M/EI entre B e A em relação ao ponto B (o ponto na linha elástica), visto que esse é o ponto em que o desvio da tangente deve ser determinado. Temos:

$$t_{B/A} = \left(2\text{ m} + \frac{1}{3}(6\text{ m})\right)\left[\frac{1}{2}(6\text{ m})\left(\frac{24\text{ kN}\cdot\text{m}}{EI}\right)\right] + \left(\frac{2}{3}(2\text{ m})\right)\left[\frac{1}{2}(2\text{ m})\left(\frac{24\text{ kN}\cdot\text{m}}{EI}\right)\right]$$

$$= \frac{320\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI}$$

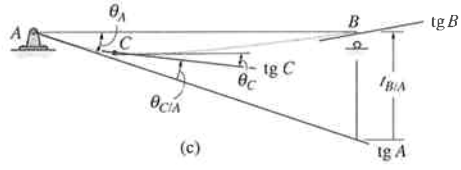


Figura 12.26

Substituindo esses resultados na Equação 1, obtemos:

$$\theta_C = \frac{320\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{(8\text{m})EI} - \frac{8\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI} = \frac{32\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI} \curvearrowright$$

Calculamos esse resultado em unidades kN e m; assim, convertendo EI nessas unidades, temos:

$$\theta_C = \frac{32\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{200(10^6)\text{ kN/m}^2\ 17(10^{-6})\text{ m}^4} = 0{,}00941\text{ rad} \curvearrowright \qquad \textbf{Resposta}$$

EXEMPLO 12.11

Determinar o deslocamento no ponto C da viga mostrada na Figura 12.27*a*. Considerar EI constante.

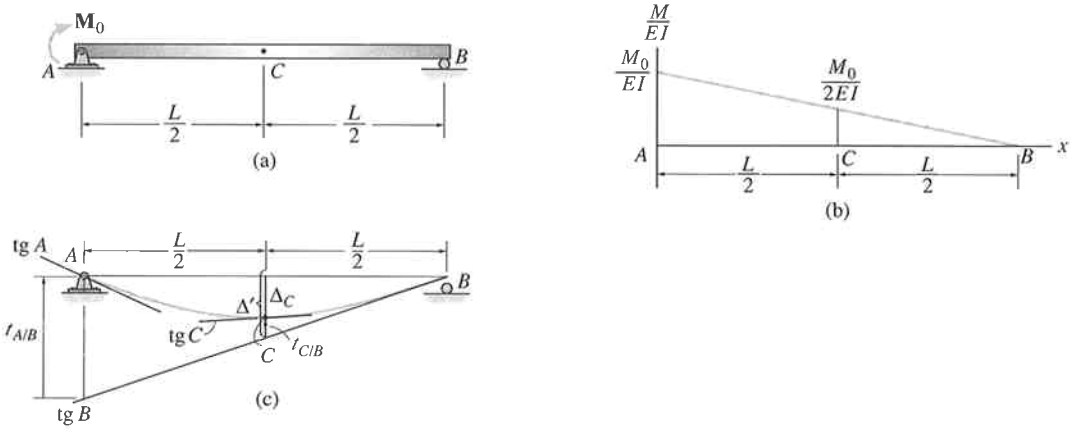


Figura 12.27

SOLUÇÃO

Diagrama M/EI. Veja a Figura 12.27*b*.

Linha Elástica. A tangente em C foi traçada na linha elástica visto que é necessário determinar Δ_C (Figura 12.27*c*). (Observe que C *não* é onde ocorre a deflexão máxima da viga, porque o carregamento e, portanto, a linha elástica *não são simétricos*.) Também estão indicadas na Figura 12.27*c* as tangentes nos apoios A e B. Vê-se que $\Delta_C = \Delta' - t_{C/B}$. Se $t_{A/B}$ estiver determinado, então Δ' pode ser encontrado pela proporcionalidade de triângulos, isto é, $\Delta'/(L/2) = t_{A/B}/L$ ou $\Delta' = t_{A/B}/2$. Portanto:

$$\Delta_C = \frac{t_{A/B}}{2} - t_{C/B} \tag{1}$$

Teorema dos Momentos de Áreas. Aplicando o Teorema 2 para determinar $t_{A/B}$ e $t_{C/B}$, temos:

$$t_{A/B} = \left(\frac{1}{3}(L)\right)\left[\frac{1}{2}(L)\left(\frac{M_0}{EI}\right)\right] = \frac{M_0L^2}{6EI}$$

$$t_{C/B} = \left(\frac{1}{3}\left(\frac{L}{2}\right)\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{M_0}{2EI}\right)\right] = \frac{M_0L^2}{48EI}$$

Substituindo esses valores na Equação 1, temos:

$$\Delta_C = \frac{1}{2}\left(\frac{M_0L^2}{6EI}\right) - \left(\frac{M_0L^2}{48EI}\right)$$

$$= \frac{M_0L^2}{16EI}\downarrow \qquad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 12.12

Determinar o deslocamento no ponto C da viga de aço com extremidade em balanço mostrada na Figura 12.28*a*. Adotar $E_{aço} = 29(10^3)$ ksi, $I = 125$ pol^4.

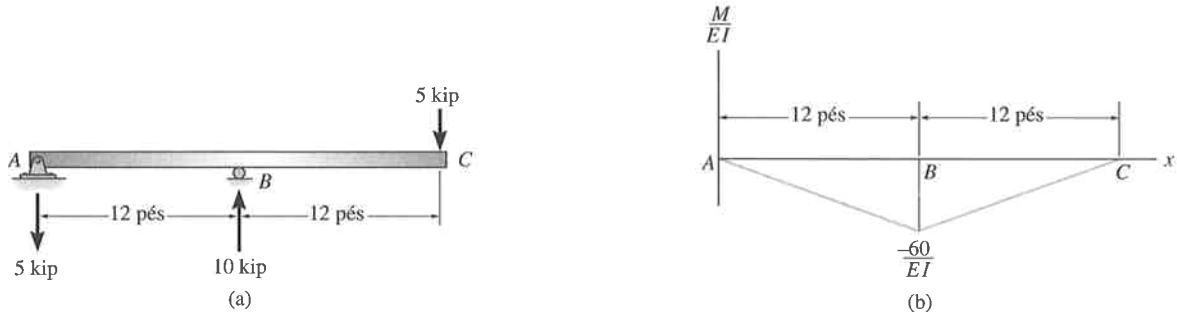


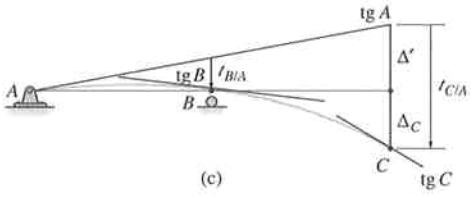
Figura 12.28

Diagrama M/EI. Veja a Figura 12.28*b*.

Linha Elástica. O carregamento provoca a deflexão da viga como mostra a Figura 12.28*c*. É necessário que determinemos Δ_C. Construindo tangentes em C e nos apoios A e B, vê-se que $\Delta_C = |t_{C/A}| - \Delta'$. Entretanto, Δ' é relacionada com $t_{B/A}$ pela proporcionalidade de triângulos; isto é, $\Delta'/24 = |t_{B/A}|/12$ ou $\Delta' = 2|t_{B/A}|$. Então:

$$\Delta_C = |t_{C/A}| - 2|t_{B/A}| \tag{1}$$

Teorema dos Momentos de Áreas. Aplicando o Teorema 2 para determinar $t_{C/A}$ e $t_{B/A}$, temos:



$$t_{C/A} = (12 \text{ pés})\left(\frac{1}{2}(24 \text{ pés})\left(-\frac{60 \text{ kip} \cdot \text{pés}}{EI}\right)\right)$$

$$= -\frac{8.640 \text{ kip} \cdot \text{pés}^3}{EI}$$

$$t_{B/A} = \left(\frac{1}{3}(12 \text{ pés})\right)\left[\frac{1}{2}(12 \text{ pés})\left(-\frac{60 \text{ kip} \cdot \text{pés}}{EI}\right)\right] = -\frac{1.440 \text{ kip} \cdot \text{pés}^3}{EI}$$

Por que esses termos são negativos? Substituindo os resultados na Equação 1, temos:

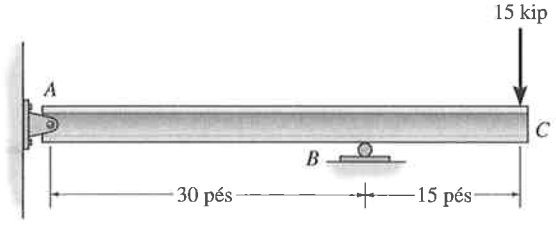
$$\Delta_C = \frac{8.640 \text{ kip} \cdot \text{pés}^3}{EI} - 2\left(\frac{1.440 \text{ kip} \cdot \text{pés}^3}{EI}\right) = \frac{5.760 \text{ kip} \cdot \text{pés}^3}{EI} \downarrow$$

Entendendo que os cálculos foram feitos com as unidades kip e pé, temos:

$$\Delta_C = \frac{5.760 \text{ kip} \cdot \text{pés}^3 \ (1.728 \text{ pol}^3/\text{pés}^3)}{[29(10^3) \text{ kip/pol}^2](125 \text{ pol}^4)} = 2{,}75 \text{ pol} \downarrow \qquad \textit{Resposta}$$

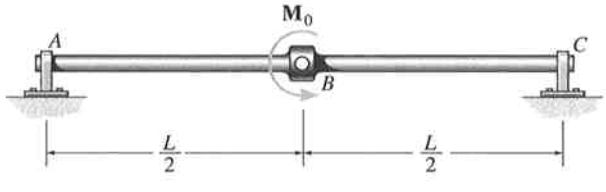
PROBLEMAS

12.42. Determinar a inclinação e a deflexão em C. Considerar EI constante. (Lembrar: 1 kip = 1.000 lb.)



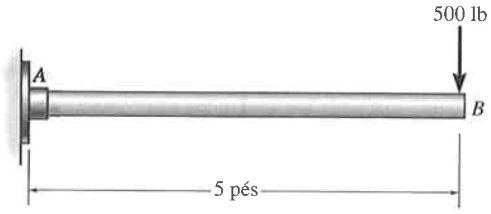
Problema 12.42

12.43. Supondo os mancais exerçam apenas reações verticais sobre o eixo, determinar a inclinação neles e a deflexão máxima do eixo. Considerar EI constante.



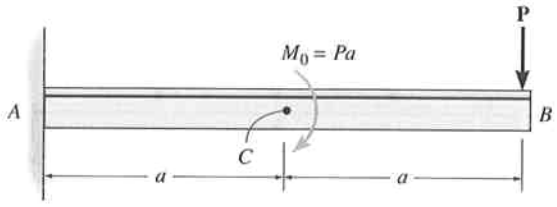
Problema 12.43

***12.44.** Determinar a inclinação e a deflexão em B se a viga de aço A-36 for (a) uma haste maciça com diâmetro de 3 pol, (b) um tubo com diâmetro externo de 3 pol e espessura de 0,25 pol.



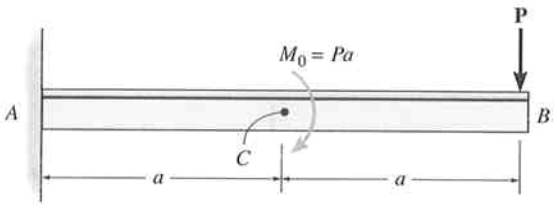
Problema 12.44

12.45. Determinar a inclinação e a deflexão em C. Considerar EI constante.



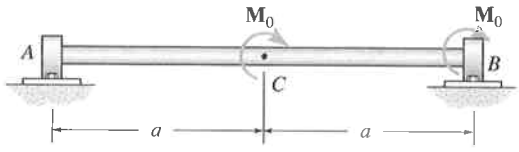
Problema 12.45

12.46. Determinar a inclinação em C e a deflexão em B. Considerar EI constante.



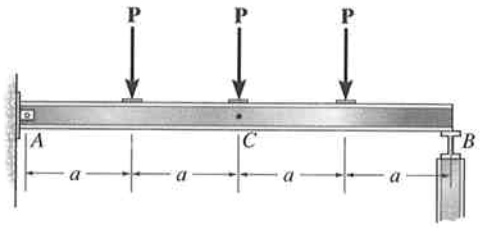
Problema 12.46

12.47. O eixo está sujeito ao carregamento mostrado. Se os mancais em A e B exercem apenas reações verticais sobre ele, qual a inclinação em A e o deslocamento em C? Considerar EI constante.



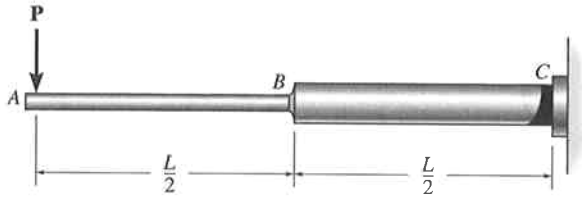
Problema 12.47

***12.48.** A viga está sujeita ao carregamento mostrado. Determinar a inclinação em A e o deslocamento em C. Supor que o apoio em C seja um pino e em B um rolete e que EI seja constante.



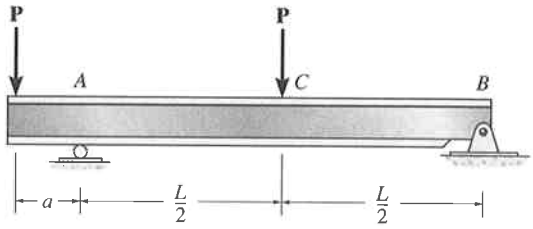
Problema 12.48

12.49. A haste compõe-se de dois eixos para os quais o momento de inércia de AB é I e de BC é $2I$. Determinar a inclinação e a deflexão máximas da haste devido ao carregamento. O módulo de elasticidade é E.



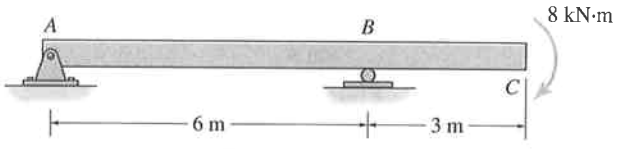
Problema 12.49

12.50. Determinar o valor de a de modo que a inclinação em A seja nula. Considerar EI constante.



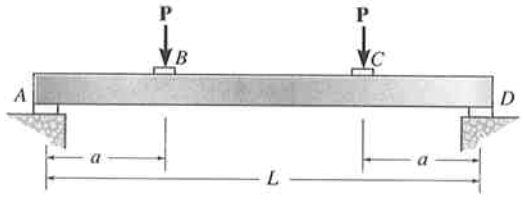
Problema 12.50

12.51. Determinar a deflexão em C e a inclinação em A, B e C. Considerar EI constante.



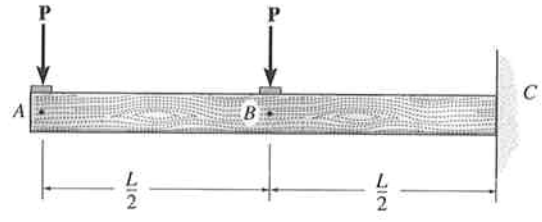
Problema 12.51

***12.52.** A viga é feita de um material cerâmico. A fim de obter seu módulo de elasticidade, pesquisadores submeteram-na ao carregamento mostrado. Supondo que o momento de inércia seja I e a viga tenha uma deflexão máxima medida Δ, determinar E. Os apoios em A e D exercem apenas reações verticais sobre ela.



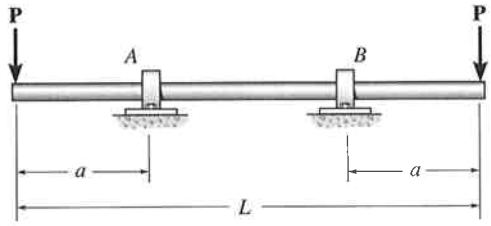
Problema 12.52

12.53. A viga está submetida às duas cargas. Determinar a inclinação e o deslocamento nos pontos A e B. Considerar EI constante.



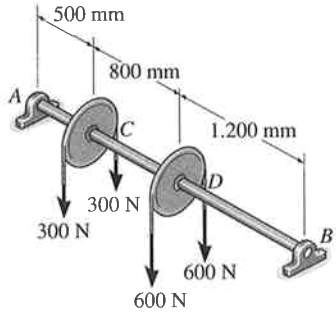
Problema 12.53

12.54. A que distância a devem ser colocados os mancais de apoio em A e B de modo que a deflexão no centro do eixo seja igual à deflexão em suas extremidades? Os mancais exercem apenas reações verticais sobre o eixo. Considerar EI constante.



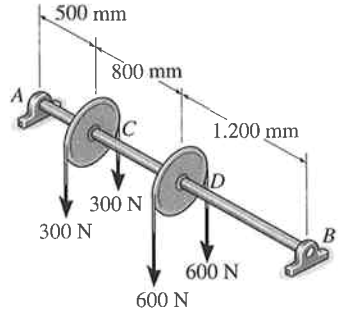
Problema 12.54

12.55. Determinar a deflexão máxima do eixo de aço A-36 que tem 50 mm de diâmetro. Ele é apoiado por mancais em suas extremidades A e B, os quais exercem apenas reações verticais sobre ele.



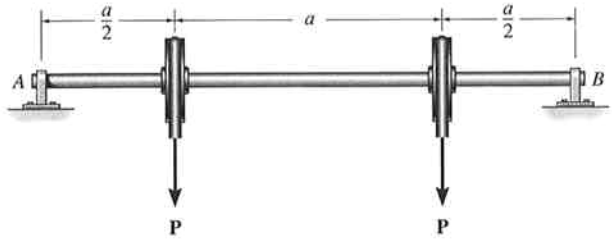
Problema 12.55

***12.56.** Determinar a inclinação, nos mancais em A e B, do eixo de aço A-36 que tem 50 mm de diâmetro. Os mancais exercem apenas reações verticais sobre ele.



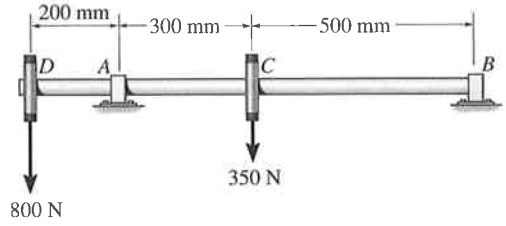
Problema 12.56

12.57. Determinar a deflexão máxima do eixo. Considerar que EI é constante e os mancais exercem apenas reações verticais sobre o eixo.



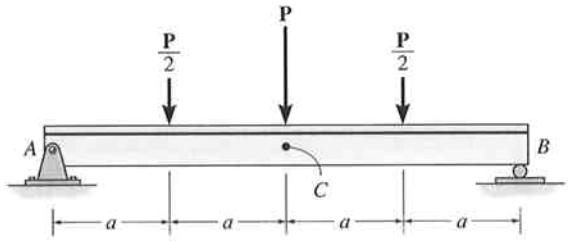
Problema 12.57

12.58. Determinar o deslocamento, na polia D, do eixo de aço A-36 que tem 20 mm de diâmetro. Os mancais em A e B exercem apenas reações verticais sobre o eixo.



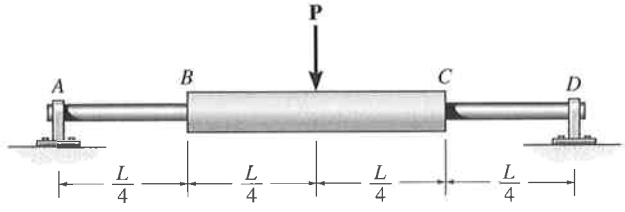
Problema 12.58

12.59. Determinar a inclinação em B e a deflexão em C. Considerar EI constante.



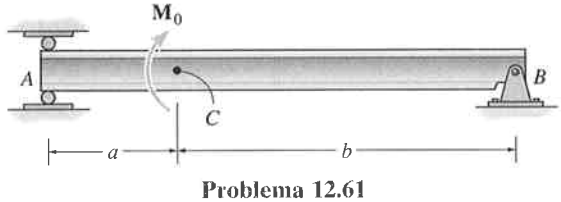
Problema 12.59

***12.60.** O eixo simplesmente apoiado tem momento de inércia $2I$ para a região BC e I para as regiões AB e CD. Determinar sua deflexão máxima devido à carga **P**. O módulo de elasticidade é E.



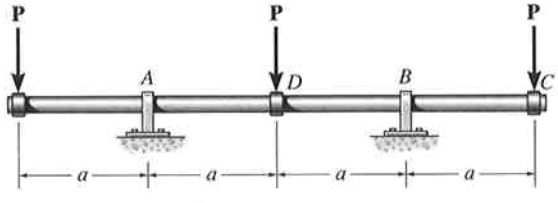
Problema 12.60

12.61. A viga está sujeita ao carregamento mostrado. Determinar a inclinação em B e a deflexão em C. Considerar EI constante.



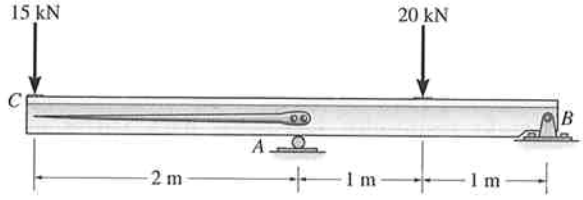
Problema 12.61

12.62. Determinar a inclinação em B e o deslocamento em C. Os mancais em A e B exercem apenas reações verticais sobre o eixo e EI é constante.



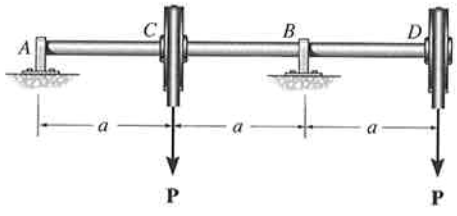
Problema 12.62

12.63. Uma viga com *EI* constante está apoiada como mostrado. Acoplado a ela em *A* há um ponteiro sem carga. Inicialmente, quando a viga não sofre carregamento, tanto ela como o ponteiro são horizontais. Determinar a distância entre a extremidade da viga e o ponteiro depois que cada um foi deslocado pela carga mostrada.



Problema 12.63

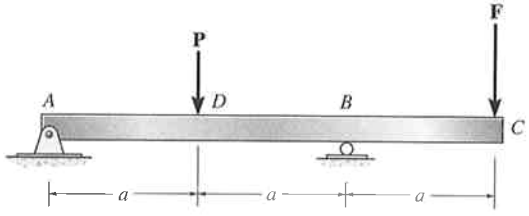
***12.64.** Determinar a inclinação do eixo em *A* e o deslocamento em *D*. Os mancais em *A* e *B* exercem apenas reações verticais sobre o eixo e *EI* é constante.



Problema 12.64

12.65. A viga está submetida à carga **P** como mostrado. Determinar a intensidade da força **F** que deve ser aplicada na extremidade em balanço *C* de modo que o deslocamento nesse ponto seja nulo. Considerar *EI* constante.

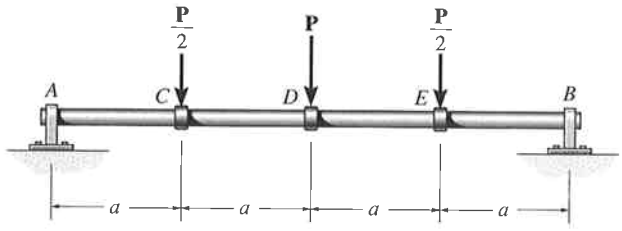
12.66. A viga está submetida à carga **P** como mostrado. Se **F** = **P**, determinar o deslocamento em *D*. Considerar *EI* constante.



Problemas 12.65/12.66

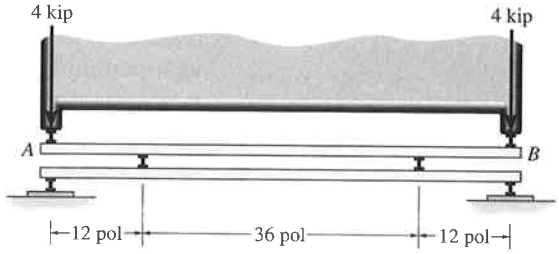
12.67. Determinar o deslocamento em *C*, *D* e *E*. Os mancais em *A* e *B* exercem apenas reações verticais sobre o eixo. Considerar *EI* constante.

***12.68.** Determinar a inclinação nos mancais em *A* e *B*, os quais exercem apenas reações verticais sobre o eixo. Considerar *EI* constante.



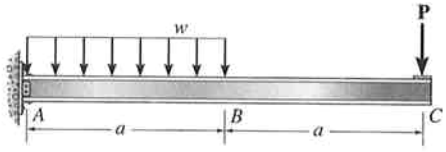
Problemas 12.67/12.68

12.69. As duas barras de aço A-36 têm espessura de 1 pol e largura de 4 pol. Foram projetadas para atuar como mola da máquina, que exerce uma força de 4 kip sobre elas em *A* e *B*. Se os apoios exercem apenas reações verticais sobre as barras, qual a deflexão máxima na barra inferior? (Lembrar: 1 kip = 1.000 lb.)



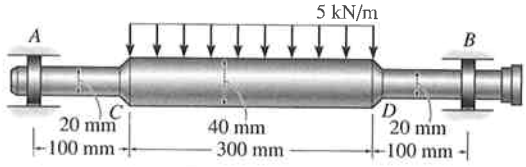
Problema 12.69

12.70. A viga em balanço está submetida ao carregamento mostrado. Determinar a inclinação e o deslocamento em *C*. Supor que o apoio em *A* seja fixo e *EI* seja constante.



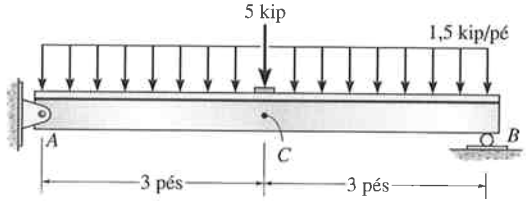
Problema 12.70

12.71. O eixo de aço A-36 é usado para apoiar um rotor que exerce sobre ele uma carga uniforme de 5 kN/m na região *CD*. Determinar a inclinação do eixo nos mancais *A* e *B*, os quais exercem apenas reações verticais sobre ele.



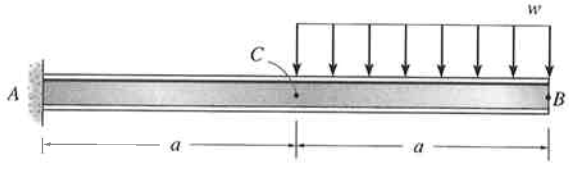
Problema 12.71

***12.72.** Determinar a inclinação em *B* e o deslocamento em *C*. O elemento é um perfil de aço estrutural A-36 para o qual $I = 76{,}8\ \text{pol}^4$.



Problema 12.72

12.73. Determinar a inclinação em *C* e o deslocamento em *B* considerando *EI* constante.

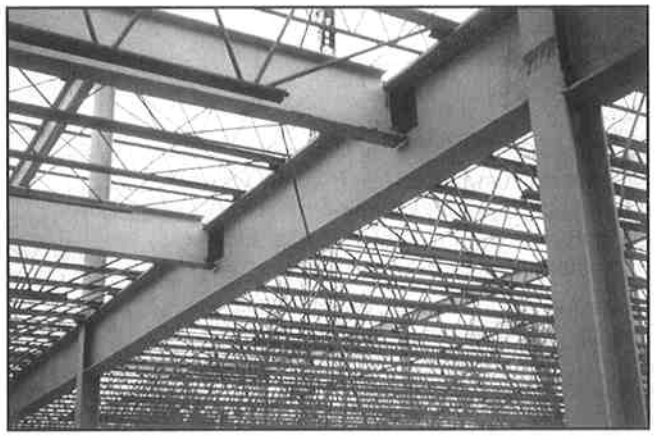


Problema 12.73

12.5 MÉTODO DA SUPERPOSIÇÃO

A equação diferencial $EId^4v/dx^4 = -w(x)$ satisfaz os dois requisitos necessários para a aplicação do princípio da superposição de efeitos, ou seja, a carga $w(x)$ relaciona-se linearmente à deflexão $v(x)$ e supõe-se que ela não altere significativamente a geometria original da viga ou do eixo. Como resultado, as deflexões de uma série de cargas separadas que atuam sobre uma viga podem ser superpostas. Por exemplo, se v_1 for a deflexão de uma carga e v_2 a deflexão de outra, a deflexão total para ambas as cargas atuando juntas é a soma algébrica $v_1 + v_2$. Usando resultados tabelados para vários carregamentos de viga, como os relacionados no Apêndice C, ou aqueles encontrados em vários manuais de engenharia, é possível determinar a inclinação e o deslocamento em um ponto de uma viga sujeita a diversos carregamentos diferentes adicionando algebricamente os efeitos de seus vários componentes.

Os exemplos a seguir ilustram como usar o método da superposição para resolver problemas de deflexão em que esta é provocada não apenas pelas deformações da viga, como também pelos deslocamentos do corpo rígido, que podem ocorrer quando a viga é suportada por molas ou partes de uma viga segmentada são suportadas por articulações.



A deflexão resultante em qualquer ponto desta viga pode ser determinada pela superposição das deflexões provocadas por cada uma das cargas que atuam sobre ela.

EXEMPLO 12.13

Determinar o deslocamento no ponto C e a inclinação no apoio A da viga mostrada na Figura 12.29*a*. Considerar EI constante.

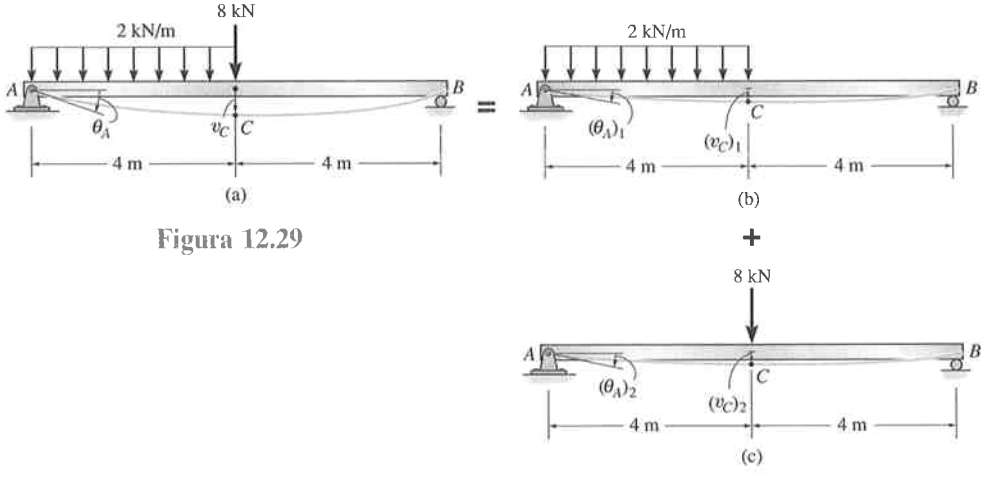


Figura 12.29

SOLUÇÃO

O carregamento pode ser separado em duas partes como mostram as figuras 12.29*b* e 12.29*c*. Determinamos o deslocamento em C e a inclinação em A aplicando a tabela do Apêndice C a cada parte.

Para a carga distribuída:

$$(\theta_A)_1 = \frac{3wL^3}{128EI} = \frac{3(2\text{ kN/m})(8\text{ m})^3}{128EI} = \frac{24\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI} \curvearrowright$$

$$(v_C)_1 = \frac{5wL^4}{768EI} = \frac{5(2\text{ kN/m})(8\text{ m})^4}{768EI} = \frac{53{,}33\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI} \downarrow$$

Para a força concentrada de 8 kN:

$$(\theta_A)_2 = \frac{PL^2}{16EI} = \frac{8\text{ kN}(8\text{ m})^2}{16EI} = \frac{32\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI} \curvearrowright$$

$$(v_C)_2 = \frac{PL^3}{48EI} = \frac{8\text{ kN}(8\text{ m})^3}{48EI} = \frac{85{,}33\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI} \downarrow$$

O deslocamento total em C e a inclinação em A são as somas algébricas desses componentes. Então:

$$(+\curvearrowright) \qquad \theta_A = (\theta_A)_1 + (\theta_A)_2 = \frac{56\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI} \qquad \textit{Resposta}$$

$$(+\downarrow) \qquad v_C = (v_C)_1 + (v_C)_2 = \frac{139\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI} \downarrow \qquad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 12.14

Determinar o deslocamento da extremidade C da viga parcialmente em balanço mostrada na Figura 12.30*a*. Considerar EI constante.

SOLUÇÃO

Como a tabela do Apêndice C *não* inclui vigas parcialmente em balanço, a viga será separada em uma parte simplesmente apoiada e uma parte em balanço. Vamos calcular primeiro a inclinação em B, provocada pela carga distribuída que atua sobre o vão simplesmente apoiado (Figura 12.30*b*).

$$(\theta_B)_1 = \frac{wL^3}{24EI} = \frac{5\text{ kN/m}(4\text{ m})^3}{24EI} = \frac{13{,}33\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI} \curvearrowleft$$

Como esse ângulo é *pequeno*, $(\theta_B)_1 \approx \text{tg}(\theta_B)_1$, e o deslocamento vertical no ponto C é:

$$(v_C)_1 = (2\text{ m})\left(\frac{13{,}33\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI}\right) = \frac{26{,}67\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI} \uparrow$$

A seguir, vemos que a carga de 10 kN na região em balanço provoca uma força de 10 kN e um conjugado de 20 kN · m estaticamente equivalentes no apoio B do vão simplesmente apoiado (Figura 12.30*c*). A força de 10 kN não provoca deslocamento ou inclinação em B; entretanto, o momento de 20 kN · m provoca uma inclinação. A inclinação em B devida ao momento é:

$$(\theta_B)_2 = \frac{M_0 L}{3EI} = \frac{20\text{ kN}\cdot\text{m}(4\text{ m})}{3EI} = \frac{26{,}67\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI} \curvearrowright$$

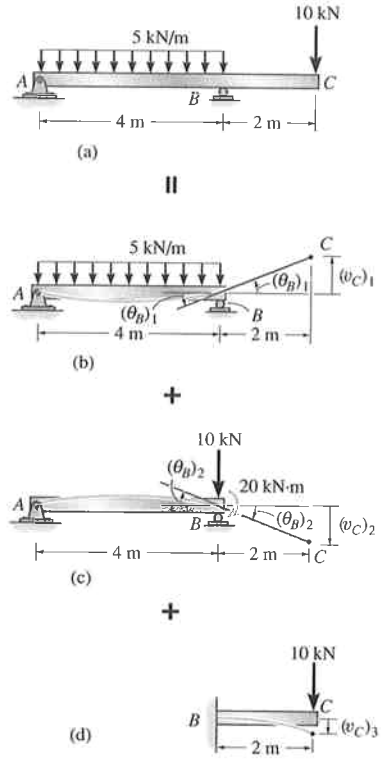


Figura 12.30

Assim, o ponto C é deslocado:

$$(v_C)_2 = (2\text{ m})\left(\frac{26{,}7\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI}\right) = \frac{53{,}33\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\downarrow$$

Finalmente, a parte em balanço BC é deslocada pela força de 10 kN (Figura 12.30d). Temos:

$$(v_C)_3 = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{10\text{ kN}(2\text{ m})^3}{3EI} = \frac{26{,}67\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\downarrow$$

Somando algebricamente esses resultados, obtemos o deslocamento final do ponto C:

$$(+\downarrow) \qquad v_C = -\frac{26{,}7}{EI} + \frac{53{,}3}{EI} + \frac{26{,}7}{EI} = \frac{53{,}3\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\downarrow \qquad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 12.15

Determinar o deslocamento da extremidade C da viga em balanço mostrada na Figura 12.31. Considerar EI constante.

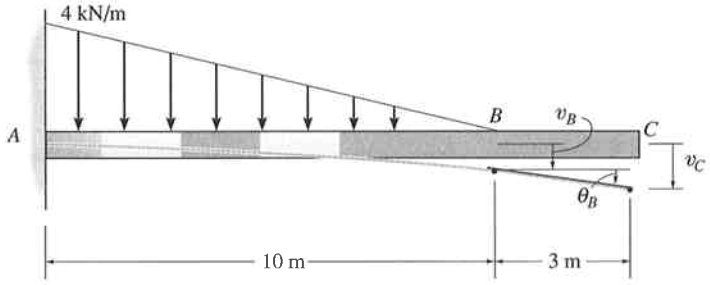


Figura 12.31

SOLUÇÃO

Segundo a tabela do Apêndice C para carregamentos triangulares, a inclinação e o deslocamento no ponto B são:

$$\theta_B = \frac{w_0L^3}{24\,EI} = \frac{4\text{ kN/m}\,(10\text{m})^3}{24\,EI} = \frac{166{,}67\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI}$$

$$v_B = \frac{w_0L^4}{30\,EI} = \frac{4\text{ kN/m}\,(10\text{m})^4}{30\,EI} = \frac{1.333{,}33\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI}$$

A região BC sem carga permanece reta, como mostra a Figura 12.31. Uma vez que θ_B é pequeno, o deslocamento em C torna-se:

$$(+\downarrow) \qquad v_C = v_B + \theta_B\,(3\text{ m})$$

$$= \frac{1.333{,}33\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI} + \frac{166{,}67\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI}\,(3\text{ m})$$

$$= \frac{1.833\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\downarrow \qquad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 12.16

A barra de aço mostrada na Figura 12.32*a* é suportada por duas molas em suas extremidades A e B. Cada mola tem rigidez $k = 15$ kip/pé e inicialmente não está esticada. Se a barra for carregada com uma força de 3 kip no ponto C, qual será o deslocamento vertical da força? Desprezar o peso da barra e adotar $E_{aço} = 29(10^3)$ kip, $I = 12$ pol^4.

SOLUÇÃO

As reações nas extremidades A e B foram calculadas e estão mostradas na Figura 12.32*b*. Cada mola se deflete em uma quantidade:

$$(v_A)_1 = \frac{2 \text{ kip}}{15 \text{ kip/pé}} = 0{,}1333 \text{ pé}$$

$$(v_B)_1 = \frac{1 \text{ kip}}{15 \text{ kip/pé}} = 0{,}0667 \text{ pé}$$

Se a barra for *rígida*, esses deslocamentos farão com que se mova para a posição mostrada na Figura 12.32*b*. Nesse caso, o deslocamento vertical em C será:

$$(v_C)_1 = (v_B)_1 + \frac{6 \text{ pés}}{9 \text{ pés}}[(v_A)_1 - (v_B)_1]$$

$$= 0{,}0667 \text{ pé} + \frac{2}{3}[0{,}1333 \text{ pé} - 0{,}0667 \text{ pé}] = 0{,}1111 \text{ pé} \downarrow$$

Podemos calcular o deslocamento em C provocado pela *deformação* da barra (Figura 12.32*c*) usando a tabela do Apêndice C. Temos:

$$(v_C)_2 = \frac{Pab}{6EIL}(L^2 - b^2 - a^2)$$

$$= \frac{3 \text{ kip}(3 \text{ pés})(6 \text{ pés})[(9 \text{ pés})^2 - (6 \text{ pés})^2 - (3 \text{ pés})^2]}{6[29(10^3)] \text{ kip/pol}^2(144 \text{ pol}^2/1 \text{ pé}^2)12 \text{ pol}^4(1 \text{ pé}^4/20.736 \text{ pol}^4)(9 \text{ pés})}$$

$$= 0{,}0149 \text{ pé} \downarrow$$

Somando os dois componentes do deslocamento, obtemos:

$$(+\downarrow) \qquad v_C = 0{,}1111 \text{ pé} + 0{,}0149 \text{ pé} = 0{,}126 \text{ pé} = 1{,}51 \text{ pol} \downarrow \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

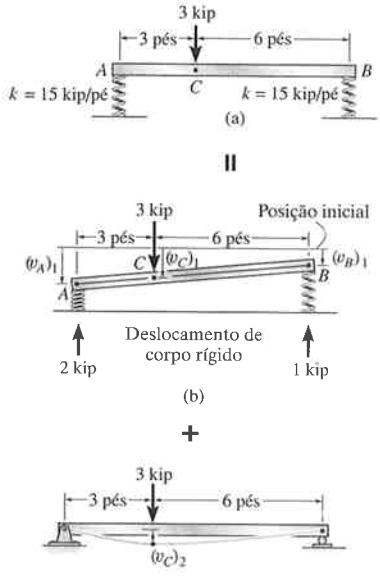
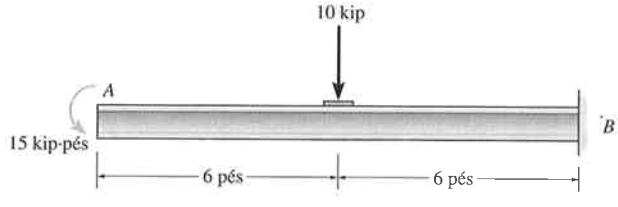


Figura 12.32

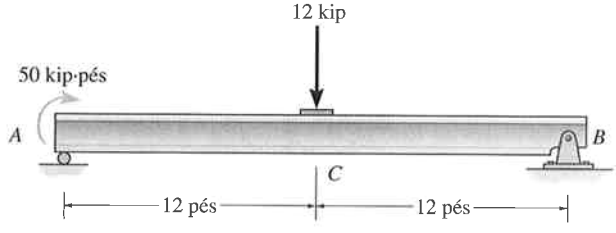
PROBLEMAS

12.74. A viga em balanço de perfil W8 × 48 é feita de aço A-36 e está submetida à carga mostrada. Determinar a deflexão em sua extremidade A.



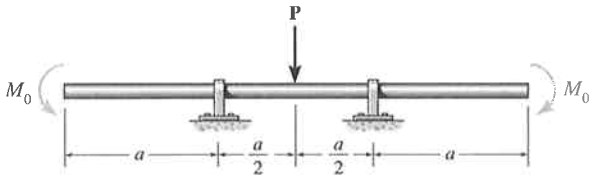
Problema 12.74

12.75. A viga simplesmente apoiada de perfil W12 × 45 é feita de aço A-36 e está submetida à carga mostrada. Determinar a deflexão em seu centro C.



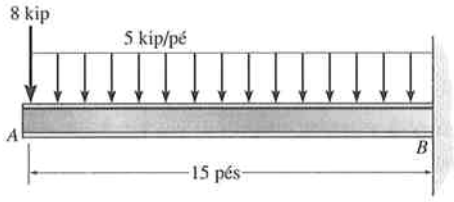
Problema 12.75

***12.76.** Determinar o momento M_0 em termos da carga P e da dimensão a de modo que a deflexão no centro da viga seja nula. Considerar EI constante.



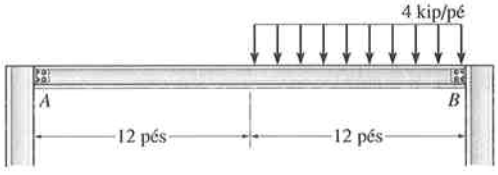
Problema 12.76

12.77. A viga de perfil W24 × 104 é feita de aço A-36 e está submetida ao carregamento mostrado. Determinar o deslocamento em sua extremidade A.



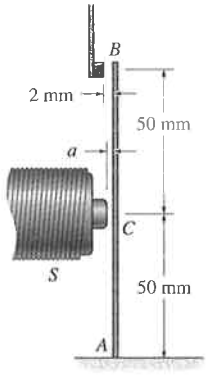
Problema 12.77

12.78. A viga suporta o carregamento mostrado. Restrições do código, devido a um forro de gesso, exigem que a deflexão máxima não exceda 1/360 da largura do vão. Selecionar no Apêndice B a mais leve viga de abas largas de aço A-36 capaz de satisfazer o requisito e suportar a carga com segurança. A tensão de flexão admissível é $\sigma_{adm} = 24$ ksi e a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 14$ ksi. Supor que A seja um apoio por rolete e B seja um pino.



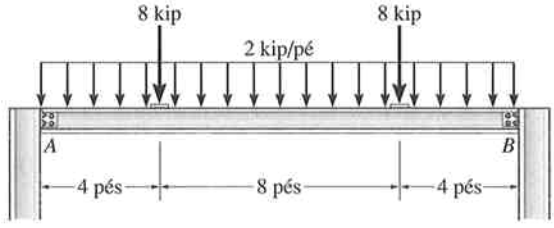
Problema 12.78

12.79. O interruptor do relé consiste em uma tira fina de metal ou armadura AB feita de bronze C83400 e atraída para o solenóide S por um campo magnético. Determinar a menor força F necessária para atrair a armadura em C a fim de que se dê o contato na extremidade livre B. Além disso, qual deve ser a distância a para que essa condição ocorra? A armadura é fixa em A e tem momento de inércia $I = 0{,}18(10^{-12})$ m^4.



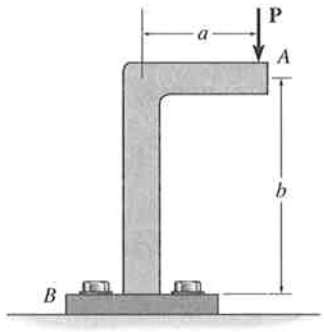
Problema 12.79

***12.80.** A viga simplesmente apoiada suporta uma carga uniforme de 2 kip/pé. Restrições do código, devido a um forro de gesso, exigem que a deflexão máxima não exceda 1/360 da largura do vão. Selecionar no Apêndice B a mais leve viga de abas largas de aço A-36 capaz de satisfazer o requisito e suportar a carga com segurança. A tensão de flexão admissível é $\sigma_{adm} = 24$ ksi, e a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 14$ ksi. Supor que A seja um apoio por pino e B um rolete.



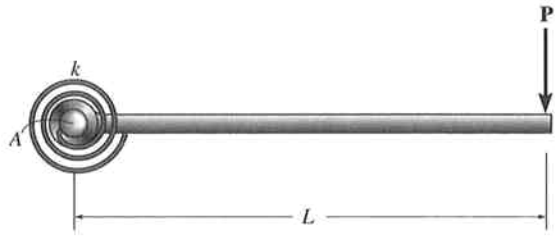
Problema 12.80

12.81. Determinar a deflexão vertical na extremidade A do suporte. Supor que ele esteja engastado em sua base B e que EI seja constante. Desprezar a deflexão axial.



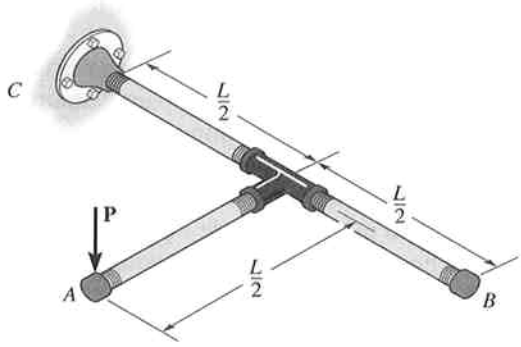
Problema 12.81

12.82. A haste está presa por um pino na extremidade A e acoplada a uma mola de torção com rigidez k, que mede o torque por radiano de rotação da mola. Se uma força **P** estiver sempre aplicada perpendicularmente à extremidade da haste, qual será o deslocamento da força? Considerar EI constante.



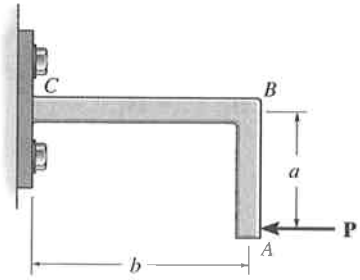
Problema 12.82

12.83. O conjunto consiste em três tubos de comprimento igual, com rigidez à flexão EI e rigidez à torção GJ. Determinar a deflexão vertical no ponto A.



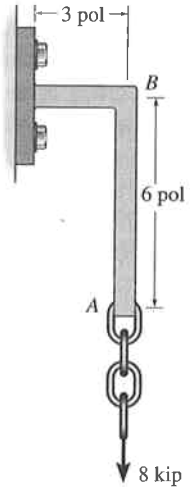
Problema 12.83

***12.84.** Determinar a inclinação na extremidade A do suporte. Supor que ele esteja engastado em sua base C e que EI seja constante. Desprezar a deformação axial do segmento BC.



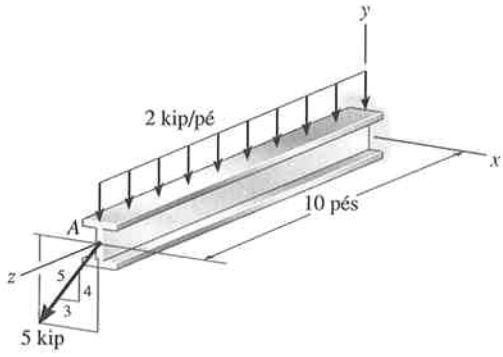
Problema 12.84

12.85. Determinar a deflexão vertical e a inclinação na extremidade A do suporte. Supor que ele esteja engastado em sua base e que EI seja constante. Desprezar a deformação axial do segmento AB.



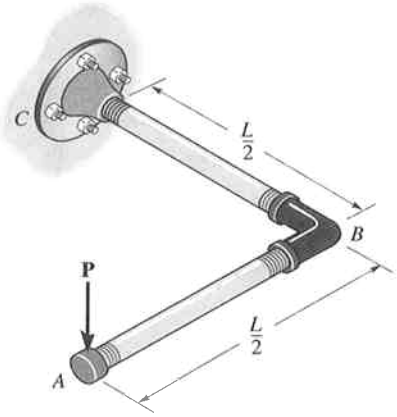
Problema 12.85

12.86. A viga de perfil W24 × 104 de aço A-36 é usada para suportar a carga uniforme distribuída e a força concentrada aplicada em sua extremidade. Se a força atuar no ângulo com a vertical mostrado, quais serão os deslocamentos horizontal e vertical no ponto A?



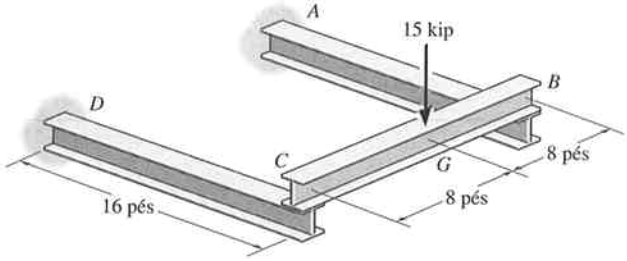
Problema 12.86

12.87. O conjunto consiste em dois tubos de comprimento igual, com rigidez à flexão EI e rigidez à torção GJ. Determinar o deslocamento vertical no ponto A.



Problema 12.87

***12.88.** A estrutura consiste em duas vigas de aço A-36 em balanço CD e BA e uma viga simplesmente apoiada CB. Se cada viga for feita de aço e tiver momento de inércia em relação ao seu eixo principal $I_x = 118\ \text{pol}^4$, qual será a deflexão no centro G da viga CB?



Problema 12.88

12.6 VIGAS E EIXOS ESTATICAMENTE INDETERMINADOS

A análise de barras estaticamente indeterminadas com carga axial e eixos com carga de torção foi discutida nas seções 4.4 e 5.5, respectivamente. Nesta seção vamos apresentar um método geral para determinar as reações de vigas e eixos estaticamente indeterminados. Especificamente, um elemento de qualquer tipo é classificado como *estaticamente indeterminado* se o número de reações desconhecidas *excede* o número de equações de equilíbrio disponíveis.

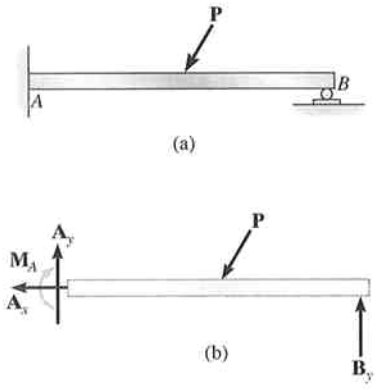


Figura 12.33

As reações de apoio na viga ou no eixo que *não são necessárias* para mantê-los em equilíbrio estável são chamadas *redundantes*. O número de reações redundantes é denominado *grau de indeterminação*. Como exemplo, consideremos a viga mostrada na Figura 12.33*a*. Se for traçado seu diagrama de corpo livre (Figura 12.33*b*), haverá quatro reações de apoio desconhecidas e, como estão disponíveis três equações de equilíbrio para a solução, a viga é classificada como indeterminada de primeiro grau. Tanto $\mathbf{A}_y$, $\mathbf{B}_y$ ou $\mathbf{M}_A$ podem ser classificadas como redundantes, porque, se qualquer uma dessas reações for removida, a viga permanecerá estável e em equilíbrio ($\mathbf{A}_x$ não pode ser classificada como redundante, porque se for removida $\Sigma F_x = 0$ não será satisfeita). De maneira semelhante, a *viga contínua* da Figura 12.34*a* é indeterminada de segundo grau, uma vez que há cinco reações desconhecidas e apenas três equações de equilíbrio disponíveis (Figura 12.34*b*). Nesse caso, as duas reações de apoio redundantes podem ser escolhidas entre $\mathbf{A}_y$, $\mathbf{B}_y$, $\mathbf{C}_y$ e $\mathbf{D}_y$.

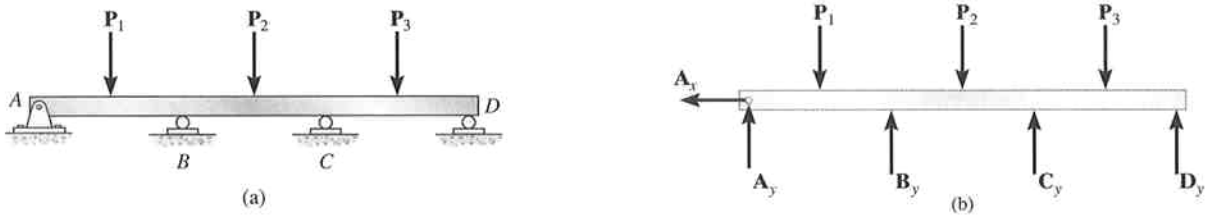
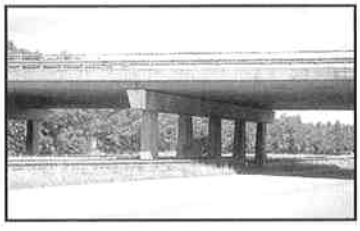


Figura 12.34



Um exemplo de viga estaticamente indeterminada usada para apoiar o tabuleiro da ponte.

Para determinar as reações de vigas ou de eixos estaticamente indeterminados, é necessário primeiro especificar as reações redundantes. Para tanto, podemos usar as condições de geometria conhecidas como *condições de compatibilidade*. Uma vez definidas, as reações redundantes são aplicadas à viga e as reações restantes são definidas pelas equações de equilíbrio.

Nas seções que se seguem ilustraremos esse procedimento de solução usando o método da integração direta (Seção 12.7); o método dos momentos de áreas (Seção 12.8); e o método de superposição de efeitos (Seção 12.9).

12.7 VIGAS E EIXOS ESTATICAMENTE INDETERMINADOS — MÉTODO DA INTEGRAÇÃO DIRETA

O método da integração direta discutido na Seção 12.2 requer duas integrações da equação diferencial $d^2v/dx^2 = M/EI$, uma vez que o momento interno M da viga é expresso em função da posição x. Se a viga for estaticamente indeterminada, no entanto, M também poderá ser expresso em termos das reações redundantes *desconhecidas*. Depois de integrarmos essa equação duas vezes, teremos duas constantes de integração e as reações redundantes para determinar. Apesar disso, as incógnitas são sempre determinadas pelas con-

dições de contorno e/ou continuidade do problema. A viga da Figura 12.35*a*, por exemplo, tem uma reação redundante, que pode ser $\mathbf{A}_y$, $\mathbf{M}_A$ ou $\mathbf{B}_y$ (Figura 12.35*b*). Uma vez que tal reação seja escolhida, o momento interno **M** será escrito em termos dela e, ao integrar a relação momento-deslocamento, poderemos então determinar as duas constantes de integração e a reação redundante pelas *três* condições de contorno $v = 0$ em $x = 0$, $dv/dx = 0$ em $x = 0$ e $v = 0$ em $x = L$.

Os problemas a seguir ilustram aplicações específicas desse método de acordo com o procedimento de análise descrito na Seção 12.2.

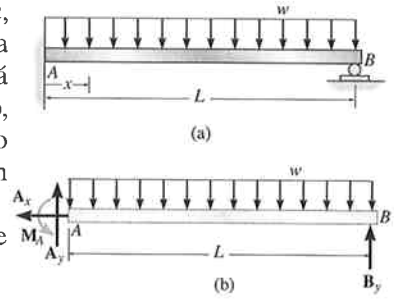


Figura 12.35

EXEMPLO 12.17

A viga está submetida ao carregamento distribuído mostrado na Figura 12.36*a*. Determinar as reações em A considerando EI constante.

SOLUÇÃO

Linha Elástica. A viga deflete-se como mostra a Figura 12.36*a*. É necessária apenas uma coordenada x. Por conveniência, vamos considerá-la orientada para a direita, uma vez que a fórmula do momento interno é fácil de expressar.

Função do Momento Fletor. A viga é indeterminada de primeiro grau como indica seu diagrama de corpo livre (Figura 12.36*b*). Podemos expressar o momento interno em termos da força redundante em A usando o segmento mostrado na Figura 12.36*c*. Aqui:

$$M = A_y x - \frac{1}{6} w_0 \frac{x^3}{L}$$

Inclinação e Linha Elástica. Aplicando a Equação 12.10, temos:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = A_y x - \frac{1}{6} w_0 \frac{x^3}{L}$$

$$EI\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2} A_y x^2 - \frac{1}{24} w_0 \frac{x^4}{L} + C_1$$

$$EIv = \frac{1}{6} A_y x^3 - \frac{1}{120} w_0 \frac{x^5}{L} + C_1 x + C_2$$

As três incógnitas A_y, C_1 e C_2 são determinadas pelas condições de contorno $x = 0$, $v = 0$; $x = L$, $dv/dx = 0$; e $x = L$, $v = 0$. Aplicando essas condições, temos:

$$x = 0,\ v = 0; \qquad 0 = 0 - 0 + 0 + C_2$$

$$x = L,\ \frac{dv}{dx} = 0; \qquad 0 = \frac{1}{2} A_y L^2 - \frac{1}{24} w_0 L^3 + C_1$$

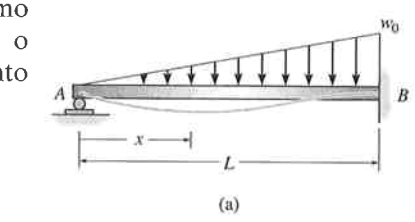
$$x = L,\ v = 0; \qquad 0 = \frac{1}{6} A_y L^3 - \frac{1}{120} w_0 L^4 + C_1 L + C_2$$

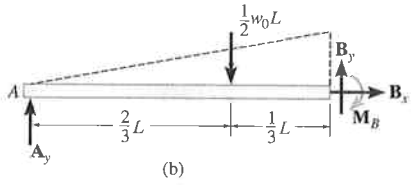
Resolvendo:

$$A_y = \frac{1}{10} w_0 L$$

$$C_1 = -\frac{1}{120} w_0 L^3 \quad C_2 = 0 \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Usando-se o resultado de A_y, as reações em B podem ser determinadas pelas equações de equilíbrio (Figura 12.36*b*). Mostrar que $B_x = 0, B_y = 2w_0L/5$ e $M_B = w_0L^2/15$.





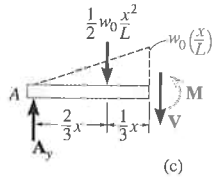
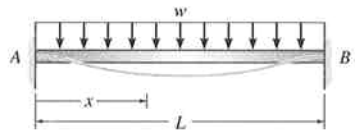


Figura 12.36

EXEMPLO 12.18



(a)

A viga da Figura 12.37*a* está engastada em ambas as extremidades e sujeita ao carregamento uniforme mostrado. Determinar as reações nos apoios desprezando o efeito da carga axial.

SOLUÇÃO

Linha Elástica. A viga deflete-se como mostra a Figura 12.37*a*. Como no problema anterior, somente uma coordenada x é necessária para a solução, uma vez que a carga é contínua em todo o vão.

Função do Momento Fletor. Pelo diagrama de corpo livre (Figura 12.37*b*), as respectivas reações de cisalhamento e momento em A e B devem ser iguais, uma vez que há simetria no carregamento e na geometria. Devido a essa condição, a equação de equilíbrio, $\Sigma F_y = 0$, requer:

$$V_A = V_B = \frac{wL}{2} \qquad \textit{Resposta}$$

A viga é indeterminada de primeiro grau, sendo M' a reação redundante. Usando o segmento da viga mostrado na Figura 12.37*c*, podemos expressar o momento interno **M** em termos de M' como segue:

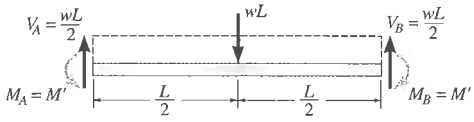
$$M = \frac{wL}{2}x - \frac{w}{2}x^2 - M'$$

Inclinação e Linha Elástica. Aplicando a Equação 12.10, temos:

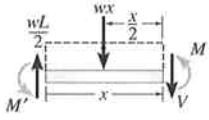
$$EI\frac{d^2v}{dx} = \frac{wL}{2}x - \frac{w}{2}x^2 - M'$$

$$EI\frac{dv}{dx} = \frac{wL}{4}x^2 - \frac{w}{6}x^3 - M'x + C_1$$

$$EIv = \frac{wL}{12}x^3 - \frac{w}{24}x^4 - \frac{M'}{2}x^2 + C_1x + C_2$$



(b)



(c)

Figura 12.37

As três incógnitas (M', C_1 e C_2) são determinadas pelas três condições de contorno $v = 0$ em $x = 0$, que dá $C_2 = 0$; $dv/dx = 0$ em $x = 0$, que dá $C_1 = 0$; e $v = 0$ em $x = L$, que dá:

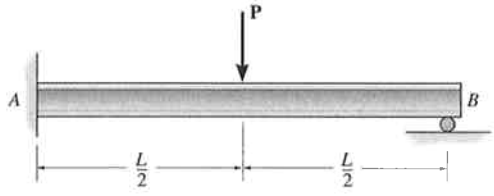
$$M' = \frac{wL^2}{12} \qquad \textit{Resposta}$$

Usando esses resultados, observe que devido à simetria a condição de contorno remanescente $dv/dx = 0$ em $x = L$ é automaticamente satisfeita.

Deve-se compreender que esse método de solução é, em geral, adequado quando apenas uma coordenada x é necessária para descrever a linha elástica. Se forem necessárias diversas coordenadas x, as equações de continuidade terão de ser escritas, o que complicará o processo de solução.

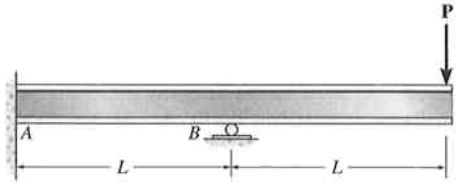
PROBLEMAS

12.89. Determinar as reações nos apoios A e B e depois desenhar os diagramas de cisalhamento e momento fletor. Usar as funções de descontinuidade e considerar EI constante.



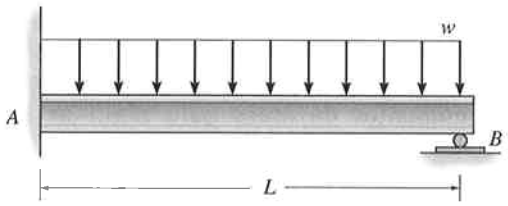
Problema 12.89

12.90. Determinar as reações nos apoios e depois desenhar os diagramas de cisalhamento e momento fletor. Considerar EI constante.



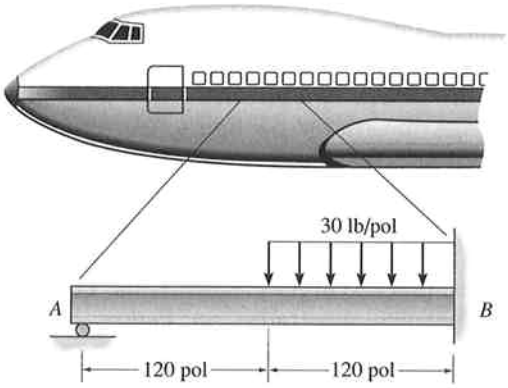
Problema 12.90

12.91. Determinar as reações nos apoios A e B e depois desenhar os diagramas de cisalhamento e momento fletor. Considerar EI constante.



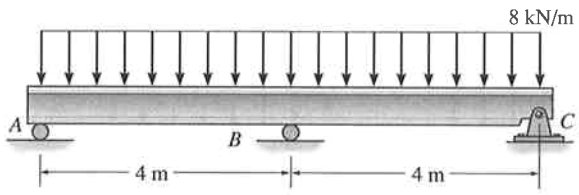
Problema 12.91

***12.92.** A figura mostra o carregamento sobre a viga de piso usada em um avião. Usar funções de descontinuidade e determinar as reações nos apoios A e B; em seguida, desenhar o diagrama de momento para a viga. Ela é feita de alumínio e tem momento de inércia $I = 320$ pol^4.



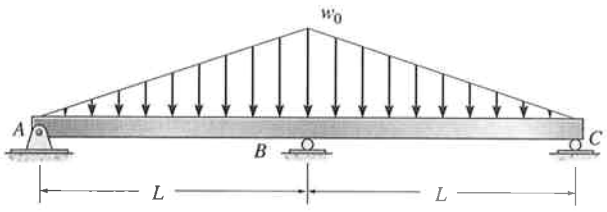
Problema 12.92

12.93. Determinar as reações nos apoios e depois desenhar os diagramas de cisalhamento e momento fletor. Considerar EI constante.



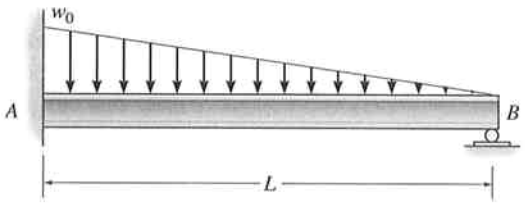
Problema 12.93

12.94. Determinar as reações nos apoios e depois desenhar os diagramas de cisalhamento e momento fletor. Considerar EI constante.



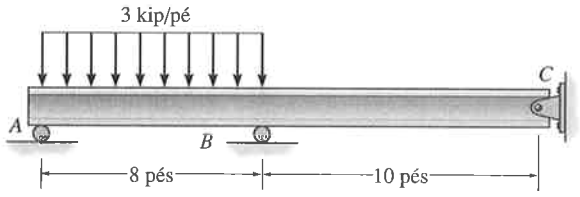
Problema 12.94

12.95. Determinar as reações nos apoios A e B considerando EI constante.



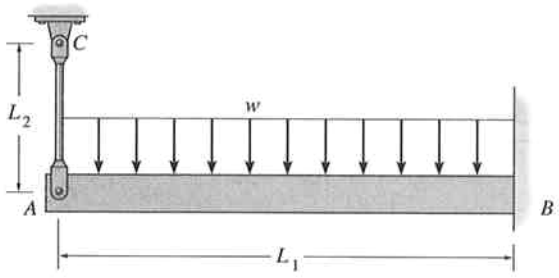
Problema 12.95

***12.96.** Determinar as reações nos apoios e depois desenhar os diagramas de cisalhamento e momento fletor. Considerar EI constante.



Problema 12.96

12.97. A viga tem um E_1I_1 constante e é suportada por uma parede fixa em B e uma haste AC. Supondo que a haste tenha área da seção transversal A_2 e o material tenha módulo de elasticidade E_2, determinar a força na haste.



Problema 12.97

*12.8 VIGAS E EIXOS ESTATICAMENTE INDETERMINADOS — MÉTODO DOS MOMENTOS DE ÁREAS

Se o método dos momentos de áreas for usado para determinar as incógnitas redundantes de uma viga ou eixo estaticamente indeterminados, o diagrama M/EI deverá ser desenhado de tal modo que represente as reações redundantes como *incógnitas*. Uma vez estabelecido tal diagrama, podemos aplicar os dois teoremas dos momentos de áreas para obter as relações apropriadas entre as tangentes da linha elástica, a fim de satisfazer as condições de deslocamento e/ou inclinação nos apoios da viga ou eixo. Em todos os casos, o número das condições de compatibilidade será equivalente ao número de reações redundantes e, assim, estas poderão ser solucionadas.

Diagramas de Momento Construídos pelo Método da Superposição de Efeitos. Como a aplicação dos teoremas dos momentos de áreas requer o cálculo tanto da área sob o diagrama M/EI como da localização do centróide dessa área, é conveniente, em geral, usar diagramas M/EI *separados* para *cada uma* das cargas e reações redundantes conhecidas, em vez de usar o diagrama do momento fletor resultante para calcular essas quantidades geométricas. Essa afirmativa é especialmente verdadeira se o diagrama do momento fletor resultante tem forma complicada. O método para desenhar o diagrama de momento fletor em partes baseia-se no princípio da superposição de efeitos.

A maioria das cargas nas vigas ou eixos será uma combinação dos quatro carregamentos mostrados na Figura 12.38. A construção dos diagramas de momento fletor associados, também mostrados na figura, foi discutida nos exemplos do Capítulo 6. Baseados nesses resultados, mostraremos agora como usar o método da superposição de efeitos para representar o diagrama de momento fletor resultante da viga em balanço mostrada na Figura 12.39*a*, por meio de uma série de diagramas de momento fletor distintos. Para tanto, vamos antes substituir as cargas por um sistema de cargas estaticamente equivalente. Por exemplo: as três vigas em balanço mostradas na Figura 12.39*a* são estaticamente equivalentes à viga resultante, visto que a carga em cada ponto desta é igual à superposição de efeitos ou à adição das cargas das três vigas separadas. De fato, a reação de cisalhamento na extremidade A dá 13 kN quando as reações nas vigas separadas são somadas. Da mesma maneira, o momento interno em qualquer ponto da viga resultante é igual à soma dos momentos internos em qualquer ponto das vigas separadas. Assim, se desenharmos os diagramas de momento fletor para cada viga separada (Figura 12.39*b*), a superposição de efeitos desses diagramas produzirá o diagrama de momento fletor resultante, mostrado na parte de cima da figura. Por exemplo: nos diagramas de momento fletor separados, o momento na extremidade A é

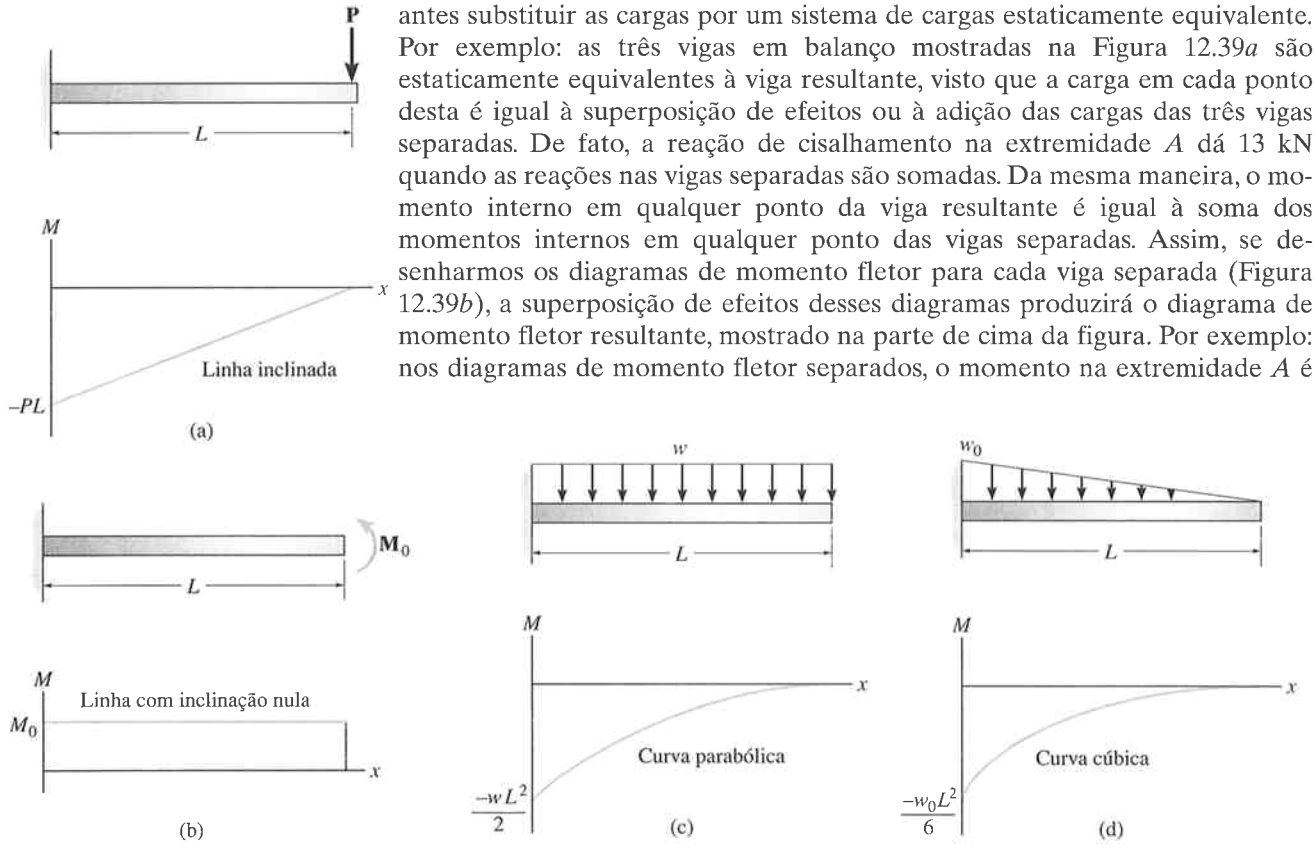


Figura 12.38

$M_A = -8\ \text{kN} \cdot \text{m} - 30\ \text{kN} \cdot \text{m} - 20\ \text{kN} \cdot \text{m} = -58\ \text{kN} \cdot \text{m}$, como se constata no diagrama de momento fletor anterior. Esse exemplo demonstra que algumas vezes é *mais fácil* construir uma série de diagramas de momento fletor estaticamente equivalentes separados para a viga que construir seu diagrama de momento fletor resultante. Obviamente, é mais fácil determinar a área e a localização do centróide de cada parte que as do centróide do diagrama resultante.

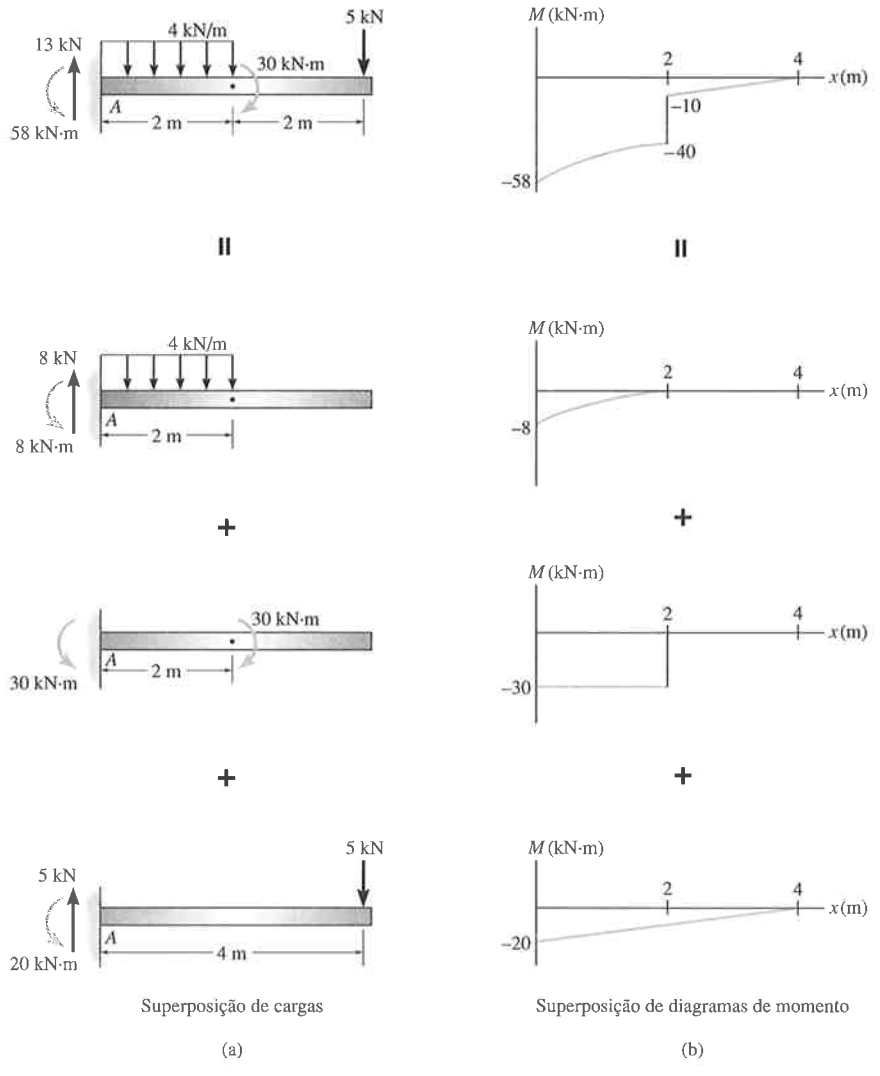


Figura 12.39

De maneira similar, também podemos representar o diagrama de momento fletor resultante de uma viga usando a superposição de diagramas de momento fletor para uma série de vigas simplesmente apoiadas. Por exemplo: o carregamento da viga mostrada na parte superior da Figura 12.40*a* equivale à soma das cargas das vigas mostradas abaixo dela. Portanto, podemos usar a soma dos diagramas de momento fletor de cada um desses três carregamentos em vez do diagrama de momento fletor resultante mostrado na parte superior da Figura 12.40*b*. Para uma completa compreensão, esses resultados devem ser verificados.

Os exemplos que se seguem também esclarecem alguns desses pontos e ilustram como usar os teoremas dos momentos de áreas para obter reações redundantes de vigas e eixos estaticamente indeterminados. As soluções seguem o procedimento de análise descrito na Seção 12.4.

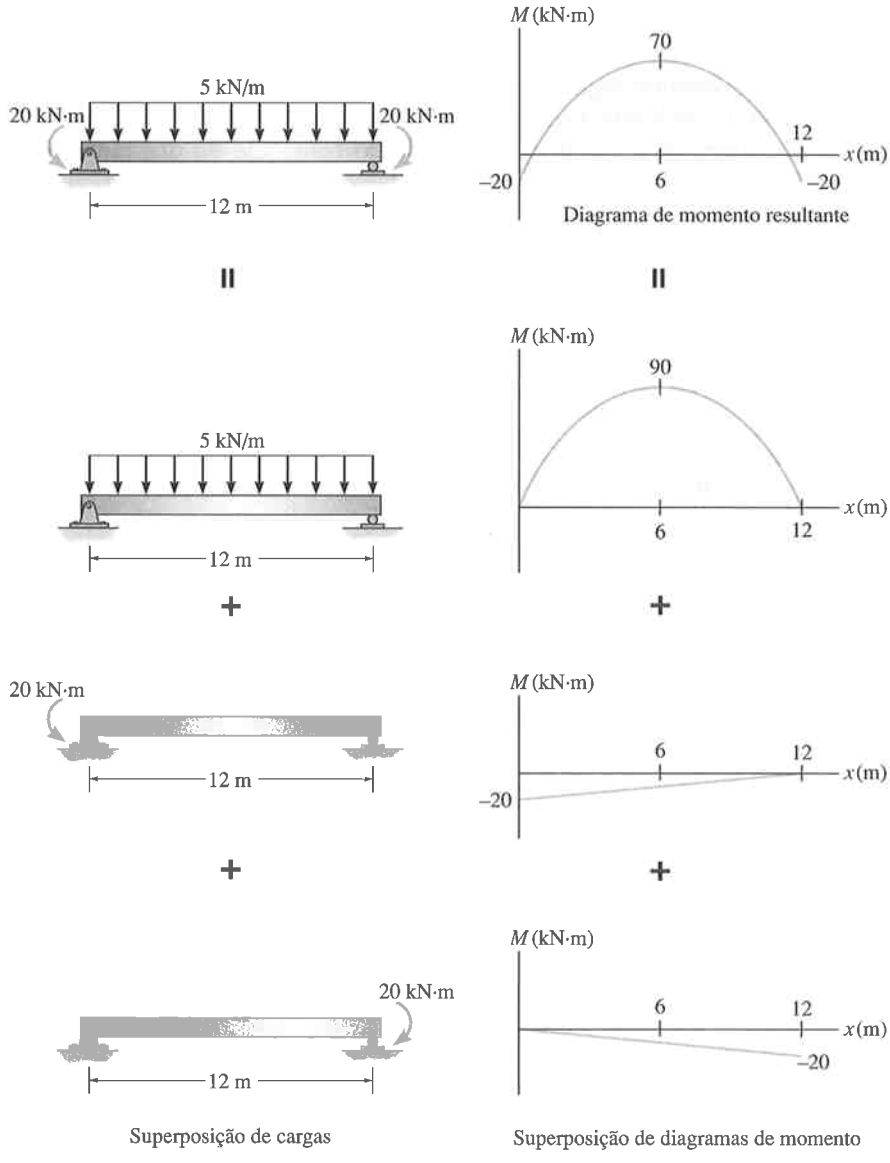


Figura 12.40

EXEMPLO 12.19

A viga está sujeita à carga concentrada mostrada na Figura 12.41*a*. Determinar as reações nos apoios considerando *EI* constante.

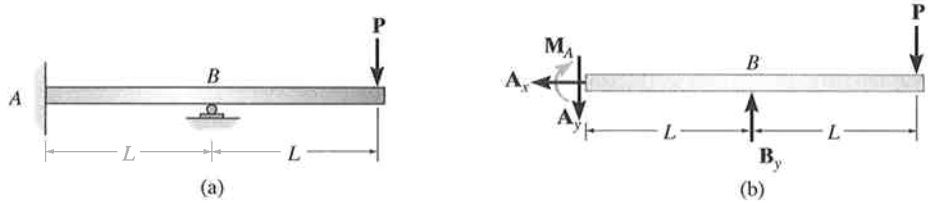


Figura 12.41

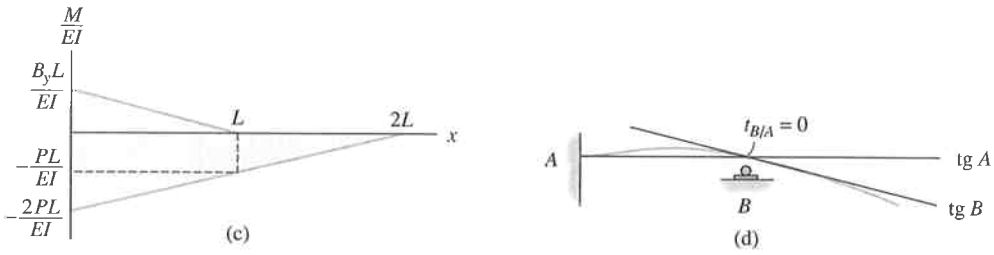


Figura 12.41

SOLUÇÃO

Diagrama M/EI. A Figura 12.4*b* ilustra o diagrama de corpo livre. Já a Figura 12.41*c* mostra, pelo método da superposição de efeitos, os diagramas *M/EI* separados para a reação redundante $\mathbf{B}_y$ e a carga **P**.

Linha Elástica. A linha elástica da viga é mostrada na Figura 12.41*d*. As tangentes nos apoios *A* e *B* foram construídas. Como $\Delta_B = 0$, então:

$$t_{B/A} = 0$$

Teorema dos Momentos de Áreas. Aplicando o Teorema 2, temos:

$$t_{B/A} = \left(\frac{2}{3}L\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{B_y L}{EI}\right)L\right] + \left(\frac{L}{2}\right)\left[\frac{-PL}{EI}(L)\right]$$

$$+ \left(\frac{2}{3}L\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{-PL}{EI}\right)(L)\right] = 0$$

$$B_y = 2{,}5P \qquad \textit{Resposta}$$

Equações de Equilíbrio. A partir desse resultado, as reações em *A* do diagrama de corpo livre (Figura 12.41*b*) são determinadas como segue:

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad A_x = 0 \qquad \textit{Resposta}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad -A_y + 2{,}5P - P = 0$$

$$A_y = 1{,}5P \qquad \textit{Resposta}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0; \qquad -M_A + 2{,}5P(L) - P(2L) = 0$$

$$M_A = 0{,}5PL \qquad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 12.20

A viga está sujeita a um conjugado em sua extremidade *C* como mostra a Figura 12.42*a*. Determinar a reação em *B* considerando *EI* constante.

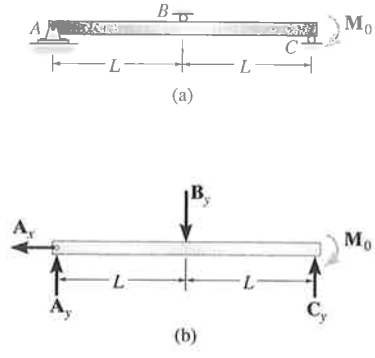
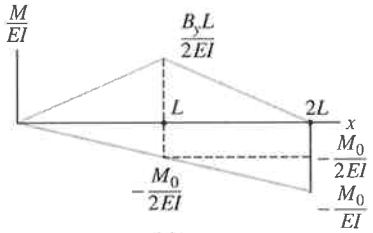


Figura 12.42

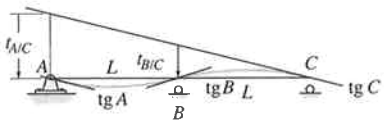
SOLUÇÃO

Diagrama M/EI. O diagrama de corpo livre é mostrado na Figura 12.42*b*. Verifica-se por inspeção que a viga é estaticamente indeterminada de primeiro grau. A fim de obter uma solução direta, escolheremos $\mathbf{B}_y$ como redundante. Por meio da superposição de efeitos, a Figura 12.42*c* mostra os diagramas *M/EI* de $\mathbf{B}_y$ e $\mathbf{M}_0$, cada um aplicado a uma viga simplesmente apoiada. (Observe que para tal viga A_x, A_y e C_y não contribuem com um diagrama *M/EI*.)

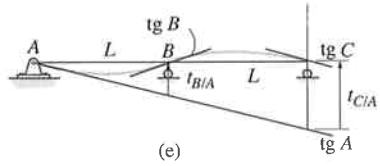
Linha Elástica. A linha elástica da viga é mostrada na Figura 12.42*d*. As tangentes em *A*, *B* e *C* foram estabelecidas. Como $\Delta_A = \Delta_B = \Delta_C = 0$, os desvios das tangentes devem ser proporcionais, ou seja:



(c)



(d)



(e)

Figura 12.42

$$t_{B/C} = \frac{1}{2}t_{A/C}$$

Pela Figura 12.42*c*, temos:

$$t_{B/C} = \left(\frac{1}{3}L\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{B_yL}{2EI}\right)(L)\right] + \left(\frac{2}{3}L\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{-M_0}{2EI}\right)(L)\right] + \left(\frac{L}{2}\right)\left[\left(\frac{-M_0}{2EI}\right)(L)\right]$$

$$t_{A/C} = (L)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{B_yL}{2EI}\right)(2L)\right] + \left(\frac{2}{3}(2L)\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{-M_0}{EI}\right)(2L)\right]$$

Substituindo na Equação 1 e simplificando, temos:

$$B_y = \frac{3M_0}{2L} \qquad \textit{Resposta}$$

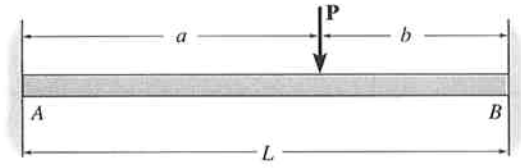
Equações de Equilíbrio. As reações em A e C são determinadas pelas equações de equilíbrio (Figura 12.42*b*). Mostrar que $A_x = 0$, $C_y = 5M_0/4L$ e $A_y = M_0/4L$.

Observar pela Figura 12.42*e* que esse problema também pode ser resolvido em termos de desvios das tangentes:

$$t_{B/A} = \frac{1}{2}t_{C/A}$$

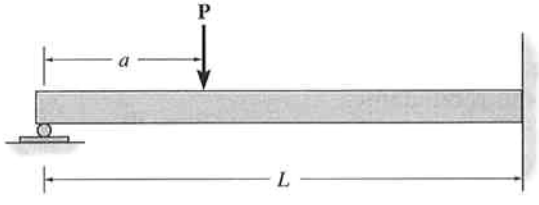
PROBLEMAS

12.98. Determinar as reações de momento nos apoios A e B. Considerar EI constante.



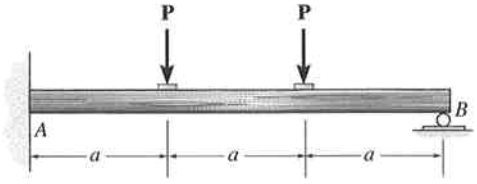
Problema 12.98

12.99. Determinar o valor de a para o qual o momento positivo máximo tem a mesma intensidade do momento negativo máximo. Considerar EI constante.



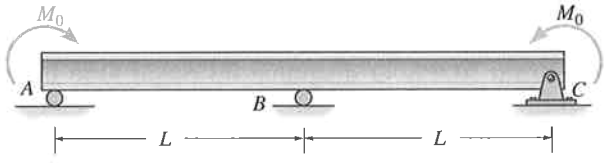
Problema 12.99

***12.100.** Determinar as reações nos apoios considerando EI constante.



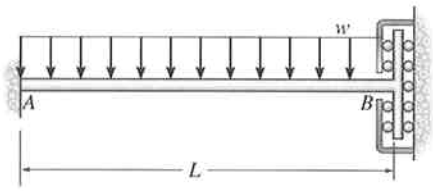
Problema 12.100

12.101. Determinar as reações nos apoios e desenhar os diagramas de cisalhamento e momento fletor. Considerar EI constante.



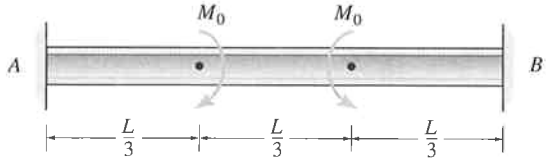
Problema 12.101

12.102. A haste está fixa em A, e o acoplamento em B consiste em um rolete que permite deslocamento vertical, mas resiste a carga axial e momento. Determinar as reações de momento nesses apoios. Considerar EI constante.



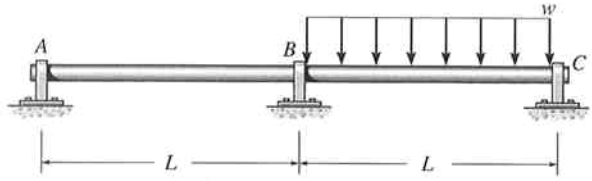
Problema 12.102

12.103. Determinar as reações de momento nos apoios A e B e desenhar os diagramas de cisalhamento e momento fletor. Considerar EI constante.



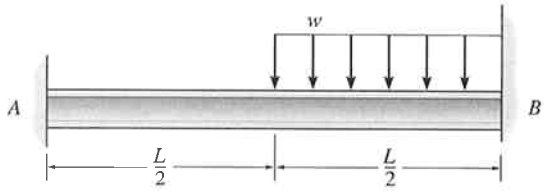
Problema 12.103

***12.104.** Determinar as reações nos apoios e desenhar os diagramas de cisalhamento e momento fletor. Considerar EI constante. O apoio B é um mancal de encosto.



Problema 12.104

12.105. Determinar as reacões de momento nos apoios A e B. Considerar EI constante.



Problema 12.105

12.9 VIGAS E EIXOS ESTATICAMENTE INDETERMINADOS — MÉTODO DA SUPERPOSIÇÃO DE EFEITOS

O método da superposição de efeitos foi usado anteriormente para resolver carregamentos redundantes em barras carregadas axialmente e eixos carregados por torção. A fim de aplicá-lo a vigas (ou eixos) estaticamente indeterminados, é necessário primeiro identificar as reações de apoio redundantes, como explicado na Seção 12.6. *Removendo-as* da viga, obtemos a assim denominada *viga primária*, que é estaticamente determinada e estável e está sujeita *apenas* a uma carga externa. Se adicionamos a essa viga uma sucessão de vigas apoiadas de maneira semelhante, cada qual carregada com uma reação redundante *separada*, então, pelo princípio da superposição de efeitos, obtemos a viga carregada real. Finalmente, para resolver as reações redundantes, escrevemos as *condições de compatibilidade* que existem nos apoios em que cada reação redundante atua. Como as forças redundantes são determinadas diretamente dessa maneira, esse método de análise é chamado às vezes de ***método da força***. Uma vez obtidas as reações redundantes, as outras reações da viga são então determinadas pelas três equações de equilíbrio.

Para elucidar esses conceitos, consideremos a viga mostrada na Figura 12.43*a*. Se escolhermos a reação $\mathbf{B}_y$ no rolete como a redundante, a viga primária será como a mostrada na Figura 12.43*b* e a viga com a reação redundante $\mathbf{B}_y$ atuando sobre ela será como a da Figura 12.43*c*. O deslocamento no rolete deve ser nulo e, como o deslocamento do ponto B na viga primária é v_B e $\mathbf{B}_y$ provoca o deslocamento v'_B do ponto B para cima, escrevemos a equação de compatibilidade em B como:

$$(+\uparrow) \qquad 0 = -v_B + v'_B$$

Os deslocamentos v_B e v'_B são obtidos por qualquer um dos métodos discutidos nas seções 12.2 a 12.5. Nesse caso, vamos obtê-los diretamente da tabela do Apêndice C. Temos:

$$v_B = \frac{5PL^3}{48EI} \qquad \text{e} \qquad v'_B = \frac{B_y L^3}{3EI}$$

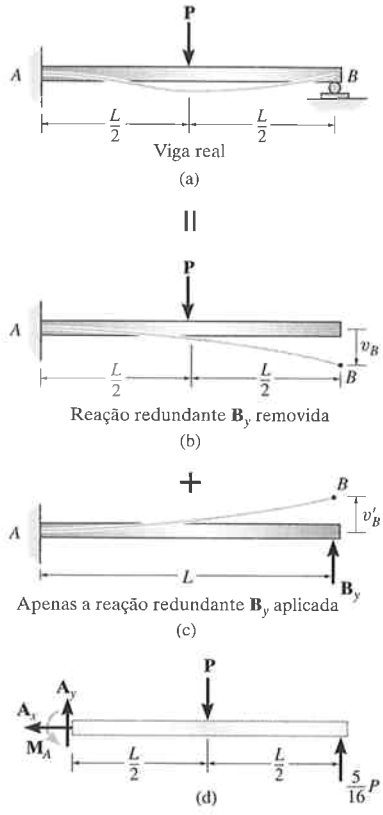


Figura 12.43

Substituindo na equação de compatibilidade, obtemos:

$$0 = -\frac{5PL^3}{48EI} + \frac{B_y L^3}{3EI}$$

$$B_y = \frac{5}{16}P$$

Agora que $\mathbf{B}_y$ é conhecida, as reações na parede são determinadas pelas três equações de equilíbrio aplicadas a toda a viga (Figura 12.43*d*). Os resultados são:

$$A_x = 0 \qquad A_y = \frac{11}{16}P$$

$$M_A = \frac{3}{16}PL$$

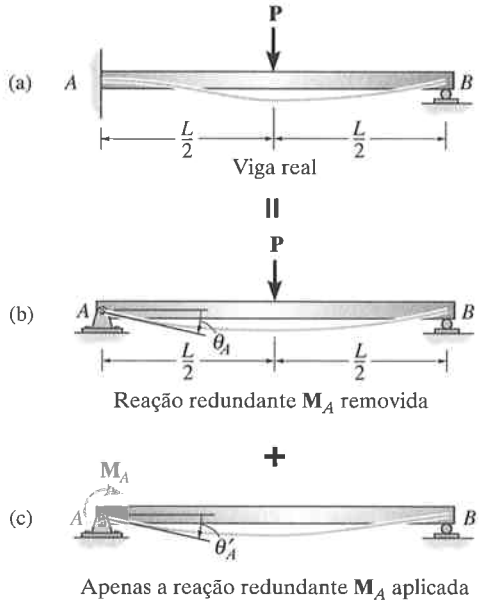


Figura 12.44

Como mencionamos na Seção 12.6, a escolha da reação redundante é *arbitrária*, desde que a viga primária permaneça estável. Por exemplo: o momento em A da viga da Figura 12.44*a* também pode ser escolhido como redundante. Nesse caso, a capacidade da viga de resistir a $\mathbf{M}_A$ é removida e, assim, a viga primária é apoiada por pino em A (Figura 12.44*b*). Além disso, a reação redundante em A atua sozinha nessa viga (Figura 12.44*c*). Denominando a inclinação em A provocada pela carga $\mathbf{P}$ como θ_A e a inclinação em A provocada pela reação redundante $\mathbf{M}_A$ como θ'_A, a equação de compatibilidade para a inclinação em A requer que:

$$(\curvearrowright+) \qquad 0 = \theta_A + \theta'_A$$

Usando novamente a tabela do Apêndice C, temos:

$$\theta_A = \frac{PL^2}{16EI} \quad \text{e} \quad \theta'_A = \frac{M_A L}{3EI}$$

Assim:

$$0 = \frac{PL^2}{16EI} + \frac{M_A L}{3EI}$$

$$M_A = -\frac{3}{16}PL$$

Esse é o mesmo resultado calculado antes. Nesse caso, o sinal negativo de M_A significa simplesmente que $\mathbf{M}_A$ atua no sentido oposto ao mostrado na Figura 12.44*c*.

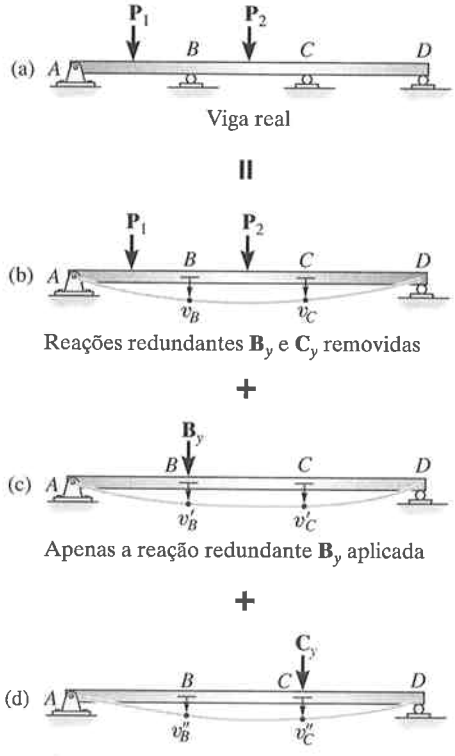


Figura 12.45

Outro exemplo que ilustra o método é dado na Figura 12.45*a*. Nesse caso, a viga é estaticamente indeterminada de segundo grau e, portanto, serão necessárias *duas* equações de compatibilidade para a solução. Escolheremos as forças nos apoios de rolete B e C como redundantes. A viga primária (estaticamente determinada) deforma-se como mostra a Figura 12.45*b* quando as forças redundantes são removidas. Cada força redundante a deforma como mostram as figuras 12.45*c* e 12.45*d*, respectivamente. Por superposição de efeitos, as equações de compatibilidade dos deslocamentos em B e C são:

$$\begin{aligned} (+\downarrow) \qquad & 0 = v_B + v'_B + v''_B \\ (+\downarrow) \qquad & 0 = v_C + v'_C + v''_C \end{aligned} \tag{12.22}$$

Nesse caso, os componentes do deslocamento v'_B e v'_C serão expressos em termos da incógnita $\mathbf{B}_y$ e os componentes v''_B e v''_C serão expressos em termos da incógnita $\mathbf{C}_y$. Quando esses deslocamentos forem determinados e substituídos na Equação 12.22, poderemos então resolver essas equações simultaneamente para determinar as duas incógnitas $\mathbf{B}_y$ e $\mathbf{C}_y$.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

Veja a seguir como aplicar o método da superposição de efeitos (ou método da força) para determinar as reações de vigas ou eixos estaticamente indeterminados.

Linha Elástica.

- Especificar as forças ou momentos redundantes que devem ser retirados da viga a fim de torná-la estaticamente determinada e estável.
- Usando o princípio da superposição de efeitos, desenhar a viga estaticamente indeterminada e mostrá-la igual a uma seqüência de *vigas estaticamente determinadas* correspondente.
- A primeira dessas vigas, a primária, suporta as mesmas cargas externas que a viga estaticamente indeterminada, e cada uma das outras vigas 'adicionadas' à primária mostra a viga carregada com uma força ou um momento redundante separado.
- Esquematizar a curva de deflexão para cada viga e indicar simbolicamente o deslocamento ou a inclinação no ponto de cada força ou momento redundante.

Equações de Compatibilidade.

- Escrever a equação de compatibilidade para o deslocamento ou a inclinação em cada ponto em que haja uma força ou momento redundantes.
- Determinar todos os deslocamentos ou inclinações usando um método apropriado como explicado nas seções 12.2 a 12.5.
- Substituir os resultados nas equações de compatibilidade e resolver as reações redundantes desconhecidas.
- Se o valor numérico de uma reação redundante for *positivo*, ela terá a *mesma direção* admitida inicialmente. De modo similar, um valor numérico *negativo* indica que a redundante atua no *sentido contrário* ao pressuposto.

Equações de Equilíbrio.

- Uma vez que as forças ou momentos redundantes tenham sido determinados, as reações desconhecidas restantes são determinadas pelas equações de equilíbrio aplicadas às cargas mostradas no diagrama de corpo livre.

Os exemplos seguintes ilustram a aplicação desse procedimento. Para simplificar, todos os deslocamentos e inclinações foram determinados com base na tabela do Apêndice C.

EXEMPLO 12.21

Determinar as reações no apoio de rolete em B da viga mostrada na Figura 12.46*a* e depois desenhar os diagramas de cisalhamento e momento fletor. Considerar EI constante.

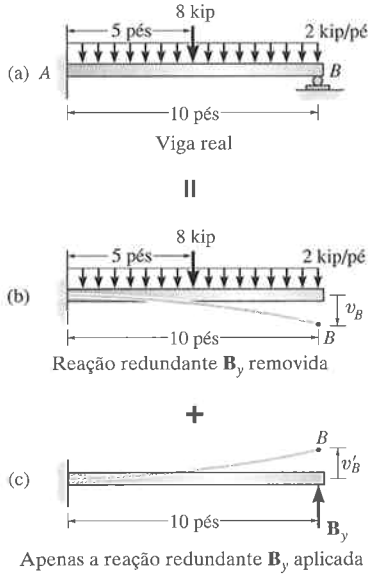


Figura 12.46

SOLUÇÃO

Princípio da Superposição de Efeitos. Verifica-se por inspeção que a viga é estaticamente indeterminada de primeiro grau. O apoio de rolete em B será escolhido como redundante de modo que $\mathbf{B}_y$ será determinada *diretamente*. As figuras 12.46*b* e 12.46*c* mostram a aplicação do princípio da superposição de efeitos. Nesse caso, admitiremos que $\mathbf{B}_y$ atua para cima.

Equação de Compatibilidade. Adotando o deslocamento positivo para baixo, a equação de compatibilidade em B é:

$$(+\downarrow) \qquad 0 = v_B - v'_B \qquad (1)$$

Esses deslocamentos são obtidos diretamente na tabela do Apêndice C.

$$v_B = \frac{wL^4}{8EI} + \frac{5PL^3}{48EI}$$

$$= \frac{2\ \text{kip/pé}(10\ \text{pés})^4}{8EI} + \frac{5(8\ \text{kip})(10\ \text{pés})^3}{48EI} = \frac{3.333\ \text{kip} \cdot \text{pés}^3}{EI} \downarrow$$

$$v'_B = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{B_y(10\text{ pés})^3}{3EI} = \frac{333{,}3\text{ pés}^3 B_y}{EI} \uparrow$$

Substituindo na Equação 1 e resolvendo, temos:

$$0 = \frac{3.333}{EI} - \frac{333{,}3\ B_y}{EI}$$

$$B_y = 10\text{ kip} \qquad \textit{Resposta}$$

Equações de Equilíbrio. Usando esse resultado e aplicando as três equações de equilíbrio, obtemos os resultados mostrados no diagrama de corpo livre da viga (Figura 12.46*d*). Os diagramas de cisalhamento e momento fletor são mostrados na Figura 12.46*e*.

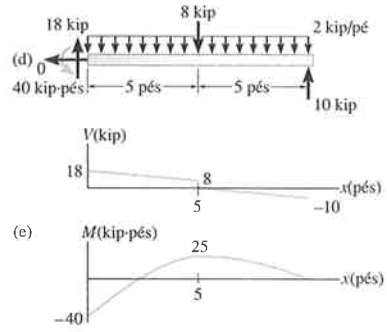


Figura 12.46

EXEMPLO 12.22

Determinar as reações sobre a viga mostrada na Figura 12.47*a*. Devido à carga e à construção falha, o apoio de rolete em B apresenta um desalinhamento de 12 mm. Adotar $E = 200$ GPa e $I = 80\ (10^6)\ \text{mm}^4$.

SOLUÇÃO

Princípio da Superposição de Efeitos. Por inspeção, verifica-se que a viga é estaticamente indeterminada de primeiro grau. O apoio de rolete em B será escolhido como redundante. O princípio da superposição de efeitos é mostrado nas figuras 12.47*b* e 12.47*c*. Nesse caso, supõe-se que $\mathbf{B}_y$ atue de baixo para cima sobre a viga.

Equação de Compatibilidade. Em relação ao ponto B, usando unidades métricas, requer-se que:

$$(+\downarrow) \qquad 0{,}012\text{ m} = v_B - v'_B \qquad (1)$$

De acordo com a tabela do Apêndice C, os deslocamentos são:

$$v_B = \frac{5wL^4}{768EI} = \frac{5(24\text{ kN/m})(8\text{ m})^4}{768EI} = \frac{640\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI} \downarrow$$

$$v'_B = \frac{PL^3}{48EI} = \frac{B_y(8\text{ m})^3}{48EI} = \frac{10{,}67\text{ m}^3 B_y}{EI} \uparrow$$

Assim, a Equação 1 torna-se:

$$0{,}012EI = 640 - 10{,}67B_y$$

Expressando E e I em unidades de kN/m^2 e m^4, respectivamente, temos:

$$0{,}012(200)(10^6)[80(10^{-6})] = 640 - 10{,}67B_y$$

$$B_y = 42{,}0\text{ kN} \uparrow \qquad \textit{Resposta}$$

Equações de Equilíbrio. Aplicando o resultado à viga (Figura 12.47*d*), podemos calcular as reações em A e C por meio das equações de equilíbrio. Obtemos:

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0; \qquad -96\text{ kN}(2\text{ m}) + 42{,}0\text{ kN}(4\text{ m}) + C_y(8\text{ m}) = 0$$

$$C_y = 3{,}00\text{ kN} \uparrow \qquad \textit{Resposta}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad A_y - 96\text{ kN} + 42{,}0\text{ kN} + 3{,}00\text{ kN} = 0$$

$$A_y = 51\text{ kN} \uparrow \qquad \textit{Resposta}$$

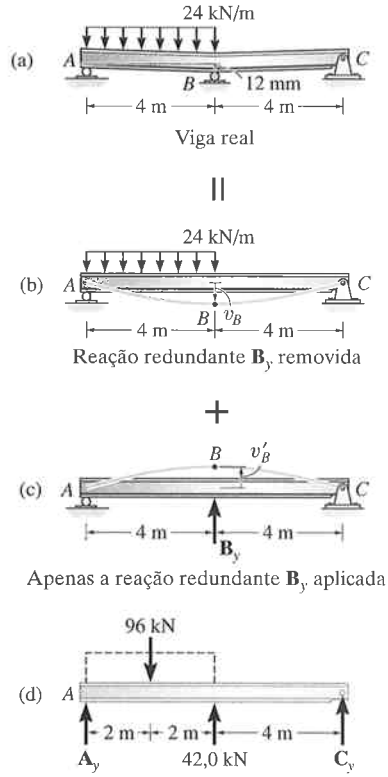
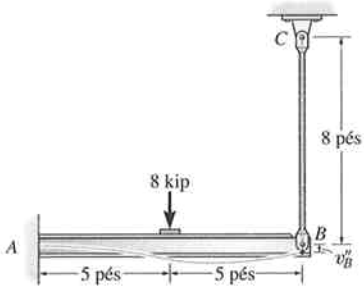


Figura 12.47

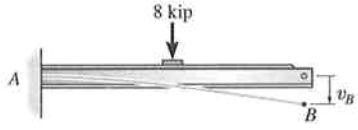
EXEMPLO 12.23

A viga da Figura 12.48*a* é engastada na parede em A e acoplada por pino à haste BC de $\frac{1}{2}$ pol de diâmetro. Se $E = 29(10^3)$ ksi para ambos os elementos, qual a força desenvolvida na haste em virtude do carregamento? O momento de inércia da viga em relação ao seu eixo neutro é $I = 475$ pol^4. (Lembrar que 1 ksi = 1.000 lb/pol^2.)



Viga e haste reais

(a)



Força redundante $\mathbf{F}_{BC}$ removida

(b)

Apenas a força redundante $\mathbf{F}_{BC}$ aplicada

(c)

Figura 12.48

SOLUÇÃO I

Princípio da Superposição de Efeitos. Verifica-se por inspeção que o problema é estaticamente indeterminado de primeiro grau. Nesse caso, B sofre um deslocamento v''_B desconhecido, uma vez que a haste esticará. A haste será considerada redundante e, portanto, sua força será removida da viga em B (Figura 12.48*b*), e depois reaplicada (Figura 12.48*c*).

Equação de Compatibilidade. Requer-se que no ponto B

$(+\downarrow)$

$$v''_B = v_B - v'_B \tag{1}$$

Os deslocamentos v_B e v'_B são determinados pela tabela do Apêndice C. Já v''_B é calculado pela Equação 4.2. Trabalhando em quilolibras e polegadas, temos:

$$v''_B = \frac{PL}{AE} = \frac{F_{BC}(8 \text{ pés})(12 \text{ pol/pé})}{(\pi/4)(\frac{1}{2} \text{ pol})^2[29(10^3) \text{ kip/pol}^2]} = 0{,}01686F_{BC} \downarrow$$

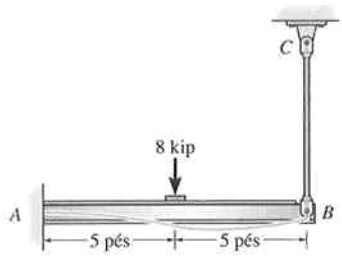
$$v_B = \frac{5PL^3}{48EI} = \frac{5(8 \text{ kip})(10 \text{ pés})^3(12 \text{ pol/pé})^3}{48[29(10^3) \text{ kip/pol}^2](475 \text{ pol}^4)} = 0{,}1045 \text{ pol} \downarrow$$

$$v'_B = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{F_{BC}(10 \text{ pés})^3(12 \text{ pol/pé})^3}{3[29(10^3) \text{ kip/pol}^2](475 \text{ pol}^4)} = 0{,}04181F_{BC} \uparrow$$

Assim, a Equação 1 torna-se:

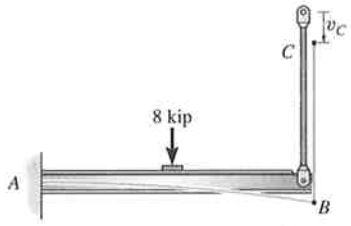
$(+\downarrow)$ $$0{,}01686F_{BC} = 0{,}1045 - 0{,}04181F_{BC}$$

$$F_{BC} = 1{,}78 \text{ kip}$$ ***Resposta***



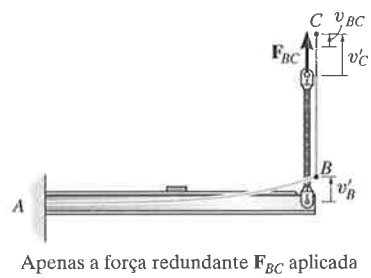
Viga e haste reais

(d)



Força redundante $\mathbf{F}_{BC}$ removida

(e)



Apenas a força redundante $\mathbf{F}_{BC}$ aplicada

(f)

SOLUÇÃO II

Princípio da Superposição de Efeitos. Podemos também resolver o problema removendo o apoio de pino em C e mantendo a haste acoplada à viga. Nesse caso, a carga de 8 kip deslocará os pontos B e C para baixo a *mesma quantidade* v_C (Figura 12.48*e*), uma vez que não existe força na haste BC. Quando a força redundante $\mathbf{F}_{BC}$ é aplicada ao ponto C, desloca a extremidade C da haste para cima v'_C e a extremidade B da viga para cima v'_B (Figura 12.48*f*). A diferença entre os dois deslocamentos, v_{BC}, representa o estiramento da haste devido a $\mathbf{F}_{BC}$, de modo que $v'_C = v_{BC} + v'_B$. Então, pelas figuras 12.48*d*, 12.48*e* e 12.48*f*, a compatibilidade do deslocamento no ponto C é:

$$(+\downarrow) \qquad 0 = v_C - (v_{BC} + v'_B) \qquad (2)$$

Pela Solução I, temos:

$$v_C = v_B = 0{,}1045 \text{ pol} \downarrow$$
$$v_{BC} = v''_B = 0{,}01686F_{BC} \uparrow$$
$$v'_B = 0{,}04181F_{BC} \uparrow$$

Portanto, a Equação 2 torna-se:

$$(+\downarrow) \qquad 0 = 0{,}1045 - (0{,}01686F_{BC} + 0{,}04181F_{BC})$$
$$F_{BC} = 1{,}78 \text{ kip} \qquad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 12.24

Determinar o momento em B para a viga mostrada na Figura 12.49*a*. Considerar EI constante e desprezar os efeitos da carga axial.

SOLUÇÃO

Princípio da Superposição de Efeitos. Como a carga axial sobre a viga é desprezada, haverá uma força vertical e um momento fletor em A e B. Nesse caso, há apenas duas equações de equilíbrio disponíveis ($\Sigma M = 0, \Sigma F_y = 0$) e, desse modo, o problema é estaticamente indeterminado de segundo grau. Admitiremos que $\mathbf{B}_y$ e $\mathbf{M}_B$ são redundantes, de modo que, pelo princípio da superposição de efeitos, a viga é representada por uma viga em balanço carregada *separadamente* pela carga distribuída e pelas reações $\mathbf{B}_y$ e $\mathbf{M}_B$ (figuras 12.49*b*, 12.49*c* e 12.49*d*).

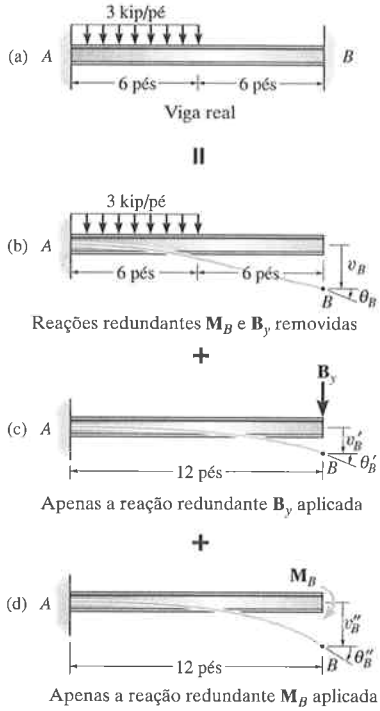


Figura 12.49

Equações de Compatibilidade. Em relação ao deslocamento e à inclinação em B, requer-se que:

$$(\curvearrowright_+) \qquad 0 = \theta_B + \theta'_B + \theta''_B \qquad (1)$$
$$(+\downarrow) \qquad 0 = v_B + v'_B + v''_B \qquad (2)$$

Usando a tabela do Apêndice C para calcular as inclinações e os deslocamentos, temos:

$$\theta_B = \frac{wL^3}{48EI} = \frac{3 \text{ kip/pé}(12 \text{ pés})^3}{48EI} = \frac{108}{EI} \curvearrowright$$

$$v_B = \frac{7wL^4}{384EI} = \frac{7(3 \text{ kip/pé})(12 \text{ pés})^4}{384EI} = \frac{1.134}{EI} \downarrow$$

$$\theta'_B = \frac{PL^2}{2EI} = \frac{B_y(12 \text{ pés})^2}{2EI} = \frac{72B_y}{EI} \curvearrowright$$

$$v'_B = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{B_y(12 \text{ pés})^3}{3EI} = \frac{576B_y}{EI} \downarrow$$

$$\theta''_B = \frac{ML}{EI} = \frac{M_B(12 \text{ pés})}{EI} = \frac{12M_B}{EI} \downarrow$$

$$v''_B = \frac{ML^2}{2EI} = \frac{M_B(12 \text{ pés})^2}{2EI} = \frac{72M_B}{EI} \downarrow$$

Substituindo esses valores nas equações 1 e 2 e cancelando o fator comum EI, obtemos:

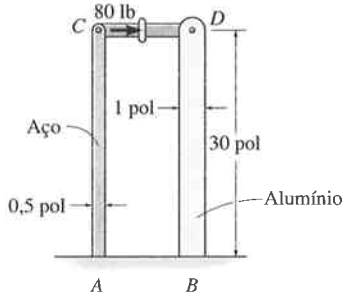
$$(\curvearrowright_+) \qquad 0 = 108 + 72B_y + 12M_B$$
$$(+\downarrow) \qquad 0 = 1134 + 576B_y + 72M_B$$

Resolvendo essas equações simultaneamente, temos:

$$B_y = -3{,}375 \text{ kip}$$
$$M_B = 11{,}25 \text{ kip} \cdot \text{pés} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

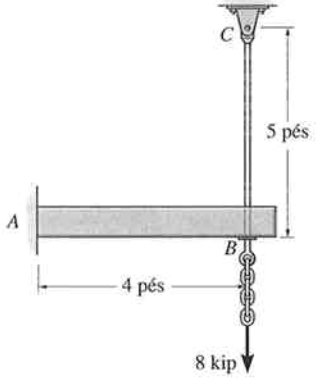
PROBLEMAS

12.106. O conjunto consiste em uma barra de aço e uma de alumínio, cada qual com espessura de 1 pol, fixas em suas extremidades A e B e aclopadas ao elo curto *rígido* CD. Se uma força horizontal de 80 lb for aplicada ao elo como mostrado, quais momentos serão criados em A e B? $E_{aço} = 29(10^3)$ kip, $E_{al} = 10(10^3)$ kip.



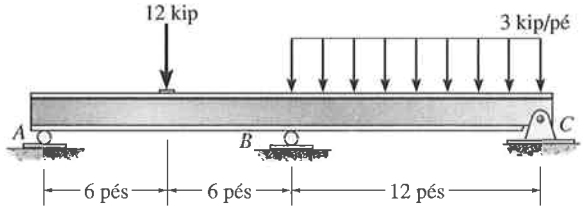
Problema 12.106

12.107. A viga de aço A-36 e a haste são usadas para suportar a carga de 8 kip. Supondo que a tensão normal admissível para o aço seja $\sigma_{adm} = 18$ ksi e a deflexão máxima não possa exceder 0,05 pol, determinar o menor diâmetro que a haste pode ter. A viga é retangular, com altura de 5 pol e espessura de 3 pol.



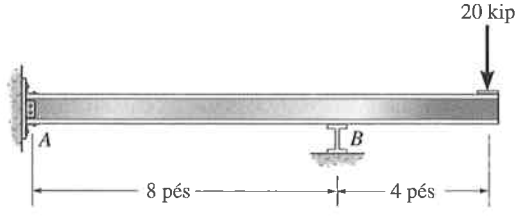
Problema 12.107

***12.108.** Determinar as reações nos apoios A, B e C e depois desenhar os diagramas de cisalhamento e momento fletor. Considerar EI constante.



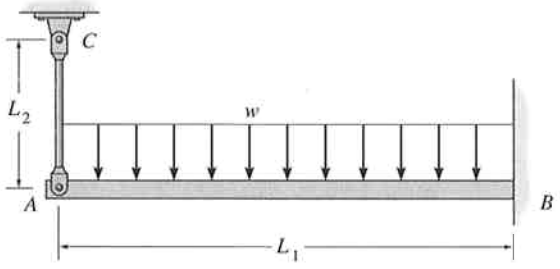
Problema 12.108

12.109. A viga é usada para suportar a carga de 20 kip. Determinar as reações nos apoios supondo que A seja fixo e B seja um rolete.



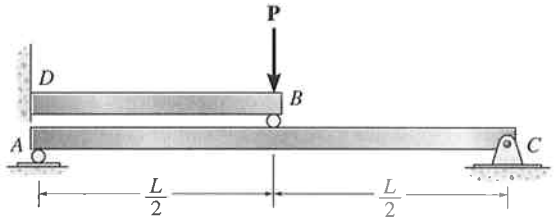
Problema 12.109

12.110. A viga tem E_1I_1 constante e é suportada pela parede fixa em B e pela haste AC. Supondo que a haste tenha área da seção transversal A_2 e o material tenha módulo de elasticidade E_2, determinar a força na haste.



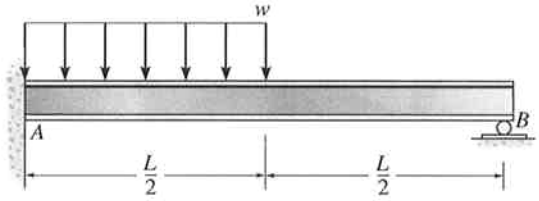
Problema 12.110

12.111. Determinar as reações no apoio C. Considerar EI constante para ambas as vigas.



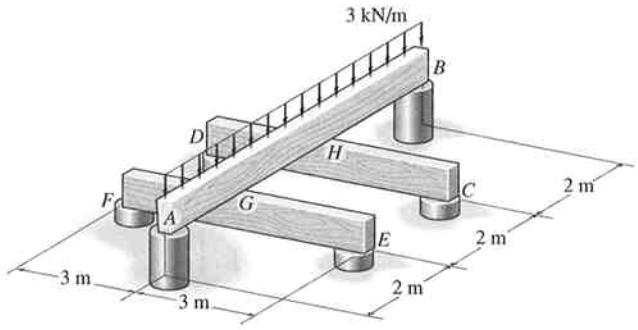
Problema 12.111

***12.112.** Determinar as reações nos apoios A e B. Considerar EI constante.



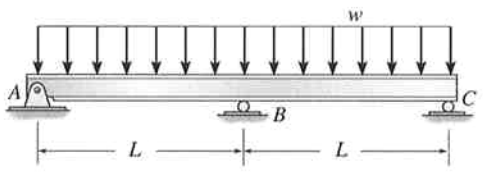
Problema 12.112

12.113. Neste conjunto, composto por três vigas simplesmente apoiadas, a parte inferior da viga superior repousa sobre a parte superior das duas inferiores. Se uma carga de 3 kN/m for aplicada na viga superior, quais serão as reações verticais em cada apoio? Considerar EI constante.



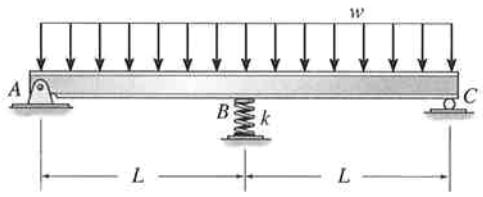
Problema 12.113

12.114. Determinar as reações nos apoios e depois desenhar os diagramas de cisalhamento e momento fletor. Considerar EI constante.



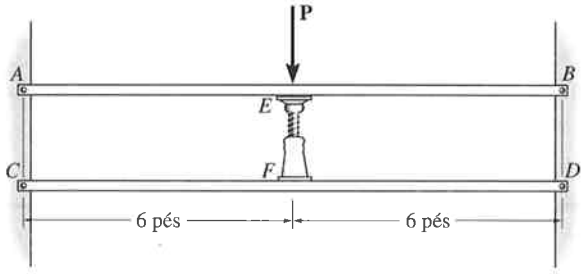
Problema 12.114

12.115. A viga é suportada por um pino em A, uma mola com rigidez k em B e um rolete em C. Determinar a força que a mola exerce sobre a viga considerando EI constante.



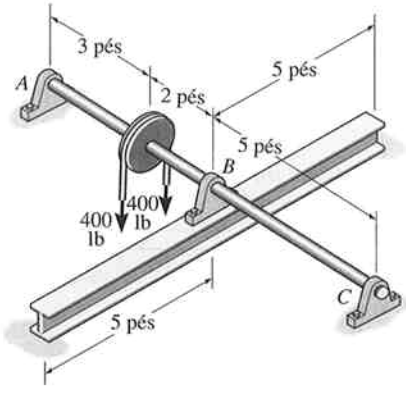
Problema 12.115

***12.116.** Os dois elementos são feitos de alumínio 6061-T6, têm seção transversal quadrada de 1 pol × 1 pol e estão acoplados por pinos em suas extremidades. Um macaco é colocado entre eles e aberto até que a força exercida por ele em cada elemento seja de 50 lb. Determinar a maior força P que pode ser aplicada ao centro do elemento superior sem provocar escoamento em qualquer um dos dois. Desprezar, na análise, a força axial em cada elemento e supor que o macaco seja rígido.



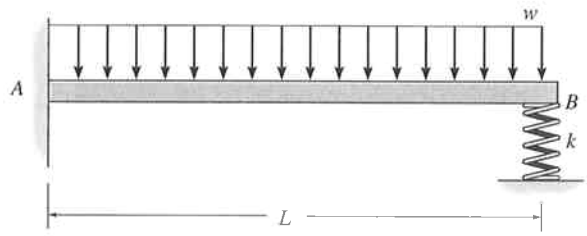
Problema 12.116

12.117. O eixo de aço A-36 de 1 pol de diâmetro é apoiado por mancais rígidos em A e C. O mancal em B repousa em uma viga de abas largas simplesmente apoiada, com momento de inércia $I = 500$ pol^4. Se as cargas da correia sobre a roldana forem de 400 lb cada uma, determinar as reações verticais em A, B e C.



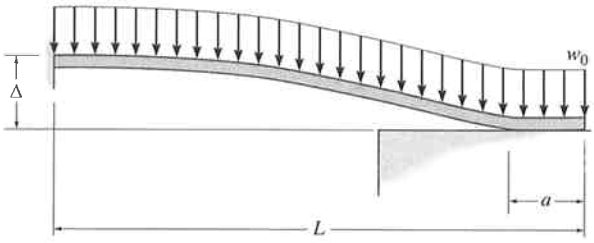
Problema 12.117

12.118. Determinar a força na mola. Considerar EI constante.



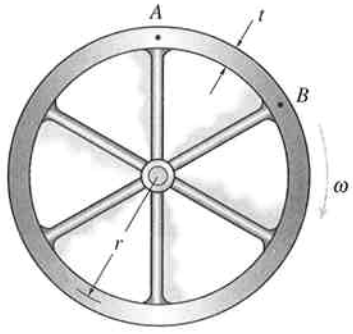
Problema 12.118

12.119. A viga é feita de um material elástico mole com EI constante. Supondo que ela inicialmente esteja a uma distância Δ da superfície de seu apoio na extremidade, determinar a distância a entre os dois quando ela está submetida à carga uniforme w_0, suficientemente grande para provocar essa condição.



Problema 12.119

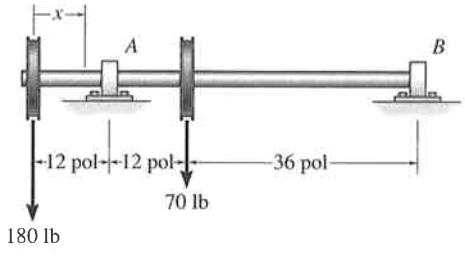
***12.120.** O aro do volante tem espessura t, largura b e peso específico γ. Se o volante estiver girando a uma taxa constante ω, qual será o momento máximo desenvolvido no aro? Supor que os raios não deformam. *Dica*: devido à simetria da carga, a inclinação do aro em cada raio é nula. Considerar que o raio seja suficientemente grande de modo que o segmento AB possa ser considerado uma viga reta engastada em ambas as extremidades e carregada com uma força centrífuga uniforme por unidade de comprimento. Mostrar que essa força é $w = bt\gamma\omega^2 r/g$.



Problema 12.120

PROBLEMAS DE REVISÃO

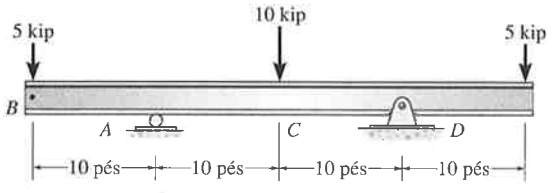
12.121. O eixo suporta as cargas das duas roldanas mostradas. Usando funções de descontinuidade, determinar a equação da linha elástica. Considerar que os mancais em A e B exercem apenas reações verticais sobre o eixo e que EI é constante.



Problema 12.121

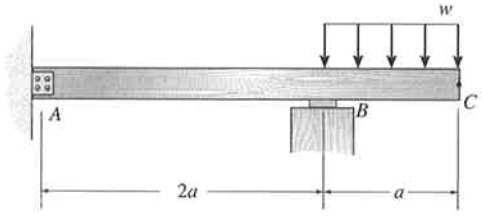
12.122. Usar funções de descontinuidade para determinar a inclinação em B e o deslocamento em C para o perfil W10 × 45. $E_{aço} = 29(10^3)$ ksi.

12.123. Resolver o Problema 12.122 usando os teoremas dos momentos de áreas.



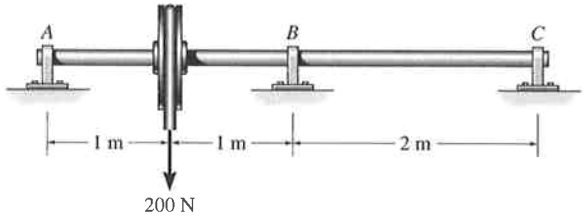
Problemas 12.122/12.123

***12.124.** A viga de madeira está submetida ao carregamento mostrado. Supor que o apoio em A seja um pino e em B um rolete. Determinar a inclinação em A e o deslocamento em C. Usar os teoremas dos momentos de áreas considerando que EI constante.



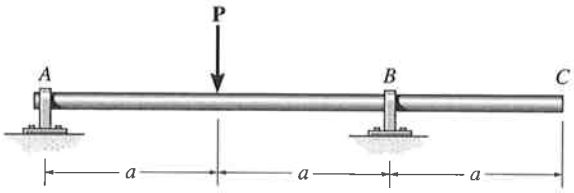
Problema 12.124

12.125. Os mancais de apoio A, B e C exercem apenas reações verticais sobre o eixo. Determinar essas reações e depois desenhar os diagramas de cisalhamento e momento fletor. Considerar EI constante e usar os teoremas dos momentos de áreas.



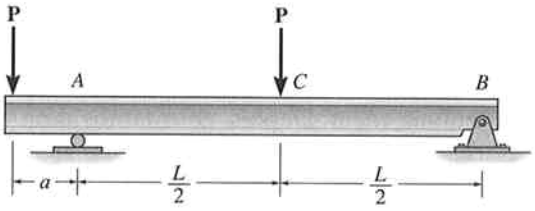
Problema 12.125

12.126. Supondo que os mancais em A e B exerçam apenas reações verticais sobre o eixo, determinar a inclinação em B e o deslocamento em C. Usar os teoremas dos momentos de áreas e considerar EI constante.



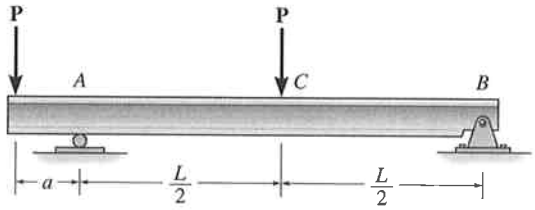
Problema 12.126

12.127. Determinar o valor de a de modo que a inclinação em A seja igual a zero. Considerar EI constante e usar os teoremas dos momentos de áreas.



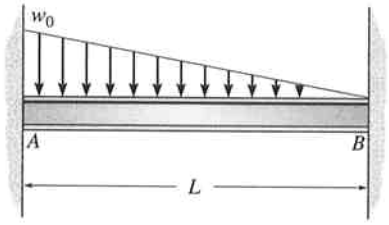
Problema 12.127

***12.128.** Determinar o valor de a de modo que a deflexão em C seja nula. Considerar EI constante e usar os teoremas dos momentos de áreas.



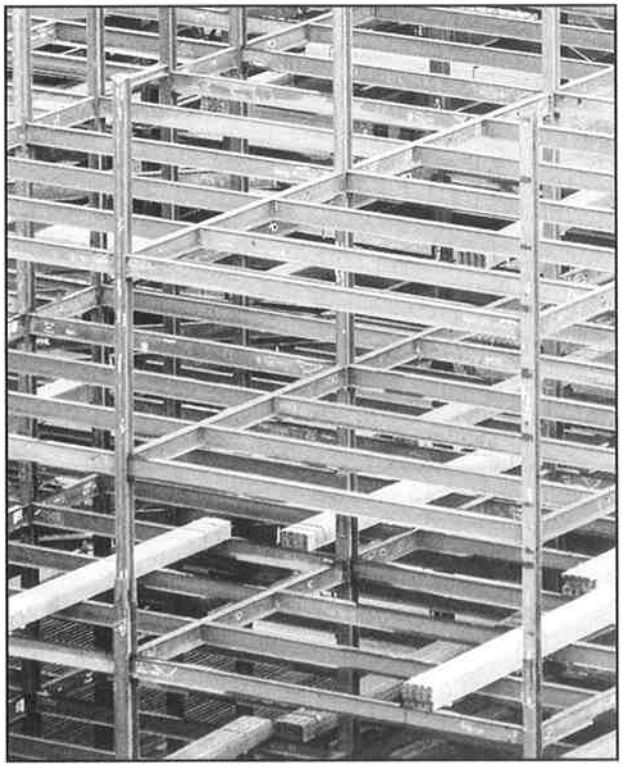
Problema 12.128

12.129. Determinar as reações de momento nos apoios A e B. Usar o método da integração direta e considerar EI constante.



Problema 12.129

13 Flambagem de Colunas



As colunas deste edifício são usadas para suportar a carga do piso. Os engenheiros projetam tais elementos para resistir à possibilidade de flambagem. (Chris Baker/Tony Stone Images.)

Objetivos do Capítulo

Trataremos agro do comportamento das colunas e indicaremos alguns métodos usados para seu projeto. O capítulo inicia-se com uma discussão geral sobre flambagem, seguida pela determinação da carga axial necessária para que ocorra flambagem em uma assim chamada coluna ideal. Depois, abordamos uma análise mais realista que considera qualquer flexão das colunas. Apresentamos também um tópico especial sobre flambagem inelástica (plástica) de colunas. No final do capítulo, discutimos alguns dos métodos usados para projetar colunas com cargas concêntricas e excêntricas, construídas com os materiais comuns da engenharia.

13.1 Carga Crítica

Quando se projeta um elemento, é necessário que ele satisfaça requisitos específicos de tensão, deflexão e estabilidade. Nos capítulos precedentes discutimos alguns métodos para determinar a tensão e a deflexão, supondo que o elemento sempre estivesse em equilíbrio estável. Alguns elementos, entretanto, podem estar submetidos a uma carga de compressão e, caso sejam compridos e esbeltos, tal carga pode ser suficientemente grande para provocar sua deflexão lateral. Especificamente, elementos compridos e esbeltos sujeitos a uma força axial de compressão são chamados ***colunas*** e a deflexão lateral que sofrem é chamada ***flambagem***. Em geral, a flambagem da coluna leva a uma falha súbita e dramática da estrutura ou do mecanismo. Por conta disso, as colunas devem ser projetadas com atenção especial, para que possam suportar com segurança as cargas pretendidas sem que ocorra o fenômeno da flambagem.

A carga axial máxima que uma coluna pode suportar quando está no *limite* da flambagem é chamada ***carga crítica*** P_{cr} (Figura 13.1*a*). Qualquer carga adicional provocará flambagem na coluna e, portanto, deflexão lateral, como mostra a Figura 13.1*b*. A fim de compreender melhor a natureza dessa instabilidade, consideremos um mecanismo formado por duas barras sem peso, rígidas e acopladas por pinos nas duas extremidades (Figura 13.2*a*). Quando essas barras estão na posição vertical, a mola, com rigidez k, está sem deformação e uma força vertical *pequena* **P** é aplicada no topo de uma das barras. Podemos alterar a posição de equilíbrio deslocando o pino em A uma pequena quantidade Δ (Figura 13.2*b*). Como mostra o diagrama de corpo livre do pino quando as barras são deslocadas (Figura 13.2*c*), a mola produzirá uma

força de recuperação $F = k\Delta$, enquanto a carga aplicada **P** desenvolverá duas componentes horizontais $P_x = P$ tg θ, que tendem a empurrar o pino (e as barras) ainda mais para fora do equilíbrio. Como θ é pequeno, $\Delta = \theta(L/2)$ e tg $\theta \approx \theta$. Assim, a força de *restauração* da mola torna-se $F = k\theta L/2$ e a força *perturbadora*, $2P_x = 2P\theta$.

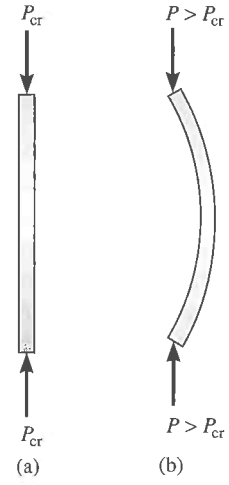


Figura 13.1

Se a força de restauração superar a perturbadora, isto é, $kL\theta/2 > 2P\theta$, então, observando que θ se cancela, resolvemos em P, o que leva a:

$$P < \frac{kL}{4} \qquad \text{equilíbrio estável}$$

Essa é uma condição de *equilíbrio estável*, visto que a força desenvolvida pela mola seria suficiente para restaurar as barras de volta à posição vertical. Por outro lado, se $kL\theta/2 < 2P\theta$, ou:

$$P > \frac{kL}{4} \qquad \text{equilíbrio instável}$$

então o mecanismo estaria em *equilíbrio instável*. Em outras palavras, se a carga P fosse aplicada e ocorresse um pequeno deslocamento em A, o mecanismo tenderia a sair de equilíbrio e não voltar à posição inicial.

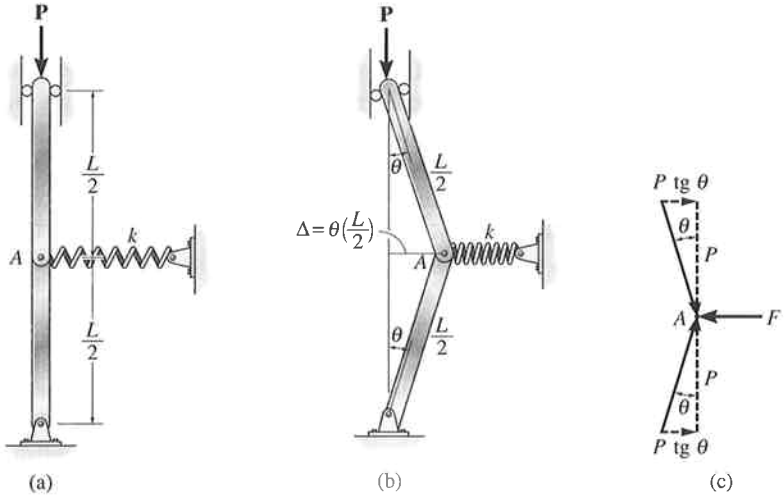


Figura 13.2

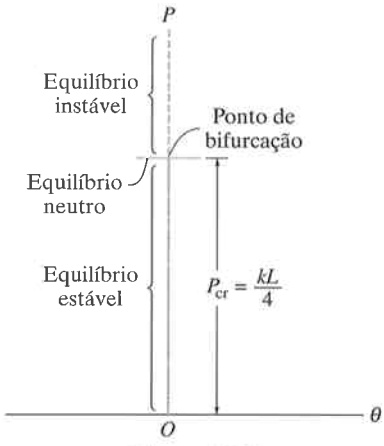


Figura 13.3

O valor intermediário de P, definido desde que $kL\theta/2 = 2P\theta$, é a *carga crítica*. Aqui:

$$P_{cr} = \frac{kL}{4} \qquad \text{equilíbrio neutro}$$

Essa carga representa o caso de um mecanismo em *equilíbrio neutro*. Como P_{cr} *independe* do (pequeno) deslocamento θ das barras, qualquer distúrbio leve sofrido pelo mecanismo não fará com que ele saia de equilíbrio nem que seja restaurado à posição inicial. Em vez disso, as barras *permanecerão* na posição defletida.

Esses três estados de equilíbrio diferentes estão representados graficamente na Figura 13.3. O ponto de transição onde a carga é igual ao valor crítico $P = P_{cr}$ é chamado *ponto de bifurcação*. Nele, o mecanismo estará em equilíbrio para qualquer *valor pequeno* de θ, medido tanto para a direita como para a esquerda da vertical. Fisicamente, P_{cr} representa a carga para a qual o mecanismo está no limite da flambagem. É válido determinar esse valor supondo *pequenos deslocamentos* como feito aqui; entretanto, P_{cr} pode *não* ser o maior valor de P que o mecanismo é capaz de suportar. Na verdade, se for colocada nas barras uma carga maior, o mecanismo poderá sofrer uma deflexão adicional antes que a mola seja comprimida ou alongada o suficiente para mantê-lo em equilíbrio.

Como no caso do mecanismo de duas barras que acabamos de discutir, é possível obter as cargas críticas de flambagem em colunas apoiadas de várias maneiras, e o método usado para fazer isso será explicado na próxima seção. Apesar de no projeto de engenharia a carga crítica poder ser considerada a maior carga que a coluna é capaz de suportar, entenda-se que, assim como o mecanismo de duas barras na posição defletida ou flambada, uma coluna suporta na verdade uma carga ainda maior que P_{cr}. Infelizmente, no entanto, essa carga pode fazer com que a coluna sofra uma *grande* deflexão, em geral inadmissível nas estruturas e máquinas da engenharia. Para fletir o ponteiro de um medidor, por exemplo, são necessários apenas alguns newtons de força, mas a carga adicional que ele suporta só poderá ser aplicada depois que ele sofrer uma deflexão lateral relativamente grande.

13.2 COLUNA IDEAL COM APOIOS DE PINO

Alguns elementos acoplados com pinos usados em partes móveis de maquinaria, como este elo curto, estão sujeitos a cargas de compressão e, assim, agem como colunas.

Nesta seção vamos determinar a carga crítica de flambagem para uma coluna apoiada em pino como a da Figura 13.4*a*. A coluna a ser considerada é uma ***coluna ideal***, isto é, perfeitamente reta antes do carregamento, feita de material homogêneo e sobre a qual a carga é aplicada através do centróide da seção transversal. Admite-se ainda que o material comporta-se de maneira linear-elástica e a coluna flete-se em um único plano. Na realidade, essas condições de coluna perfeitamente reta e aplicação de carga nunca são cumpridas; entretanto, a análise da 'coluna ideal' é semelhante à usada em colunas inicialmente tortas ou aquelas que sofrem aplicação de carga excêntrica. Esses casos mais realistas serão discutidos no final do capítulo.

Como a coluna ideal é perfeitamente reta, em teoria a carga axial P pode ser aumentada até que a falha ocorra por fratura ou escoamento do material. Entretanto, quando a carga crítica P_{cr} é atingida, a coluna está no limite de tornar-se instável, de modo que uma pequena força lateral F (Figura 13.4*b*), quando removida, vai fazê-la permanecer na posição fletida (Figura 13.4*c*). Qualquer pequena redução de P para menos de P_{cr} permite que a coluna fique reta e qualquer aumento de P, além de P_{cr}, provoca aumento adicional da deflexão lateral.

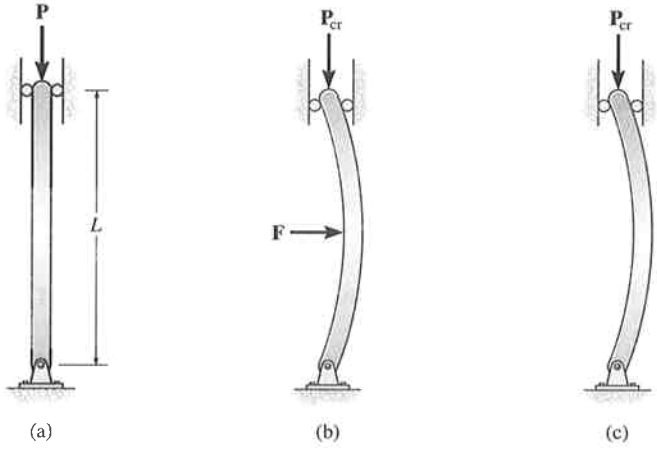


Figura 13.4

O fato de a coluna permanecer estável ou tornar-se instável quando submetida a carga axial depende de sua própria habilidade de restauração, que, por sua vez, baseia-se em sua resistência à flexão. Então, para determinar a carga crítica e a forma de flambagem da coluna, aplicaremos a Equação 12.10, que relaciona o momento interno da coluna e sua forma fletida, isto é:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M \tag{13.1}$$

Lembrar que essa equação supõe uma inclinação pequena[1] da linha elástica e que todos os deslocamentos ocorrem somente por flexão. Quando a coluna está na posição fletida (Figura 13.5*a*), o momento fletor interno é determinado pelo método das seções. O diagrama de corpo livre de um segmento na posição fletida aparece na Figura 13.5*b*. Nesse caso, tanto a deflexão v como o momento interno M são mostrados no *sentido positivo*, de acordo com a convenção de sinal usada para estabelecer a Equação 13.1. Somando os momentos, o momento interno é $M = -Pv$. Logo, a Equação 13.1 torna-se:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -Pv$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \left(\frac{P}{EI}\right)v = 0 \tag{13.2}$$

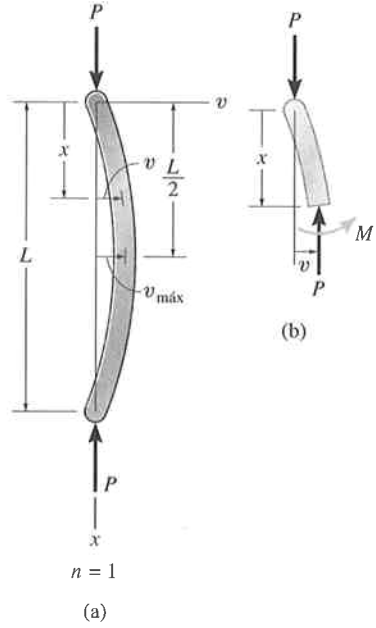


Figura 13.5 a, b

Essa é uma equação diferencial homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes. Pode-se mostrar, por métodos de diferenciação de equações ou por substituição direta na Equação 13.2, que a solução geral é:

$$v = C_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) \tag{13.3}$$

As duas constantes de integração são determinadas pelas condições de contorno nas extremidades da coluna. Como $v = 0$ em $x = 0$, então $C_2 = 0$. E como $v = 0$ em $x = L$, então:

$$C_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}L\right) = 0$$

Essa equação é satisfeita se $C_1 = 0$; entretanto, então $v = 0$, uma *solução trivial* cuja validade depende de a coluna permanecer sempre reta, mesmo que a carga a torne instável. A outra possibilidade é para:

$$\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}L\right) = 0$$

[1] No caso de deflexões grandes, devemos usar a Equação diferencial 12.4, $EI(d^2v/dx^2)/[1 + (dv/dx)^2]^{3/2} = M$, mais precisa.

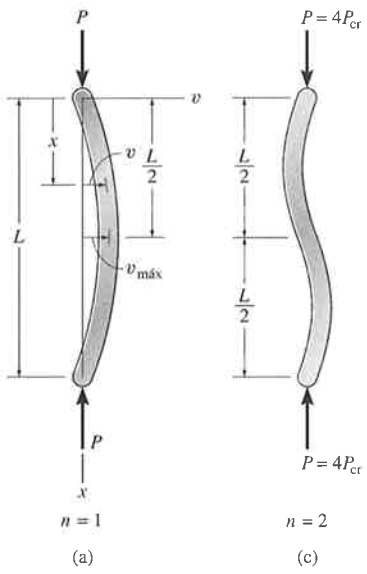


Figura 13.5 a, c

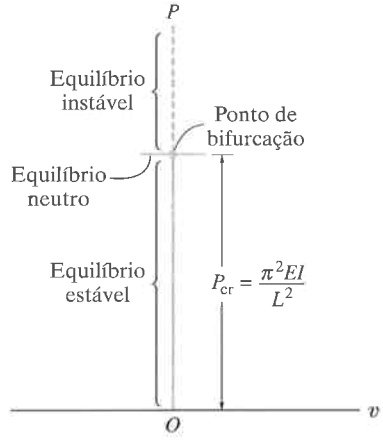


Figura 13.6

Figura 13.7

que é satisfeita se:

$$\sqrt{\frac{P}{EI}}\,L = n\pi$$

ou:

$$P = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{13.4}$$

O *menor valor* de P é obtido quando $n = 1$, e a *carga crítica* para a coluna é, portanto:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Essa carga é denominada às vezes *carga de Euler*, em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler, que solucionou o problema em 1757. A forma fletida correspondente é definida pela equação:

$$v = C_1 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}$$

Aqui a constante C_1 representa a deflexão máxima, $v_{máx}$, que ocorre no ponto médio da coluna (Figura 13.5*a*). Valores específicos de C_1 não podem ser obtidos, pois se desconhece a forma fletida exata da coluna, uma vez que ela sofreu flambagem. Admitiu-se, no entanto, uma deflexão pequena.

Entenda que n na Equação 13.4 representa o número de ondas na forma fletida da coluna. Por exemplo, se $n = 2$, então, pelas equações 13.3 e 13.4, aparecerão *duas ondas* na forma flambada (Figura 13.5*c*) e a coluna suportará uma carga crítica que é $4P_{cr}$ imediatamente antes da flambagem. Como esse valor é quatro vezes a carga crítica e a forma fletida é instável, essa forma de flambagem não existe.

Assim como no caso do mecanismo de duas barras discutido na Seção 13.1, podemos representar as características carga-deflexão da coluna ideal pelo gráfico mostrado na Figura 13.6. O ponto de bifurcação representa o estado de *equilíbrio neutro*, no qual a *carga crítica* atua sobre a coluna. Nesse caso, a coluna está na iminência de flambagem.

Deve-se observar que a carga crítica independe da resistência do material; em vez disso, ela depende apenas das dimensões da coluna (I e L) e da rigidez ou do módulo de elasticidade E do material. Por essa razão, no que concerne à flambagem elástica, colunas feitas, por exemplo, de aço de alta resistência não oferecem vantagem sobre as de aço de resistência menor, uma vez que o módulo de elasticidade de ambas é aproximadamente o mesmo. Observe também que a capacidade de carga da coluna aumenta à medida que o momento de inércia da seção transversal sobe. Desse modo, as colunas eficientes são projetadas para que a maior parte da seção transversal fique o mais longe possível dos eixos principais do centróide da seção. É por isso que seções ocas (como os tubos) são mais econômicas que as maciças. Além disso, seções de abas largas e colunas 'construídas' com perfis em U, cantoneiras, chapas etc. são melhores que seções maciças e retangulares.

É importante entender também que a coluna sofrerá flambagem em torno do eixo principal da seção transversal de ***menor momento de inércia*** (o eixo mais fraco). Por exemplo: uma coluna com seção transversal retangular, como um ponteiro de medidor (Figura 13.7), sofre flambagem em torno do eixo *a–a*, não do eixo *b–b*. Como resultado, os engenheiros em geral tentam obter um equilíbrio, mantendo os mesmos momentos de inércia em todas as direções. Então, geometricamente, tubos circulares são colunas excelentes, assim como tubos quadrados ou formas que tenham $I_x \approx I_y$.

Resumindo a discussão anterior, a equação de flambagem de uma coluna esbelta comprida apoiada por pino pode ser reescrita e seus termos definidos como segue:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{13.5}$$

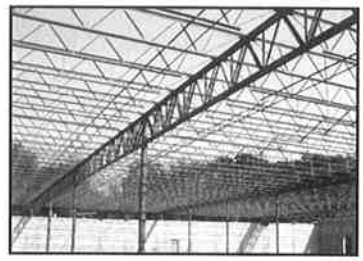
onde:

P_{cr} = carga crítica ou carga axial máxima na coluna imediatamente antes de começar a flambagem; essa carga *não* deve permitir que a tensão na coluna exceda o limite de proporcionalidade

E = módulo de elasticidade do material

I = o *menor* momento de inércia da área da seção transversal

L = comprimento da coluna sem apoio, cujas extremidades são presas por pinos



Colunas interiores típicas de tubo usadas para apoiar a cobertura de um edifício de um andar.

Para fins de projeto, a Equação 13.5 será mais conveniente se expressar o momento de inércia por $I = Ar^2$, onde A é a área da seção transversal e r é o ***raio de giração*** da área da seção transversal. Assim:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E(Ar^2)}{L^2}$$

$$\left(\frac{P}{A}\right)_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}$$

ou:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \tag{13.6}$$

Onde:

σ_{cr} = tensão crítica, que é a *tensão média* na coluna imediatamente antes de a coluna flambar; essa tensão é uma *tensão elástica* e, portanto, $\sigma_{cr} \leq \sigma_E$.

E = módulo de elasticidade do material

L = comprimento da coluna sem apoio, cujas extremidades são presas por pinos

r = o *menor* raio de giração da coluna, determinado por $r = \sqrt{I/A}$, onde I é o *menor* momento de inércia da área da seção transversal A da coluna

A relação geométrica L/r da Equação 13.6 é denominada ***índice de esbeltez***. Tal índice mede a flexibilidade das colunas e, como será discutido mais tarde, serve para classificá-las como comprida, intermediária ou curta.

É possível traçar o gráfico da Equação 13.6 usando eixos que representem a tensão crítica e o índice de esbeltez. Exemplos típicos desse gráfico para colunas feitas de aço estrutural e liga de alumínio aparecem na Figura 13.8. Observe que as curvas são hiperbólicas e valem apenas para tensões críticas abaixo do ponto de escoamento (limite de proporcionalidade) do material, visto que este deve comportar-se elasticamente. Para o aço, o limite de escoamento é $(\sigma_E)_{aço} = 36$ ksi [$E_{aço} = 29(10^3)$ ksi] e, para o alumínio, é $(\sigma_E)_{al} = 27$ ksi [$E_{al} = 10(10^3)$ ksi]. Substituindo $\sigma_{aço} = \sigma_E$ na Equação 13.6, os *menores* índices de esbeltez admissíveis para colunas de aço e alumínio serão, portanto, $(L/r)_{aço} = 89$ e $(L/r)_{al} = 60{,}5$, respectivamente. Assim, para uma coluna de aço, se $(L/r)_{aço} \geq 89$, a fórmula de Euler pode ser usada para determinar a carga de flambagem, uma vez que a tensão na coluna permanece elástica. Por outro lado, se $(L/r)_{aço} < 89$, a tensão da coluna excede o ponto de escoamento antes que a flambagem possa ocorrer e, portanto, a fórmula de Euler não é válida nesse caso.

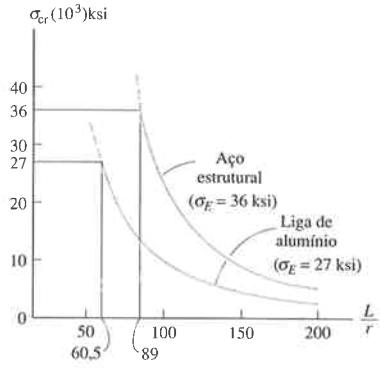


Figura 13.8

PONTOS IMPORTANTES

- *Colunas* são elementos compridos e esbeltos submetidos a cargas axiais.
- A *carga crítica* é a carga axial máxima que uma coluna suporta quando está no limite da flambagem. Essa carga representa um caso de *equilíbrio neutro*.
- Uma *coluna ideal* é perfeitamente reta a princípio, feita de material homogêneo e recebe carga aplicada através do centróide de sua seção transversal.
- Uma coluna acoplada por pino sofrerá flambagem através do eixo principal da seção transversal a qual tenha o *menor* momento de inércia.
- O *índice de esbeltez* é dado por L/r, onde r é o menor raio de giração da seção transversal. A flambagem ocorre em torno do eixo em que esse índice tem o maior valor.

EXEMPLO 13.1

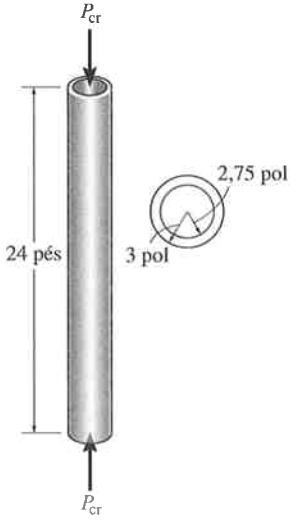


Figura 13.9

Um tubo de aço A-36 com 24 pés de comprimento e a seção transversal mostrada na Figura 13.9 deve ser usado como coluna, a ser presa por um pino na extremidade. Determinar a carga axial máxima admissível que a coluna suportará sem sofrer flambagem.

SOLUÇÃO

Usar a Equação 13.5 para obter a carga crítica com $E_{aço} = 29(10^3)$ ksi:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

$$= \frac{\pi^2[29(10^3)\ \text{kip/pol}^2](\frac{1}{4}\pi(3)^4 - \frac{1}{4}\pi(2{,}75)^4)\ \text{pol}^4}{[24\ \text{pés}(12\ \text{pol/pé})]^2}$$

$$= 64{,}5\ \text{kip} \qquad \textit{Resposta}$$

Essa força cria uma tensão média de compressão na coluna de:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{64{,}5\ \text{kip}}{[\pi(3)^2 - \pi(2{,}75)^2]\ \text{pol}^2} = 14{,}3\ \text{ksi}$$

Sendo $\sigma_{cr} < \sigma_E = 36$ ksi, a aplicação da equação de Euler é apropriada para o caso.

EXEMPLO 13.2

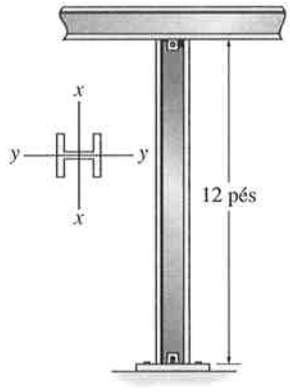


Figura 13.10

O elemento construído com perfil W8 × 31 de aço A-36, mostrado na Figura 13.10, deve ser usado como coluna presa por pino. Determinar a maior carga axial que ele suportará antes que a flambagem se inicie ou o aço escoe.

SOLUÇÃO

Pela tabela do Apêndice B, a área da seção transversal da coluna e os momentos de inércia são $A = 9{,}13\ \text{pol}^2$, $I_x = 110\ \text{pol}^4$ e $I_y = 37{,}1\ \text{pol}^4$. Verifica-se por inspeção que a flambagem ocorre em torno do eixo y–y. Por quê? Aplicando a Equação 13.5, temos:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2[29(10^3)\ \text{kip/pol}^2](37{,}1\ \text{pol}^4)}{[12\ \text{pés}(12\ \text{pol/pé})]^2} = 512\ \text{kip}$$

Quando a coluna está completamente carregada, a tensão de compressão média nela desenvolvida é:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{512 \text{ kip}}{9{,}13 \text{ pol}^2} = 56{,}1 \text{ ksi}$$

Como essa tensão excede o limite de escoamento (36 ksi), a carga P é determinada pela compressão simples:

$$36 \text{ ksi} = \frac{P}{9{,}13 \text{ pol}^2}; \qquad P = 329 \text{ kip} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Na prática, aplica-se um fator de segurança à carga.

13.3 COLUNAS COM VÁRIOS TIPOS DE APOIO

Na Seção 13.2 deduzimos a carga de Euler para uma coluna presa por pino ou livre para girar nas extremidades. Freqüentemente, no entanto, as colunas são apoiadas de outras maneiras. Como exemplo, consideremos o caso de uma coluna fixa na base e livre no topo (Figura 13.11*a*). Para determinar a carga de flambagem nessa coluna, seguimos o mesmo procedimento usado para a coluna com pino. Pelo diagrama de corpo livre da Figura 13.11*b*, o momento fletor interno em uma seção arbitrária é $M = P(\delta - v)$. Conseqüentemente, a equação diferencial para a curva de deflexão é:

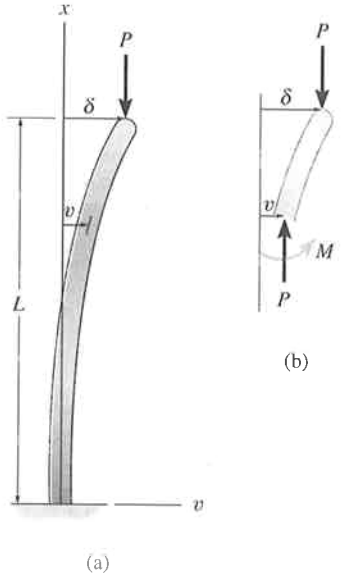


Figura 13.11

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = P(\delta - y)$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{P}{EI}v = \frac{P}{EI}\delta \qquad (13.7)$$

Ao contrário da Equação 13.2, essa é não-homogênea devido ao termo não-nulo do lado direito. A solução consiste tanto em uma solução complementar como em uma solução particular, ou seja:

$$v = C_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + \delta$$

As constantes são determinadas pelas condições de contorno. Em $x = 0$, $v = 0$, de modo que $C_2 = -\delta$. Além disso:

$$\frac{dv}{dx} = C_1\sqrt{\frac{P}{EI}}\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) - C_2\sqrt{\frac{P}{EI}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right)$$

Em $x = 0, dv/dx = 0$, de modo que $C_1 = 0$. A curva de deflexão é, portanto:

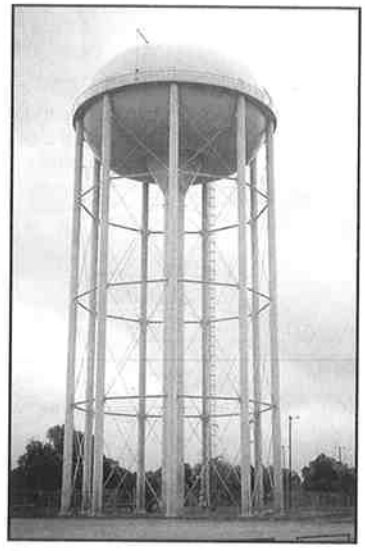
$$v = \delta\left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right)\right] \qquad (13.8)$$

Como a deflexão no topo da coluna é δ, isto é, em $x = L, v = \delta$, é necessário que:

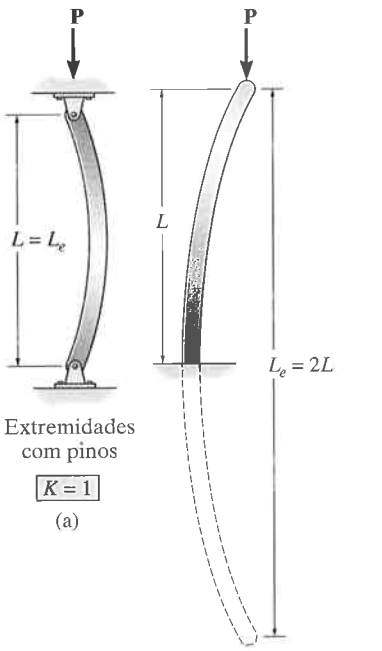
$$\delta \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}L\right) = 0$$

A solução trivial $\delta = 0$ indica que não ocorre flambagem, independentemente da carga P. Em vez disso:

$$\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}L\right) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \sqrt{\frac{P}{EI}}L = \frac{n\pi}{2}$$



Para evitar a flambagem das colunas tubulares que suportam este reservatório de água, os engenheiros as reforçaram em três locais ao longo do comprimento.



Extremidades com pinos

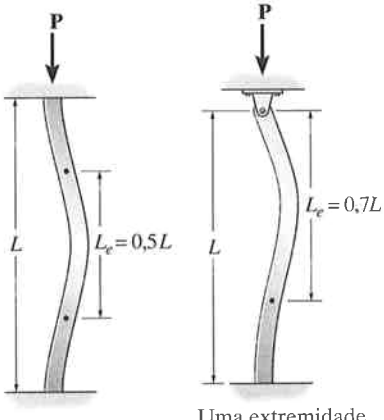
$K = 1$

(a)

Uma extremidade engastada e a outra livre

$K = 2$

(b)



Extremidades engastadas

$K = 0{,}5$

(c)

Uma extremidade com pino e a outra engastada

$K = 0{,}7$

(d)

Figura 13.12

A menor carga crítica ocorre quando $n = 1$, de modo que:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \tag{13.9}$$

Comparando essa equação com a 13.5, vê-se que uma coluna com apoio fixo só na base suporta apenas um quarto da carga crítica que pode ser aplicada a uma coluna apoiada por pino nas extremidades.

Outros tipos de coluna apoiada são analisados de maneira muito semelhante e não serão tratados em detalhe aqui.[2] Em vez disso, vamos tabular os resultados para os tipos mais comuns de apoio e mostrar como aplicar tais resultados escrevendo a fórmula de Euler de forma geral.

Comprimento Efetivo. Como dissemos anteriormente, a fórmula de Euler (Equação 13.5), foi desenvolvida para colunas cujas extremidades estejam presas por pinos ou livres para girar. Em outras palavras, nessa equação L representa a distância sem apoio entre os pontos de momento nulo. Se a coluna for apoiada de outras maneiras, a fórmula de Euler poderá ser usada para determinar a carga crítica desde que 'L' represente a distância entre pontos de momento fletor nulo. Essa distância é chamada ***comprimento efetivo*** da coluna, L_e. Obviamente, em uma coluna com extremidades presas por pinos $L_e = L$ (Figura 13.12*a*). Para a coluna com uma extremidade engastada e a outra livre analisada anteriormente, a curva de deflexão é metade daquela da coluna que está presa por pino e tem comprimento $2L$ (Figura 13.12*b*). Assim, o comprimento efetivo entre os pontos de momento nulo é $L_e = 2L$. Exemplos de outras duas colunas com diferentes apoios nas extremidades também são mostrados na Figura 13.12. A coluna engastada nas duas extremidades (Figura 13.12*c*) tem pontos de inflexão ou pontos de momento nulo a $L/4$ de cada apoio. Portanto, o comprimento efetivo é representado pela metade central de seu comprimento, isto é, $L_e = 0{,}5L$. Por fim, a coluna com uma extremidade presa por pino e outra engastada (Figura 13.12*d*) tem ponto de inflexão a aproximadamente $0{,}7L$ da extremidade presa por pino, de modo que $L_e = 0{,}7L$.

Em vez de especificar o comprimento efetivo da coluna, muitas normas de projeto fornecem fórmulas que empregam um coeficiente adimensional K chamado ***fator de comprimento efetivo***. K é definido por:

$$L_e = KL \tag{13.10}$$

Valores específicos de K também são dados na Figura 13.12. Baseados nessa generalização, podemos escrever a fórmula de Euler como:

$$\boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}} \tag{13.11}$$

ou

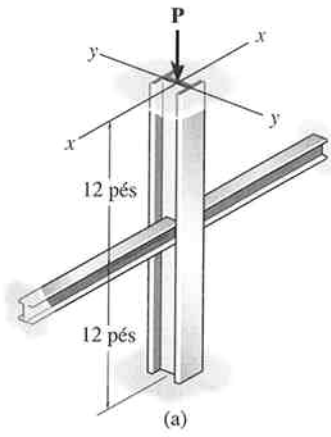
$$\boxed{\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(KL/r)^2}} \tag{13.12}$$

Nesse caso, (KL/r) é o ***índice de esbeltez efetivo*** da coluna. Observe, por exemplo, que, para a coluna engastada na base e livre na extremidade, temos $K = 2$ e, portanto, a Equação 13.11 dá o mesmo resultado da Equação 13.9.

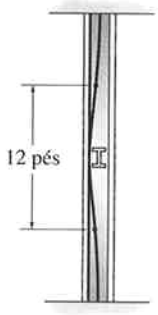
[2] Ver os problemas 13.42, 13.43, 13.44 e 13.45.

EXEMPLO 13.3

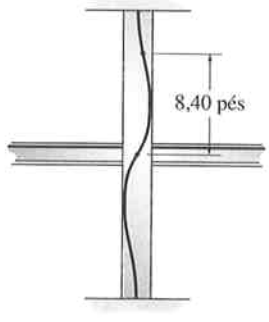
Uma coluna de aço com perfil W6 × 15 tem 24 pés de comprimento e está engastada nas duas extremidades como mostra a Figura 13.13*a*. Para aumentar sua capacidade de carga, os engenheiros acoplam, em torno de seu eixo *y*–*y* (fraco), reforços que se supõe serem presos por pino na metade da altura. Determinar a carga que a coluna pode suportar de modo que não sofra flambagem e o material não exceda o limite de escoamento. Adotar $E_{aço} = 29(10^3)$ ksi e $\sigma_E = 60$ ksi.



(a)



Flambagem do eixo *x*–*x*
(b)



Flambagem do eixo *y*–*y*
(c)

Figura 13.13

SOLUÇÃO

O comportamento da coluna em relação à flambagem será *diferente* em torno dos eixos *x* e *y* devido ao reforço. A forma da flambagem em cada caso é mostrada nas figuras 13.13*b* e 13.13*c*. Pela primeira figura, vemos que o comprimento efetivo para flambagem em torno de *x*–*x* é $(KL)_x = 0{,}5(24 \text{ pés}) = 12 \text{ pés} = 144 \text{ pol}$; já pela Figura 13.13*c*, para flambagem em torno do eixo *y*–*y*, $(KL)_y = 0{,}7(24/2 \text{ pés}) = 8{,}40 \text{ pés} = 100{,}8 \text{ pol}$. Os momentos de inércia para um perfil W6 × 15 são obtidos na tabela do Apêndice B. Temos $I_x = 29{,}1 \text{ pol}^4$ e $I_y = 9{,}32 \text{ pol}^4$.

Aplicando a Equação 13.11, temos:

$$(P_{cr})_x = \frac{\pi^2 EI_x}{(KL)_x^2} = \frac{\pi^2[29(10^3) \text{ ksi}]29{,}1 \text{ pol}^4}{(144 \text{ pol})^2} = 401{,}7 \text{ kip} \qquad (1)$$

$$(P_{cr})_y = \frac{\pi^2 EI_y}{(KL)_y^2} = \frac{\pi^2[29(10^3) \text{ ksi}]9{,}32 \text{ pol}^4}{(100{,}8 \text{ pol})^2} = 262{,}5 \text{ kip} \qquad (2)$$

Verifica-se por comparação que a flambagem ocorre em torno do eixo *y*–*y*.

A área da seção transversal é $4{,}43 \text{ pol}^2$, de modo que a tensão de compressão média na coluna será:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{262{,}5 \text{ kip}}{4{,}43 \text{ pol}^2} = 59{,}3 \text{ ksi}$$

Como essa tensão é inferior ao limite de escoamento, a flambagem ocorrerá antes que o material escoe. Portanto:

$$P_{cr} = 263 \text{ kip} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Nota: pela Equação 13.11, observa-se que a flambagem ocorrerá sempre em torno do eixo que tenha o *maior* índice de esbeltez, uma vez que um índice de esbeltez grande implica uma carga crítica pequena. Assim, usando os dados de raio de giração da tabela do Apêndice B, temos:

$$\left(\frac{KL}{r}\right)_x = \frac{144 \text{ pol}}{2{,}56 \text{ pol}} = 56{,}2$$

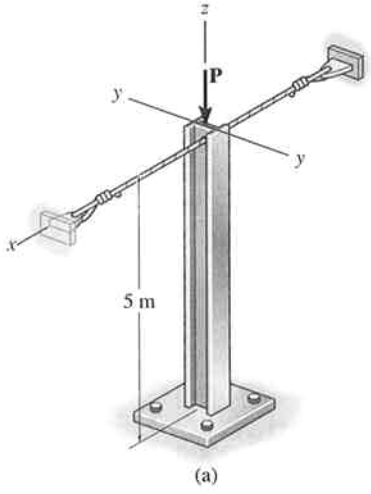
$$\left(\frac{KL}{r}\right)_y = \frac{100{,}8 \text{ pol}}{1{,}46 \text{ pol}} = 69{,}0$$

Logo, ocorrerá flambagem do eixo *y*–*y*, a mesma conclusão a que se chegou pela comparação das equações 1 e 2.

EXEMPLO 13.4

A coluna de alumínio está engastada na parte inferior e presa no topo com cabos; assim, evita-se movimento ao longo do eixo x (Figura 13.14*a*). Supondo que ela esteja engastada na base, determinar a maior carga admissível P que pode ser aplicada. Usar um fator de segurança de flambagem F.S. = 3,0. Adotar $E_{al} = 70$ GPa, $\sigma_E = 215$ MPa, $A = 7{,}5(10^{-3})$ m^2, $I_x = 61{,}3(10^{-6})$ m^4, $I_y = 23{,}2(10^{-6})$ m^4.

SOLUÇÃO



(a)

A flambagem em torno dos eixos x e y é mostrada nas figuras 13.14*b* e 13.14*c*, respectivamente. Usando a Figura 13.12 para a flambagem do eixo x–x, $K = 2$, de modo que $(KL)_x = 2(5\text{ m}) = 10$ m. Além disso, para a flambagem do eixo y–y, $K = 0{,}7$, assim $(KL)_y = 0{,}7(5\text{ m}) = 3{,}5$ m.

Aplicando a Equação 13.11, temos que as cargas críticas para cada caso são:

$$(P_{cr})_x = \frac{\pi^2 EI_x}{(KL)_x^2} = \frac{\pi^2[70(10^9)\text{ N/m}^2](61{,}3(10^{-6})\text{ m}^4)}{(10\text{ m})^2}$$

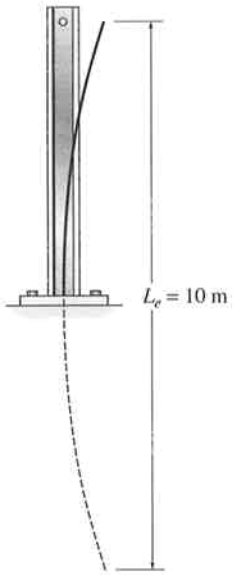
$$= 424\text{ kN}$$

$$(P_{cr})_y = \frac{\pi^2 EI_y}{(KL)_y^2} = \frac{\pi^2[70(10^9)\text{ N/m}^2](23{,}2(10^{-6})\text{ m}^4)}{(3{,}5\text{ m})^2}$$

$$= 1{,}31\text{ MN}$$

Por comparação, à medida que P aumentar, a coluna sofrerá flambagem em torno do eixo x–x. A carga admissível é, portanto:

$$P_{adm} = \frac{P_{cr}}{\text{F.S.}} = \frac{424\text{ kN}}{3{,}0} = 141\text{ kN}$$ ***Resposta***



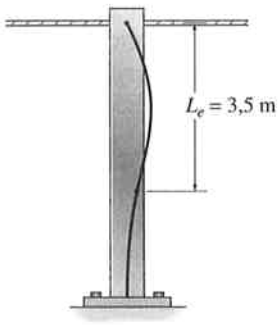
Flambagem do eixo x–x

(b)

Como:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{424\text{ kN}}{7{,}5(10^{-3})\text{ m}^2} = 56{,}5\text{ MPa} < 215\text{ MPa}$$

a equação de Euler pode ser aplicada.



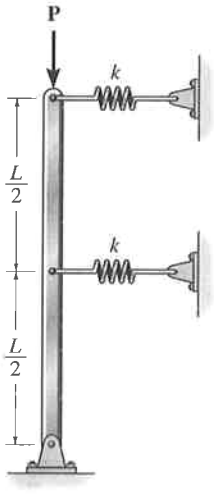
Flambagem do eixo y–y

(c)

Figura 13.14

PROBLEMAS

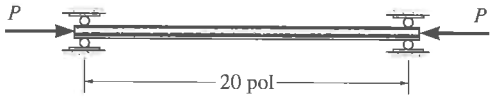
13.1. Determinar a carga crítica de flambagem para a coluna. Supõe-se que o material seja rígido.



Problema 13.1

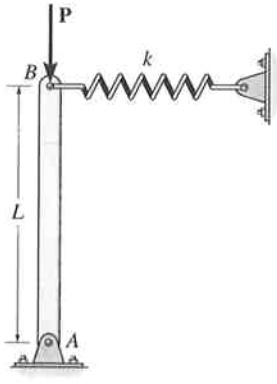
13.2. A haste consite em uma barra de aço A-36. Determinar seu menor diâmetro, com aproximação de $\frac{1}{16}$ pol, que suportará a carga $P = 5$ kip sem sofrer flambagem. As extremidades são apoiadas por roletes.

13.3. A haste consiste em uma barra de aço com 1 pol de diâmetro. Determinar a carga crítica de flambagem se as extremidades forem apoiadas por roletes. $E_{aço} = 29(10^3)$ ksi, $\sigma_E = 50$ ksi.



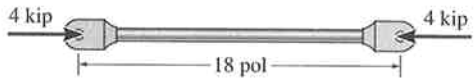
Problemas 13.2/13.3

***13.4.** A coluna consiste de um elemento rígido preso por pino na parte inferior e acoplado a uma mola na parte superior. Supondo que a mola não esteja deformada quando a coluna está na posição vertical, determinar a carga crítica que pode ser aplicada sobre esta.



Problema 13.4

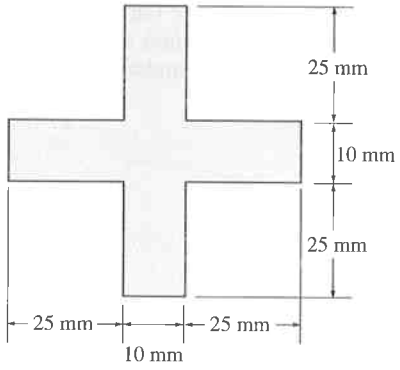
13.5. O elo de avião é feito de haste de aço A-36. Determinar o menor diâmetro da haste, com aproximação de $\frac{1}{16}$ pol, que suportará a carga de 4 kip sem sofrer flambagem. As extremidades estão presas por pino.



Problema 13.5

13.6. Uma coluna de aço A-36 tem comprimento de 4 m e está presa por pino em ambas as extremidades. Supondo que a seção transversal tenha as dimensões mostradas, determinar a carga crítica.

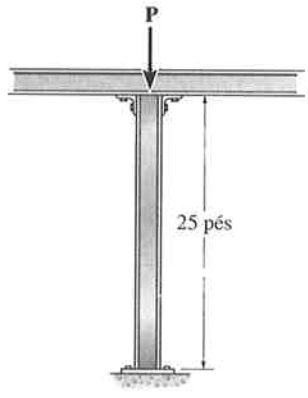
13.7. Resolver o Problema 13.6 supondo que a coluna esteja engastada na parte inferior e presa por pino na superior.



Problemas 13.6/13.7

***13.8.** O perfil W8 × 67 é usado como coluna de aço estrutural A-36, que se supõe engastada na base e presa por pino no topo. Determinar a maior força axial P que pode ser aplicada sem provocar flambagem.

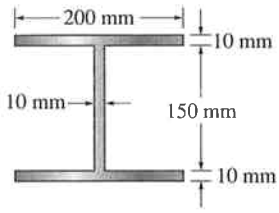
13.9. Resolver o Problema 13.8 supondo que a coluna esteja engastada na parte inferior e livre na superior.



Problemas 13.8/13.9

13.10. Uma coluna de aço tem comprimento de 9 m e está engastada em ambas as extremidades. Supondo que a área da seção transversal tenha as dimensões mostradas, determinar a carga crítica. $E_{aço} = 200$ GPa, $\sigma_E = 250$ MPa.

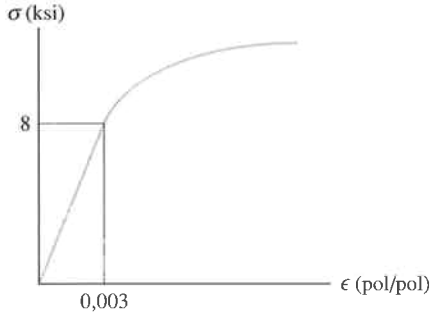
13.11. Resolver o Problema 13.10 supondo que a coluna esteja presa por pino nas extremidades superior e inferior.



Problemas 13.10/13.11

***13.12.** Uma haste feita de poliuretano tem diagrama tensão-deformação na compressão como mostrado. Supondo que ela esteja presa com pinos nas duas extremidades e tenha 37 pol de comprimento, determinar seu menor diâmetro de modo que não falhe devido à flambagem elástica.

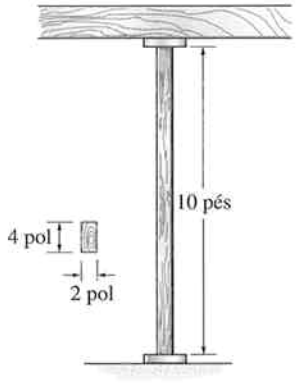
13.13. Uma haste feita de poliuretano tem diagrama tensão-deformação na compressão como mostrado. Supondo que ela esteja presa com pinos no topo e engastada na base e tenha 37 pol de comprimento, determinar seu menor diâmetro de modo que não falhe devido à flambagem elástica.



Problemas 13.12/13.13

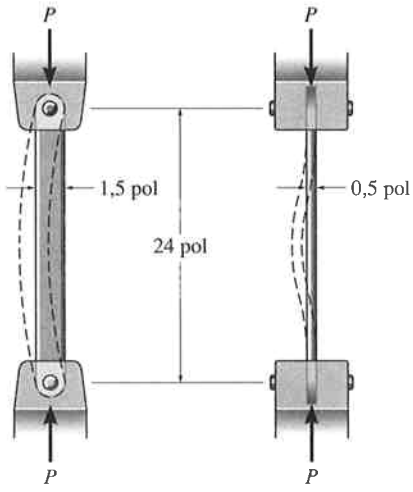
13.14. A coluna retangular de madeira com 10 pés de comprimento tem as dimensões mostradas. Determinar a carga crítica supondo que as extremidades estejam presas por pinos. $E_{mad} = 1{,}6(10^3)$ ksi, $\sigma_E = 5$ ksi.

13.15. A coluna com 10 pés de comprimento tem as dimensões mostradas. Determinar a carga crítica supondo que a extremidade inferior esteja engastada e a superior presa por pino. $E_{mad} = 1{,}6(10^3)$ ksi, $\sigma_E = 5$ ksi.



Problemas 13.14/13.15

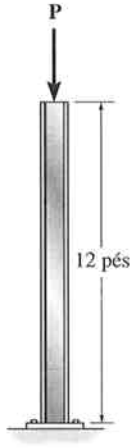
***13.16.** O elo feito de aço ferramenta L-2 e usado em uma máquina de forja é acoplado aos garfos por pinos nas extremidades. Determinar a carga máxima P que ele pode suportar sem sofrer flambagem. Usar um fator de segurança para flambagem de F.S. = 1,75. Observar, na figura da esquerda, que as extremidades estão presas por pino para flambagem e, na da direita, que as extremidades estão engastadas.



Problema 13.16

13.17. A coluna de aço estrutural construída com perfil W12 × 87 tem 12 pés de comprimento. Supondo que sua extremidade inferior esteja engastada, com seu topo livre, e esteja também sujeita a uma carga axial P = 380 kip, determinar o fator de segurança relativo à flambagem.

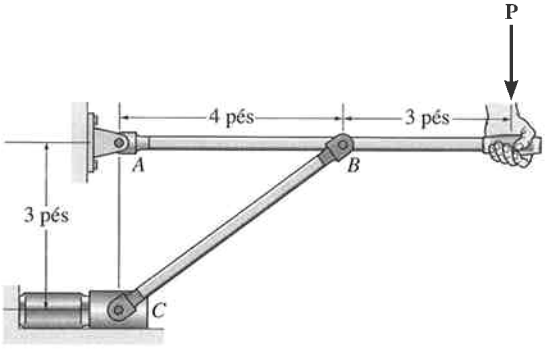
13.18. A coluna de aço estrutural construída com perfil W12 × 87 tem 12 pés de comprimento. Supondo que sua extremidade inferior esteja engastada e seu topo livre, determinar a maior carga axial que ela pode suportar. Usar um fator de segurança em relação à flambagem de 1,75.



Problemas 13.17/13.18

13.19. A alavanca é usada para operar uma prensa simples que comprime latas. Determinar a força máxima P que lhe pode ser aplicada de modo que a haste BC não sofra flambagem. A haste é feita de aço, tem 0,5 pol de diâmetro e está presa por pino nas extremidades. $E_{aço} = 29(10^3)$ ksi, $\sigma_E = 36$ ksi.

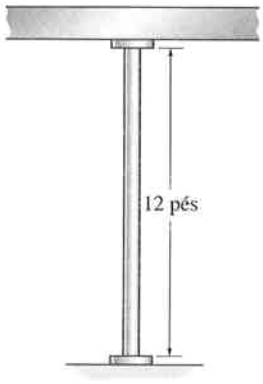
***13.20.** A alavanca é usada para operar uma prensa simples que comprime latas. Determinar o menor diâmetro da haste de aço BC, com aproximação de $\frac{1}{8}$ pol, que pode ser usado se a força máxima P aplicada à alavanca é $P = 60$ lb. A haste está presa por pino nas extremidades. $E_{aço} = 29(10^3)$ ksi, $\sigma_E = 36$ ksi.



Problemas 13.19/13.20

13.21. A coluna de tubo de aço A-36 com 12 pés de altura tem diâmetro externo de 3 pol e espessura de 0,25 pol. Determinar a carga crítica supondo que as extremidades estejam presas por pinos.

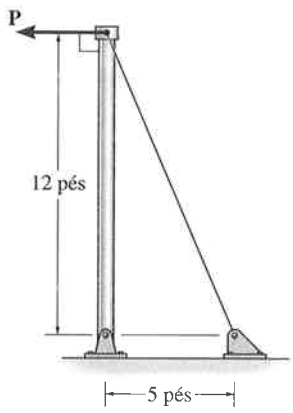
13.22. A coluna de tubo de aço A-36 com 12 pés de altura tem diâmetro externo de 3 pol e espessura de 0,25 pol. Determinar a carga crítica supondo que a extremidade inferior esteja engastada e a superior seja presa por pino.



Problemas 13.21/13.22

13.23. O tubo de aço A-36 tem diâmetro externo de 2 pol e espessura de 0,5 pol. Supondo que seja mantido em posição por um tirante, determinar a força horizontal P que lhe pode ser aplicada sem provocar sua flambagem. Supor que suas extremidades estejam acopladas por pino.

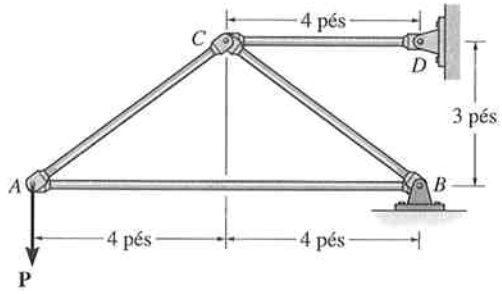
***13.24.** O tubo de aço A-36 tem diâmetro externo de 2 pol e espessura de 0,5 pol. Supondo que seja mantido em posição por um tirante, determinar o diâmetro interno que precisa ter com aproximação de $\frac{1}{8}$ pol, a fim de suportar uma carga horizontal máxima $P = 4$ kip sem sofrer flambagem. Supor que suas extremidades estejam acopladas por pino.



Problemas 13.23/13.24

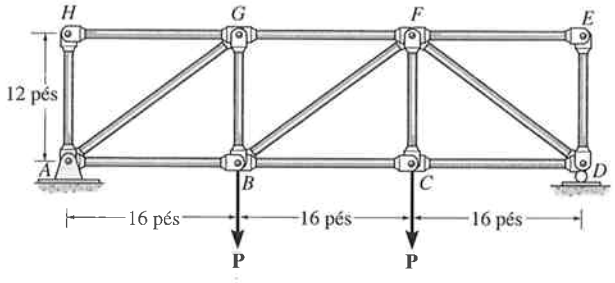
13.25. A treliça é feita de barras de aço A-36, cada uma com seção transversal circular de 1,5 pol de diâmetro. Determinar a força máxima P que pode ser aplicada sem provocar flambagem em nenhum dos elementos (os quais estão acoplados por pinos nas extremidades).

13.26. A treliça é feita de barras de aço A-36, cada uma com seção transversal circular. Supondo que a força aplicada seja $P = 10$ kip, determinar o diâmetro do elemento AB, com aproximação de $\frac{1}{8}$ pol, que o impedirá de sofrer flambagem. Todos os elementos estão apoiados por pinos nas extremidades.



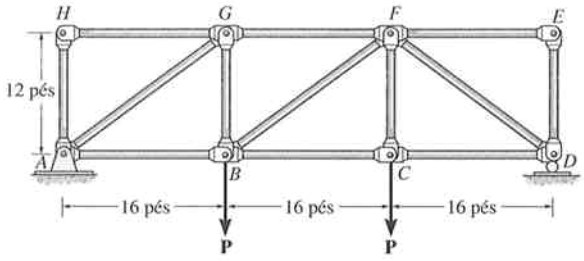
Problemas 13.25/13.26

13.27. Supõe-se que os elementos da treliça são acoplados por pinos. Se o elemento GF é uma haste de aço A-36 com diâmetro de 2 pol, qual a maior intensidade da carga **P** que pode ser suportada pela treliça sem provocar flambagem nesse elemento?



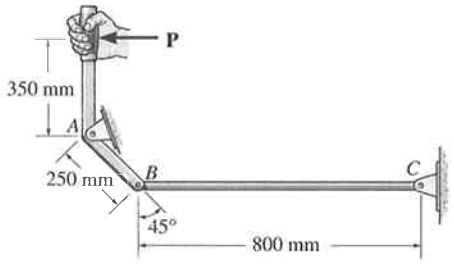
Problema 13.27

***13.28.** Supõe-se que os elementos da treliça são acoplados por pinos. Se o elemento AG é uma haste de aço A-36 com diâmetro de 2 pol, qual a maior intensidade da carga **P** que pode ser suportada pela treliça sem provocar flambagem nesse elemento?



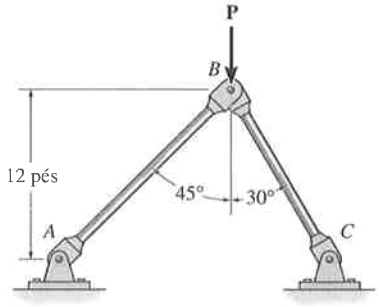
Problema 13.28

13.29. Determinar a força máxima P que pode ser aplicada no cabo da alavanca de modo que a haste de controle BC feita de aço A-36 e com 25 mm de diâmetro não sofra flambagem.



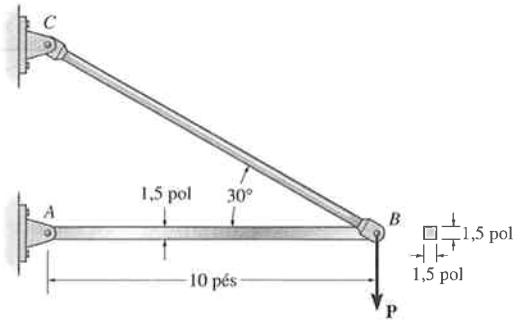
Problema 13.29

13.30. O mecanismo articulado está composto por hastes de aço A-36, todas com seção transversal circular. Supondo que cada uma tenha diâmetro de $\frac{3}{4}$ pol, determinar a maior carga que o mecanismo pode suportar sem que nenhuma haste sofra flambagem. Supor que as hastes estejam acopladas por pinos nas extremidades.



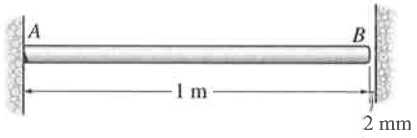
Problema 13.30

13.31. A barra de aço A-36 AB tem seção transversal quadrada. Supondo que esteja acoladada por pino nas extremidades, determinar a carga máxima admissível P que pode ser aplicada à estrutura. Usar um fator de segurança 2 em relação à flambagem.



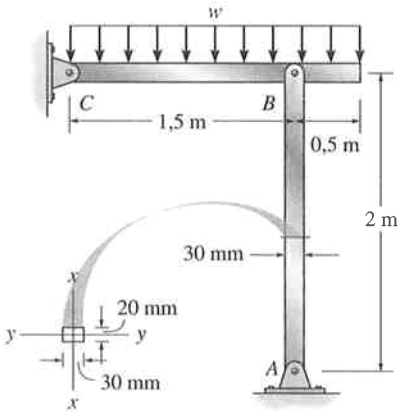
Problema 13.31

***13.32.** A haste de bronze C86100 com 50 mm de diâmetro está engastada em A, e entre sua extremidade B e a parede há uma folga de 2 mm. Determinar o aumento de temperatura ΔT que provocará flambagem nessa haste. Supor que o contato em B atua como um pino.



Problema 13.32

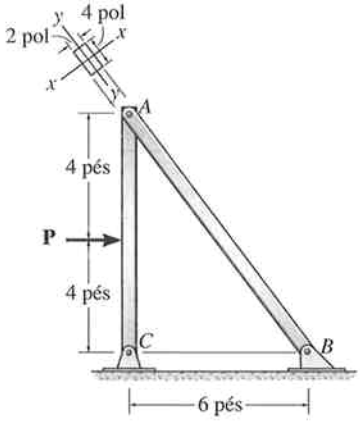
13.33. Determinar se a estrutura pode suportar a carga $w = 6$ kN/m supondo que o fator de segurança em relação à flambagem do elemento AB seja 3. Supor, também, que AB seja feita de aço e esteja presa por pino nas extremidades, para o caso de flambagem em relação ao eixo x–x, e engastada nas extremidades para o caso de flambagem em relação ao eixo y–y. $E_{aço} = 200$ GPa, $\sigma_E = 360$ MPa.



Problema 13.33

13.34. A barra AB da estrutura é feita de aço A-36 e está acoplada por pino nas extremidades. Supondo $P = 30$ kip, determinar o fator de segurança em relação à flambagem em torno do eixo y–y devido à carga aplicada.

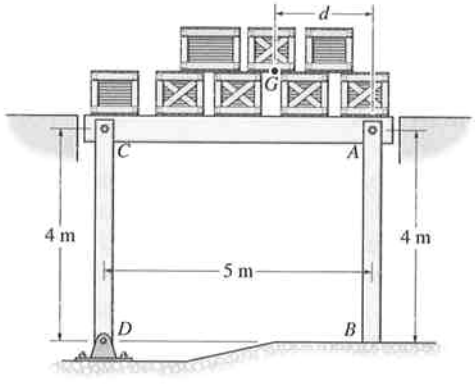
13.35. A barra AB da estrutura é feita de aço A-36 e está acoplada por pino nas extremidades. Determinar a maior carga P que pode ser aplicada à estrutura sem provocar flambagem em torno do eixo y–y.



Problemas 13.34/13.35

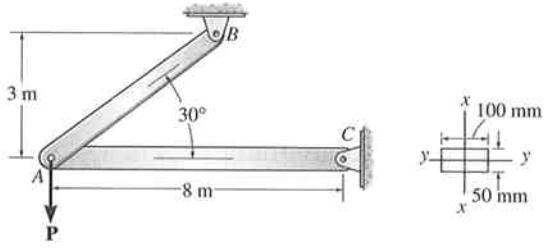
***13.36.** O piso é suportado pelas duas colunas quadradas de 40 mm de lado. A coluna AB está presa por pino em A e engastada em B, enquanto CD está presa por pino em C e D. Supondo que o piso esteja impedido de se movimentar para os lados, determinar a carga mais pesada que pode ser aplicada sobre ele sem provocar seu colapso. O centro de gravidade da carga está localizado em $d = 2$ m. Ambas as colunas são feitas de abeto Douglas.

13.37. O piso é suportado pelas duas colunas quadradas de 40 mm de lado. A coluna AB está presa por pino em A e engastada em B, enquanto CD está presa por pino em C e D. Supondo que o piso esteja impedido de se movimentar para os lados, determinar a posição d do centro de gravidade da carga e a maior grandeza da carga sem provocar colapso do piso. Ambas as colunas são feitas de abeto Douglas.



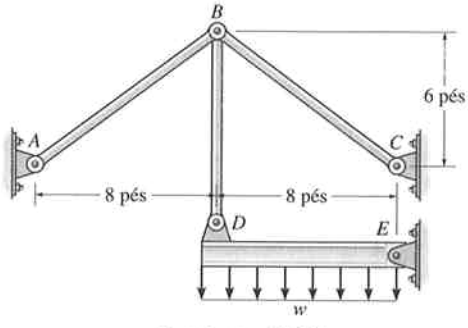
Problemas 13.36/13.37

13.38. A barra de aço AC da estrutura está acoplada por pino nas duas extremidades. Determinar o fator de segurança em relação à flambagem em torno do eixo y–y devido à carga aplicada $P = 15$ kN. $E_{aço} = 200$GPa, $\sigma_E = 360$ MPa.



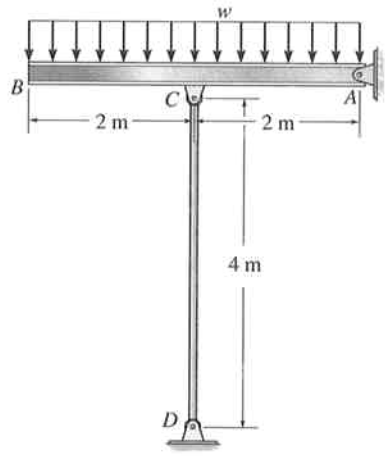
Problema 13.38

13.39. A viga é suportada pelos três tirantes, todos com diâmetro de 0,5 pol e feitos de aço A-36. Determinar a maior carga uniforme w que pode ser aplicada à viga sem provocar flambagem em AB e CB.



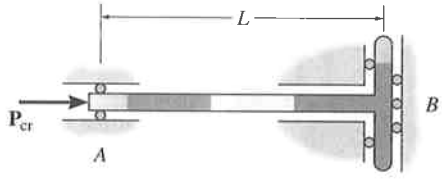
Problema 13.39

***13.40.** Determinar a carga distribuída máxima que pode ser aplicada à viga de abas largas de modo que o tirante CD não sofra flambagem. O tirante é uma haste de aço A-36 com 50 mm de diâmetro.



Problema 13.40

13.41. A coluna é apoiada em B por um apoio que não permite rotação, mas permite deflexão vertical. Determinar a carga crítica P_{cr}. Considerar EI constante.

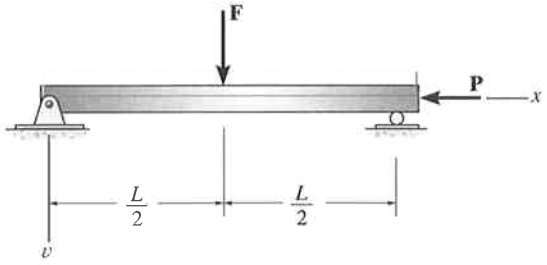


Problema 13.41

13.42. Consideremos uma coluna ideal como a da Figura 13.12*c*, com ambas as extremidades engastadas. Mostrar que sua carga crítica é dada por $P_{cr} = 4\pi^2 EI/L^2$. *Dica*: devido à deflexão vertical no topo da coluna, desenvolve-se um momento constante $\mathbf{M}'$ nos apoios. Mostrar que $d^2v/dx^2 + (P/EI)v = M'/EI$. A solução tem a forma $v = C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{P/EI}\,x) + C_2 \cos(\sqrt{P/EI}\,x) + M'/P$.

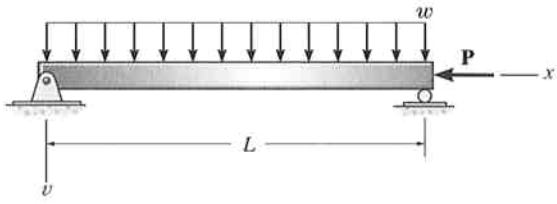
13.43. Consideremos uma coluna ideal como a da Figura 13.12*d*, com uma extremidade engastada e a outra presa por pino. Mostrar que sua carga crítica é dada por $P_{cr} = 20{,}19\ EI/L^2$. *Dica*: devido à deflexão vertical no topo da coluna, desenvolvem-se um momento constante $\mathbf{M}'$ no apoio engastado e forças horizontais de reação $\mathbf{R}'$ em ambos os apoios. Mostrar que $d^2v/dx^2 + (P/EI)v = (R'/EI)(L - x)$. A solução tem a forma $v = C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{P/EI}x) + C_2 \cos(\sqrt{P/EI}x) + (R'/P)(L - x)$. Após a aplicação das condições de contorno, mostrar que $\operatorname{tg}(\sqrt{P/EI}\,L) = \sqrt{P/EI}\,L$. Resolver por tentativa e erro para a menor raiz.

***13.44.** A coluna ideal está sujeita à força $\mathbf{F}$ em seu ponto médio e à carga axial $\mathbf{P}$. Determinar o deslocamento máximo e o momento máximo da coluna no centro do vão. Considerar EI constante. *Dica*: estabelecer a equação diferencial para a deflexão (Equação 13.1). A solução geral é $v = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx - c^2x/k^2$, onde $c^2 = F/2EI$, $k^2 = P/EI$.



Problema 13.44

13.45. A coluna ideal tem peso w (força/comprimento) e repousa na posição horizontal quando submetida à carga axial **P**. Determinar o deslocamento máximo e o momento máximo da coluna no centro do vão. Considerar EI constante. *Dica*: estabelecer a equação diferencial para a deflexão (Equação 13.1), com a origem no centro do vão. A solução geral é $v = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx + (w/2P)x^2 - (wL/2P)x - (wEI/P^2)$, onde $k^2 = P/EI$.



Problema 13.45

*13.4 FÓRMULA DA SECANTE

Podemos considerar estas colunas de madeira presas por pinos na extremidade inferior e engastadas nas vigas do topo. A deflexão das vigas provoca carregamento excêntrico nas colunas.

Para reduzir a fórmula de Euler, pressupôs-se que a carga P é aplicada sempre através do centróide da área da seção transversal e a coluna é perfeitamente reta. Essas condições são inteiramente irreais, uma vez que as colunas fabricadas *nunca* são perfeitamente retas nem a aplicação da carga é conhecida com grande precisão. Então, na realidade, as colunas não se *flambam subitamente*; ao contrário, começam a sofrer flambagem — ainda que sempre ligeira — imediatamente após a aplicação da carga. Como resultado, o critério real para aplicar a carga ficará restrito a uma deflexão especificada da coluna ou a um limite em que a tensão máxima na coluna não exceda a tensão admissível.

A fim de estudar essa conseqüência, aplicaremos a carga P a uma *distância excêntrica* (e) pequena, a partir do centróide da seção transversal (Figura 13.15*a*). Esse carregamento da coluna é estaticamente equivalente à carga axial P e ao momento fletor $M' = Pe$ mostrados na Figura 13.15*b*. Como se vê, em ambos os casos, as extremidades A e B são apoiadas de modo que ficam livres para girar (apoiadas por pino). Como antes, consideraremos apenas inclinações e deflexões pequenas e comportamento linear-elástico do material. Além disso, o plano x–v será um plano de simetria para a área da seção transversal.

Pelo diagrama de corpo livre da seção arbitrária (Figura 13.15*c*), concluímos que o momento interno na coluna é:

$$M = -P(e + v) \tag{13.13}$$

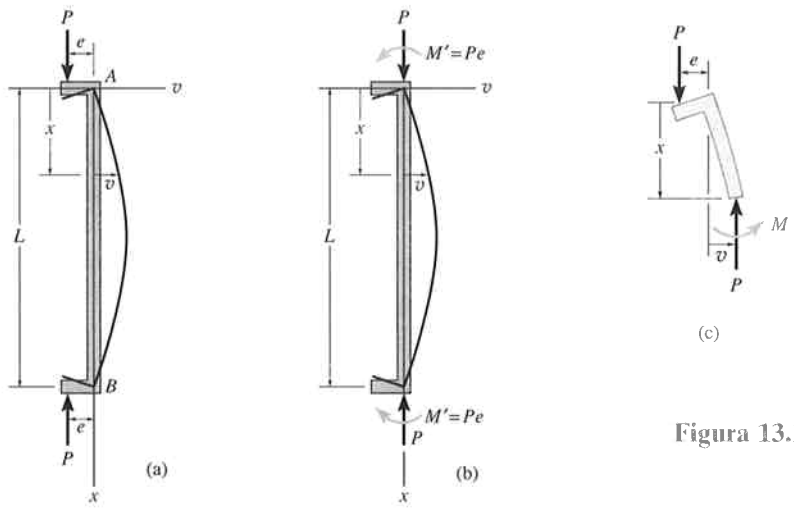


Figura 13.15

A equação diferencial da curva de deflexão é, portanto:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -P(e + v)$$

ou:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{P}{EI}v = -\frac{P}{EI}e$$

Essa equação é semelhante à 13.7, e sua solução geral consiste em uma solução complementar e outra particular, ou seja:

$$v = C_1 \operatorname{sen}\sqrt{\frac{P}{EI}}x + C_2 \cos\sqrt{\frac{P}{EI}}x - e \tag{13.14}$$

Para calcular as constantes, devemos aplicar as condições de contorno. Em $x = 0$, $v = 0$, de modo que $C_2 = e$. Em $x = L$, $v = 0$, o que leva a:

$$C_1 = \frac{e[1 - \cos(\sqrt{P/EI}\,L)]}{\operatorname{sen}(\sqrt{P/EI}\,L)}$$

Como $1 - \cos(\sqrt{P/EI}\,L) = 2\operatorname{sen}^2(\sqrt{P/EI}\,L/2)$ e $\operatorname{sen}(\sqrt{P/EI}\,L) = 2\operatorname{sen}(\sqrt{P/EI}\,L/2)\cos(\sqrt{P/EI}\,L/2)$, temos:

$$C_1 = e\,\operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right)$$

Assim, a curva de deflexão (Equação 13.14) pode ser escrita como:

$$v = e\left[\operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) - 1\right] \tag{13.15}$$

Deflexão Máxima. Devido à simetria do carregamento, tanto a deflexão máxima como a tensão máxima ocorrem no ponto médio da coluna. Portanto, quando $x = L/2$, $v = v_{máx}$, de modo que:

$$\boxed{v_{máx} = e\left[\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right) - 1\right]} \tag{13.16}$$

Observe que, se e tende a zero, então $v_{máx}$ também tende a zero. Entretanto, se os termos entre colchetes tendem ao infinito quando e tende a zero, então $v_{máx}$ terá um valor não-nulo. Matematicamente, essa condição corresponde ao comportamento de uma coluna carregada axialmente no instante da falha quando submetida à carga crítica P_{cr}. Portanto, para se determinar P_{cr} é necessário que:

$$\sec\left(\sqrt{\frac{P_{cr}}{EI}}\frac{L}{2}\right) = \infty$$

$$\sqrt{\frac{P_{cr}}{EI}}\frac{L}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{13.17}$$

resultado igual ao encontrado pela fórmula de Euler (Equação 13.5).

Se a Equação 13.16 for montada como a carga P *versus* a deflexão $v_{máx}$ para diversos valores da excentricidade e, obteremos a família de curvas coloridas mostrada na Figura 13.16. Nesse caso, a carga crítica torna-se uma assíntota das curvas e, naturalmente, representa o caso irreal de uma coluna ideal ($e = 0$).

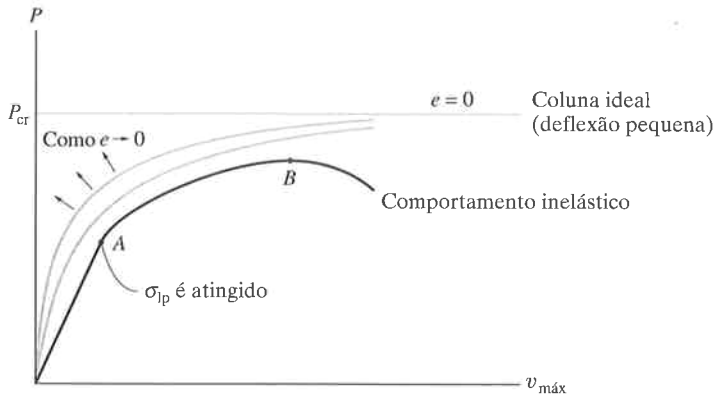


Figura 13.16

Como mencionamos antes, devido a imperfeições na coluna inicial e na aplicação da carga, *e nunca é nulo*; entretanto, como $e \to 0$, as curvas tendem para o caso ideal. Além disso, as curvas são adequadas apenas para *deflexões pequenas*, visto que a curvatura foi aproximada por d^2v/dx^2 quando a Equação 13.16 foi desenvolvida. Se tivesse sido feita uma análise mais exata, todas as curvas tenderiam a curvar-se para cima, interceptando reta $P = P_{cr}$ e depois subindo acima dela. Isso indica, naturalmente, que é necessária uma carga P maior para criar deflexões maiores da coluna. Não consideramos, no entanto, tal condição aqui, visto que a maioria dos projetos de engenharia restringe a deflexão das colunas a valores pequenos.

Saliente-se, ainda, que as curvas sombreadas da Figura 13.16 aplicam-se somente a material de comportamento linear-elástico. Esse é o caso das colunas mais longas e esbeltas. Entretanto, no caso de uma coluna robusta curta ou de comprimento intermediário, a carga aplicada, à medida que aumenta, pode por fim provocar o escoamento do material e, então, a coluna começará a comportar-se de *maneira inelástica*. Essa condição ocorre no ponto A da curva preta da Figura 13.16. Mesmo que a carga aumente ainda mais, a curva nunca atinge a carga crítica, e sim um valor máximo em B. Depois ocorre um decréscimo súbito na capacidade de carga à medida que a coluna continua a flambar-se com valores maiores.

Finalmente, as curvas sombreadas da Figura 13.16 também ilustram que ocorre uma relação *não-linear* entre a carga P e a deflexão v. Como resultado, o princípio da superposição *não pode ser usado* para determinar a deflexão total provocada pela aplicação *sucessiva de cargas* à coluna. Ao contrário, as cargas devem ser somadas primeiro e depois a deflexão devida à resultante delas será determinada. Fisicamente, a razão pela qual cargas sucessivas e deflexões não podem ser superpostas é que o momento interno da coluna *depende* tanto da carga P como da *deflexão* v, isto é, $M = -P(e + v)$ — Equação 13.13. Em outras palavras, qualquer *deflexão* provocada por uma carga componente aumenta o momento. Esse comportamento difere do observado na flexão de vigas, em que a deflexão real provocada pela carga *não* aumenta o momento interno.

A Fórmula da Secante. Podemos determinar a tensão máxima na coluna entendendo que ela é provocada tanto pela carga axial como pelo momento fletor (Figura 13.17*a*). O momento fletor máximo ocorre no ponto médio da coluna e, de acordo com as equações 13.13 e 13.16, tem a intensidade:

$$M = |P(e + v_{máx})| \qquad M = Pe \sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right) \tag{13.18}$$

Como mostra a Figura 13.17*b*, a tensão máxima na coluna é de compressão e tem valor de:

$$\sigma_{máx} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I}; \quad \sigma_{máx} = \frac{P}{A} + \frac{Pec}{I}\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right)$$

Como o raio de giração é definido por $r^2 = I/A$, a equação anterior é escrita sob a forma denominada *fórmula da secante*:

$$\sigma_{máx} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{L}{2r}\sqrt{\frac{P}{EA}}\right)\right] \tag{13.19}$$

onde:

$\sigma_{máx}$ = *tensão elástica* máxima na coluna, que ocorre no lado interno côncavo do ponto médio da coluna; essa tensão é de compressão

P = carga vertical aplicada à coluna; $P < P_{cr}$ a menos que $e = 0$, então $P = P_{cr}$ (Equação 13.5)

e = excentricidade da carga P medida a partir do eixo neutro da área da seção transversal para a linha de ação de P

c = distância do eixo neutro até a fibra externa da coluna em que ocorre a tensão de compressão máxima $\sigma_{máx}$

A = área da seção transversal da coluna

L = comprimento da coluna sem apoio *no plano da flexão*; para outros apoios que não pinos, deve ser usado o comprimento efetivo L. (Ver Figura 13.12)

E = módulo de elasticidade do material

r = raio de giração, $r = \sqrt{I/A}$, onde I é calculado em torno do eixo neutro ou de flexão.

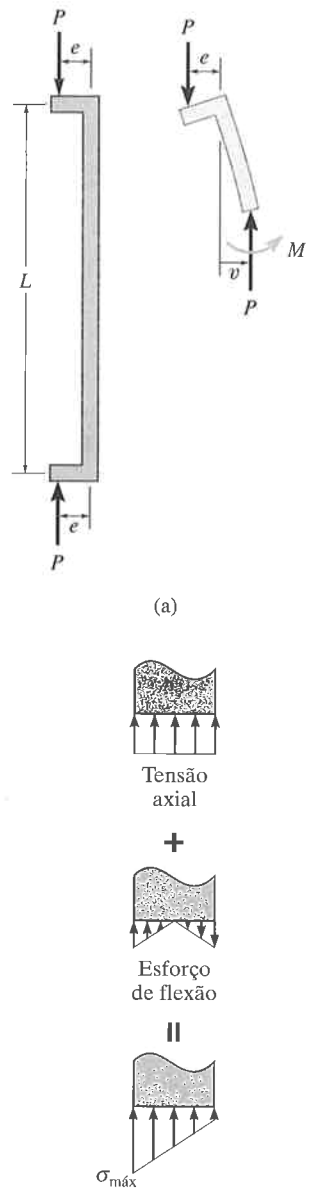


Figura 13.17

Como a 13.16, a Equação 13.19 indica que há uma relação não-linear entre carga e tensão. Então, o princípio da superposição não se aplica e, portanto, as cargas têm de ser somadas *antes* que a tensão seja determinada. Além disso, devido à relação não-linear, qualquer fator de segurança usado para fins de projeto aplica-se à carga e não à tensão.

Para qualquer valor dado de $\sigma_{máx}$, podem ser construídos gráficos da Equação 13.19 como KL/r *versus* P/A para diversos valores da *razão de excentricidade* ec/r^2. Na Figura 13.18 vemos um conjunto de gráficos específicos para um aço estrutural grau A-36, com ponto de escoamento $\sigma_{máx} = \sigma_E = 36$ ksi e módulo de elasticidade $E_{aço} = 29(10^3)$ ksi. Nesse caso, a abscissa e a ordenada representam o índice de esbeltez KL/r e a tensão média P/A, respectivamente. Observe que quando $e \to 0$ ou quando $ec/r^2 \to 0$, a Equação 13.19 leva a $\sigma_{máx} = P/A$, onde P é a carga crítica sobre a coluna, definida pela fórmula de Euler. Essas condições resultam na Equação 13.6, cujo gráfico foi montado na Figura 13.8 e repetido na 13.18. Como as Equações 13.6 e 13.19 são válidas apenas para cargas elásticas, as tensões mostradas na Figura 13.18 não podem exceder $\sigma_E = 36$ ksi, representada aqui pela linha horizontal.

As curvas na Figura 13.18 indicam que diferenças na razão de excentricidade têm efeito marcante na capacidade de carga das colunas com índice de esbeltez pequeno. Por outro lado, as colunas com razão esbeltez grande tendem a falhar na carga crítica ou próximo da carga crítica de Euler, independentemente da razão de excentricidade. Quando se usar a Equação 13.19 para fins de projeto, é importante ter um valor um tanto preciso da razão de excentricidade para colunas curtas.

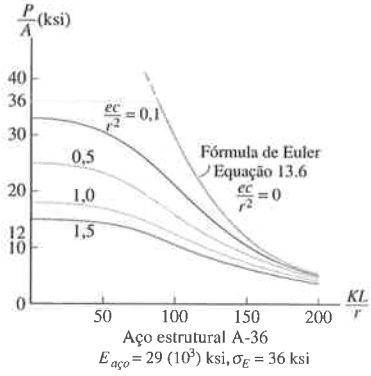


Figura 13.18

Projeto. Uma vez determinada a razão de excentricidade, os dados da coluna são substituídos na Equação 13.19. Se for escolhido um valor $\sigma_{máx} = \sigma_E$, então a carga P_E será determinada por um procedimento de tentativa e erro, uma

vez que a equação é transcendental e não pode ser resolvida explicitamente para P_E. Como auxílio de projeto, também são usados programas de computador ou gráficos, como os da Figura 13.18, para determinar P_E diretamente.

Entenda que P_E é a carga que faz a coluna desenvolver uma tensão de compressão máxima σ_E em suas fibras côncavas internas. Por sua aplicação excêntrica, P_E será *sempre menor* que a carga crítica P_{cr}, que é determinada pela fórmula de Euler, a qual supõe irrealisticamente que a coluna seja carregada axialmente. Uma vez obtida P_E, pode-se aplicar um fator de segurança apropriado para especificar a carga de segurança da coluna.

PONTOS IMPORTANTES

- Devido a imperfeições de fabricação ou na aplicação da carga, uma coluna nunca se dobra subitamente; em vez disso, começa a flambar-se.
- A carga aplicada a uma coluna relaciona-se à sua deflexão de maneira não-linear e, desse modo, o princípio da superposição não se aplica.
- As colunas carregadas excentricamente tendem a falhar na carga de flambagem de Euler, ou próximo dela, à medida que o índice de esbeltez aumenta.

EXEMPLO 13.5

Suponhamos que a coluna de aço mostrada na Figura 13.19 esteja acoplada por pinos no topo e na base. Determinar a carga excêntrica admissível P que lhe pode ser aplicada. Além disso, qual é a deflexão máxima da coluna devida a esse carregamento? Supor que a flambagem não ocorre em torno do eixo y devido ao reforço. Adotar $E_{aço} = 29(10^3)$ ksi, $\sigma_E = 36$ ksi.

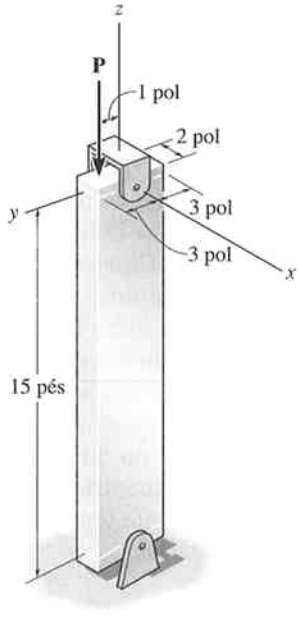


Figura 13.19

SOLUÇÃO

Calculando as propriedades geométricas necessárias, temos:

$$I_x = \frac{1}{12}(2\text{ pol})(6\text{ pol})^3 = 36\text{ pol}^4$$

$$A = (2\text{ pol})(6\text{ pol}) = 12\text{ pol}^2$$

$$r_x = \sqrt{\frac{36\text{ pol}^4}{12\text{ pol}^2}} = 1{,}732\text{ pol}$$

$$e = 1\text{ pol}$$

$$KL = 1(15\text{ pés})(12\text{ pol/pé}) = 180\text{ pol}$$

$$\frac{KL}{r_x} = \frac{180\text{ pol}}{1{,}732\text{ pol}} = 104$$

Como as curvas da Figura 13.18 foram estabelecidas para $E_{aço} = 29(10^3)$ ksi e $\sigma_E = 36$ ksi, podemos usá-las para determinar o valor de P/A e assim evitar a solução por tentativa e erro da fórmula da secante. Nesse caso, $KL/r_x = 104$. Usando a curva definida pela razão de excentricidade $ec/r^2 = 1$ pol $(3\text{ pol})/(1{,}732\text{ pol})^2 = 1$, obtemos:

$$\frac{P}{A} \approx 12\text{ ksi}$$

$$P = (12\text{ ksi})(12\text{ pol}^2) = 144\text{ kip} \qquad \textit{Resposta}$$

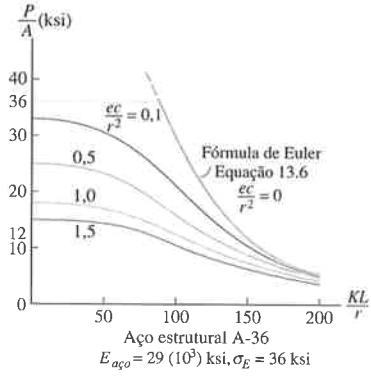


Figura 13.18

Podemos verificar esse valor mostrando que ele satisfaz a fórmula da secante (Equação 13.19):

$$\sigma_{máx} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{L}{2r}\sqrt{\frac{P}{EA}}\right)\right]$$

$$36 \stackrel{?}{=} \frac{144\text{ kip}}{12\text{ pol}^2}\left[1 + (1)\sec\left(\frac{180\text{ pol}}{2(1{,}732\text{ pol})}\sqrt{\frac{144\text{ kip}}{29(10^3)\text{ksi}(12\text{ pol}^2)}}\right)\right]$$

$$36 \stackrel{?}{=} 12[1 + \sec(1{,}0570\text{ rad})]$$

$$36 \stackrel{?}{=} 12(1 + \sec 60{,}56°)$$

$$36 \approx 36{,}4$$

A deflexão máxima ocorre no centro da coluna, onde $\sigma_{máx} = 36$ ksi. Aplicando a Equação 13.16, temos:

$$v_{máx} = e\left[\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right) - 1\right]$$

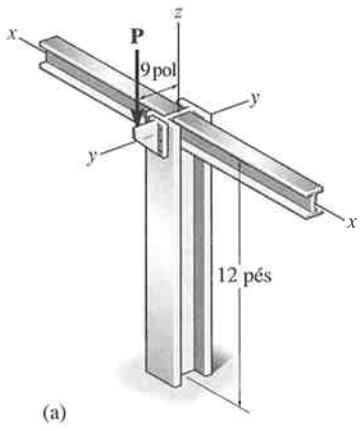
$$= 1\text{ pol}\left[\sec\left(\sqrt{\frac{144\text{ kip}}{29(10^3)\text{ ksi}(36\text{ pol}^4)}}\ \frac{180\text{ pol}}{2}\right) - 1\right]$$

$$= 1\text{ pol}[\sec 1{,}057\text{ rad} - 1]$$

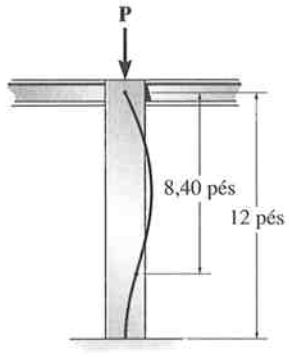
$$= 1\text{ pol}[\sec 60{,}56° - 1]$$

$$= 1{,}03\text{ pol} \qquad \textit{Resposta}$$

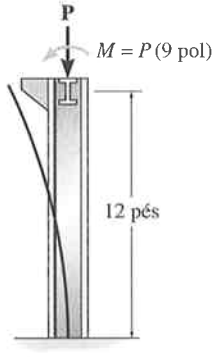
EXEMPLO 13.6



(a)



(b) Flambagem do eixo *y–y*



(c) Flambagem do eixo *x–x*

Figura 13.20

A coluna construída com perfil W8 × 40 de aço A-36 mostrada na Figura 13.20*a* está engastada na base e reforçada no topo, de modo que se impeça seu deslocamento, mas ela fique livre para girar em torno do eixo *y–y*. Além disso, a coluna pode oscilar para o lado no plano *y–z*. Determinar a carga excêntrica máxima que ela suporta antes de começar a sofrer flambagem ou o aço escoar.

SOLUÇÃO

Pelas condições de apoio, vê-se que, em torno do eixo *y–y*, a coluna comporta-se como se estivesse acoplada por pino no topo, engastada na parte inferior e submetida a uma carga axial P (Figura 13.20*b*). Em torno do eixo *x–x*, ela está livre no topo, engastada na parte inferior e sujeita à carga axial P e ao momento $M = P$ (9 pol) (Figura 13.20*c*).

Flambagem do Eixo y–y. De acordo com a Figura 13.12*d*, o fator de comprimento efetivo é $K_y = 0{,}7$, de modo que $(KL)_y = 0{,}7(12)$ pés = 8,40 pés = 100,8 pol. Usando a tabela do Apêndice B para determinar I_y da seção do perfil W8 × 40 e aplicando a Equação 13.11, temos:

$$(P_{cr})_y = \frac{\pi^2 EI_y}{(KL)_y^2} = \frac{\pi^2[29(10^3)\text{ ksi}](49{,}1\text{ pol}^4)}{(100{,}8\text{ pol})^2} = 1.383\text{ kip}$$

Escoamento do Eixo x–x. De acordo com a Figura 13.12*b*, $K_x = 2$, de modo que $(KL)_x = 2(12\text{ pés}) = 24\text{ pés} = 288\text{ pol}$. Usando novamente a tabela do Apêndice B para determinar $A = 11{,}7\text{ pol}^2$, $c = 8{,}25\text{ pol}/2 = 4{,}125$ pol e $r_x = 3{,}53$ pol e aplicando a fórmula da secante, temos:

$$\sigma_E = \frac{P_x}{A}\left[1 + \frac{ec}{r_x^2}\sec\left(\frac{(KL)_x}{2r_x}\sqrt{\frac{P_x}{EA}}\right)\right]$$

ou

$$421{,}2 = P_x[1 + 2{,}979\sec(0{,}0700\sqrt{P_x})]$$

Resolvendo em P_x por tentativa e erro, e observando que o argumento para sec é dado em radianos, obtemos:

$$P_x = 88{,}4\text{ kip} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

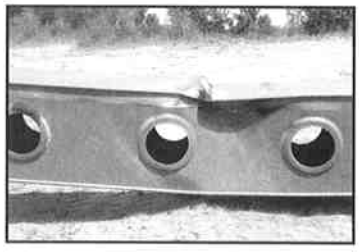
Como esse valor é menor que $(P_{cr})_y = 1.383$ kip, a falha ocorrerá em torno do eixo *x–x*. Além disso, $\sigma = 88{,}4\text{ kip}/11{,}7\text{ pol}^2 = 7{,}56\text{ ksi} < \sigma_E = 36\text{ ksi}$.

*13.5 FLAMBAGEM INELÁSTICA (PLÁSTICA)

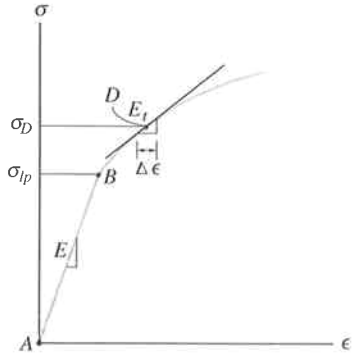
Na prática da engenharia, as colunas são classificadas de acordo com o tipo de esforço nelas desenvolvido no instante da falha. As *colunas esbeltas longas* tornam-se instáveis quando o esforço de compressão permanece elástico. A falha ocorrida denomina-se *instabilidade elástica*. As *colunas intermediárias* falham devido à *instabilidade plástica*, o que significa que o esforço de compressão no instante da falha é maior que o limite de porporcionalidade do material. E as *colunas curtas*, algumas vezes chamadas *postes*, não se tornam instáveis; ao contrário, o material simplesmente escoa ou se rompe.

A aplicação da equação de Euler requer que a tensão na coluna permaneça *abaixo* do ponto de escoamento (na realidade do limite de proporcionalidade) quando a coluna sofre flambagem; desse modo, a equação aplica-se apenas a colunas longas. Na prática, entretanto, a maioria das colunas é selecionada para ter comprimentos intermediários. O comportamento dessas colunas é estudado modificando-se a equação de Euler para que se aplique à flambagem plástica. Para mostrar como isso é feito, consideremos que o material tenha um diagrama tensão-deformação como o da Figura 13.21*a*. Nesse caso, o limite de proporcionalidade é σ_{lp} e o módulo de elasticidade, ou inclinação da reta AB, é E. O gráfico da hipérbole de Euler (Figura 13.8) aparece na Figura 13.21*b*. A equação é válida para uma coluna que tenha razão de esbeltez tão pequena quanto $(KL/r)_{lp}$, visto que nesse ponto o esforço axial na coluna torna-se $\sigma_{cr} = \sigma_{lp}$.

Se a coluna tiver razão de esbeltez *menor* que $(KL/r)_{lp}$, sua tensão crítica deverá superar σ_E. Como exemplo, suponhamos que uma coluna tenha razão de esbeltez $(KL/r)_1 < (KL/r)_{lp}$, com tensão crítica correspondente $\sigma_D > \sigma_{lp}$ necessária para provocar instabilidade. Quando a coluna estiver *prestes a flambar*, a mudança na deformação ocorrida nela estará dentro da *pequena variação* $\Delta\epsilon$, de modo que o módulo de elasticidade ou rigidez do material poderá ser considerado o ***módulo da tangente*** E_t, definido como a inclinação do diagrama $\sigma-\epsilon$ no ponto D (Figura 13.21*a*). Em outras palavras, no instante da falha, a coluna comporta-se como se feita de um material com *rigidez menor* que a dela quando está na região elástica, logo $E_t < E$.



A lança deste guindaste falhou por flambagem provocada por uma sobrecarga. Observar a região de colapso localizado.



(a)

Figura 13.21

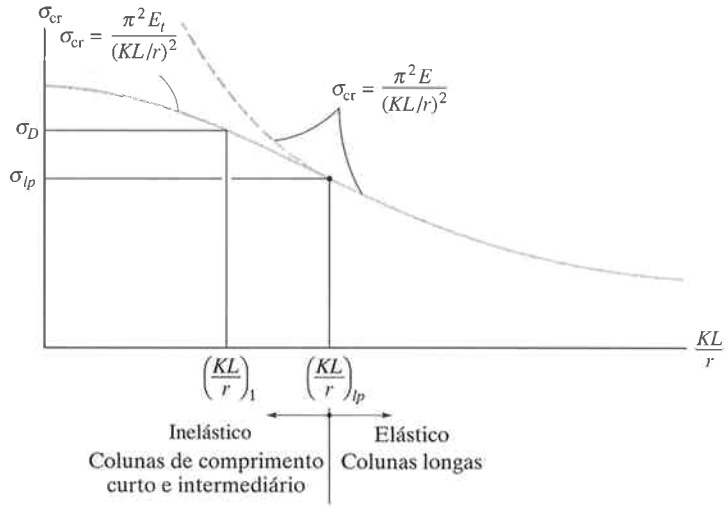
Em geral, portanto, à medida que o índice de esbeltez decresce, a *tensão crítica* da coluna continua a aumentar e, de acordo com o diagrama $\sigma-\epsilon$, o *módulo da tangente* do material *decresce*. Partindo dessa idéia, podemos modificar a equação de Euler para incluir os casos de flambagem plástica substituindo o módulo da tangente do material E_t por E, de modo que:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E_t}{(KL/r)^2} \tag{13.20}$$

Esse é o chamado *módulo da tangente* ou *equação de Engesser*, proposta por F. Engesser em 1889. O gráfico dessa equação para colunas intermediárias e de comprimento curto, feitas de um material definido pelo diagrama $\sigma-\epsilon$ da Figura 13.21*a*, é mostrado na Figura 13.21*b*.

Nenhuma *coluna real* pode ser considerada nem perfeitamente reta nem carregada ao longo de seu eixo centróide, como se supõe aqui, e, portanto, na verdade é muito difícil desenvolver uma expressão que forneça uma análise completa desse fenômeno. Saliente-se, ainda, que outros métodos para descrever a flambagem plástica de colunas já foram cogitados. Um deles foi

desenvolvido pelo engenheiro aeronáutico F. R. Shanley e denomina-se *teoria de Shanley* de flambagem plástica. Embora descreva melhor o fenômeno que a teoria do módulo da tangente, explicada aqui, testes experimentais com um grande número de colunas, todas próximas da coluna ideal, mostraram que a Equação 13.20 prevê a tensão crítica da coluna com *razoável precisão*. Além disso, a abordagem do módulo da tangente para moldar o comportamento de colunas inelásticas é relativamente fácil de aplicar.



(b)

Figura 13.21

EXEMPLO 13.7

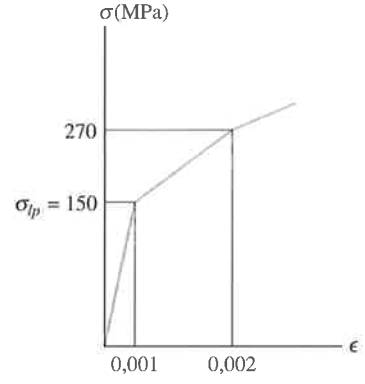


Figura 13.22

Uma haste maciça com 30 mm de diâmetro e 600 mm de comprimento é feita de um material que pode ser moldado pelo diagrama tensão-deformação da Figura 13.22. Supondo que seja usada como coluna apoiada por pino, determinar sua carga crítica.

SOLUÇÃO

O raio de giração é:

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{(\pi/4)(15)^4}{\pi(15)^2}} = 7{,}5 \text{ mm}$$

e, portanto, o índice de esbeltez é:

$$\frac{KL}{r} = \frac{1(600 \text{ mm})}{7{,}5 \text{ mm}} = 80$$

Aplicando a Equação 13.20, temos:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E_t}{(KL/r)^2} = \frac{\pi^2 E_t}{(80)^2} = 1{,}542(10^{-3})E_t \qquad (1)$$

Admitiremos primeiro que a tensão crítica ocorre na região elástica do material. Pela Figura 13.22:

$$E = \frac{150 \text{ MPa}}{0{,}001} = 150 \text{ GPa}$$

Assim, a Equação 1 torna-se:

$$\sigma_{cr} = 1{,}542(10^{-3})[150(10^3)]\ \text{MPa} = 231{,}3\ \text{MPa}$$

Como $\sigma_{cr} > \sigma_{lp} = 150$ MPa, ocorre flambagem inelástica.
Pelo segundo segmento de reta do diagrama $\sigma-\epsilon$ (Figura 13.22), temos:

$$E_t = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\epsilon} = \frac{270\ \text{MPa} - 150\ \text{MPa}}{0{,}002 - 0{,}001} = 120\ \text{GPa}$$

Aplicando a Equação 1, temos:

$$\sigma_{cr} = 1{,}542(10^{-3})[120(10^3)]\ \text{MPa} = 185{,}1\ \text{MPa}$$

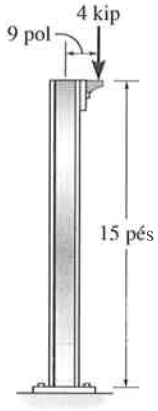
Como esse valor situa-se entre os limites de 150 MPa e 270 MPa, representa na verdade a tensão crítica.
A carga crítica na haste é, portanto:

$$P_{cr} = \sigma_{cr}A = 185{,}1\ \text{MPa}[\pi(0{,}015\ \text{m})^2] = 131\ \text{kN}$$ ***Resposta***

PROBLEMAS

13.46. A coluna de aço estrutural A-36 construída com perfil W10 × 12 é usada para suportar uma carga de 4 kip. Supondo que esteja engastada na base e livre no topo, determinar a deflexão no topo devida ao carregamento.

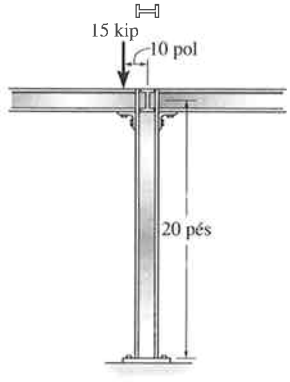
13.47. A coluna de aço estrutural A-36, construída com perfil W10 × 12, é usada para suportar uma carga de 4 kip. Supondo que esteja engastada na base e livre no topo, determinar a tensão máxima nela desenvolvida em virtude do carregamento.



Problemas 13.46/13.47

***13.48.** O elemento de aço estrutural A-36 construído com perfil W14 × 26 é usado como uma coluna de 20 pés de comprimento, que se supõe estar engastada no topo e na parte inferior. Se lhe for aplicada uma carga de 15 kip a uma distância excêntrica de 10 pol, qual será a tensão máxima nela desenvolvida?

13.49. O elemento de aço estrutural A-36 construído com perfil W14 × 26 é usado como uma coluna que se supõe estar engastada no topo e acoplada por pino na parte inferior. Se lhe for aplicada uma carga de 15 kip a uma distância excêntrica de 10 pol, qual será a tensão máxima nela desenvolvida?

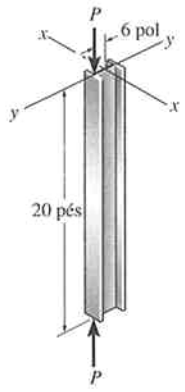


Problemas 13.48/13.49

13.50. O elemento de aço estrutural A-36 construído com perfil W14 × 30 é usado como uma coluna de 20 pés acoplada por pino. Determinar a carga excêntrica máxima P que lhe pode ser aplicada de modo que ela não sofra flambagem nem escoe. Comparar esse valor com uma carga axial crítica P' aplicada através do centróide da coluna.

13.51. Resolver o Problema 13.50 supondo que a coluna esteja engastada nas duas extremidades.

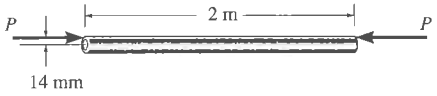
***13.52.** Resolver o Problema 13.50 supondo que a coluna esteja engastada na parte inferior e livre no topo.



Problemas 13.50/13.51/13.52

13.53. O tubo de cobre com diâmetro externo de 35 mm e espessura da parede de 7 mm está apoiado por pinos nas extremidades. Usando um fator de segurança em relação à flambagem e ao escoamento de F.S. = 2,5, determinar a carga excêntrica admissível P. E_{cu} = 120 GPa, σ_E = 750 MPa.

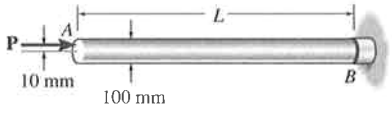
13.54. O tubo de cobre com diâmetro externo de 35 mm e espessura da parede de 7 mm está engastado nas extremidades. Usando um fator de segurança em relação à flambagem e ao escoamento de F.S. = 2,5, determinar a carga excêntrica admissível P que ele pode suportar sem falhar. E_{cu} = 120 GPa, σ_E = 750 MPa.



Problemas 13.53/13.54

13.55. A haste de latão está engastada em uma extremidade e livre na outra. Supondo que lhe seja aplicada a carga excêntrica P = 200 kN, determinar o maior comprimento admissível L que ela pode ter sem sofrer flambagem nem escoar. $E_{latão}$ = 101 GPa, σ_E = 69 MPa.

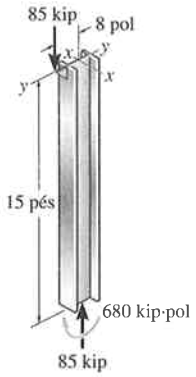
***13.56.** A haste de latão está engastada em uma extremidade e livre na outra. Se seu comprimento é L = 2 m, qual a maior carga admissível P que lhe pode ser aplicada de modo que ela não sofra flambagem nem escoe? Determinar também a maior deflexão lateral da haste devida à carga. $E_{latão}$ = 101 GPa, σ_E = 69 MPa.



Problemas 13.55/13.56

13.57. A coluna de aço estrutural A-36 construída com perfil W10 × 30 está presa por pino no topo e na parte inferior. Supondo que esteja submetida à carga excêntrica de 85 kip, determinar o fator de segurança em relação ao escoamento.

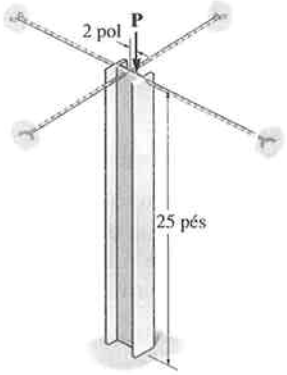
13.58. A coluna de aço estrutural A-36 construída com perfil W10 × 30 está presa por pino no topo e livre na parte inferior. Supondo que esteja submetida à carga excêntrica de 85 kip, determinar se ela falhará por escoamento. A coluna é reforçada para que não se flita em torno do eixo y–y.



Problemas 13.57/13.58

13.59. Determinar a carga P requerida para provocar a falha da coluna de aço estrutural A-36 construída com perfil W12 × 50 tanto por flambagem como por escoamento. A coluna está engastada na parte inferior, e os cabos no topo atuam como pino para prendê-la.

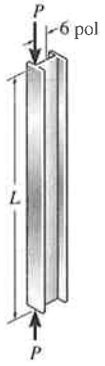
***13.60.** Resolver o Problema 13.59 supondo que a coluna seja de aço A-36 e construída com perfil W12 × 16.



Problemas 13.59/13.60

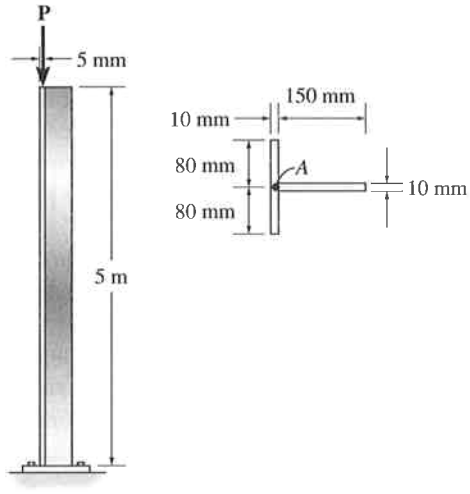
13.61. Uma coluna de aço estrutural A-36 construída com perfil W12 × 26 está engastada nas extremidades e tem comprimento L = 23 pés. Determinar a carga excêntrica máxima P que lhe pode ser aplicada de modo que ela não sofra flambagem nem escoe.

13.62. Uma coluna de aço estrutural A-36 construída com perfil W14 × 30 está engastada nas extremidades e tem comprimento L = 20 pés. Determinar a carga excêntrica máxima P que lhe pode ser aplicada de modo que ela não sofra flambagem nem escoe.



Problemas 13.61/13.62

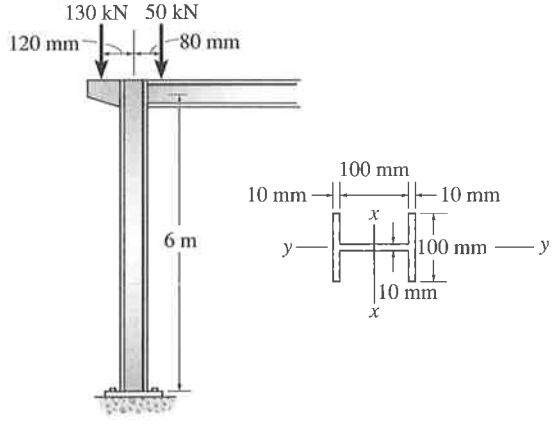
13.63. A coluna de alumínio tem a seção transversal mostrada. Se está engastada na parte inferior e livre no topo, qual a força máxima P que pode ser aplicada em A sem provocar a flambagem ou o escoamento da coluna? Usar um fator de segurança 3 em relação à flambagem e ao escoamento. E_{al} = 70 GPa, σ_E = 95 MPa.



Problema 13.63

***13.64.** A coluna de aço suporta duas cargas excêntricas. Supondo que esteja presa por pino no topo, engastada na parte inferior e completamente reforçada contra flambagem em torno do eixo y–y, determinar sua deflexão máxima e a tensão máxima nela desenvolvida. $E_{aço}$ = 200 GPa, σ_E = 360 MPa.

13.65. A coluna de aço suporta duas cargas excêntricas. Supondo que esteja engastada no topo e na parte inferior e completamente reforçada contra flambagem em torno do eixo y–y, determinar sua deflexão máxima da coluna e a tensão máxima nela desenvolvida. $E_{aço}$ = 200 GPa, σ_E = 360 MPa.



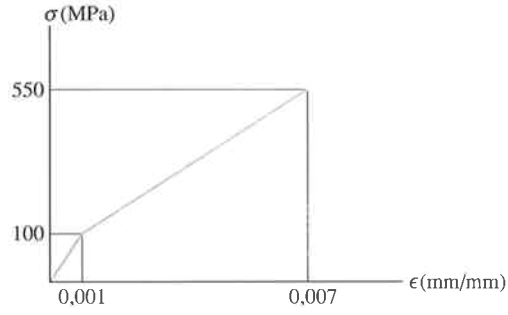
Problemas 13.64/13.65

13.66. Uma coluna de comprimento intermediário sofre flambagem quando o esforço de compressão é de 40 ksi. Se a razão de esbeltez é 60, qual o módulo da tangente?

13.67. O diagrama tensão-deformação de um material pode ser aproximado pelos dois segmentos de reta mostrados. Supondo que uma barra com diâmetro de 60 mm e comprimento de 2 m seja feita desse material, determinar a carga crítica se ambas as extremidades estiverem presas por pino. Supor que a carga atue através do eixo da barra e usar a equação de Engesser.

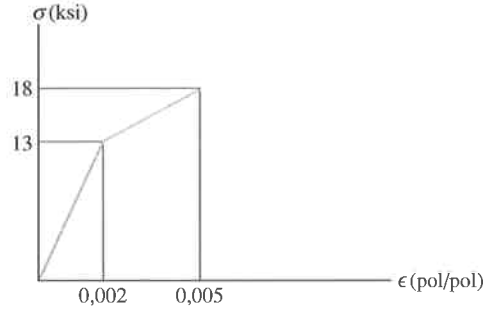
***13.68.** O diagrama tensão-deformação de um material pode ser aproximado pelos dois segmentos de reta mostrados. Supondo que uma barra com diâmetro de 60 mm e comprimento de 2 m seja feita desse material, determinar a carga crítica com a condição de que as extremidades estejam engastadas. Supor que a carga atue através do eixo da barra e usar a equação de Engesser.

13.69. O diagrama tensão-deformação de um material pode ser aproximado pelos dois segmentos de reta mostrados. Supondo que uma barra com diâmetro de 60 mm e comprimento de 2 m seja feita desse material, determinar a carga crítica com a condição de que uma das extremidades esteja livre e a outra engastada. Supor que a carga atue através do eixo da barra e usar a equação de Engesser.



Problemas 13.67/13.68/13.69

13.70. Construir a curva de flambagem, *P/A versus L/r*, para uma coluna com a seguinte curva tensão-deformação bilinear sob compressão.



Problema 13.70

*13.6 PROJETO DE COLUNAS PARA CARREGAMENTO CONCÊNTRICO

A teoria apresentada até agora aplica-se a colunas perfeitamente retas, feitas de material homogêneo e inicialmente livres de tensão. Na prática, como dissemos antes, as colunas não são perfeitamente retas e a maioria tem tensões residuais, sobretudo em virtude do resfriamento não-uniforme durante a fabricação. Além disso, seus apoios não são precisos e os pontos de aplicação e as direções das cargas não são conhecidos com certeza absoluta. A fim de compensar tais efeitos, que na realidade variam de coluna para coluna, muitas normas de projeto especificam o uso de fórmulas empíricas. Os resultados dos testes experimentais com um grande número de *colunas axialmente carregadas* são montados em um gráfico e, assim, desenvolve-se uma fórmula por meio do ajuste da curva média dos dados.

Estas colunas de madeira sem reforço suportam a cobertura do prédio.

Um exemplo de tais testes para colunas de aço com perfil de abas largas é mostrado na Figura 13.23. Observe a semelhança entre esses resultados e os da família de curvas determinadas pela fórmula da secante (Figura 13.18). Tal semelhança deve-se à influência da razão de excentricidade 'acidental' na resistência da coluna. Como mencionamos na Seção 13.4, essa razão exerce mais efeito sobre a resistência das colunas curtas e de comprimento intermediário que sobre a das longas. Os testes indicam que ec/r^2 varia na faixa de 0,1 a 0,6 na maioria das colunas carregadas axialmente.

A fim de considerar o comportamento das colunas de comprimentos diferentes, os códigos de projeto geralmente especificam diversas fórmulas que se ajustam melhor aos dados da faixa de colunas curtas, intermediárias ou longas. Portanto, cada fórmula aplica-se apenas a uma *faixa* específica do índice de esbeltez e, desse modo, é importante que o engenheiro considere os limites KL/r para os quais uma fórmula em particular é válida. Exemplos de fórmulas de projeto para colunas de aço, alumínio e madeira em uso atualmente serão discutidos a seguir. O objetivo é dar alguma idéia de como as colunas são projetadas na prática. Entretanto, essas fórmulas não devem ser usadas para o projeto de colunas reais, a menos que se consulte o código dos quais elas foram retiradas.

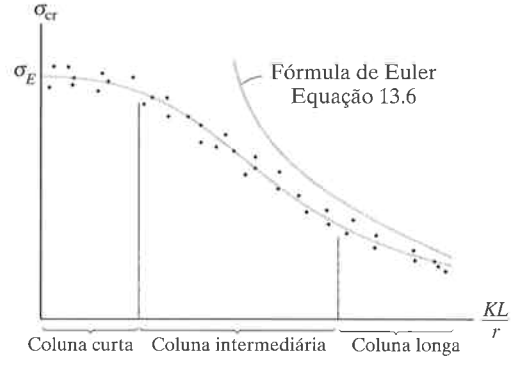


Figura 13.23

Colunas de Aço. As colunas de aço estrutural atualmente são projetadas com base nas fórmulas propostas pelo Structural Stability Research Council — SSRC (Conselho de Pesquisa sobre Estabilidade Estrutural). Fatores de segurança foram aplicados a essas fórmulas e adotados como especificação para a construção de edifícios pelo American Institute of Steel Construction — AISC (Instituto Americano de Construções em Aço). Basicamente, essas especificações fornecem duas fórmulas para projeto de coluna, e cada qual informa a tensão admissível máxima na coluna para uma faixa específica de índices de

esbeltez. No caso de colunas longas propõe-se a fórmula de Euler, ou seja, $\sigma_{máx} = \pi^2 E/(KL/r)^2$.

Para aplicar essa fórmula, deve-se usar um fator de segurança F.S. $= \frac{23}{12} \approx 1{,}92$. Assim, no projeto:

$$\sigma_{adm} = \frac{12\pi^2 E}{23(KL/r)^2} \qquad \left(\frac{KL}{r}\right)_c \leq \frac{KL}{r} \leq 200 \tag{13.21}$$

Como dissemos, essa equação aplica-se a índices de esbeltez entre 200 e $(KL/r)_c$. Obtém-se um valor específico de $(KL/r)_c$ fazendo com que a fórmula de Euler seja usada somente para material com comportamento elástico. Por meio de experimentos, descobriu-se que podem existir tensões residuais de compressão nas seções do aço laminado de até metade do limite de escoamento. Conseqüentemente, se a tensão na fórmula de Euler for maior que $\frac{1}{2}\sigma_E$, a equação não se aplicará. Portanto, o valor de $(KL/r)_c$ é determinado como segue:

$$\frac{1}{2}\sigma_E = \frac{\pi^2 E}{(KL/r)_c^2}$$

$$\left(\frac{KL}{r}\right)_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_E}} \tag{13.22}$$

As colunas com índices de esbeltez menores que $(KL/r)_c$ são projetadas a partir de uma fórmula empírica parabólica cuja forma é:

$$\sigma_{máx} = \left[1 - \frac{(KL/r)^2}{2(KL/r)_c^2}\right]\sigma_E$$

Como para colunas mais longas o uso dessa fórmula não é tão seguro, nesse caso costuma-se dividi-la, por um fator de segurança, definido como segue:

$$\text{F.S.} = \frac{5}{3} + \frac{3}{8}\frac{(KL/r)}{(KL/r)_c} - \frac{(KL/r)^3}{8(KL/r)_c^3}$$

Vê-se aqui que F.S. $= \frac{5}{3} \approx 1{,}67$ em $KL/r = 0$ e aumenta para F.S. $= \frac{23}{12} \approx 1{,}92$ em $(KL/r)_c$. Então, para fins de projeto:

$$\sigma_{adm} = \frac{\left[1 - \dfrac{(KL/r)^2}{2(KL/r)_c^2}\right]\sigma_E}{\{(5/3) + [(3/8)(KL/r)/(KL/r)_c] - [(KL/r)^3/8(KL/r)_c^3]\}} \tag{13.23}$$

As equações 13.21 e 13.23 estão representadas graficamente na Figura 13.24. Ao aplicar qualquer uma delas, podemos usar tanto unidades FPS como SI.

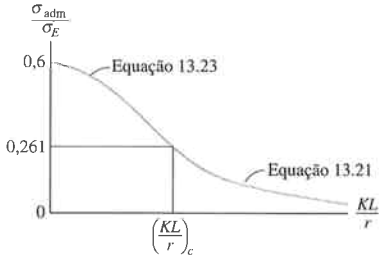


Figura 13.24

Colunas de Alumínio. O projeto de colunas de alumínio é especificado pela Aluminum Association (Associação do Alumínio) por meio de três equações, cada qual aplicável a uma faixa específica de índices de esbeltez. Como existem diversos tipos de ligas de alumínio, há um único conjunto de fórmulas para cada tipo. Para uma liga comum (2014-T6) usada na construção de edifícios, as fórmulas são:

$$\sigma_{adm} = 28 \text{ ksi} \qquad 0 \leq \frac{KL}{r} \leq 12 \tag{13.24}$$

$$\sigma_{adm} = \left[30{,}7 - 0{,}23\left(\frac{KL}{r}\right)\right]\text{ksi} \qquad 12 < \frac{KL}{r} < 55 \tag{13.25}$$

$$\sigma_{adm} = \frac{54.000 \text{ ksi}}{(KL/r)^2} \qquad 55 \leq \frac{KL}{r} \tag{13.26}$$

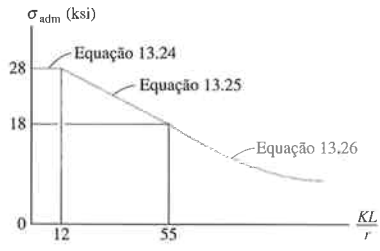


Figura 13.25

Essas equações estão representadas graficamente na Figura 13.25. Como se vê, as duas primeiras formam linhas retas e são usadas para moldar os efeitos nas colunas das faixas curta e intermediária. A terceira fórmula tem a mesma forma da de Euler e aplica-se a colunas longas.

Colunas de Madeira. As colunas de madeira usadas na construção são projetadas com base nas fórmulas publicadas pela National Forest Products Association — NFPA (Associação Nacional de Produtos Florestais) ou pelo American Institute of Timber Construction — AITC (Instituto Norte-Americano de Construção de Madeira). Por exemplo: as fórmulas da NFPA para tensão admissível em colunas curta, intermediária e longa com seção transversal retangular de dimensões b e d, onde d é a *menor* dimensão da seção transversal, são:

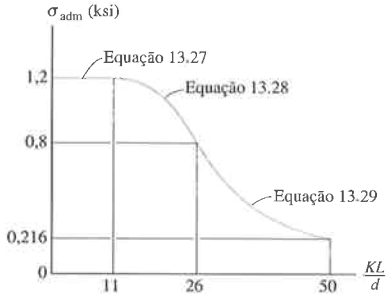


Figura 13.26

$$\sigma_{adm} = 1{,}20 \text{ ksi} \qquad 0 \le \frac{KL}{d} \le 11 \tag{13.27}$$

$$\sigma_{adm} = 1{,}20\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{KL/d}{26{,}0}\right)^2\right]\text{ksi} \qquad 11 < \frac{KL}{d} \le 26 \tag{13.28}$$

$$\sigma_{adm} = \frac{540 \text{ ksi}}{(KL/d)^2} \qquad 26 < \frac{KL}{d} \le 50 \tag{13.29}$$

Aqui, a madeira tem módulo de elasticidade $E_{mad} = 1{,}8(10^3)$ ksi e tensão de compressão admissível de 1,2 ksi paralela ao grão. A Equação 13.29, em particular, consiste simplesmente na equação de Euler com um fator de segurança 3. As três equações estão representadas graficamente na Figura 13.26.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

Análise da Coluna.

- Ao usar qualquer fórmula para analisar uma coluna, isto é, para determinar sua carga admissível, primeiro é necessário calcular o índice de esbeltez a fim de descobrir qual fórmula de coluna se aplica.
- Uma vez calculada a tensão admissível média, a carga admissível na coluna é determinada por $P = \sigma_{adm}A$.

Projeto da Coluna.

- Se for usada uma fórmula para *projetar* a coluna, ou seja, para determinar sua área da seção transversal para um carregamento e comprimento efetivo dados, geralmente deve seguir-se um procedimento de tentativa e erro, se a coluna tiver forma composta, tal como uma seção de abas largas.
- Uma das maneiras possíveis de aplicar um procedimento de tentativa e erro é *supor* que a área da seção transversal da coluna é A' e calcular a tensão correspondente $\sigma' = P/A'$. Usar também, junto com A', uma fórmula de projeto adequada para determinar a tensão admissível σ_{adm}. A partir daí, calcular a área *necessária* da coluna $A_{nec} = P/\sigma_{adm}$.
- Se $A' > A_{nec}$, o projeto é seguro. Ao realizar a comparação, é prático fazer com que A' supere A_{nec} por pouco, normalmente por 2% a 3%. Será necessário reprojetar se $A' < A_{nec}$.
- Quando o procedimento de tentativa e erro for repetido, a escolha da área é determinada pela área requerida calculada anteriormente. Na prática da engenharia, o uso de programas de computador ou tabelas e gráficos publicados simplifica esse método de projeto.

EXEMPLO 13.8

Um elemento de aço A-36 construído com perfil W10 × 100 é usado como coluna apoiada por pino (Figura 13.27). Usando as fórmulas de projeto de coluna do AISC, determinar a maior carga que ele pode suportar com segurança.

SOLUÇÃO

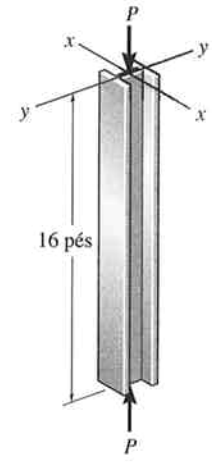


Figura 13.27

Os seguintes dados para o perfil W10 × 100 foram tirados da tabela do Apêndice B.

$$A = 29{,}4 \text{ pol}^2 \quad r_x = 4{,}60 \text{ pol} \quad r_y = 2{,}65 \text{ pol}$$

Como $K = 1$ para ambos os eixos de flambagem x e y, o índice de esbeltez é maior se for usada r_y. Assim:

$$\frac{KL}{r} = \frac{1(16 \text{ pés})(12 \text{ pol/pé})}{(2{,}65 \text{ pol})} = 72{,}45$$

Pela Equação 13.22, temos:

$$\left(\frac{KL}{r}\right)_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_E}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi^2[29(10^3) \text{ ksi}]}{36 \text{ ksi}}}$$

$$= 126{,}1$$

Nesse caso, $0 < KL/r < (KL/r)_c$, de modo que a Equação 13.23 se aplica.

$$\sigma_{adm} = \frac{\left[1 - \frac{(KL/r)^2}{2(KL/r)_c^2}\right]\sigma_E}{\{(5/3) + [(3/8)(KL/r)/(KL/r)_c] - [(KL/r)^3/8(KL/r_c)^3]\}}$$

$$= \frac{[1 - (72{,}45)^2/2(126{,}1)^2]36 \text{ ksi}}{\{(5/3) + [(3/8)(72{,}45/126{,}1)] - [(72{,}45)^3/8(126{,}1)^3]\}}$$

$$= 16{,}17 \text{ ksi}$$

A carga admissível P na coluna é, portanto:

$$\sigma_{adm} = \frac{P}{A}; \qquad 16{,}17 \text{ kip/pol}^2 = \frac{P}{29{,}4 \text{ pol}^2}$$

$$P = 476 \text{ kip} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

EXEMPLO 13.9

A haste de aço da Figura 13.28 é usada para suportar uma carga axial de 18 kip. Se $E_{aço} = 29(10^3)$ ksi e $\sigma_E = 50$ ksi, determinar o menor diâmetro possível para a haste pela especificação do AISC. Ela está engastada em ambas as extremidades.

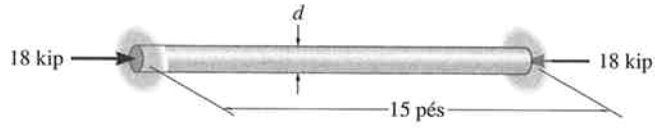


Figura 13.28

SOLUÇÃO

Para uma seção transversal circular, o raio de giração torna-se:

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{(1/4)\pi(d/2)^4}{(1/4)\pi d^2}} = \frac{d}{4}$$

Aplicando a Equação 13.22, temos:

$$\left(\frac{KL}{r}\right)_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_E}} = \sqrt{\frac{2\pi^2[29(10^3)\text{ ksi}]}{50\text{ ksi}}} = 107{,}0$$

Como o raio de giração da haste é desconhecido, KL/r é desconhecido e, portanto, deve ser feita uma escolha como se as equações 13.22 ou 13.23 se aplicassem. Consideremos a Equação 13.21. Para uma coluna engastada nas extremidades $K = 0{,}5$, de modo que:

$$\sigma_{\text{adm}} = \frac{12\pi^2 E}{23(KL/r)^2}$$

$$\frac{18\text{ kip}}{(1/4)\pi d^2} = \frac{12\pi^2[29(10^3)\text{ kip/pol}^2]}{23[0{,}5(15\text{ pés})(12\text{ pol/pé})/(d/4)]^2}$$

$$\frac{22{,}92}{d^2} = 1{,}152d^2$$

$$d = 2{,}11\text{ pol}$$

Usar:

$$d = 2{,}25 = 2\tfrac{1}{4}\text{ pol} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Neste projeto devemos verificar os limites do índice de esbeltez, isto é,

$$\frac{KL}{r} = \frac{0{,}5(15)(12)}{(2{,}25/4)} = 160$$

Como $107{,}0 < 160 < 200$, o uso da Equação 13.21 é apropriado.

EXEMPLO 13.10

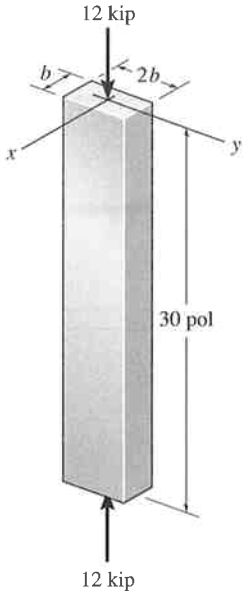


Figura 13.29

Uma barra com comprimento de 30 pol é usada para suportar uma carga axial de compressão de 12 kip (Figura 13.29). Ela está apoiada por pino nas extremidades e é feita de liga de alumínio 2014-T6. Determinar as dimensões da área de sua seção transversal se sua largura for duas vezes sua espessura.

SOLUÇÃO

Como $KL = 30$ pol é o mesmo para os dois eixos de flambagem, x–x e y–y, o maior índice de esbeltez é determinado usando-se o menor raio de giração, isto é, usando-se $I_{mín} = I_y$:

$$\frac{KL}{r_y} = \frac{KL}{\sqrt{I_y/A}} = \frac{1(30)}{\sqrt{(1/12)2b(b)3/[2b(b)]}} = \frac{103{,}9}{b} \qquad (1)$$

Aqui devemos aplicar as equações 13.24, 13.25 ou 13.26. Como ainda não conhecemos o índice de esbeltez, começaremos usando a Equação 13.24.

$$\frac{P}{A} = 28\text{ ksi}$$

$$\frac{12\text{ kip}}{2b(b)} = 28\text{ kip/pol}^2$$

$$b = 0{,}463\text{ pol}$$

Verificando o índice de esbeltez, temos:

$$\frac{KL}{r} = \frac{103{,}9}{0{,}463} = 224{,}5 > 12$$

Tente a Equação 13.26, que é válida para $KL/r \geq 55$:

$$\frac{P}{A} = \frac{54.000 \text{ ksi}}{(KL/r)^2}$$

$$\frac{12}{2b(b)} = \frac{54.000}{(103{,}9/b)^2}$$

$$b = 1{,}05 \text{ pol} \qquad \textit{Resposta}$$

Pela Equação 1:

$$\frac{KL}{r} = \frac{103{,}9}{1{,}05} = 99{,}3 > 55 \quad \text{OK}$$

Observação: será satisfatório escolher a seção transversal com dimensões de 1 pol por 2 pol.

EXEMPLO 13.11

Uma tábua com seção transversal de 5,5 pol por 1,5 pol é usada para suportar uma carga axial de 5 kip (Figura 13.30). Supondo que esteja apoiada por pino nas extremidades superior e inferior, determinar seu maior comprimento possível L, conforme especificação da NFPA.

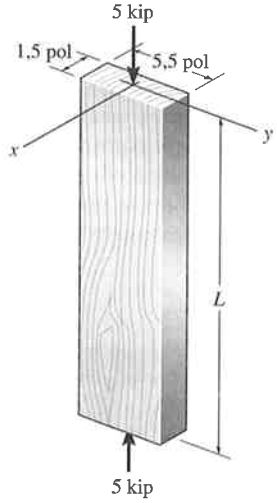


Figura 13.30

SOLUÇÃO

Por inspeção, verifica-se que a tábua sofrerá flambagem em torno do eixo y. Nas equações da NFPA, $d = 1{,}5$ pol. Supondo que a Equação 13.29 se aplique, temos:

$$\frac{P}{A} = \frac{540 \text{ ksi}}{(KL/d)^2}$$

$$\frac{5 \text{ kip}}{(5{,}5 \text{ pol})(1{,}5 \text{ pol})} = \frac{540 \text{ ksi}}{(1\ L/1{,}5 \text{ pol})^2}$$

$$L = 44{,}8 \text{ pol} \qquad \textit{Resposta}$$

Neste caso:

$$\frac{KL}{d} = \frac{1(44{,}8 \text{ pol})}{1{,}5 \text{ pol}} = 29{,}8$$

Como $26 < KL/d \leq 50$, a solução é válida.

PROBLEMAS

13.71. Determinar o maior comprimento de uma coluna construída com perfil W10 × 12 de aço estrutural A-36 que esteja engastado e submetido a uma carga axial de 28 kip. Usar as equações AISC.

***13.72.** Determinar o maior comprimento de uma coluna construída com o perfil W8 × 31 de aço estrutural A-36 que esteja apoiado por pino e submetido a uma carga axial de 130 kip. Usar as equações AISC.

13.73. Usando as equações AISC, verificar se uma coluna construída com perfil W6 × 9, de aço estrutural A-36 e 10 pés de comprimento, pode suportar uma carga axial de 40 kip. As extremidades estão engastadas.

13.74. Resolver o Problema 13.73 supondo que as extremidades estejam apoiadas por pino.

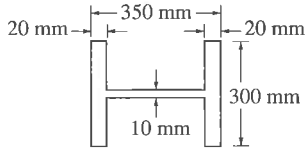
13.75. Usando as equações AISC, escolher no Apêndice B a mais leve coluna de aço estrutural A-36 que tenha comprimento de 30 pés e suporte uma carga axial de 200 kip. As extremidades estão engastadas.

***13.76.** Usando as equações AISC, escolher no Apêndice B a mais leve coluna de aço estrutural A-36 de menor peso que tenha comprimento de 24 pés e suporte uma carga axial de 100 kip. As extremidades estão engastadas.

13.77. Determinar o maior comprimento de uma coluna construída com perfil W6 × 16, feita de aço estrutural A-36 apoiada por pino e submetida a uma carga axial de 70 kip. Usar as equações AISC.

13.78. Determinar o maior comprimento de uma coluna construída com perfil W8 × 48, feita de aço estrutural A-36 apoiada por pino e submetida a uma carga axial de 55 kip. Usar as equações AISC.

13.79. Usando as equações AISC, verificar se uma coluna com a seção transversal mostrada pode suportar uma força axial de 1.500 kN. Ela tem 4 m de comprimento, é feita de aço A-36 e suas extremidades estão presas por pino.



Problema 13.79

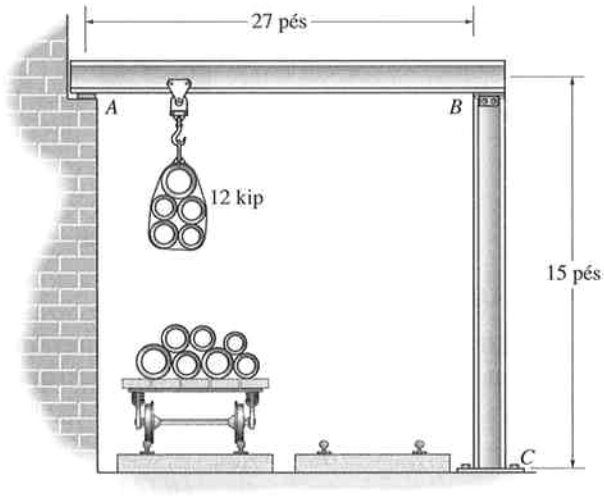
***13.80.** Determinar o maior comprimento de uma coluna construída com perfil W8 × 31 de aço estrutural A-36 que tenha de suportar uma carga axial de 35 kip. As extremidades estão presas por pino.

13.81. Usando as equações AISC, escolher no Apêndice B a mais leve coluna de aço estrutural A-36 que tenha comprimento de 20 pés e suporte uma carga axial de 40 kip. As extremidades estão presas por pino.

13.82. Determinar o maior comprimento de uma coluna construída com perfil W10 × 19 de aço estrutural A-36 que tenha de suportar uma carga axial de 50 kip. As extremidades estão engastadas.

■**13.83.** Determinar o maior comprimento de uma coluna construída com perfil W10 × 45, feita de aço estrutural A-36, apoiada por pino e submetida a uma carga axial de 290 kip. $E_{aço} = 29(10^3)$ ksi, $\sigma_E = 50$ ksi. Usar as equações AISC.

***13.84.** O arranjo de viga e coluna é usado no pátio de uma ferrovia para carregar e descarregar vagões. Se a carga máxima prevista para o guindaste for 12 kip, determinar se uma coluna construída com perfil W8 × 31 de aço estrutural A-36 é adequada para suportar a carga. O guindaste movimenta-se ao longo da aba inferior da viga, 1 pé $\leq x \leq$ 25 pés, e tem peso desprezível. Supor que a viga está acoplada por pino à coluna em B e apoiada por rolete em A. A coluna também está presa por pino em C e reforçada de modo que não sofra flambagem fora do plano do carregamento.

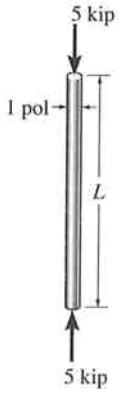


Problema 13.84

13.85. A haste de 1 pol de diâmetro é usada para suportar uma carga axial de 5 kip. Determinar o seu maior comprimento

possível L se ela for feita de alumínio 2014-T6. Supor que as extremidades estejam acopladas por pino.

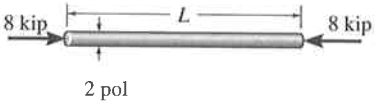
13.86. A haste de 1 pol de diâmetro é usada para suportar uma carga axial de 5 kip. Determinar o seu maior comprimento possível L se ela for feita de alumínio 2014-T6. Supor que as extremidades estejam engastadas.



Problemas 13.85/13.86

13.87. A haste de 2 pol de diâmetro é usada para suportar uma carga axial de 8 kip. Determinar o seu maior comprimento possível L se ela for feita de alumínio 2014-T6. Supor que as extremidades estejam acopladas por pino.

***13.88.** A haste de 2 pol de diâmetro é usada para suportar uma carga axial de 8 kip. Determinar o seu maior comprimento possível L se ela for feita de alumínio 2014-T6. Supor que as extremidades estejam engastadas.



Problemas 13.87/13.88

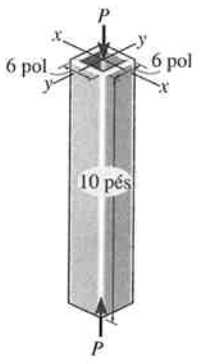
13.89. Uma haste de 5 pés de comprimento é usada em certa máquina para transmitir uma carga axial de compressão de 3 kip. Determinar seu diâmetro supondo que ela esteja acoplada por pinos nas extremidades e seja feita de uma liga de alumínio 2014-T6.

13.90. Resolver o Problema 13.89 supondo que a haste esteja engastada nas extremidades.

13.91. O tubo tem 0,25 pol de espessura, é feito de liga de alumínio 2014-T6 e está engastado na extremidade inferior e acoplado por pino no topo. Determinar a maior carga axial que ele pode suportar.

***13.92.** O tubo tem 0,25 pol de espessura, é feito de liga de alumínio 2014-T6 e está engastado nas duas extremidades. Determinar a maior carga axial que ele pode suportar.

13.93. O tubo tem 0,25 pol de espessura, é feito de liga de alumínio 2014-T6 e está acoplado por pino nas duas extremidades. Determinar a maior carga axial que ele pode suportar.

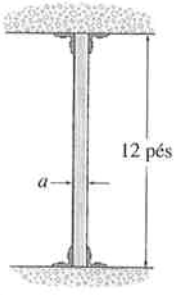


Problemas 13.91/13.92/13.93

13.94. Uma haste de 6 pés de comprimento é usada em certa máquina para transmitir uma carga axial de compressão de 3 kip. Determinar seu diâmetro supondo que ela esteja engastada em uma extremidade e acoplada por pino na outra. O material é a liga de alumínio 2014-T6.

13.95. A coluna de madeira tem seção transversal quadrada e supõe-se que esteja acoplada por pino nas extremidades superior e inferior. Admitindo que ela suporte uma carga axial de 20 kip, determinar a dimensão de seus lados a com aproximação de $\frac{1}{2}$ pol. Usar as fórmulas NFPA.

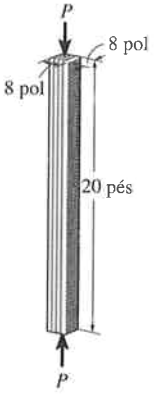
***13.96.** Resolver o Problema 13.95 supondo que a coluna esteja engastada nas extremidades superior e inferior.



Problemas 13.95/13.96

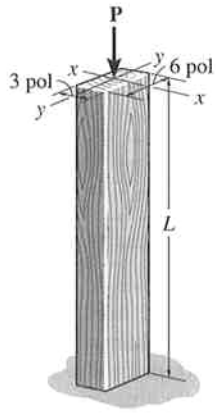
13.97. A coluna de madeira tem comprimento de 20 pés e está acoplada por pinos nas duas extremidades. Usar as fórmulas NFPA para determinar a maior força axial que ela pode suportar.

13.98. A coluna de madeira tem comprimento de 20 pés e está engastada nas duas extremidades. Usar as fórmulas NFPA para determinar a maior força axial que ela pode suportar.



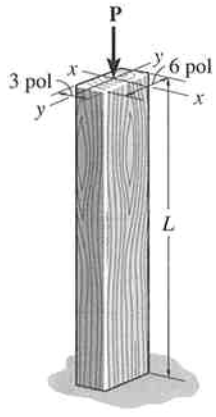
Problemas 13.97/13.98

13.99. A coluna é feita de madeira. Está engastada na extremidade inferior e livre no topo. Usar as fórmulas NFPA para determinar seu maior comprimento possível para que suporte uma carga axial $P = 6$ kip.



Problema 13.99

***13.100.** A coluna é feita de madeira. Está engastada na extremidade inferior e livre no topo. Usar as fórmulas NFPA para determinar a maior carga axial P que ela pode suportar sendo seu comprimento $L = 6$ pés.



Problema 13.100

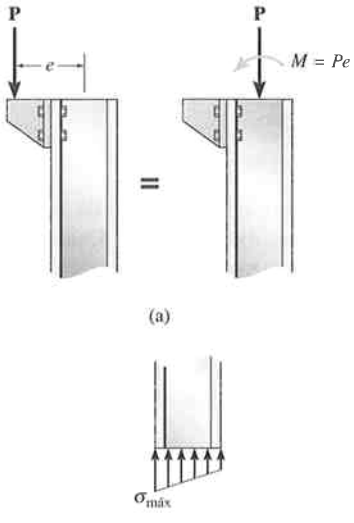


Figura 13.31

*13.7 PROJETO DE COLUNAS PARA CARREGAMENTO EXCÊNTRICO

Ocasionalmente, as colunas têm de suportar cargas que atuam em sua borda ou em um suporte acoplado à sua lateral, como mostra a Figura 13.31*a*. Nesse caso o momento fletor $M = Pe$, provocado pela carga excêntrica, deve ser considerado quando tais colunas são projetadas. Há várias maneiras de fazer isso em engenharia. Discutiremos dois dos métodos mais comuns.

Uso de Fórmulas Disponíveis para Colunas. A distribuição de tensão que atua sobre a área da seção transversal da coluna mostrada na Figura 13.31*a* é determinada tanto pela carga axial P como pelo momento fletor $M = Pe$. Em particular, a tensão de compressão máxima é:

$$\sigma_{máx} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} \tag{13.30}$$

O perfil típico da distribuição de tensão aparece na Figura 13.31*b*. Se conservadoramente supormos que toda a seção transversal está submetida à tensão uniforme $\sigma_{máx}$ como determinado pela Equação 13.30, poderemos então comparar $\sigma_{máx}$ com σ_{adm}, esta determinada pelas fórmulas dadas na Seção 13.6. Em geral, calcula-se σ_{adm} usando o *maior* índice de esbeltez para a coluna, independentemente do eixo em torno do qual ela sofre a flexão. Esse requisito normalmente é especificado nos códigos de projeto e, na maioria dos casos, leva a um projeto conservador. Se:

$$\sigma_{máx} \leq \sigma_{adm}$$

então a coluna pode suportar a carga especificada. Se a desigualdade não se verifica, a área da coluna A deve ser aumentada e devem ser calculados novos valores de $\sigma_{máx}$ e σ_{adm}. Esse método de projeto é bastante simples de aplicar e funciona bem para colunas de comprimento curto e intermediário.

Fórmula da Interação. Ao *projetar* uma coluna com carga excêntrica é desejável saber como as cargas de flexão e axial *interagem*, a fim de obter um equilíbrio entre os dois efeitos. Para fazer isso, consideraremos as contribuições em separado feitas à área total da coluna pela força axial e pelo momento fletor. Se a tensão admissível para a carga axial for $(\sigma_a)_{adm}$, a área necessária para a coluna suportar a carga P será:

$$A_a = \frac{P}{(\sigma_a)_{adm}}$$

De maneira semelhante, se o esforço de flexão admissível for $(\sigma_f)_{adm}$, então, como $I = Ar^2$, a área requerida para a coluna suportar o momento excêntrico será determinada pela fórmula da flexão, ou seja:

$$A_f = \frac{Mc}{(\sigma_f)_{adm} r^2}$$

A área total da coluna A necessária para resistir *tanto* à carga axial *quanto* ao momento fletor será, portanto:

$$A_a + A_f = \frac{P}{(\sigma_a)_{adm}} + \frac{Mc}{(\sigma_f)_{adm} r^2} \leq A$$

ou:

$$\frac{P/A}{(\sigma_a)_{adm}} + \frac{Mc/Ar^2}{(\sigma_f)_{adm}} \leq 1$$

$$\frac{\sigma_a}{(\sigma_a)_{adm}} + \frac{\sigma_f}{(\sigma_f)_{adm}} \leq 1 \qquad (13.31)$$

Onde:

σ_a = tensão normal ou axial provocada pela força P e determinada por $\sigma_a = P/A$, onde A é a área da seção transversal da coluna

σ_f = tensão de flexão provocada por uma carga excêntrica ou pelo momento fletor aplicado M; σ_f é determinada por $\sigma_f = Mc/I$, onde I é o momento de inércia da área da seção transversal calculado em torno do eixo de flexão ou neutro

$(\sigma_a)_{adm}$ = tensão normal admissível definida pelas fórmulas dadas na Seção 13.6 ou por outras especificações do código de projeto; para esse propósito, usar sempre o *maior* índice de esbeltez para a coluna, independentemente do eixo em torno do qual ela sofre flexão

$(\sigma_f)_{adm}$ = tensão de flexão admissível definida pelas especificações do código

Em particular, se a coluna estiver submetida apenas a uma carga axial, a relação flexão-tensão da Equação 13.31 será nula e o projeto será baseado somente na tensão axial admissível. Do mesmo modo, quando a carga axial não estiver presente, a relação carga axial-tensão será nula e o requisito de tensão será baseado na tensão de flexão admissível. Portanto, cada relação de tensão indica a contribuição da carga axial ou do momento fletor. Visto que a Equação 13.31 mostra como as cargas interagem, às vezes é denominada ***fórmula da interação***. Nessa abordagem de projeto, segue-se um procedimento de tentativa e erro em que o projetista precisa *escolher* uma coluna disponível e verificar se a desigualdade é satisfeita. Em caso negativo, ele busca uma seção maior e repete o processo. Se o lado esquerdo tende a um valor menor que 1, é sinal de que o projetista fez uma escolha econômica.

O método da interação é especificado com freqüência nos códigos para o projeto de elementos feitos de aço, alumínio ou madeira. Em particular, o AISC

Exemplo típico de coluna que suporta a carga excêntrica de uma cobertura.

recomenda o uso dessa equação somente quando a relação carga axial-tensão $\sigma_a/(\sigma_a)_{adm} \leq 0{,}15$. Para outros valores dessa relação, é preferível usar uma forma modificada da Figura 13.31.

Os exemplos a seguir ilustram os métodos anteriores para projeto e análise de colunas submetidas a carga excêntrica.

EXEMPLO 13.12

A coluna da Figura 13.32 é feita de liga de alumínio 2014-T6 e usada para suportar uma carga excêntrica **P**. Determinar a itensidade da carga **P** que pode ser suportada se a coluna estiver engastada na base e livre no topo. Usar a Equação 13.30.

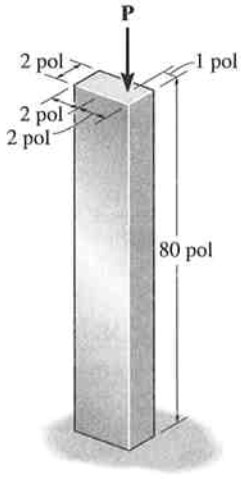


Figura 13.32

SOLUÇÃO

Pela Figura 13.12*b*, $K = 2$. O maior índice de esbeltez para a coluna é, portanto:

$$\frac{KL}{r} = \frac{2(80 \text{ pol})}{\sqrt{[(1/12)(4 \text{ pol})(2 \text{ pol})^3]/[(2 \text{ pol})4 \text{ pol}]}} = 277{,}1$$

Por inspeção, verifica-se que deve ser usada a Equação 13.26 ($277{,}1 > 55$). Assim:

$$\sigma_{adm} = \frac{54.000 \text{ ksi}}{(KL/r)^2} = \frac{54.000 \text{ ksi}}{(277{,}1)^2} = 0{,}703 \text{ ksi}$$

A tensão de compressão máxima na coluna é determinada pela combinação da carga axial e da flexão. Temos:

$$\sigma_{máx} = \frac{P}{A} + \frac{(Pe)c}{I}$$

$$= \frac{P}{2 \text{ pol}(4 \text{ pol})} + \frac{P(1 \text{ pol})(2 \text{ pol})}{(1/12)(2 \text{ pol})(4 \text{ pol})^3}$$

$$= 0{,}3125P$$

Supondo que essa tensão seja *uniforme* em toda a seção transversal, e não apenas no limite externo, requer-se que:

$$\sigma_{adm} = \sigma_{máx}; \qquad 0{,}703 = 0{,}3125P$$

$$P = 2{,}25 \text{ kip} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

EXEMPLO 13.13

A coluna construída com perfil W6 × 20 de aço A-36 mostrada na Figura 13.33 está acoplada por pino nas duas extremidades e sujeita à carga excêntrica **P**. Determinar o valor máximo admissível de P usando o método da interação e supondo que o esforço de flexão admissível seja $(\sigma_f)_{adm}$.

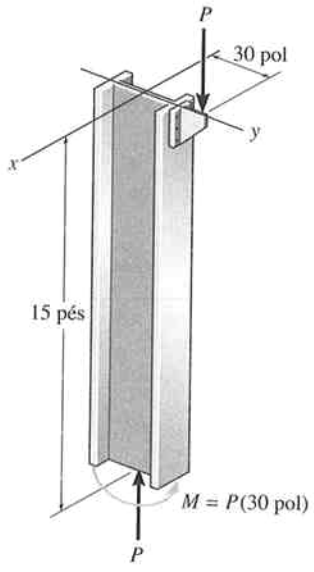


Figura 13.33

SOLUÇÃO

Nesse caso, $K = 1$. As propriedades geométricas necessárias para o perfil W6 × 20 são obtidas na tabela do Apêndice B.

$$A = 5{,}87 \text{ pol}^2 \qquad I_x = 41{,}4 \text{ pol}^4 \qquad r_y = 1{,}50 \text{ pol} \qquad d = 6{,}20 \text{ pol}$$

Consideraremos r_y porque ele levará ao *maior* valor do índice de esbeltez. I_x também é necessário porque a flexão ocorre em torno do eixo x ($c = 6{,}20 \text{ pol}/2 = 3{,}10$ pol). Para determinar a tensão de compressão admissível, temos:

$$\frac{KL}{r} = \frac{1(15 \text{ pés})(12 \text{ pol/pé})}{1{,}50 \text{ pol}} = 120$$

Como:

$$\left(\frac{KL}{r}\right)_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_E}} = \sqrt{\frac{2\pi^2[29(10^3) \text{ ksi}]}{36 \text{ ksi}}} = 126{,}1$$

então $KL/r < (KL/r)_c$ e, assim, deve ser usada a Equação 13.23.

$$\sigma_{adm} = \frac{[1 - (KL/r)^2/2(KL/r)_c^2]\sigma_E}{\{(5/3) + [(3/8)(KL/r)/(KL/r)_c] - [(KL/r)^3/8(KL/r)_c^3]\}}$$

$$= \frac{[1 - (120)^2/2(126{,}1)^2]36 \text{ ksi}}{\{(5/3) + [(3/8)(120)/(126{,}1)] - [(120)^3/8(126{,}1)^3]\}}$$

$$= 10{,}28 \text{ ksi}$$

Aplicando a Equação de interação 13.31, temos:

$$\frac{\sigma_a}{(\sigma_a)_{adm}} + \frac{\sigma_f}{(\sigma_f)_{adm}} \leq 1$$

$$\frac{P/5{,}87 \text{ pol}^2}{10{,}28 \text{ ksi}} + \frac{P(30 \text{ pol})(3{,}10 \text{ pol})/(41{,}4 \text{ pol}^4)}{22 \text{ ksi}} = 1$$

$$P = 8{,}43 \text{ kip} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Para comprovar a aplicação do método da interação à seção de aço, é preciso que:

$$\frac{\sigma_a}{(\sigma_a)_{adm}} = \frac{(8{,}43 \text{ kip})/(5{,}87 \text{ pol})}{10{,}28 \text{ kip/pol}^2} = 0{,}140 < 0{,}15 \qquad \text{OK}$$

EXEMPLO 13.14

A coluna de madeira da Figura 13.34 está composta por duas tábuas pregadas, de modo que a seção transversal tem as dimensões mostradas. Supondo que esteja engastada na base e livre no topo, usar a Equação 13.30 para determinar a carga excêntrica **P** que ela é capaz de suportar.

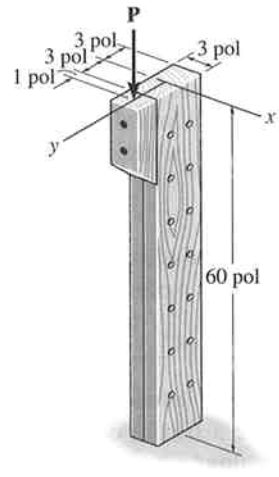


Figura 13.34

SOLUÇÃO

Pela Figura 13.12*b*, $K = 2$. Nesse caso temos de calcular KL/d para definir qual das equações de 13.27 a 13.29 deve ser usada. Como σ_{adm} é determinado usando-se o maior índice de esbeltez, escolhemos $d = 3$ pol. Esse valor torna o índice o maior possível e, portanto, resulta na menor tensão axial admissível. Isso é feito apesar de a flexão devida a P ocorrer em torno do eixo x. Temos:

$$\frac{KL}{d} = \frac{2(60 \text{ pol})}{3 \text{ pol}} = 40$$

A tensão axial admissível é determinada usando-se a Equação 13.29, uma vez que $26 < KL/d < 50$. Portanto:

$$\sigma_{adm} = \frac{540 \text{ ksi}}{(KL/d)^2} = \frac{540 \text{ ksi}}{(40)^2} = 0{,}3375 \text{ ksi}$$

Aplicando a Equação 13.30 com $\sigma_{adm} = \sigma_{máx}$, temos:

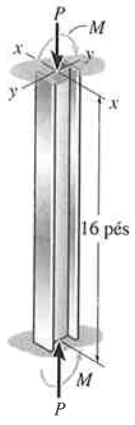
$$\sigma_{adm} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I}$$

$$0{,}3375 \text{ ksi} = \frac{P}{3 \text{ pol}(6 \text{ pol})} \quad \frac{P(4 \text{ pol})(3 \text{ pol})}{(1/12)(3 \text{ pol})(6 \text{ pol})^3}$$

$$P = 1{,}22 \text{ kip} \qquad \textit{Resposta}$$

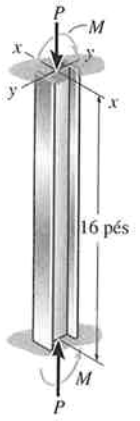
PROBLEMAS

13.101. A coluna de aço estrutural A-36 construída com perfil W8 × 15 está engastada nas extremidades superior e inferior. Se ela suporta momento fletor de $M = 5$ kip · pés nas extremidades, qual a força axial P que lhe pode ser aplicada? A flexão se dá em torno do eixo x–x. Usar as equações AISC da Seção 13.6 e a Equação 13.30.



Problema 13.101

13.102. A coluna de aço estrutural A-36 construída com perfil W8 × 15 está engastada nas extremidades superior e inferior. Se ela suporta momento fletor nas extremidades de $M = 23$ kip · pés, qual a força axial P que lhe pode ser aplicada? A flexão se dá em torno do eixo x–x. Usar a fórmula da interação com $(\sigma_f)_{adm} = 24$ ksi.



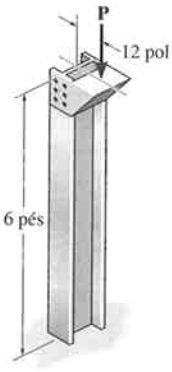
Problema 13.102

13.103. A coluna de aço estrutural A-36 construída com perfil W12 × 22 está engastada na extremidade inferior e livre no topo. Determinar a maior carga excêntrica P que lhe pode ser aplicada usando a Equação 13.30 e as equações AISC da Seção 13.6.

***13.104.** A coluna de aço estrutural A-36 construída com perfil W10 × 15 está engastada na extremidade inferior e livre no topo. Determinar a maior carga excêntrica P que lhe pode ser aplicada usando a Equação 13.30 e as equações AISC da Seção 13.6.

13.105. A coluna de aço estrutural A-36 construída com perfil W10 × 15 está engastada na extremidade inferior e livre no topo. Supondo que esteja sujeita a uma carga $P = 2$ kip, determinar se é segura com base nas equações AISC da Seção 13.6 e na Equação 13.30.

13.106. A coluna de aço estrutural A-36 construída com perfil W12 × 22 está engastada na extremidade inferior e livre no topo. Supondo que esteja sujeita a uma carga $P = 4$ kip, determinar se é segura com base nas equações AISC da Seção 13.6 e na Equação 13.30.

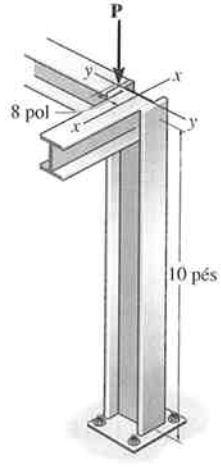


Problemas 13.103/13.104/13.105/13.106

13.107. Admite-se que a coluna de aço estrutural A-36 construída com perfil W8 × 15 esteja acoplada por pinos nas extremidades superior e inferior. Determinar a maior carga excêntrica P que lhe pode ser aplicada usando a Equação 13.30 e as equações AISC da Seção 13.6.

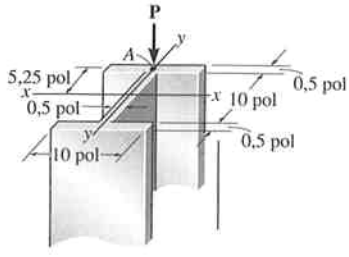
***13.108.** Resolver o Problema 13.107 supondo que a coluna esteja engastada nas extremidades superior e inferior.

13.109. Resolver o Problema 13.107 supondo que a coluna esteja engastada na base e acoplada por pino no topo.



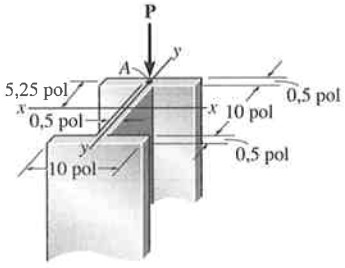
Problemas 13.107/13.108/13.109

13.110. Uma coluna com 20 pés de comprimento é feita de liga de alumínio 2014-T6. Supondo que esteja acoplada por pinos nas extremidades superior e inferior e lhe seja aplicada uma carga de compressão **P** no ponto A, determinar a intensidade máxima admissível de **P** usando as equações da Seção 13.6 e a Equação 13.30.



Problema 13.110

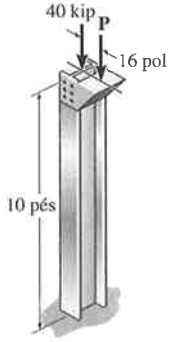
13.111. Uma coluna com 20 pés de comprimento é feita de liga de alumínio 2014-T6. Supondo que esteja acoplada por pinos nas extremidades superior e inferior e lhe seja aplicada uma carga de compressão **P** no ponto A, determinar a intensidade máxima admissível de **P** usando as equações da Seção 13.6 e a fórmula da interação com $(\sigma_f)_{adm} = 20$ ksi.



Problema 13.111

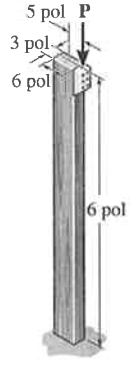
***13.112.** A coluna de aço estrutural A-36 construída com perfil W14 × 43 está engastada na extremidade inferior e livre no topo. Determinar a maior carga excêntrica P que lhe pode ser aplicada usando a Equação 13.30 e as equações AISC da Seção 13.6.

13.113. A coluna de aço estrutural A-36 construída com perfil W14 × 45 está engastada na extremidade inferior e livre no topo. Supondo que seja submetida a uma carga P = 2 kip, determinar se é segura com base nas equações AISC da Seção 13.6 e na Equação 13.30.



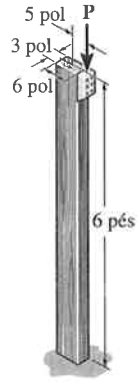
Problemas 13.112/13.113

13.114. Verificar se a coluna de madeira é adequada para suportar a carga excêntrica P = 800 lb aplicada no seu topo. Ela está engastada na base e livre no topo. Usar as equações NFPA da Seção 13.6 e a Equação 13.30.



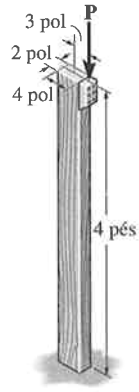
Problema 13.114

13.115. Determinar a carga excêntrica máxima admissível P que pode ser aplicada à coluna de madeira, que se encontra engastada na base e livre no topo. Usar as equações NFPA da Seção 13.6 e a Equação 13.30.



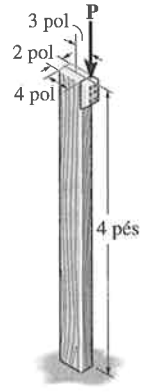
Problema 13.115

13.116. Verificar se a coluna de madeira é adequada para suportar a carga excêntrica P = 600 lb aplicada no seu topo. Ela está engastada na base e livre no topo. Usar as equações NFPA da Seção 13.6 e a Equação 13.30.



Problema 13.116

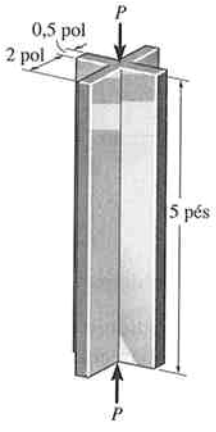
13.117. Determinar a carga excêntrica máxima admissível P que pode ser aplicada à coluna de madeira. Ela está engastada na base e livre no topo. Usar as equações NFPA da Seção 13.6 e a Equação 13.30.



Problema 13.117

PROBLEMAS DE REVISÃO

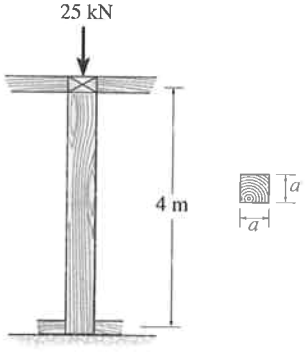
13.118. O elemento tem seção transversal simétrica. Se estiver acoplado por pinos nas duas extremidades, qual a maior força que poderá suportar? A coluna é feita de liga de alumínio 2014-T6.



Problema 13.118

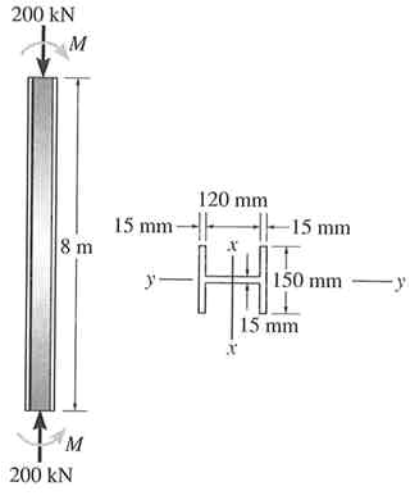
13.119. A coluna de madeira tem 4 m de comprimento e precisa suportar a carga axial de 25 kN. Supondo que a seção transversal seja quadrada, determinar a dimensão a de cada lado usando um fator de segurança contra flambagem F.S. = 2,5. Supor, também, que a coluna esteja acoplada por pino no topo e na base. Usar a equação de Euler. $E_{mad} = 11$ GPa, $\sigma_E = 10$ MPa.

***13.120.** A coluna de madeira tem 4 m de comprimento e precisa suportar a carga axial de 25 kN. Supondo que sua seção transversal seja quadrada, determinar a dimensão a de cada lado usando um fator de segurança contra flambagem F.S. = 1,5. Supor, também, que a coluna esteja engastada no topo e na base. Usar a equação de Euler. $E_{mad} = 11$ GPa, $\sigma_E = 10$ MPa.



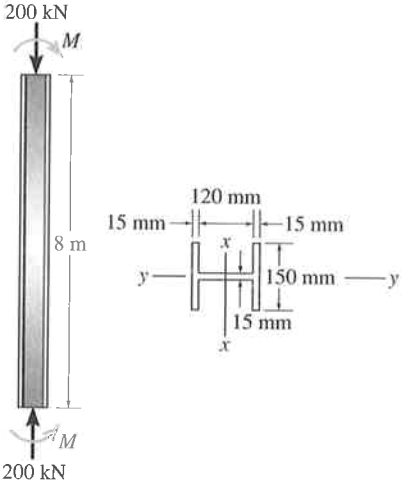
Problemas 13.119/13.120

13.121. Supor que a coluna seja acoplada por pino no topo e na base e completamente reforçada contra flambagem em torno do eixo y–y. Se ela é submetida a uma carga axial de 200 kN, qual o momento fletor máximo que pode ser aplicado em suas extremidades sem provocar escoamento. $E_{aço} = 200$ GPa? $\sigma_E = 250$ MPa.



Problema 13.121

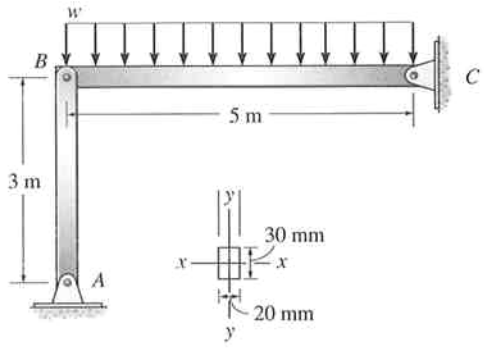
13.122. Supor que a coluna esteja engastada no topo e na base e reforçada contra flambagem em torno do eixo y–y. Se estiver submetida a uma carga axial de 200 kN, qual o momento fletor máximo que pode ser aplicado em suas extremidades sem provocar escoamento? $E_{aço} = 200$ GPa, $\sigma_E = 250$ MPa.



Problema 13.122

13.123. A barra de aço AB tem seção transversal retangular. Se estiver acoplada por pinos nas duas extremidades, qual a intensidade máxima admissível w de carga distribuída que pode ser aplicada a BC sem provocar flambagem da barra AB? Usar o fator de segurança em relação à flambagem F.S. = 1,5. $E_{aço} = 200$ GPa, $\sigma_E = 360$ MPa.

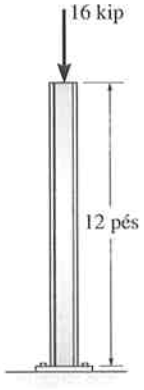
***13.124.** A barra de aço AB tem seção transversal retangular. Supondo que esteja acoplada por pinos nas duas extremidades, determinar se o elemento AB sofrerá flambagem se for aplicada a carga distribuída $w = 2$ kN/m. Usar o fator de segurança em relação à flambagem F.S. = 1,5. $E_{aço} = 200$ GPa, $\sigma_E = 360$ MPa.



Problemas 13.123/13.124

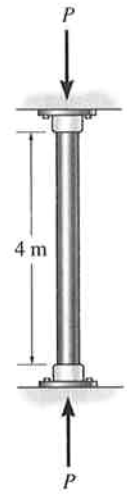
13.125. Usar as equações AISC para verificar se a coluna de aço A-36, construída com perfil W6 × 15, pode suportar a carga axial de 16 kip. Ela se encontra engastada na base e livre no topo.

13.126. Usar as equações AISC para verificar se a coluna de aço A-36, construída com perfil W12 × 45, pode suportar a carga axial de 16 kip. Ela se encontra engastada na base e livre no topo.



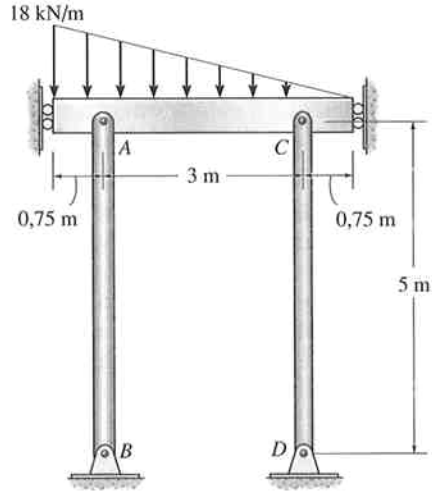
Problemas 13.125/13.126

13.127. O tubo de aço está engastado nas duas extremidades, tem comprimento de 4 m e diâmetro externo de 50 mm. Determinar sua espessura de modo que possa suportar uma carga axial $P = 100$ kN sem sofrer flambagem. $E_{aço} = 200$ GPa, $\sigma_E = 250$ MPa.



Problema 13.127

***13.128.** A carga distribuída é suportada por duas colunas acopladas por pinos, ambas com seção transversal circular maciça. Se AB é feita de alumínio e CD de aço, qual diâmetro cada coluna deve ter para que ambas estejam prestes a sofrer flambagem ao mesmo tempo? $E_{aço} = 200$ GPa, $E_{al} = 70$ GPa, $(\sigma_E)_{aço} = 250$ MPA, $(\sigma_E)_{al} = 100$ MPa.



Problema 13.128

14 Métodos de Energia

Objetivos do Capítulo

Mostraremos agora como aplicar métodos de energia para resolver problemas que envolvam deflexão. O capítulo inicia-se com uma discussão sobre trabalho e energia de deformação; em seguida, desenvolvemos o princípio de conservação de energia. Usando esse princípio, determinamos a tensão e a deflexão do elemento quando este é submetido a impacto. O método do trabalho virtual e o teorema de Castigliano são então desenvolvidos e, por fim, usados para determinar o deslocamento e a inclinação em pontos dos elementos estruturais e partes mecânicas.

À medida que as estacas são cravadas, suas extremidades sofrem cargas de impacto. É preciso compreender a natureza do impacto e a energia produzida, a fim de determinar a tensão desenvolvida em cada estaca. (Cortesia da Manitowoc Engineering Company.)

14.1 Trabalho Externo e Energia de Deformação

Antes de desenvolver qualquer um dos métodos de energia que serão usados ao longo deste capítulo, vamos primeiro definir o trabalho provocado por uma força externa e por um conjugado e, além disso, mostrar como expressar o trabalho em termos da energia de deformação do corpo. As fórmulas apresentadas aqui e na próxima seção fornecerão a base para aplicar os métodos de trabalho e energia que se seguem ao longo do capítulo.

Trabalho de uma Força. Na mecânica, uma força realiza *trabalho* quando sofre um deslocamento dx na *mesma direção* dela. O trabalho realizado é um escalar definido como $dU_e = F\,dx$. Se o deslocamento total é x, o trabalho torna-se:

$$U_e = \int_0^x F\,dx \tag{14.1}$$

Para explicar como se usa essa equação, vamos calcular o trabalho realizado por uma força axial aplicada na extremidade da barra mostrada na Figura 14.1*a*. Como a grandeza de **F** aumenta *gradualmente* de zero até algum valor limite $F = P$, o deslocamento final da extremidade da barra torna-se Δ. Se o material comportar-se de maneira linear-elástica, a força será diretamente proporcional ao deslocamento; ou seja, $F = (P/\Delta)x$. Substituindo na Equação 14.1 e integrando de 0 a Δ, obtemos:

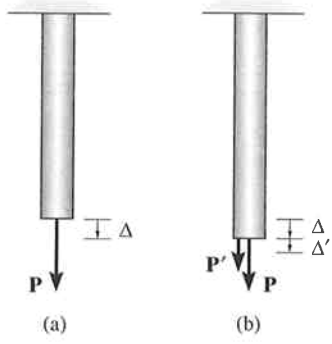
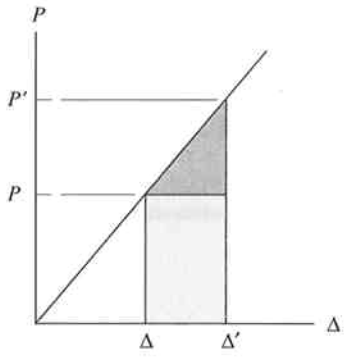


Figura 14.1



(c)

Figura 14.1

$$U_e = \frac{1}{2}P\Delta \tag{14.2}$$

Portanto, como a força é aplicada à barra gradualmente, sua intensidade aumenta de zero a algum valor P e, conseqüentemente, o trabalho realizado é igual à *intensidade média da força*, $P/2$, multiplicado pelo deslocamento total Δ. Podemos representar essa condição graficamente como a área do triângulo com o sombreamento mais claro da Figura 14.1*c*.

Suponhamos, entretanto, que **P** já esteja aplicada à barra e que *outra força* **P**′ seja também aplicada, de modo que a extremidade da barra desloque-se uma quantidade *adicional* Δ' (Figura 14.1*b*). O trabalho realizado por **P** (não **P**′) quando a barra sofre o deslocamento adicional Δ' é, então:

$$U_e' = P\Delta' \tag{14.3}$$

Aqui o trabalho representa a *área retangular* sombreada da Figura 14.1*c*. Nesse caso, **P** não muda sua intensidade, uma vez que o deslocamento Δ' é provocado somente por **P**′. Portanto, o trabalho aqui é simplesmente a intensidade da força P multiplicada pelo deslocamento Δ'.

Em resumo, quando se aplica uma força **P** à barra e em seguida uma força **P**′, o trabalho total realizado por ambas as forças é representado pela área de todo o triângulo da Figura 14.1*c*. A área triangular com o sombreamento mais claro representa o trabalho de **P**, provocado por seu deslocamento Δ. A área triangular com o sombreamento mais escuro representa o trabalho de **P**′, uma vez que essa força desloca-se Δ'; finalmente, a área retangular sombreada representa o trabalho adicional realizado por **P** quando **P** desloca-se Δ', em virtude de **P**′.

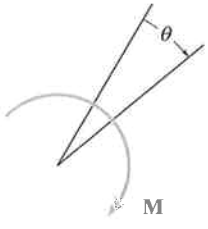


Figura 14.2

Trabalho de um Momento (Conjugado). Um momento (conjugado) **M** realiza trabalho quando sofre um deslocamento de rotação $d\theta$ ao longo de sua linha de ação. O trabalho realizado é definido como $dU_e = M\,d\theta$ (Figura 14.2). Se o ângulo total de deslocamento é θ radianos, o trabalho torna-se:

$$U_e = \int_0^\theta M\,d\theta \tag{14.4}$$

Como no caso da força, se o momento (conjugado) for aplicado a um *corpo* feito de material com comportamento linear-elástico, tal que sua intensidade aumente gradualmente de zero em $\theta = 0$ para M em θ, o trabalho será:

$$U_e = \frac{1}{2}M\theta \tag{14.5}$$

Entretanto, se o momento (conjugado) já estiver aplicado ao corpo e outras cargas girarem esse corpo uma quantidade adicional θ', então o trabalho será:

$$U_e' = M\theta'$$

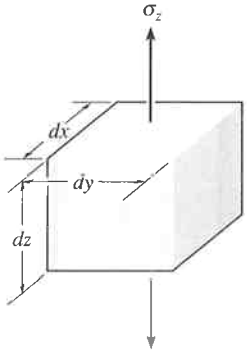


Figura 14.3

Energia de Deformação. Quando aplicadas a um corpo, as cargas deformam o material. Desde que não haja perda de energia sob a forma de calor, o trabalho externo por elas realizado será convertido em trabalho interno denominado ***energia de deformação***. Essa energia, *sempre positiva*, armazena-se no corpo e é provocada pela ação da tensão normal ou da de cisalhamento.

Tensão Normal. Se o elemento de volume mostrado na Figura 14.3 for submetido à tensão normal σ_z, a força criada nas faces superior e inferior será $dF_z = \sigma_z\,dA = \sigma_z\,dx\,dy$. Se essa força for aplicada gradualmente ao elemento, como a força **P** já discutida, sua intensidade aumentará de zero até dF_z,

enquanto o elemento sofrerá um deslocamento $d\Delta_z = \epsilon_z\, dz$. O trabalho realizado por dF_z será, portanto, $dU_i = \frac{1}{2}dF_z\, d\Delta_z = \frac{1}{2}[\sigma_z\, dx\, dy]\epsilon_z\, dz$. Como o volume do elemento é $dV = dx\, dy\, dz$, temos:

$$dU_i = \frac{1}{2}\sigma_z\epsilon_z\, dV \tag{14.6}$$

Observar que U_i é *sempre positivo*, mesmo que σ_z seja de compressão, uma vez que σ_z e ϵ_z sempre atuam na mesma direção.

Em geral, então, se o corpo estiver submetido apenas a uma *tensão normal* σ uniaxial, atuando em uma direção específica, a energia de deformação nele armazenada será, portanto:

$$U_i = \int_V \frac{\sigma\epsilon}{2}\, dV \tag{14.7}$$

Além disso, se o material comporta-se de maneira linear-elástica, a lei de Hooke, $\sigma = E\epsilon$, aplica-se e podemos, portanto, expressar a energia de deformação em termos da tensão normal, assim:

$$\boxed{U_i = \int_V \frac{\sigma^2}{2E}\, dV} \tag{14.8}$$

Tensão de Cisalhamento. Uma expressão deformação-energia semelhante à tensão normal também pode ser estabelecida para o material quando ele está submetido a tensão de cisalhamento. Consideremos o elemento de volume mostrado na Figura 14.4. Nesse caso, a tensão de cisalhamento provoca deformação no elemento tal que somente a força de cisalhamento $dF = \tau(dx\, dy)$, que atua sobre a face superior, desloca-se $\gamma\, dz$ em relação à face inferior. As *faces verticais* apenas giram e, portanto, as forças de cisalhamento nelas desenvolvidas não realizam trabalho. Dessa maneira, a energia de deformação armazenada no elemento é:

$$dU_i = \frac{1}{2}[\tau(dx\, dy)]\gamma\, dz$$

ou:

$$dU_i = \frac{1}{2}\,\tau\gamma\, dV \tag{14.9}$$

onde $dV = dx\, dy\, dz$ é o volume do elemento.

Integrando em todo o volume do corpo para obter a energia de deformação nele armazenada, temos:

$$U_i = \int_V \frac{\tau\gamma}{2}\, dV \tag{14.10}$$

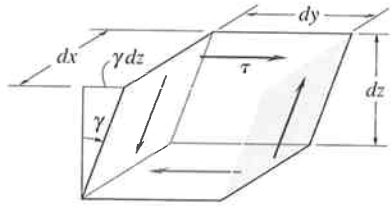
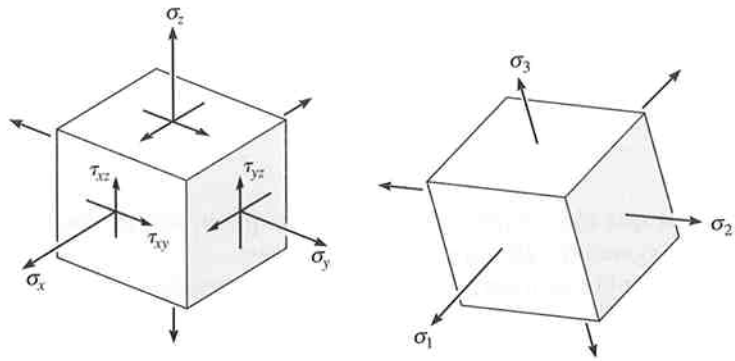


Figura 14.4

Como no caso da tensão normal, a energia de deformação por cisalhamento é sempre positiva, uma vez que τ e γ estão sempre na mesma direção. Se o material é linear-elástico, então, aplicando a lei de Hooke, $\gamma = \tau/G$, podemos expressar a energia de deformação em termos da tensão de cisalhamento, assim:

$$\boxed{U_i = \int_V \frac{\tau^2}{2G}\, dV} \tag{14.11}$$

Na próxima seção usaremos as equações 14.8 e 14.11 para obter expressões formais da energia de deformação armazenada em elementos sujeitos a vários tipos de carga. Uma vez feito isso, poderemos desenvolver os métodos de energia necessários para determinar o deslocamento e a inclinação em pontos do corpo.



(a) (b)

Figura 14.5

Tensão Multiaxial. Podemos ampliar os desenvolvimentos anteriores para determinar a energia de deformação em um corpo quando ele está sujeito a um estado geral de tensão (Figura 14.5*a*). As energias de deformação associadas a cada componente das tensões normal e de cisalhamento são obtidas pelas equações 14.6 e 14.9. Como a energia é um escalar, a energia de deformação total no corpo é:

$$U_i = \int_V \left[\frac{1}{2}\sigma_x\epsilon_x + \frac{1}{2}\sigma_y\epsilon_y + \frac{1}{2}\sigma_z\epsilon_z + \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy} + \frac{1}{2}\tau_{yz}\gamma_{yz} + \frac{1}{2}\tau_{xz}\gamma_{xz}\right] dV \tag{14.12}$$

As deformações podem ser eliminadas usando-se a fórmula generalizada da lei de Hooke, dada pelas equações 10.18 e 10.19. Depois de substituir e combinar os termos, temos:

$$U_i = \int_V \left[\frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)\right] dV \tag{14.13}$$

Se apenas as tensões principais atuam sobre o elemento (Figura 14.5*b*), essa equação reduz-se a uma forma mais simples, ou seja:

$$U_i = \int_V \left[\frac{1}{2E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)\right] dV \tag{14.14}$$

Lembre-se de que usamos essa equação na Seção 10.7 para desenvolver a teoria da distorção máxima de energia.

14.2 ENERGIA DE DEFORMAÇÃO ELÁSTICA PARA VÁRIOS TIPOS DE CARGA

Usando as equações desenvolvidas na seção anterior, vamos deduzir a fórmula da energia de deformação armazenada em um elemento quando ele está submetido a carga axial, momento fletor, cisalhamento transversal e momento de torção. Serão dados exemplos para mostrar como calcular a energia de deformação nos elementos submetidos a esses carregamentos.

Carga Axial. Consideremos uma barra de seção transversal variável, levemente cônica, submetida a uma carga axial que coincide com seu eixo central (Figura 14.6). A *força axial interna* em uma seção localizada a uma distância x de qualquer das duas extremidades é N. Se a área da seção transversal nessa seção for A, a tensão normal na seção será $\sigma = N/A$. Aplicando a Equação 14.8, temos:

$$U_i = \int_V \frac{\sigma_x^2}{2E}\, dV = \int_V \frac{N^2}{2EA^2}\, dV$$

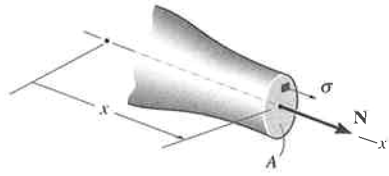


Figura 14.6

Se escolhermos um elemento ou uma lâmina infinitesimal com volume $dV = A\, dx$, concluiremos que a fórmula geral da energia de deformação na barra é:

$$\boxed{U_i = \int_0^L \frac{N^2}{2AE}\, dx} \qquad (14.15)$$

Para o caso mais comum — barra prismática com área da seção transversal A, comprimento L e carga axial constante N (Figura 14.7) — a Equação 14.15, depois de integrada, resulta em:

$$\boxed{U_i = \frac{N^2 L}{2AE}} \qquad (14.16)$$

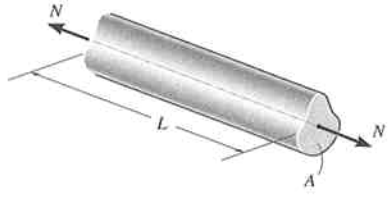


Figura 14.7

Vê-se, por essa equação, que a energia de deformação elástica *aumentará* se o comprimento da barra aumentar ou se o módulo de elasticidade ou a área da seção transversal diminuir. Por exemplo, uma haste de alumínio [$E_{al} = 10(10^3)$ ksi] armazena aproximadamente três vezes a energia de uma haste de aço [$E_{aço} = 29(10^3)$ ksi] de mesmo tamanho e submetida à mesma carga. Por outro lado, dobrar a área da seção transversal de dada haste diminuirá sua capacidade de armazenar energia pela metade. O exemplo a seguir ilustra numericamente essa questão.

EXEMPLO 14.1

Um dos dois parafusos de alta resistência A e B mostrados na Figura 14.8 deve ser selecionado para suportar uma carga de tração súbita. Para fazer a escolha, é necessário determinar a maior quantidade de energia de deformação elástica que cada parafuso pode absorver. O parafuso A tem diâmetro de 0,875 pol por 2 pol de comprimento e diâmetro da rosca (menor diâmetro) de 0,731 pol em 0,25 pol da região rosqueada. O parafuso B tem rosca reforçada, de forma que o diâmetro em todo o comprimento de 2,25 pol é considerado como sendo de 0,731 pol. Em ambos os casos, desprezar o material extra das roscas. Adotar $E_{aço} = 29(10^3)$ ksi e $\sigma_E = 44$ ksi.

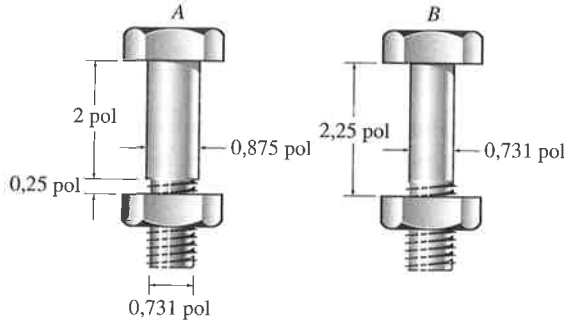


Figura 14.8

SOLUÇÃO

Parafuso A. Se o parafuso estiver sujeito à sua tração máxima, a tensão máxima $\sigma_E = 44$ ksi ocorrerá na região de 0,25 pol. Essa força de tração é:

$$P_{máx} = \sigma_E A = 44 \text{ ksi}\left[\pi\left(\frac{0{,}731 \text{ pol}}{2}\right)^2\right] = 18{,}47 \text{ kip}$$

Aplicando a Equação 14.16 a cada região do parafuso, temos:

$$U_i = \sum \frac{N^2 L}{2AE}$$

$$= \frac{(18{,}47 \text{ kip})^2(2 \text{ pol})}{2[\pi(0{,}875 \text{ pol}/2)^2][29(10^3) \text{ ksi}]} + \frac{(18{,}47 \text{ kip})^2(0{,}25 \text{ pol})}{2[\pi(0{,}731 \text{ pol}/2)^2]29(10^3) \text{ ksi}}$$

$$= 0{,}0231 \text{ pol} \cdot \text{kip}$$ ***Resposta***

Parafuso B. Nesse caso, supõe-se que o parafuso tenha diâmetro uniforme de 0,731 pol ao longo do comprimento de 2,25 pol. Além disso, pelo cálculo anterior, ele suporta uma força de tração máxima $P_{máx} = 18{,}47$ kip. Assim:

$$U_i = \frac{N^2 L}{2AE} = \frac{(18{,}47 \text{ kip})^2(2{,}25 \text{ pol})}{2[\pi(0{,}731 \text{ pol}/2)^2][29(10^3) \text{ ksi}]} = 0{,}0315 \text{ pol} \cdot \text{kip}$$ ***Resposta***

Verifica-se, por comparação, que o parafuso *B* absorve 36% mais energia elástica que o *A*, apesar de ter uma seção transversal menor ao longo do corpo.

Momento Fletor. Como o momento fletor aplicado a um elemento prismático reto desenvolve *tensão normal* nele, podemos usar a Equação 14.8 para determinar a energia de deformação armazenada nesse elemento em virtude da flexão. Como exemplo, consideremos a viga simétrica em relação aos eixos mostrada na Figura 14.9. Aqui o momento interno é M, e a tensão normal que atua sobre o elemento arbitrário a uma distância y do eixo neutro é $\sigma = My/I$. Se o volume do elemento for $dV = dA\,dx$, onde dA é a área da face exposta e dx é seu comprimento, a energia de deformação elástica na viga será:

$$U_i = \int_V \frac{\sigma^2}{2E}\,dV = \int_V \frac{1}{2E}\left(\frac{My}{I}\right)^2 dA\,dx$$

ou:

$$U_i = \int_0^L \frac{M^2}{2EI^2}\left(\int_A y^2\,dA\right)dx$$

Compreendendo que toda a área representa o momento de inércia da viga em torno do eixo neutro, o resultado final pode ser escrito como:

$$\boxed{U_i = \int_0^L \frac{M^2\,dx}{2EI}} \tag{14.17}$$

Portanto, para calcular a energia de deformação, devemos primeiro expressar o momento interno como função de sua posição x ao longo da viga e depois integrar em todo o comprimento da viga.[1] Os exemplos a seguir ilustram esse procedimento.

[1] Lembrar que a fórmula da flexão, como usada aqui, também aplica-se, com precisão justificável, para determinar a tensão em vigas levemente cônicas (ver a Seção 6.4). Então, de modo geral, I na Equação 14.17 também pode ser expresso em função de x.

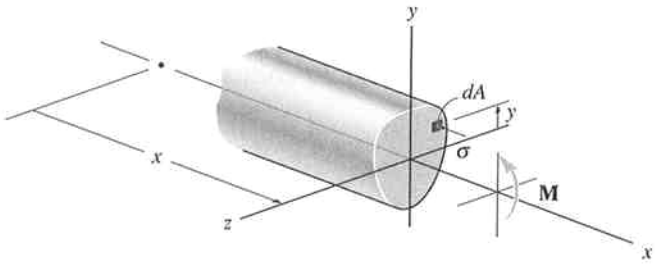
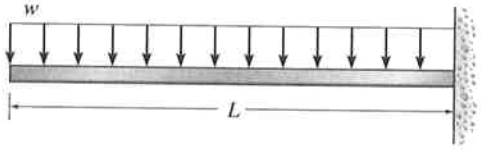


Figura 14.9

EXEMPLO 14.2

Determinar a energia de deformação elástica devida à flexão da viga em balanço, supondo que ela seja submetida à carga uniforme distribuída w (Figura 14.10*a*). Considerar EI constante.



(a)

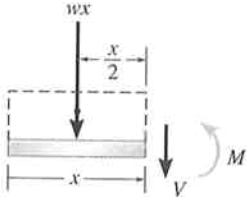
Figura 14.10

SOLUÇÃO

Determina-se momento interno na viga definindo a coordenada x com origem no lado esquerdo, lado este representado na Figura 14.10*b*. Temos:

$$\curvearrowleft^{+} \Sigma M_{EN} = 0; \qquad M + wx\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$M = -w\left(\frac{x^2}{2}\right)$$



(b)

Aplicando a Equação 14.17, temos:

$$U_i = \int_0^L \frac{M^2\,dx}{2EI} = \int_0^L \frac{[-w(x^2/2)]^2\,dx}{2EI} = \frac{w^2}{8EI}\int_0^L x^4\,dx$$

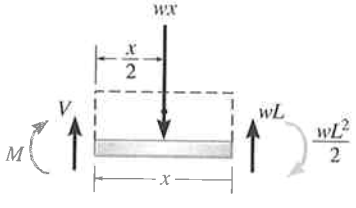
ou:

$$U_i = \frac{w^2L^5}{40EI} \qquad \textit{Resposta}$$

Podemos também obter a energia de deformação usando uma coordenada x que se origine no lado direito da viga e prolongue-se como positiva para a esquerda (Figura 14.10*c*). Nesse caso:

$$\curvearrowleft^{+} \Sigma M_{EN} = 0; \qquad -M - wx\left(\frac{x}{2}\right) + wL(x) - \frac{wL^2}{2} = 0$$

$$M = -\frac{wL^2}{2} + wLx - w\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

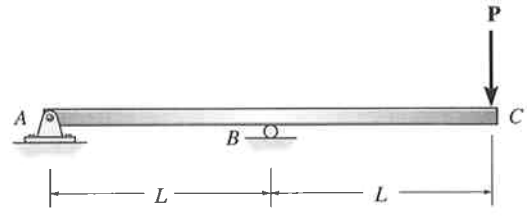


(c)

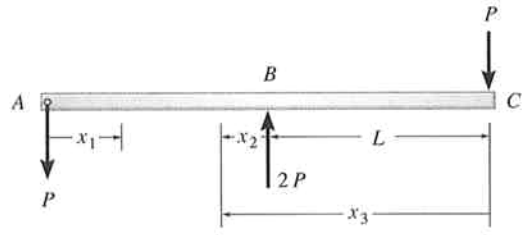
Aplicando a Equação 14.17, obtemos um resultado igual ao anterior.

EXEMPLO 14.3

Determinar a energia de deformação por flexão na região AB da viga mostrada na Figura 14.11*a*. Considerar EI constante.



(a)



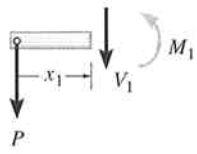
(b)

Figura 14.11

SOLUÇÃO

Um diagrama de corpo livre da viga é mostrado na Figura 14.11*b*. Para obter a resposta, expressamos o momento interno em termos de qualquer uma das três coordenadas x e depois aplicamos a Equação 14.17. Cada uma dessas soluções será considerada agora.

$0 \leq x_1 \leq L$. Pelo diagrama de corpo livre da seção na Figura 14.11*c*, temos:



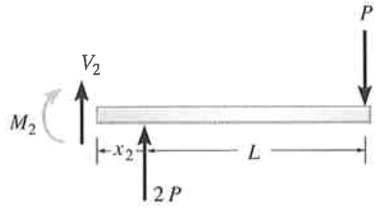
(c)

$$\curvearrowleft^{+} \Sigma M_{EN} = 0; \qquad M_1 + Px_1 = 0$$

$$M_1 = -Px_1$$

$$U_i = \int \frac{M^2\,dx}{2EI} = \int_0^L \frac{(-Px_1)^2\,dx_1}{2EI}$$

$$= \frac{P^2L^3}{6EI} \qquad \textit{Resposta}$$



(d)

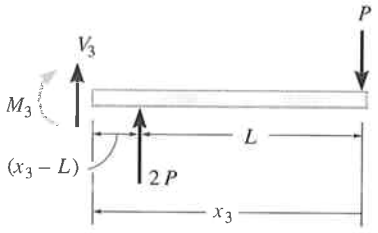
$0 \leq x_2 \leq L$. Pelo diagrama de corpo livre da seção na Figura 14.11*d*, temos:

$$\curvearrowleft^{+} \Sigma M_{EN} = 0; \qquad -M_2 + 2P(x_2) - P(x_2 + L) = 0$$

$$M_2 = P(x_2 - L)$$

$$U_i = \int \frac{M^2\,dx}{2EI} = \int_0^L \frac{[P(x_2 - L)]^2\,dx_2}{2EI}$$

$$= \frac{P^2L^3}{6EI} \qquad \textit{Resposta}$$



(e)

Figura 14.11

$L \leq x_3 \leq 2L$. Pelo diagrama de corpo livre da seção na Figura 14.11*e*, temos:

$$\zeta+ \Sigma M_{EN} = 0; \qquad -M_3 + 2P(x_3 - L) - P(x_3) = 0$$

$$M_3 = P(x_3 - 2L)$$

$$U_i = \int \frac{M^2\,dx}{2EI} = \int_L^{2L} \frac{[P(x_3 - 2L)]^2\,dx_3}{2EI}$$

$$= \frac{P^2L^3}{6EI} \qquad \textit{Resposta}$$

Este exemplo e o anterior indicam que a energia de deformação da viga pode ser calculada por meio de *qualquer* coordenada x adequada. É necessário apenas integrar em toda a faixa da coordenada na qual se quer determinar a energia. Nesse caso, a escolha de x_1 oferece a solução mais simples.

Cisalhamento Transversal. A energia de deformação devida à tensão de cisalhamento em um elemento da viga pode ser determinada por meio da Equação 14.11. Aqui suporemos que a viga é prismática e tem um eixo de simetria em torno do eixo y como o da Figura 14.12. Se o cisalhamento interno na seção x é V, a tensão de cisalhamento que atua sobre o elemento de volume do material, com comprimento dx e área dA, é $\tau = VQ/It$. Substituindo na Equação 14.11, vemos que a energia de deformação por cisalhamento torna-se:

$$U_i = \int_V \frac{\tau^2}{2G}\,dV = \int_V \frac{1}{2G}\left(\frac{VQ}{It}\right)^2 dA\,dx$$

$$U_i = \int_0^L \frac{V^2}{2GI^2}\left(\int_A \frac{Q^2}{t^2}\,dA\right) dx$$

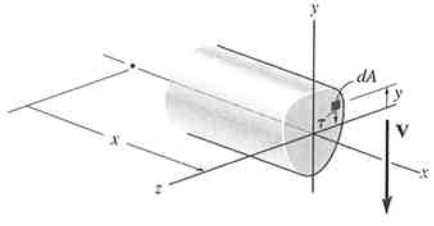


Figura 14.12

A integral entre parênteses é calculada na área da seção transversal da viga. Para simplificar essa expressão, definiremos o *fator de forma* para cisalhamento como:

$$f_c = \frac{A}{I^2}\int_A \frac{Q^2}{t^2}\,dA \qquad (14.18)$$

Substituindo na equação anterior, obtemos:

$$\boxed{U_i = \int_0^L \frac{f_c V^2\,dx}{2GA}} \qquad (14.19)$$

O fator de forma definido pela Equação 14.18 consiste em um número adimensional único para cada área de seção transversal específica. Por

exemplo: se a viga tiver seção transversal retangular de largura b e altura h (Figura 14.13), então:

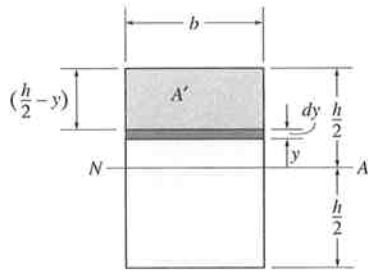


Figura 14.13

$$t = b$$
$$A = bh$$
$$I = \frac{1}{12}bh^3$$
$$Q = \bar{y}'A' = \left(y + \frac{(h/2) - y}{2}\right) b\left(\frac{h}{2} - y\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

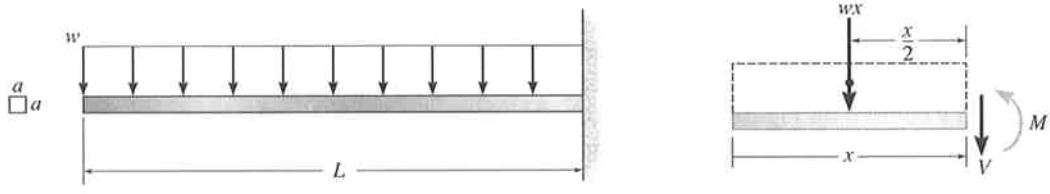
Substituindo esses termos na Equação 14.18, obtemos:

$$f_c = \frac{bh}{(\frac{1}{12}bh^3)^2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{b^2}{4b^2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)^2 b\, dy = \frac{6}{5} \tag{14.20}$$

O fator de forma para outras seções é determinado de maneira similar. Uma vez obtido, esse valor é substituído na Equação 14.19 e a energia de deformação por cisalhamento transversal é então calculada.

EXEMPLO 14.4

Determinar a energia de deformação na viga em balanço em virtude do cisalhamento, supondo que a viga tenha seção transversal quadrada e esteja submetida a uma carga uniformemente distribuída w (Figura 14.14*a*). Considerar EI e G constantes.



(a) (b)

Figura 14.14

SOLUÇÃO

Pelo diagrama de corpo livre de uma seção arbitrária (Figura 14.14*b*), temos:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad -V - wx = 0$$
$$V = -wx$$

Como a seção transversal é quadrada, o fator de forma é $f_s = \frac{6}{5}$ (Equação 14.20) e, portanto, a Equação 14.19 torna-se:

$$(U_i)_c = \int_0^L \frac{\frac{6}{5}(-wx)^2\, dx}{2GA} = \frac{3w^2}{5GA}\int_0^L x^2\, dx$$

ou:

$$(U_i)_c = \frac{w^2L^3}{5GA} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Usando os resultados do Exemplo 14.2, com $A = a^2$, $I = \frac{1}{12}a^4$, temos que a relação cisalhamento-energia de deformação por flexão é:

$$\frac{(U_i)_c}{(U_i)_f} = \frac{w^2L^3/5Ga^2}{w^2L^5/40E(\frac{1}{12}a^4)} = \frac{2}{3}\left(\frac{a}{L}\right)^2 \frac{E}{G}$$

Como $G = E/2(1 + \nu)$ e $\nu \leq \frac{1}{2}$ (Seção 10.6), então, como limite *superior*, $E = 3G$, de modo que:

$$\frac{(U_i)_c}{(U_i)_f} = 2\left(\frac{a}{L}\right)^2$$

Observa-se que a relação aumenta à medida que L decresce. Entretanto, mesmo para vigas muito curtas, onde, digamos, $L = 5a$, a contribuição devida à energia de deformação por cisalhamento representa somente 8% da energia de deformação por flexão. Por essa razão, a energia de deformação por cisalhamento armazenada nas vigas geralmente é desprezada nas análises de engenharia.

Momento de Torção. Para determinar a energia de deformação interna em um eixo ou tubo circular provocada por um momento de torção, devemos aplicar a Equação 14.11. Consideremos o eixo levemente cônico da Figura 14.15. Uma seção extraída dele a uma distância x da extremidade está sujeita ao torque interno T. A distribuição da tensão de cisalhamento que provoca esse torque varia linearmente a partir do centro do eixo. Em um elemento arbitrário de comprimento dx e área dA, a tensão é $\tau = T\rho/J$. A energia de deformação armazenada no eixo é, então:

$$U_i = \int_V \frac{\tau^2}{2G}\,dV = \int_V \frac{1}{2G}\left(\frac{T\rho}{J}\right)^2 dA\,dx$$

$$= \int_0^L \frac{T^2}{2GJ^2}\left(\int_A \rho^2\,dA\right)dx$$

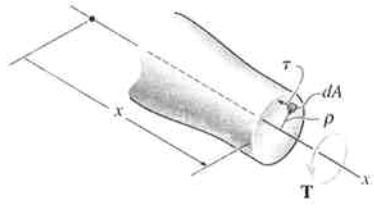


Figura 14.15

Como a área total representa o momento de inércia polar J do eixo na seção, o resultado final é escrito como:

$$\boxed{U_i = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ}\,dx} \qquad (14.21)$$

O mais comum é o eixo (ou tubo) ter área da seção transversal constante (Figura 14.16). Nesse caso, a integração da Equação 14.21 resulta em:

$$\boxed{U_i = \frac{T^2L}{2GJ}} \qquad (14.22)$$

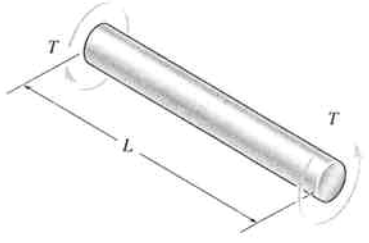


Figura 14.16

Por essa equação podemos concluir que, como ocorre com elementos submetidos a carga axial, a capacidade de absorção de energia de um eixo submetido a carga de torção *decresce* quando seu diâmetro aumenta, uma vez que este aumenta J.

Se a seção transversal do eixo tem outra forma que não circular ou tubular, a Equação 14.22 deve ser modificada. Por exemplo: se sua seção for retangular, com dimensões $h > b$, então, usando uma análise matemática baseada na teoria da elasticidade, pode-se mostrar que a energia de deformação no eixo é determinada por:

$$U_i = \frac{T^2L}{2Cb^3hG} \qquad (14.23)$$

onde:

$$C = \frac{hb^3}{16}\left[\frac{16}{3} - 3{,}336\frac{b}{h}\left(1 - \frac{b^4}{12h^4}\right)\right] \qquad (14.24)$$

O exemplo a seguir ilustra como determinar a energia de deformação devida à carga de torção em um eixo.

EXEMPLO 14.5

O eixo tubular da Figura 14.17*a* está engastado na parede e sujeito a dois torques como mostrado. Determinar a energia de deformação nele armazenada em virtude do carregamento. Adote $G = 75$ GPa.

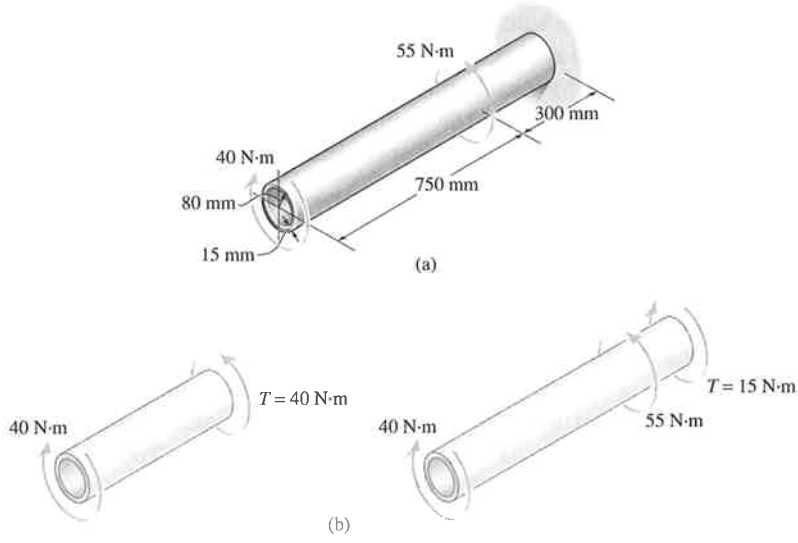


Figura 14.17

SOLUÇÃO

De acordo com o método das seções, primeiro se determina o torque interno nas duas regiões do eixo em que ele é constante (Figura 14.17*b*). Apesar de os torques (40 N · m e 15 N · m) terem direções opostas, essa condição não cria qualquer conseqüência na determinação da energia de deformação, visto que o torque é elevado ao quadrado na Equação 14.22. Em outras palavras, a energia de deformação será sempre positiva. O momento de inércia polar do eixo é:

$$J = \frac{\pi}{2}[(0{,}08\text{ m})^4 - (0{,}065\text{ m})^4] = 36{,}30(10^{-6})\text{ m}^4$$

Aplicando a Equação 14.22, temos:

$$U_i = \sum \frac{T^2 L}{2GJ}$$

$$= \frac{(40\text{ N} \cdot \text{m})^2(0{,}750\text{ m})}{2[75(10^9)\text{ N/m}^2]36{,}30(10^{-6})\text{ m}^4} + \frac{(15\text{ N} \cdot \text{m})^2(0{,}300\text{ m})}{2[75(10^9)\text{ N/m}^2]36{,}30(10^{-6})\text{ m}^4}$$

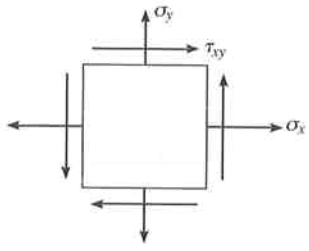
$$= 233\ \mu J$$ ***Resposta***

PONTOS IMPORTANTES

- Uma *força* realiza trabalho quando se move por meio de um *deslocamento*. Se a força aumenta gradualmente em intensidade de zero até F, o trabalho é $U = (F/2)\Delta$; se ela permanece constante quando o deslocamento ocorre, então $U = F\Delta$.
- Um *momento (conjugado)* realiza trabalho quando se move por meio de uma *rotação*.
- A *energia de deformação* é provocada pelo trabalho interno das tensões normal e de cisalhamento. É sempre uma quantidade *positiva*.
- A energia de deformação pode ser relacionada aos carregamentos internos resultantes N, V, M e T.
- À medida que a viga torna-se mais longa, a energia de deformação devida à flexão torna-se muito maior que a energia de deformação devida ao cisalhamento. Por essa razão, a *energia de deformação por cisalhamento* das vigas geralmente é *desprezada*.

PROBLEMAS

14.1. Um material está submetido a um estado plano de tensões geral. Expressar a densidade da energia de deformação em termos das constantes elásticas E, G e ν e dos componentes de tensão σ_x, σ_y e τ_{xy}.

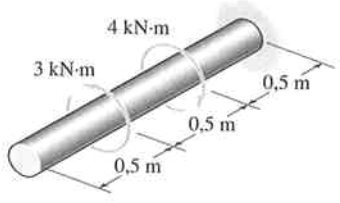


Problema 14.1

14.2. A densidade da energia de deformação deve ser a mesma quer o estado de tensão seja representado por σ_x, σ_y e τ_{xy}, quer pelas tensões principais σ_1 e σ_2. Deduzir as expressões da energia de deformação para cada um desses dois casos e mostrar que $G = E/[2(1 + \nu)]$.

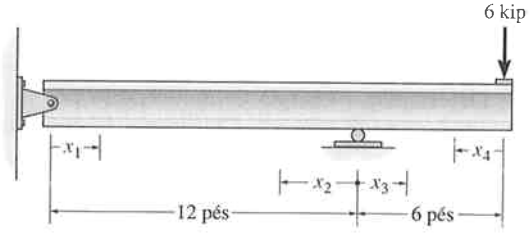
14.3. Se σ_x e σ_y forem aplicados a um elemento, para qual relação de σ_x para σ_y a energia de deformação será mínima?

***14.4.** Determinar a energia de deformação por torção no eixo de aço A-36 e raio de 30 mm.



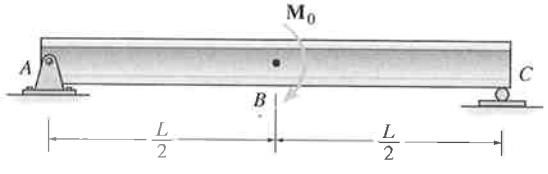
Problema 14.4

14.5. Determinar a energia de deformação por flexão na viga de aço estrutural A-36 construída com perfil W10 × 12. Obter a resposta usando as coordenadas (*a*) x_1 e x_4 e (*b*) x_2 e x_3.



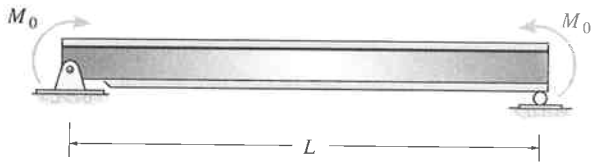
Problema 14.5

14.6. Determinar a energia de deformação por flexão na viga devida ao carregamento mostrado. Considerar EI constante.



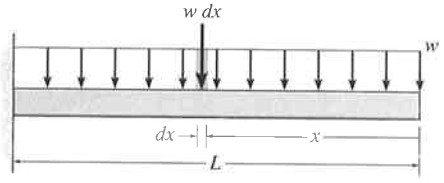
Problema 14.6

14.7. Determinar a energia de deformação por flexão na viga devida ao carregamento mostrado. Considerar EI constante.



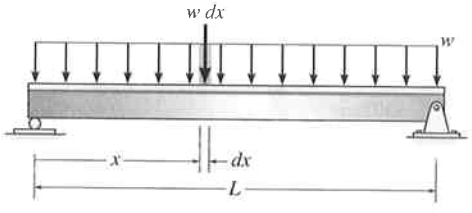
Problema 14.7

***14.8.** Determinar a energia de deformação por flexão na viga em balanço em virtude da carga uniforme w. Resolver o problema de duas maneiras. (*a*) Aplicar a Equação 14.7. (*b*) A carga $w\,dx$ que atua sobre o segmento dx da viga desloca-se uma distância y, onde $y = w(-x^4 + 4L^3x - 3L^4)/(24EI)$, a equação da linha elástica. Portanto, a energia de deformação interna no elemento infinitesimal dx da viga é igual ao trabalho externo, ou seja, $dU_i = \frac{1}{2}(w\,dx)(-y)$. Integrar essa equação para obter a energia de deformação total na viga. Considerar EI constante.



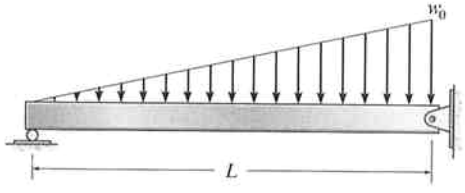
Problema 14.8

14.9. Determinar a energia de deformação por flexão na viga simplesmente apoiada, em virtude da carga uniforme w. Resolver o problema de duas maneiras. (*a*) Aplicar a Equação 14.7. (*b*) A carga $w\,dx$ que atua sobre o segmento dx da viga desloca-se uma distância y, onde $y = w(-x^4 + 2Lx^3 - L^3x)/(24EI)$, a equação da linha elástica. Portanto, a energia de deformação interna no elemento infinitesimal dx da viga é igual ao trabalho externo, ou seja, $dU_i = \frac{1}{2}(w\,dx)(-y)$. Integrar essa equação para obter a energia de deformação total na viga. Considerar EI constante.



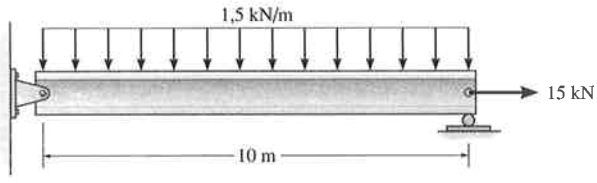
Problema 14.9

14.10. Determinar a energia de deformação por flexão na viga. Considerar EI constante.



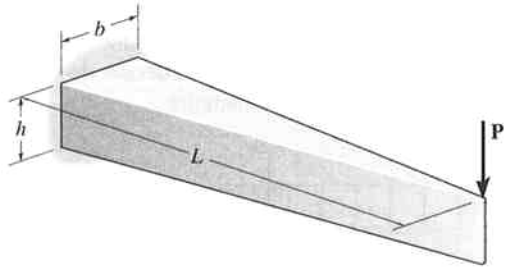
Problema 14.10

14.11. Determinar a energia de deformação total, axial e por flexão na viga de aço A-36. $A = 2.300\ \text{mm}^2$, $I = 9{,}5(10^6)\ \text{mm}^4$.



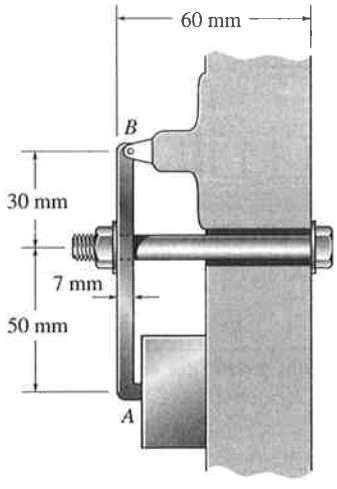
Problema 14.11

***14.12.** A viga possui seção variável ao longo de sua largura. Supondo que lhe seja aplicada a força **P** em uma extremidade, determinar a energia de deformação nela armazenada e comparar o resultado com o de uma viga que tenha seção transversal retangular constante, de largura b e altura h.



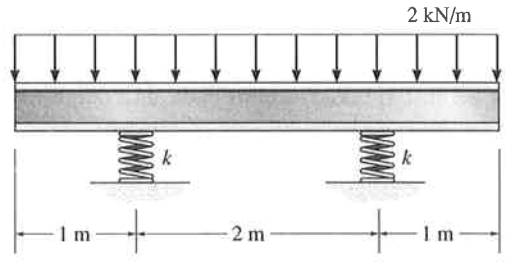
Problema 14.12

14.13. O parafuso tem diâmetro de 10 mm, enquanto o elo AB tem seção transversal retangular de 12 mm de largura por 7 mm de espessura. Determinar a energia de deformação no elo devida à flexão e no parafuso devida à força axial. O parafuso está apertado de modo que sofre uma tensão de 500 N. Ambos os elementos são feitos de aço A-36. Desprezar o furo do elo.



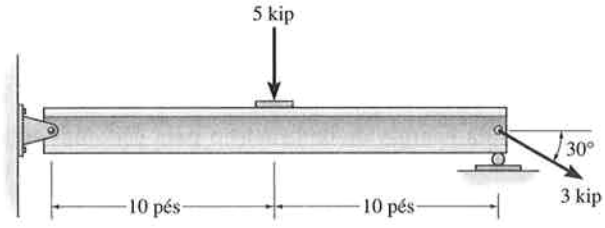
Problema 14.13

14.14. A viga de aço apóia-se em duas molas, cada uma com rigidez $k = 8\ \text{MN/m}$. Determinar a energia de deformação em cada mola e na viga. $E_{aço} = 200\ \text{GPa}$, $I = 5(10^6)\ \text{mm}^4$.



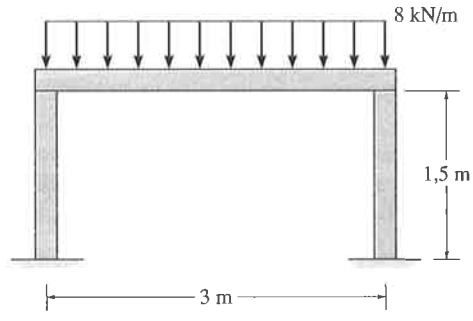
Problema 14.14

14.15. Determinar a energia de deformação total, axial e por flexão, na viga de aço estrutural A-36 construída com perfil W8 × 58.



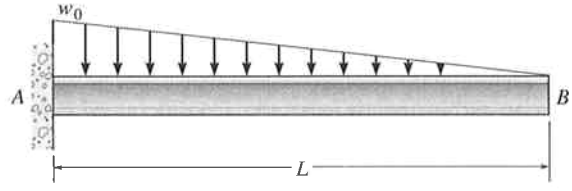
Problema 14.15

***14.16.** Determinar a energia de deformação por flexão na viga e a energia de deformação axial em cada um dos dois postes. Todos os elementos são feitos de alumínio e têm seção transversal quadrada de 50 mm por 50 mm. Supor que os postes suportam apenas uma carga axial. $E_{al} = 70\ \text{GPa}$.



Problema 14.16

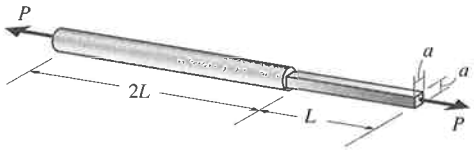
14.17. Determinar a energia de deformação por flexão na viga devida à carga distribuída. Considerar EI constante.



Problema 14.17

14.18. A barra de aço A-36 consiste em dois segmentos, um de seção transversal circular de raio r e outro de seção transversal quadrada. Supondo que esteja sujeita à carga axial P,

determinar a dimensão a do segmento quadrado, de modo que a energia de deformação nele armazenada seja a mesma do segmento circular.



Problema 14.18

14.19. Consideremos o tubo de paredes finas da Figura 5.30. Usar a fórmula da tensão de cisalhamento, $\tau_{méd} = T/2tA_m$ (Equação 5.18), e a equação geral da energia de deformação por cisalhamento (Equação 14.11), para mostrar que a torção do tubo é dada pela Equação 5.20. *Dica*: equacionar o trabalho realizado pelo torque T para a energia de deformação no tubo, determinada integrando-se à energia de deformação armazenada em um elemento infinitesimal (Figura 14.4), sobre todo o volume do material.

14.3 CONSERVAÇÃO DE ENERGIA

Todos os métodos de energia usados em mecânica baseiam-se no equilíbrio de energia, freqüentemente denominado conservação de energia. Neste capítulo, somente a energia mecânica será considerada nesse equilíbrio; ou seja, a energia desenvolvida por calor, reações químicas e efeitos eletromagnéticos será desprezada. Como resultado, se uma carga for aplicada *vagarosamente* a um corpo, de modo que a energia cinética também possa ser desprezada, então, fisicamente, as cargas externas tenderão a deformar esse corpo, realizando *trabalho externo* U_e à medida que se deslocam. Esse trabalho externo provocado pelas cargas transforma-se em *trabalho interno* ou energia de deformação U_i, que se armazena no corpo. Quando as cargas são removidas, a energia de deformação faz com que o corpo volte à posição inicial não-deformada, desde que o limite elástico do material não tenha sido excedido. Por tudo isso, a conservação de energia do corpo pode ser expressa matematicamente como:

$$\boxed{U_e = U_i} \tag{14.25}$$

Mostraremos três exemplos de como se aplica essa equação para determinar o deslocamento de um ponto em elementos ou estruturas deformáveis. Como primeiro exemplo, consideremos a treliça da Figura 14.18 submetida a uma carga **P** conhecida. Desde que **P** seja aplicada gradualmente, o trabalho externo por ela realizado será determinado pela Equação 14.2, ou seja, $U_e = \frac{1}{2}P\Delta$, onde Δ representa o deslocamento vertical da treliça no nó onde **P** é aplicada. Supondo que **P** desenvolva uma força axial **N** em um elemento particular, a energia de deformação armazenada nesse elemento será determinada pela Equação 14.16, isto é, $U_i = N^2L/2AE$. Somando as energias de deformação de todos os elementos da treliça, podemos escrever a Equação 14.25 como:

$$\frac{1}{2}P\Delta = \sum \frac{N^2L}{2AE} \tag{14.26}$$

Uma vez que todas as forças internas (N) de todos os elementos da treliça sejam determinadas e os termos da direita calculados, será então possível determinar o deslocamento Δ desconhecido.

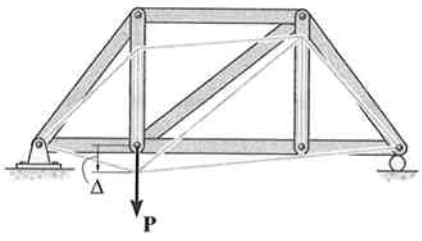


Figura 14.18

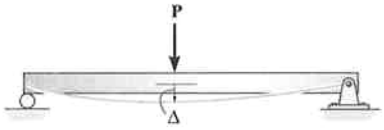


Figura 14.19

Como segundo exemplo, consideremos a determinação do deslocamento vertical Δ sob a carga conhecida **P**, que atua sobre a viga da Figura 14.19. Novamente, o trabalho externo é $U_e = \frac{1}{2}P\Delta$. Entretanto, nesse caso a energia de deformação é o resultado das cargas de cisalhamento interno e do momento provocados por **P**. Em particular, a contribuição da energia de deformação devida ao cisalhamento é *desprezada* na maioria dos problemas de deflexão de vigas, a menos que a viga seja curta e suporte uma carga muito grande. (Ver Exemplo 14.4.) Conseqüentemente, a energia de deformação será determinada apenas pelo momento fletor interno M e, portanto, a partir da Equação 14.17, a Equação 14.25 é escrita simbolicamente como:

$$\frac{1}{2}P\Delta = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}\,dx \tag{14.27}$$

Uma vez que M seja expresso em função da posição e a integral seja calculada, pode-se então determinar Δ.

Como último exemplo, consideraremos uma viga carregada com o momento (conjugado) $\mathbf{M}_0$ como mostra a Figura 14.20. Tal momento provoca o deslocamento por rotação θ no ponto em que é aplicado. Como o momento (conjugado) somente realiza trabalho quando *gira*, usando a Equação 14.5, temos que o trabalho externo é $U_e = \frac{1}{2}M_0\theta$. Portanto, a Equação 14.25 torna-se:

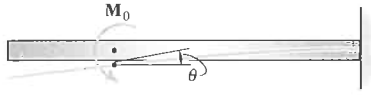


Figura 14.20

$$\frac{1}{2}M_0\theta = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}\,dx \tag{14.28}$$

Aqui a energia de deformação é determinada como resultado do momento fletor interno M provocado pela aplicação do momento (conjugado) $\mathbf{M}_0$. Uma vez que M tenha sido expresso em função de x e a energia de deformação tenha sido calculada, pode-se calcular θ.

Em todos os exemplos anteriores, observe que a aplicação da Equação 14.25 é *bastante limitada*, porque apenas uma *única* força externa ou momento (conjugado) pode atuar sobre o elemento ou a estrutura. Em outras palavras, o deslocamento pode ser calculado *apenas* no ponto e na direção da força externa ou do momento (conjugado). Se mais de uma força externa ou momento (conjugado) forem aplicados, o trabalho externo de cada carga envolverá seu deslocamento desconhecido. Como resultado, *nenhum* desses deslocamentos desconhecidos poderá ser determinado, visto que apenas uma única Equação 14.25 estará disponível para a solução. Embora a aplicação da conservação de energia, como descrita aqui, tenha essas restrições, serve como introdução aos métodos de energia mais gerais que consideraremos ao longo do capítulo. Especificamente, será mostrado que, modificando-se a maneira de aplicar o princípio da conservação de energia, poderemos realizar completamente a análise da deflexão geral de um elemento ou estrutura.

EXEMPLO 14.6

A treliça de três barras da Figura 14.21*a* está sujeita a uma força horizontal de 5 kip. Se a área da seção transversal de cada barra é de 0,20 pol^2, qual o deslocamento horizontal no ponto B? $E = 29(10^3)$ ksi.

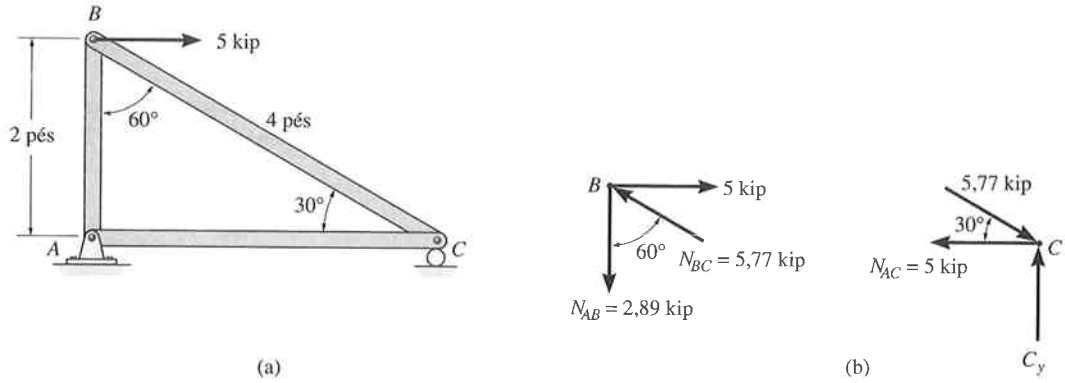


Figura 14.21

SOLUÇÃO

Podemos aplicar a conservação de energia para resolver este problema porque somente uma *única* força externa atua sobre a treliça e o deslocamento requerido ocorre na *mesma direção* da força. Além disso, as forças reativas sobre a treliça não realizam trabalho visto que não se deslocam.

Pelo método dos nós, a força em cada elemento é determinada como mostram os diagramas de corpo livre dos pinos em B e C (Figura 14.21*b*).

Aplicando a Equação 14.26, temos:

$$\frac{1}{2} P\Delta = \sum \frac{N^2 L}{2AE}$$

$$\frac{1}{2}(5 \text{ kip})(\Delta_B)_h = \frac{(2{,}89 \text{ kip})^2(2 \text{ pés})}{2AE} + \frac{(-5{,}77 \text{ kip})^2(4 \text{ pés})}{2AE}$$

$$+ \frac{(-5 \text{ kip})^2(3{,}46 \text{ pés})}{2AE}$$

$$(\Delta_B)_h = \frac{47{,}32 \text{ kip} \cdot \text{pés}}{AE}$$

Observe que, como N é elevado ao quadrado, não importa se o elemento em particular está sob tração ou compressão. Substituindo os dados numéricos para A e E e resolvendo, obtemos:

$$(\Delta_B)_h = \frac{47{,}32 \text{ kip} \cdot \text{pés}(12 \text{ pol/pé})}{(0{,}2 \text{ pol}^2)[29(10^3) \text{ kip/pol}^2]}$$

$$= 0{,}0979 \text{ pol} \rightarrow \qquad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 14.7

A viga em balanço da Figura 14.22*a* tem seção transversal retangular e está sujeita à carga **P** em uma extremidade. Determinar o deslocamento da carga. Considerar EI constante.

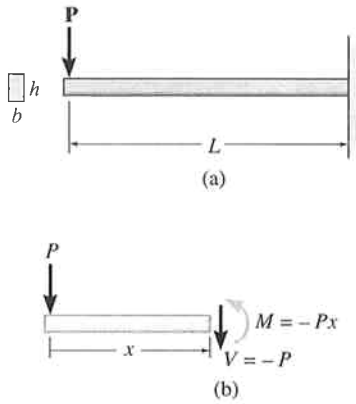


Figura 14.22

SOLUÇÃO

O cisalhamento interno e o momento na viga em função de x são determinados pelo método das seções (Figura 14.22*b*).

Ao aplicar a Equação 14.25, consideraremos a energia de deformação devida ao cisalhamento e à flexão. Usando as equações 14.19 e 14.17, temos:

$$\frac{1}{2}P\Delta = \int_0^L \frac{f_c V^2\,dx}{2GA} + \int_0^L \frac{M^2\,dx}{2EI}$$

$$= \int_0^L \frac{(\frac{6}{5})(-P)^2\,dx}{2GA} + \int_0^L \frac{(-Px)^2\,dx}{2EI} = \frac{3P^2L}{5GA} + \frac{P^2L^3}{6EI} \qquad (1)$$

O primeiro termo do lado direito dessa equação representa a energia de deformação devida ao cisalhamento, enquanto o segundo é a energia de deformação devida à flexão. Como dito no Exemplo 14.4, para a maioria das vigas a energia de deformação por cisalhamento é muito menor que a energia de deformação por flexão. Para provar que esse é o caso da viga mostrada na Figura 14.22, necessitamos que:

$$\frac{3}{5}\frac{P^2L}{GA} \overset{?}{<} \frac{P^2L^3}{6EI}$$

$$\frac{3}{5}\frac{P^2L}{G(bh)} \overset{?}{<} \frac{P^2L^3}{6E[\frac{1}{12}(bh^3)]}$$

$$\frac{3}{5G} \overset{?}{<} \frac{2L^2}{Eh^2}$$

Como $E \leq 3G$ (ver Exemplo 14.4), então:

$$0{,}9 \overset{?}{<} \left(\frac{L}{h}\right)^2$$

Assim, se h é pequeno e L relativamente longo (em comparação com h), a viga torna-se esbelta e a energia de deformação por cisalhamento pode ser desprezada. Em outras palavras, a *energia de deformação por cisalhamento* torna-se importante *somente* para *vigas curtas* e *altas*. Por exemplo: vigas nas quais $L = 5h$ têm 28 vezes mais energia de deformação por flexão que energia de deformação por cisalhamento; desse modo, desprezar a energia de deformação por cisalhamento representa um erro de cerca de 3,6%. Com isso em mente, a Equação 1 pode ser simplificada para:

$$\frac{1}{2}P\Delta = \frac{P^2L^3}{6EI}$$

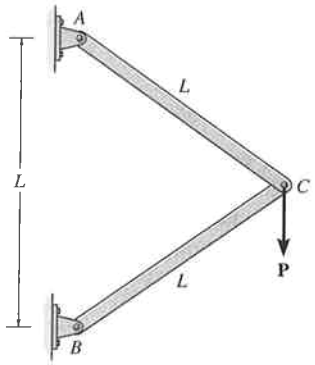
De modo que:

$$\Delta = \frac{PL^3}{3EI}$$

Resposta

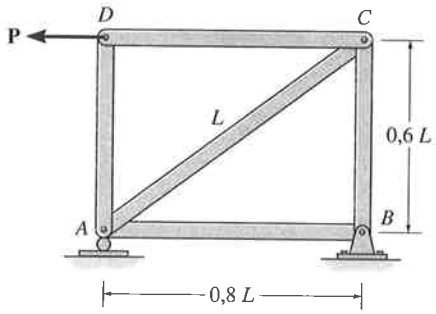
PROBLEMAS

***14.20.** Determinar o deslocamento vertical da articulação C. Considerar AE constante.



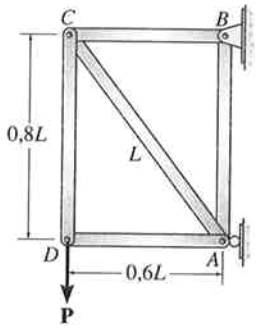
Problema 14.20

14.21. Determinar o deslocamento horizontal da articulação D. Considerar AE constante.



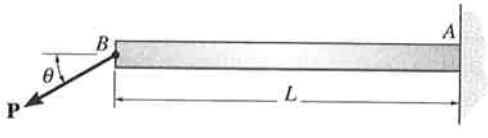
Problema 14.21

14.22. Determinar o deslocamento vertical da articulação D. Considerar AE constante.



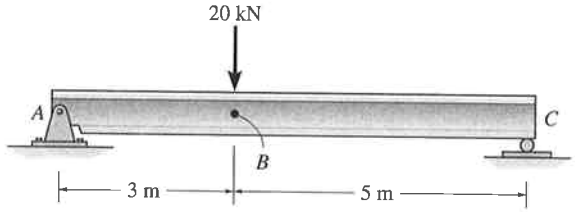
Problema 14.22

14.23. A viga em balanço tem área da seção transversal retangular A, momento de inércia I e módulo de elasticidade E. Supondo que a carga **P** atue no ponto B como mostrado, determinar o deslocamento em B na direção de **P**, considerando flexão, força axial e cisalhamento.



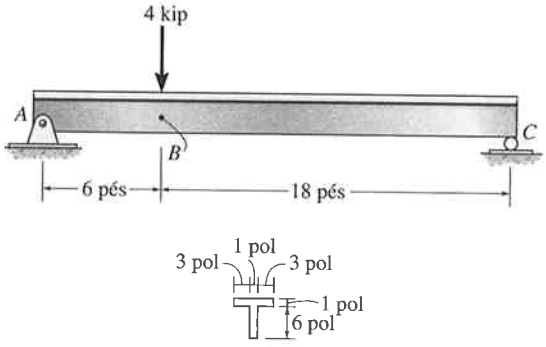
Problema 14.23

***14.24.** Determinar o deslocamento do ponto B na viga de aço A-36. $I = 80(10^6)$ mm^4.



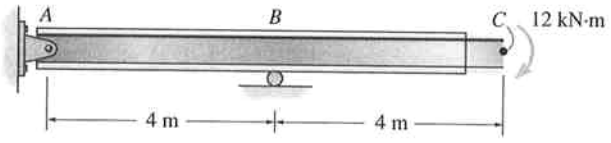
Problema 14.24

14.25. Determinar o deslocamento do ponto B na viga de alumínio 2014-T6.



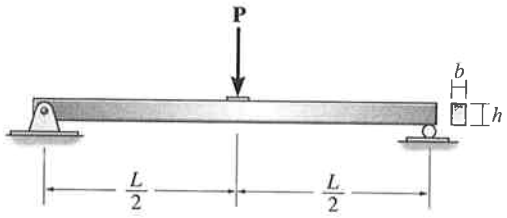
Problema 14.25

14.26. Determinar a inclinação do ponto C na viga de aço A-36. $I = 9{,}50(10^6)$ mm^4.



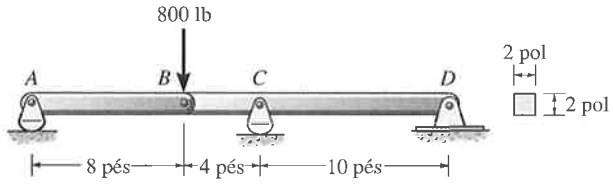
Problema 14.26

14.27. Determinar a deflexão da viga em seu ponto médio provocada por cisalhamento. O módulo de cisalhamento é G.



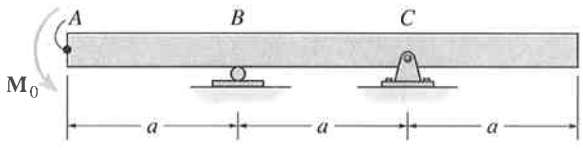
Problema 14.27

***14.28.** As barras de aço A-36 são acopladas por pino em B. Supondo que ambas tenham seção transversal quadrada, determinar o deslocamento vertical em B.



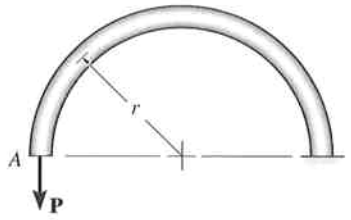
Problema 14.28

14.29. Determinar a inclinação no ponto A da viga. Considerar AE constante.



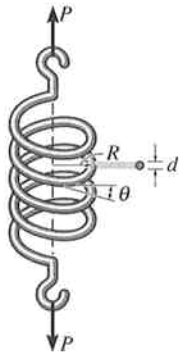
Problema 14.29

14.30. A haste tem seção transversal circular com momento de inércia I. Se a força vertical **P** é aplicada em A, qual o deslocamento vertical nesse ponto? Considerar apenas a energia de deformação devida à flexão. O módulo de elasticidade é E.



Problema 14.30

14.31. A mola em espiral tem n espirais e é feita de um material com módulo de cisalhamento G. Determinar seu esticamento quando ela está sujeita à carga **P**. Supor que as espirais estão próximas umas das outras, de modo que $\theta \approx 0°$ e a deflexão é provocada inteiramente pelo esforço de torção.



Problema 14.31

14.4 CARGA DE IMPACTO

Ao longo do texto temos considerado que todas as cargas são aplicadas a um corpo de maneira gradual, de tal modo que quando atingem um valor máximo permanecem constantes ou estáticas. Entretanto, algumas cargas são dinâmicas, ou seja, variam com o tempo. Um exemplo típico seria a colisão de objetos, situação que provoca a chamada carga de impacto. Especificamente, ocorre ***impacto*** quando um objeto atinge outro e, assim, forças intensas desenvolvem-se entre eles durante um período de tempo muito curto.

Se supormos que não haja perda de energia durante o impacto, podemos estudar sua mecânica usando a conservação de energia. Para mostrar como isso é feito, analisaremos primeiro o sistema bloco-mola mostrado na Figura 14.23. Quando o bloco é liberado do repouso, cai uma distância h, atingindo a mola e comprimindo-a uma distância $\Delta_{máx}$ antes de retornar ao repouso momentaneamente. Se desprezamos a massa da mola e supomos que ela responde *elasticamente*, então, segundo o princípio da conservação de energia, a energia do bloco em queda deve se transformar em energia (de deformação) armazenada na mola; ou, em outras palavras, o trabalho realizado pelo peso do bloco, caindo $h + \Delta_{máx}$, é igual ao trabalho necessário para deslocar a extremidade da mola uma quantidade $\Delta_{máx}$. Como a força na mola pode ser relacionada a

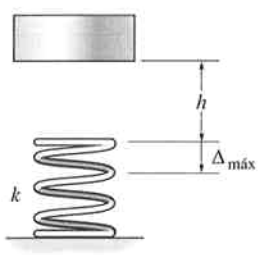


Figura 14.23

$\Delta_{máx}$ pela equação $F = k\Delta_{máx}$, onde k é a rigidez da mola, então, aplicando a conservação de energia e a Equação 14.2, temos:

$$U_e = U_i$$

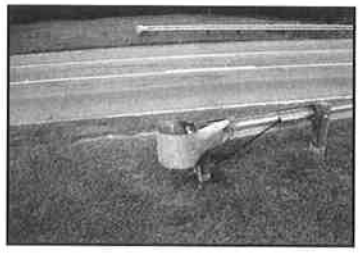
$$W(h + \Delta_{máx}) = \frac{1}{2}(k\Delta_{máx})\,\Delta_{máx}$$

$$W(h + \Delta_{máx}) = \frac{1}{2}k\Delta_{máx}^2 \tag{14.29}$$

$$\Delta_{máx}^2 - \frac{2W}{k}\Delta_{máx} - 2\left(\frac{W}{k}\right)h = 0$$

Essa equação quadrática pode ser resolvida para $\Delta_{máx}$. A raiz máxima é:

$$\Delta_{máx} = \frac{W}{k} + \sqrt{\left(\frac{W}{k}\right)^2 + 2\left(\frac{W}{k}\right)h}$$



Pretende-se que a carga de impacto dos veículos lentos seja absorvida por esta barreira.

Se o peso W for aplicado estaticamente (ou gradualmente) à mola, o deslocamento final desta será $\Delta_{est} = W/k$. Após essa simplificação, a equação acima torna-se:

$$\Delta_{máx} = \Delta_{est} + \sqrt{(\Delta_{est})^2 + 2\Delta_{est}h}$$

ou

$$\Delta_{máx} = \Delta_{est}\left[1 + \sqrt{1 + 2\left(\frac{h}{\Delta_{est}}\right)}\right] \tag{14.30}$$

Uma vez calculado $\Delta_{máx}$, a força máxima aplicada à mola é determinada por:

$$F_{máx} = k\Delta_{máx} \tag{14.31}$$

Note-se, no entanto, que essa força e o deslocamento a ela associado ocorrem somente por um *instante*. Desde que o bloco não rebata fora da mola, continuará a vibrar até que o movimento amortecido pare e o bloco assuma a posição estática (Δ_{est}). Observe também que, se ele for mantido logo acima da mola, $h = 0$, e *liberado*, então, pela Equação 14.30, seu deslocamento máximo será:

$$\Delta_{máx} = 2\Delta_{est}$$

Em outras palavras, quando o bloco é liberado do topo da mola (carga aplicada dinamicamente), seu deslocamento é o *dobro* do que seria se ele estivesse assentado sobre a mola (carga aplicada estaticamente).

Usando uma análise similar, também é possível determinar o deslocamento máximo da extremidade da mola se o bloco deslizar em uma superfície horizontal lisa com velocidade **v** conhecida, imediatamente antes de colidir com a mola (Figura 14.24). Nesse caso, a energia cinética do bloco,[2] $\frac{1}{2}(W/g)v^2$, transforma-se em energia armazenada na mola. Então,

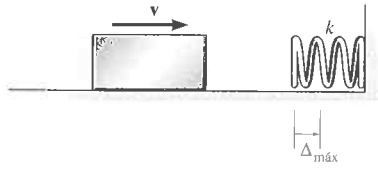


Figura 14.24

$$U_e = U_i$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{W}{g}\right)v^2 = \frac{1}{2}k\,\Delta_{máx}^2$$

$$\Delta_{máx} = \sqrt{\frac{Wv^2}{gk}} \tag{14.32}$$

[2] Lembrar que em física energia cinética é 'energia de movimento'. Na translação de um corpo ela é determinada por $\frac{1}{2}mv^2$, onde m é a massa do corpo, $m = W/g$.

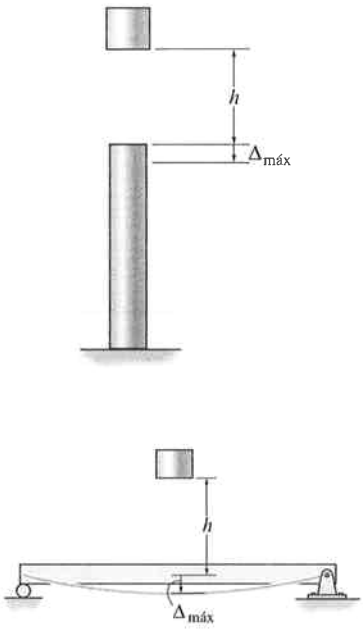
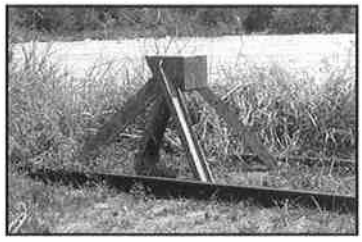


Figura 14.25



Os elementos deste barra de proteção são projetados para resistir a uma carga de impacto específica, a fim de impedir o movimento do vagão.

Como o deslocamento estático no topo da mola provocado pelo peso W que repousa sobre ela é $\Delta_{est} = W/k$, então:

$$\Delta_{máx} = \sqrt{\frac{\Delta_{est} v^2}{g}} \tag{14.33}$$

Os resultados dessa análise simplificada são usados para determinar tanto a deflexão aproximada como a tensão desenvolvida em um elemento deformável submetido a impacto. Para tanto, é necessário estabelecer as hipóteses relativas à colisão, de modo que o comportamento dos corpos em colisão seja semelhante à resposta dos modelos bloco-mola discutidos antes. Consideraremos, portanto, que o corpo em movimento seja *rígido* como o bloco e o corpo estacionário deformável como a mola. Suporemos, também, que o material comporta-se de maneira linear-elástica. Além disso, durante a colisão não há perda de energia em virtude de calor, ruído ou deformações plásticas localizadas. Quando ocorre a colisão, os corpos permanecem em contato até que o corpo elástico atinja sua deformação máxima, e durante o movimento a inércia ou massa do corpo elástico é desprezada. Entenda-se que todas essas hipóteses levarão a uma estimativa *conservadora* da tensão e da deflexão do corpo elástico. Em outras palavras, seus valores serão maiores que os reais.

Alguns exemplos de quando a teoria apresentada pode ser aplicada são mostrados na Figura 14.25. Aqui, um peso conhecido (bloco) é lançado sobre um poste ou uma viga, provocando uma quantidade máxima de deformação $\Delta_{máx}$. A energia do bloco em queda transforma-se momentaneamente em energia de deformação axial no poste e em energia de deformação por flexão na viga.[3] Apesar de surgirem vibrações em cada elemento após o impacto, elas tendem a dissipar-se com o passar do tempo. A fim de determinar a deformação $\Delta_{máx}$ poderíamos usar a mesma abordagem do sistema bloco-mola, ou seja, escrever a equação da conservação de energia para o bloco-poste ou bloco-viga e depois resolver para $\Delta_{máx}$. Entretanto, podemos resolver esses problemas de maneira mais direta modelando o poste e a viga com uma *mola equivalente*. Por exemplo: se uma força **P** desloca o topo do poste $\Delta = PL/AE$, então a mola com rigidez $k = AE/L$ será deslocada a mesma quantidade por **P**, isto é, $\Delta = P/k$. De maneira semelhante, pelo Apêndice C, uma força **P** aplicada no centro de uma viga simplesmente apoiada desloca o centro $\Delta = PL^3/48EI$ e, portanto, a mola equivalente teria rigidez $k = 48EI/L^3$. Entretanto, não é necessário determinar, na verdade, a rigidez da mola equivalente para aplicar a Equação 14.30 ou a 14.32. É necessário apenas determinar o deslocamento dinâmico, $\Delta_{máx}$, para calcular o *deslocamento estático*, Δ_{est}, devido ao peso W do bloco que repousa sobre o membro.

Uma vez determinado $\Delta_{máx}$, calcula-se a força dinâmica máxima $P_{máx} = k\Delta_{máx}$. Se considerarmos $P_{máx}$ como uma *força estática equivalente*, determinaremos a tensão máxima no elemento por meio da estática e da teoria de resistência dos materiais. Lembre-se, ainda, que essa tensão atua apenas por um *instante*. Na realidade, ondas de vibração passam através do material e a tensão no poste ou na viga, por exemplo, não permanece constante.

A relação entre a carga estática equivalente $P_{máx}$ e a carga W é denominada *fator de impacto*, n. Como $P_{máx} = k\Delta_{máx}$ e $W = k\Delta_{est}$, então, pela Equação 14.30, podemos expressar tal fator como:

$$n = 1 + \sqrt{1 + 2\left(\frac{h}{\Delta_{est}}\right)} \tag{14.34}$$

[3] A energia de deformação devida ao cisalhamento é desprezada pelas razões discutidas no Exemplo 14.4.

Esse fator representa o aumento da carga aplicada estaticamente para que possa ser tratada de maneira dinâmica. A partir da Equação 14.34, n é calculado para qualquer elemento que tenha relação linear entre carga e deflexão. Em um sistema complexo de elementos acoplados, no entanto, os fatores de impacto são determinados pela experiência ou por testes experimentais. Uma vez determinado n, a tensão dinâmica e as deflexões são encontradas facilmente pela tensão estática σ_{est} e pela deflexão estática Δ_{est} provocadas pela carga W, isto é, $\sigma_{máx} = n\sigma_{est}$ e $\Delta_{máx} = n\Delta_{est}$.

PONTOS IMPORTANTES

- Ocorre *impacto* quando uma grande força se desenvolve entre dois objetos que batem um no outro durante um período de tempo curto.
- Podemos analisar os efeitos do impacto supondo que o corpo em movimento é rígido, o material do corpo estacionário é linear-elástico, não há perda de energia na colisão, os corpos permanecem em contato durante a colisão e a inércia do corpo elástico é desprezível.
- A carga dinâmica em um corpo é tratada como carga estaticamente aplicada multiplicando a carga estática por um *fator de amplificação*.

EXEMPLO 14.8

O tubo de alumínio mostrado na Figura 14.26 é usado para suportar uma carga de 150 kip. Determinar o deslocamento máximo em seu topo supondo que a carga seja (*a*) aplicada gradualmente e (*b*) aplicada subitamente, sendo solta sobre o topo do tubo de uma altura $h = 0$. Adotar $E_{al} = 10(10^3)$ ksi e considerar que o alumínio comporta-se elasticamente.

SOLUÇÃO

Parte (a). Quando a carga é aplicada gradualmente, o trabalho realizado pelo peso transforma-se em energia de deformação elástica no tubo. Aplicando a conservação de energia, temos:

$$U_e = U_i$$

$$\frac{1}{2} W\Delta_{est} = \frac{W^2 L}{2AE}$$

$$\Delta_{est} = \frac{WL}{AE} = \frac{150 \text{ kip}(12 \text{ pol})}{\pi[(3 \text{ pol})^2 - (2{,}5 \text{ pol})^2]10(10^3) \text{ kip/pol}^2}$$

$$= 0{,}02083 \text{ pol} = 0{,}0208 \text{ pol} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

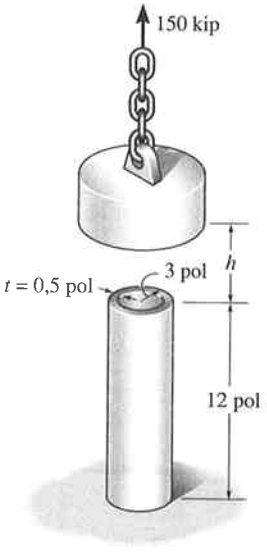


Figura 14.26

Parte (b). Aqui podemos aplicar a Equação 14.30, com $h = 0$. Então:

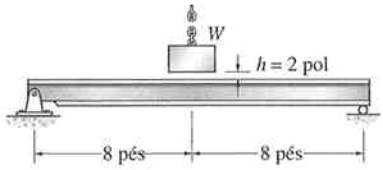
$$\Delta_{máx} = \Delta_{est}\left[1 + \sqrt{1 + 2\left(\frac{h}{\Delta_{est}}\right)}\right]$$

$$= 2\Delta_{est} = 2(0{,}02083 \text{ pol})$$

$$= 0{,}0417 \text{ pol} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Portanto, o deslocamento do peso é duas vezes maior do que quando a carga é aplicada estaticamente. Em outras palavras, o fator de impacto é $n = 2$ (Equação 14.34).

EXEMPLO 14.9



(a)

A viga de aço A-36 mostrada na Figura 14.27*a* é construída com perfil W10 × 39. Determinar a tensão de flexão máxima na viga e sua deflexão máxima supondo que o peso $W = 1{,}50$ kip seja solto de uma altura $h = 2$ pol sobre ela. $E_{aço} = 29(10^3)$ ksi.

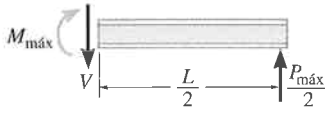
SOLUÇÃO I

Vamos aplicar a Equação 14.30. Antes, porém, devemos calcular Δ_{est}. Usando a tabela do Apêndice C e os dados do Apêndice B para as propriedades do perfil W10 × 39, temos:

$$\Delta_{est} = \frac{WL^3}{48EI} = \frac{1{,}50 \text{ kip}(16 \text{ pés})^3(12 \text{ pol/pé})^3}{48[29(10^3) \text{ ksi}](209 \text{ pol}^4)} = 0{,}0365 \text{ pol}$$

$$\Delta_{máx} = \Delta_{est}\left[1 + \sqrt{1 + 2\left(\frac{h}{\Delta_{est}}\right)}\right]$$

$$= 0{,}0365 \text{ pol}\left[1 + \sqrt{1 + 2\left(\frac{2 \text{ pol}}{0{,}0365 \text{ pol}}\right)}\right] = 0{,}420 \text{ pol} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$



(b)

Figura 14.27

Essa deflexão é provocada por uma carga estática equivalente $P_{máx}$, determinada por $P_{máx} = (48EI/L^3)\Delta_{máx}$.

O momento interno provocado por essa carga é máximo no centro da viga e, pelo método das seções (Figura 14.27*b*), $M_{máx} = P_{máx}L/4$. Aplicando a fórmula da flexão para determinar a tensão de flexão, temos:

$$\sigma_{máx} = \frac{M_{máx}c}{I} = \frac{P_{máx}Lc}{4I} = \frac{12E\Delta_{máx}c}{L^2}$$

$$= \frac{12[29(10^3) \text{ kip/pol}^2](0{,}420 \text{ pol})(9{,}92 \text{ pol}/2)}{(16 \text{ pés})^2(12 \text{ pol/pé})^2} = 19{,}7 \text{ ksi} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

SOLUÇÃO II

Também é possível obter a deflexão dinâmica ou máxima $\Delta_{máx}$ pelos primeiros princípios. O trabalho externo do peso em queda W é $U_e = W(h + \Delta_{máx})$. Como a viga deflete-se $\Delta_{máx}$ e $P_{máx} = 48EI\Delta_{máx}/L^3$, então:

$$U_e = U_i$$

$$W(h + \Delta_{máx}) = \frac{1}{2}\left(\frac{48EI\Delta_{máx}}{L^3}\right)\Delta_{máx}$$

$$(1{,}50 \text{ kip})(2 \text{ pol} + \Delta_{máx}) = \frac{1}{2}\left[\frac{48[29(10^3) \text{ kip/pol}^2]209 \text{ pol}^4}{(16 \text{ pés})^3(12 \text{ pol/pé})^3}\right]\Delta_{máx}^2$$

$$20{,}55\Delta_{máx}^2 - 1{,}50\Delta_{máx} - 3{,}00 = 0$$

Resolvendo e escolhendo a raiz positiva, temos:

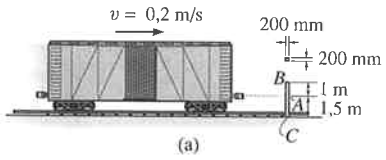
$$\Delta_{máx} = 0{,}420 \text{ pol} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

EXEMPLO 14.10

Suponhamos que um vagão ferroviário rígido e com massa de 80 Mg move-se para a frente com velocidade $v = 0{,}2$ m/s, até que atinge um poste de aço de 200 mm por 200 mm em A (Figura 14.28*a*). Se o poste está engastado no

solo em C, qual o deslocamento horizontal máximo de seu topo B devido ao impacto? Adotar $E_{aço} = 200$ GPa.

SOLUÇÃO



Nesse caso, a energia cinética do vagão ferroviário transforma-se em energia de deformação por flexão interna na região AC do poste. Supondo que o ponto A desloque-se $(\Delta_A)_{máx}$, podemos determinar a força $P_{máx}$ que provoca o deslocamento pela tabela do Apêndice C. Temos:

$$P_{máx} = \frac{3EI(\Delta_A)_{máx}}{L_{AC}^3} \tag{1}$$

$$U_e = U_i; \quad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}P_{máx}(\Delta_A)_{máx}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{3EI}{L_{AC}^3}(\Delta_A)^2_{máx}; \quad (\Delta_A)_{máx} = \sqrt{\frac{mv^2 L_{AC}^3}{3EI}}$$

Substituindo os valores numéricos, temos:

$$(\Delta_A)_{máx} = \sqrt{\frac{80(10^3)\text{ kg}(0{,}2\text{ m/s})^2(1{,}5\text{ m})^3}{3[200(10^9)\text{ N/m}^2][\frac{1}{12}(0{,}2\text{ m})^4]}} = 0{,}0116\text{ m} = 11{,}6\text{ mm}$$

Usando a Equação 1, concluímos que a força $P_{máx}$ é, portanto,

$$P_{máx} = \frac{3[200(10^9)\text{ N/m}^2][\frac{1}{12}(0{,}2\text{ m})^4](0{,}0116\text{ m})}{(1{,}5\text{ m})^3} = 275{,}4\text{ kN}$$

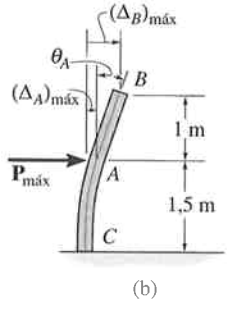


Figura 14.28

Em relação à Figura 14.28*b*, o segmento AB do poste permanece reto. Para determinar o deslocamento máximo em B, devemos primeiro descobrir a inclinação em A. Usando a fórmula apropriada da tabela do Apêndice C para determinar θ_A, temos:

$$\theta_A = \frac{P_{máx}L_{AC}^2}{2EI} = \frac{275{,}4(10^3)\text{ N }(1{,}5\text{ m})^2}{2[200(10^9)\text{ N/m}^2][\frac{1}{12}\ (0{,}2\text{ m})^4]} = 0{,}01162\text{ rad}$$

O deslocamento máximo em B é, então:

$$(\Delta_B)_{máx} = (\Delta_A)_{máx} + \theta_A L_{AB}$$

$$= 11{,}62\text{ mm} + (0{,}01162\text{ rad})\ 1(10^3)\text{ mm} = 23{,}2\text{ mm} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

PROBLEMAS

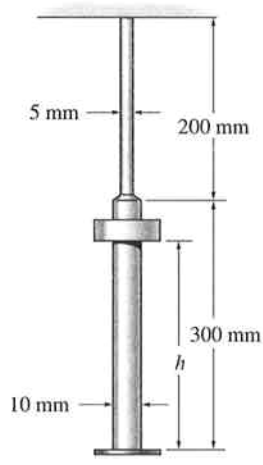
***14.32.** Uma barra tem 8 pés de comprimento e diâmetro de 0,5 pol. Supondo que seja usada para absorver a energia sob tração de uma carga de impacto, determinar a quantidade total de energia elástica que ela pode absorver se for feita de latão C83400.

14.33. Resolver o Problema 14.32 supondo que a barra seja feita de alumínio 2014-T6.

14.34. Determinar o diâmetro que uma barra de latão C83400, com 8 pés de comprimento, deve ter se usada para absorver 800 pés · lb de energia sob tração, provocada por uma carga de impacto. Não ocorre escoamento.

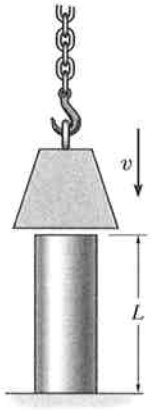
14.35. A barra de alumínio compõe-se de dois segmentos com diâmetros de 5 mm e 10 mm. Determinar a tensão axial máxima nela desenvolvida se o colar de 5 kg for lançado de uma altura $h = 100$ mm. $E_{al} = 70$ GPa, $\sigma_E = 410$ MPa.

***14.36.** A barra de alumínio compõe-se de dois segmentos com diâmetros de 5 mm e 10 mm. Determinar a altura máxima h da qual o colar de 5 kg deve ser lançado para que produza uma tensão axial máxima $\sigma_{máx} = 300$ MPa. $E_{al} = 70$ GPa, $\sigma_E = 410$ MPa.



Problemas 14.35/14.36

14.37. Determinar a velocidade v da massa de 50 mg quando ela se encontra logo acima do topo do poste de aço se, após o impacto, a tensão máxima desenvolvida no poste for 550 MPa. O poste tem comprimento $L = 1$ m e área da seção transversal de 0,01 m^2. $E_{aço} = 200$ GPa, $\sigma_E = 600$ MPa.

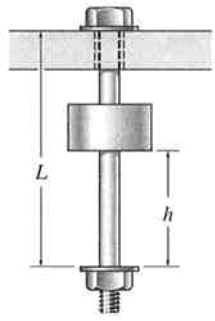


Problema 14.37

14.38. O parafuso de aço A-36 precisa absorver a energia da massa de 2 kg que cai, a partir do repouso, de uma altura $h = 30$ mm. Se seu diâmetro é de 4 mm, qual comprimento L ele deve ter para que a tensão nele desenvolvida não exceda 150 MPa?

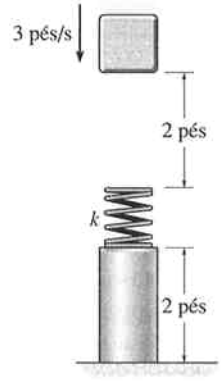
14.39. O parafuso de aço A-36 precisa absorver a energia da massa de 2 kg que cai, a partir do repouso, de uma altura $h = 30$ mm. Se ele tem diâmetro de 4 mm e comprimento $L = 200$ mm, a tensão nele desenvolvida excederá 175 MPa?

***14.40.** O parafuso de aço A-36 precisa absorver a energia da massa de 2 kg que cai, a partir do repouso, ao longo do comprimento $L = 150$ mm do corpo do parafuso, que tem 4 mm de diâmetro. Determinar a altura máxima h da queda de modo que a tensão no parafuso não exceda 150 MPa.



Problemas 14.38/14.39/14.40

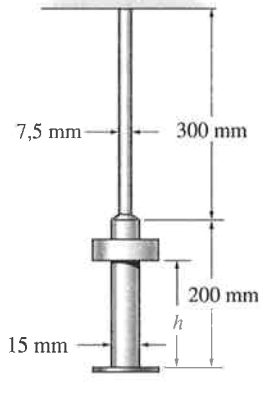
14.41. O peso de 50 lb cai com velocidade de 3 pés/s no instante em que está 2 pés acima do conjunto mola-poste. Determinar a tensão máxima no poste se a mola tem rigidez $k = 200$ kip/pol. O poste tem diâmetro de 3 pol e módulo de elasticidade $E = 6{,}80(10^3)$ ksi. Supor que o material não escoe.



Problema 14.41

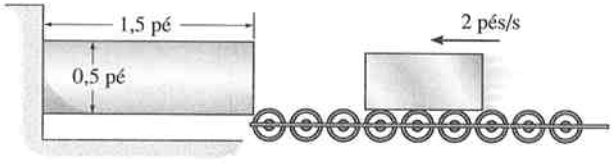
14.42. A barra de alumínio 2014-T6 compõe-se de dois segmentos com diâmetros de 7,5 mm e 15 mm. Determinar a tensão axial máxima nela desenvolvida supondo que o colar de 10 kg é lançado de uma altura $h = 100$ mm.

14.43. A barra de alumínio 2014-T6 compõe-se de dois segmentos com diâmetros de 7,5 mm e 15 mm. Determinar a altura máxima h da qual o colar de 10 kg deve ser lançado para que produza na barra uma tensão axial máxima para $\sigma_{máx} = 300$ MPa.



Problemas 14.42/14.43

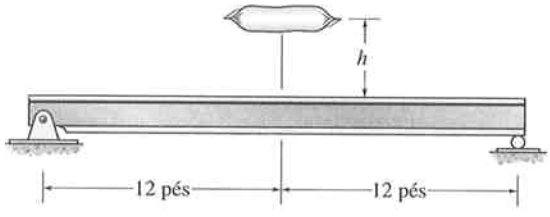
*14.44. O cilindro com as dimensões mostradas é feito de magnésio Am 1004-T61. Supondo que seja atingido por um bloco maciço com peso de 800 lb e que se movimenta a 2 pés/s, determinar a tensão máxima nele desenvolvida. Desprezar a massa do cilindro.



Problema 14.44

14.45. O saco de cimento tem peso de 90 lb. Se for lançado, a partir do repouso, de uma altura $h = 4$ pés sobre o centro da viga construída com perfil W10 × 39, feita de aço estrutural A-36, qual será a tensão de flexão máxima desenvolvida na viga em virtude do impacto? Além disso, qual é o fator de impacto?

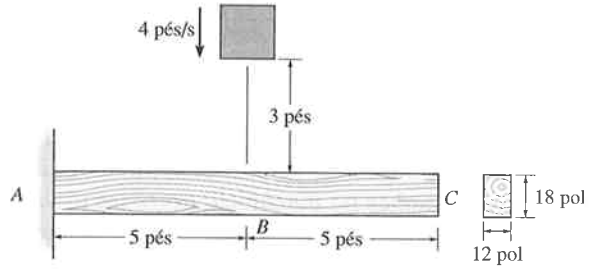
14.46. O saco de cimento tem peso de 90 lb. Determinar a altura máxima h da qual pode ser lançado, a partir do repouso, sobre o centro da viga construída com perfil W10 × 39, feita de aço estrutural A-36, de modo que a tensão de flexão máxima devida ao impacto não exceda 30 ksi.



Problemas 14.45/14.46

14.47. O bloco de 200 lb tem velocidade de descida de 4 pés/s quando está a 3 pés da parte superior da viga de madeira. Determinar a tensão máxima na viga devida ao impacto e calcular a deflexão máxima de sua extremidade C. $E_{mad} = 1{,}9(10^3)$ ksi, $\sigma_E = 6$ ksi.

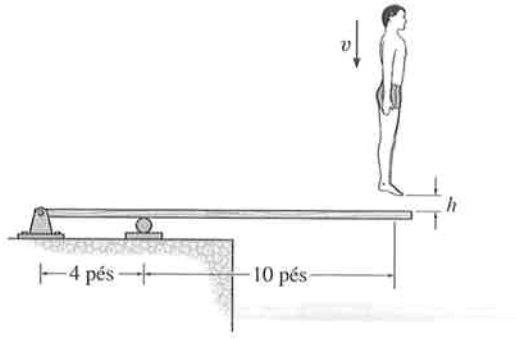
*14.48. O bloco de 100 lb tem velocidade de descida de 4 pés/s quando está a 3 pés da parte superior da viga de madeira. Determinar a tensão máxima na viga devido ao impacto e calcular a deflexão máxima no ponto B. $E_{mad} = 1{,}9(10^3)$ ksi, $\sigma_E = 8$ ksi.



Problemas 14.47/14.48

14.49. O mergulhador pesa 150 lb. Mantendo-se rígido, atinge a extremidade do trampolim de madeira com velocidade de descida de 4 pés/s quando $h = 0$. Determinar a tensão de flexão máxima desenvolvida na tábua, que tem espessura de 1,5 pol e largura de 1,5 pé. $E_{mad} = 1{,}8(10^3)$ ksi. Supor que o material não escoe.

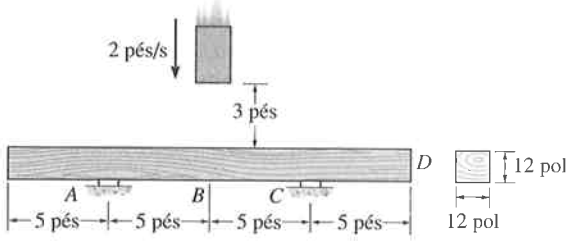
14.50. O mergulhador pesa 150 lb. Mantendo-se rígido, atinge a extremidade do trampolim de madeira. Determinar a altura máxima h que ele pode pular sobre a tábua de modo que a tensão de flexão máxima na madeira não exceda 6 ksi. A tábua tem espessura de 1,5 pol e largura de 1,5 pé. $E_{mad} = 1{,}8(10^3)$ ksi.



Problemas 14.49/14.50

14.51. O bloco de 75 lb tem velocidade de descida de 2 pés/s quando está a 3 pés da parte superior da viga de madeira. Determinar a tensão de flexão máxima na viga devida ao impacto e calcular a deflexão máxima na extremidade D. $E_{mad} = 1{,}9(10^3)$ ksi. Supor que o material não escoe.

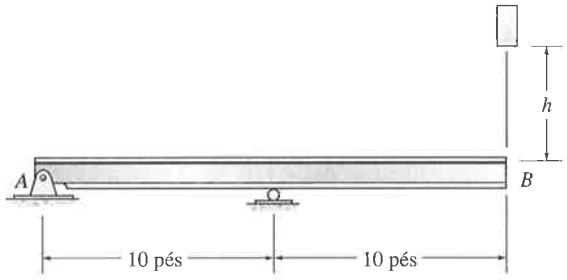
*14.52. O bloco de 75 lb tem velocidade de descida de 2 pés/s quando está a 3 pés da parte superior da viga de madeira. Determinar a tensão de flexão máxima na viga devida ao impacto e calcular a deflexão máxima do ponto B. $E_{mad} = 1{,}9(10^3)$ ksi.



Problemas 14.51/14.52

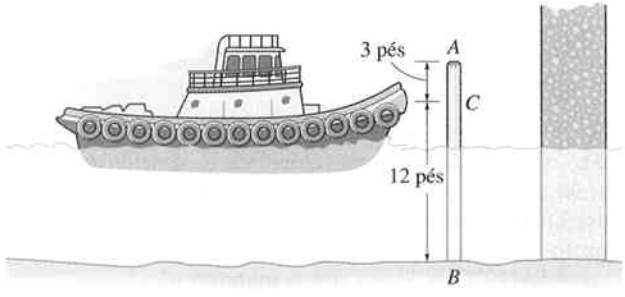
14.53. Determinar a altura máxima h da qual um peso de 80 lb pode ser lançado sobre a extremidade da viga de aço A-36 construída com perfil W6 × 12, sem exceder a tensão elástica máxima.

14.54. O peso de 80 lb é lançado, a partir do repouso, de uma altura h de 4 pés sobre a extremidade da viga de aço A-36 construída com perfil W6 × 12. Determinar a tensão de flexão máxima desenvolvida na viga.



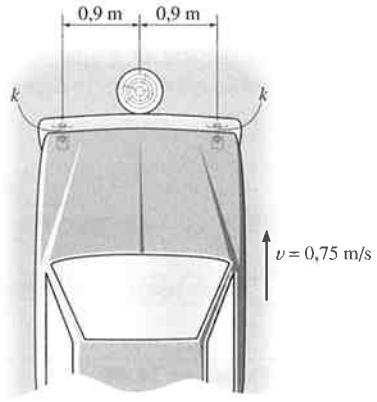
Problemas 14.53/14.54

14.55. O rebocador tem peso de 120.000 lb e navega a 2 pés/s quando atinge o poste de proteção AB, com 12 pol de diâmetro, usado para proteger o pilar de uma ponte. Supondo que o poste seja feito de pinho do norte tratado e esteja engastado no leito do rio, determinar a distância horizontal máxima que seu topo move-se devido ao impacto. Supor, também, que o rebocador seja maciço e desprezar o efeito da água.



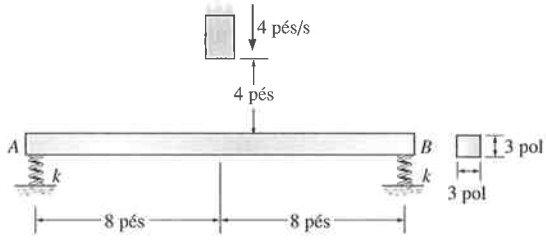
Problema 14.55

***14.56.** O pára-choque do carro é feito de policarbonato e polibutileno tereftalato. Se E = 2,0 GPa, determinar sua deflexão máxima e a tensão máxima nele desenvolvida se ele atingir um poste maciço quando o carro estaciona com v = 0,75 m/s. O carro tem massa de 1,80 mg e o pára-choque é considerado simplesmente apoiado nos dois apoios de mola acoplados ao chassi rígido do carro. Adotar para o pára-choque $I = 300(10^6)$ mm^4, c = 75 mm, σ_E = 30 MPa e k = 1,5 MN/m.



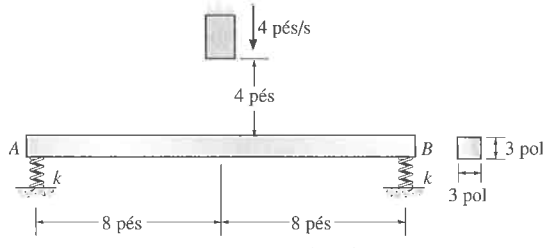
Problema 14.56

14.57. O peso de 150 lb tem velocidade de 4 pés/s a uma altura de 4 pés do topo da viga, feita de aço A-36. Determinar a deflexão máxima e a tensão de flexão máxima na viga se as molas de apoio em A e B tiverem, cada uma, rigidez k = 500 lb/pol.



Problema 14.57

14.58. O peso de 150 lb tem velocidade de 4 pés/s a uma altura de 4 pés do topo da viga, feita de aço A-36. Determinar o fator de carga n se as molas de apoio em A e B tiverem, cada uma, rigidez k = 300 lb/pol.



Problema 14.58

*14.5 PRINCÍPIO DO TRABALHO VIRTUAL

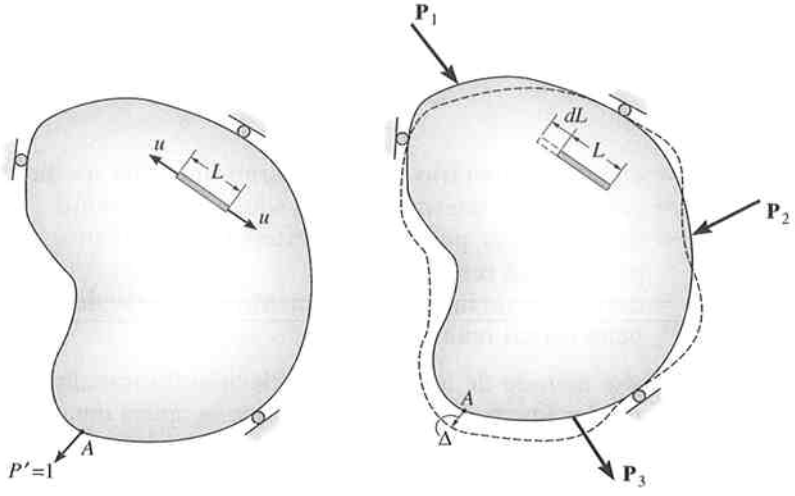
O princípio do trabalho virtual foi desenvolvido por John Bernoulli em 1717 e, como outros métodos de análise, baseia-se na conservação de energia. Apesar de tal princípio ter muitas aplicações na mecânica, neste texto vamos usá-lo apenas para obter o deslocamento e a inclinação em vários pontos de um corpo deformável. Antes, entretanto, precisamos fazer algumas observações preliminares que se aplicam ao desenvolvimento desse método.

Quando um corpo é impedido de se mover, é necessário que as cargas satisfaçam as condições de equilíbrio e que os deslocamentos satisfaçam as condições de compatibilidade. Especificamente, as *condições de equilíbrio* exigem que as cargas externas estejam relacionadas às cargas internas de maneira única, e as *condições de compatibilidade* requerem que os deslocamentos externos estejam relacionados às deformações internas também de maneira única. Por exemplo: se considerarmos um corpo deformável de qualquer formato ou tamanho e aplicarmos a ele uma série de cargas externas **P**, elas provocarão cargas internas u no interior desse corpo. Nesse caso, as cargas externas e internas estarão relacionadas pelas equações de equilíbrio. Além do mais, como o corpo é deformável, as cargas externas serão deslocadas Δ e as cargas internas sofrerão deslocamentos δ. Em geral, o material *não* tem de se comportar elasticamente e, assim, os deslocamentos podem *não* ter relação com as cargas. Entretanto, se os deslocamentos externos forem conhecidos, os deslocamentos internos correspondentes serão definidos de maneira única, visto que o corpo será contínuo. Para esse caso, a conservação de energia diz que:

$$U_e = U_i; \qquad \Sigma P \Delta = \Sigma u \delta \tag{14.35}$$

Baseados nesse princípio, desenvolveremos o princípio do trabalho virtual, de modo que possa ser usado para determinar o deslocamento e a inclinação em *qualquer ponto* do corpo. Para tanto, consideraremos que o corpo tem forma arbitrária, como mostra a Figura 14.29*b*, e está submetido às cargas 'reais' $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ e $\mathbf{P}_3$. Deve-se compreender que essas cargas não provocam movimento dos apoios; entretanto, em geral, podem deformar o material *além* do limite elástico. Suponhamos que essa condição seja necessária para determinar o deslocamento Δ do ponto A do corpo provocado pelas cargas. Para tal, consideraremos a aplicação do princípio da conservação de energia (Equação 14.35). Nesse caso, entretanto, nenhuma força atua em A e, desse modo, o deslocamento desconhecido Δ *não* será incluído na equação como 'termo do trabalho' externo.

A fim de contornar essa limitação, incluiremos uma força $\mathbf{P}'$ *imaginária* ou 'virtual' no ponto A do corpo, a qual atuará na *mesma direção* que Δ. Além disso, essa carga será aplicada ao corpo *antes* das cargas reais (Figura 14.29*a*). Por conveniência, esclarecida mais adiante, faremos com que $\mathbf{P}'$ tenha intensidade 'unitária'; isto é, $P' = 1$. Saliente-se que o termo '***virtual***' é usado para descrever a carga porque ela é *imaginária*, não existe como parte da carga



Aplicação de carga unitária virtual
(a)

Aplicação de cargas reais
(b)

Figura 14.29

real. Entretanto, essa carga virtual externa não cria uma carga virtual interna **u** em um elemento ou fibra representativos do corpo, como mostra a Figura 14.29*a*. Como esperado, P' e u podem ser relacionados pelas equações de equilíbrio. Além disso, devido a P' e u, o corpo e o elemento sofrem deslocamento virtual, apesar de *não* nos preocuparmos com suas intensidades. Uma vez aplicada a carga virtual e o corpo seja *então* submetido às *cargas reais* $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ e $\mathbf{P}_3$, o ponto A vai se deslocar uma quantidade real Δ, que provocará o deslocamento dL do elemento (Figura 14.29*b*). O resultado é que a força virtual externa $\mathbf{P}'$ e a carga virtual interna **u** 'deslocam-se juntas' Δ e dL, respectivamente; por conseguinte, essas cargas realizam o *trabalho virtual externo* $1 \cdot \Delta$ sobre o corpo e o *trabalho virtual interno* $u \cdot dL$ sobre o elemento. Considerando *apenas* a conservação da energia *virtual*, o trabalho virtual externo é igual ao trabalho virtual interno realizado em todos os elementos do corpo. Portanto, podemos escrever a equação do trabalho virtual como:

$$\underbrace{1 \cdot \Delta}_{\text{cargas virtuais}} = \underbrace{\Sigma u \cdot dL}_{\text{deslocamentos reais}} \tag{14.36}$$

Onde:

$P' = 1$ = carga unitária virtual externa que atua na direção de Δ
u = carga virtual interna que atua sobre o elemento
Δ = deslocamento externo provocado pelas cargas reais
dL = deslocamento interno do elemento na direção de **u**, provocado pelas cargas reais

Escolhendo $P' = 1$, vê-se que a solução de Δ é obtida diretamente, pois $\Delta = \Sigma u\, dL$.

De maneira semelhante, se o deslocamento por rotação ou a inclinação da tangente em certo ponto do corpo tiverem de ser determinados, aplica-se um *momento (conjugado)* virtual $\mathbf{M}'$, de intensidade unitária, nesse ponto. Como conseqüência, o conjugado provoca uma carga virtual u_θ em um dos elementos do corpo. Supondo que as cargas reais deformam o elemento uma quantidade dL, a rotação θ é determinada pela equação do trabalho virtual.

$$\underbrace{1 \cdot \theta}_{\text{cargas virtuais}} = \underbrace{\Sigma u_\theta\, dL}_{\text{deslocamentos reais}} \tag{14.37}$$

Onde:

$M' = 1$ = conjugado unitário virtual externo que atua na direção de θ
u_θ = carga virtual interna que atua sobre um elemento
θ = deslocamento por rotação externa, em radianos, provocado pelas cargas reais
dL = deslocamento interno do elemento na direção de u_θ provocado pelas cargas reais

Em geral, esse método de aplicação do princípio do trabalho virtual denomina-se *método das forças virtuais*, uma vez que se aplica uma *força virtual* para, assim, calcular o *deslocamento real* externo. A equação do trabalho virtual representa, nesse caso, a expressão dos *requisitos de compatibilidade* para o corpo. Apesar de isso não ter importância aqui, deve-se compreender que também podemos aplicar o princípio do trabalho virtual como um *método de deslocamentos virtuais*. Nesse caso, os *deslocamentos virtuais* são impostos ao corpo quando ele está sujeito a *cargas reais*. Esse método é usado para

determinar a força de reação externa sobre o corpo ou uma carga interna desconhecida. Quando usada dessa maneira, a equação do trabalho virtual expressa os *requisitos de equilíbrio* para o corpo.[4]

Trabalho Virtual Interno. Os termos do lado direito das equações 14.36 e 14.37 representam o trabalho virtual interno desenvolvido no corpo. Os deslocamentos internos reais dL expressos nesses termos podem ter várias origens. Podem resultar, por exemplo, de erros geométricos de fabricação, da temperatura ou, mais comumente, da tensão. Em particular, não se impõem limites à intensidade da carga externa, de modo que a tensão pode ser suficientemente grande para provocar escoamento ou mesmo endurecimento por deformação (encruamento) do material.

Deformação provocada por	Energia de deformação	Trabalho virtual interno
Carga axial N	$\int_0^L \frac{N^2}{2EA}\,dx$	$\int_0^L \frac{nN}{EA}\,dx$
Cisalhamento V	$\int_0^L \frac{f_c V^2}{2GA}\,dx$	$\int_0^L \frac{f_c vV}{GA}\,dx$
Momento fletor M	$\int_0^L \frac{M^2}{2EI}\,dx$	$\int_0^L \frac{mM}{EI}\,dx$
Momento de torção T	$\int_0^L \frac{T^2}{2GJ}\,dx$	$\int_0^L \frac{tT}{GJ}\,dx$

Tabela 14.1

Se supormos que o comportamento do material seja linear-elástico e que a tensão não exceda o limite de proporcionalidade, podemos estabelecer as expressões do trabalho virtual interno provocado por tensão usando as equações da energia de deformação elástica, desenvolvidas na Seção 14.2. Tais equações estão relacionadas na coluna central da Tabela 14.1. Lembrar que todas elas partem do pressuposto de que a tensão resultante **N**, **V**, **M** ou **T** foi aplicada gradualmente de zero até seu valor total. Em conseqüência, o trabalho realizado pela tensão resultante é mostrado nessas expressões como *metade* do produto da multiplicação da tensão resultante por seu deslocamento. Entretanto, no caso do método da força virtual, a carga virtual 'total' é aplicada *antes* que as forças reais provoquem os deslocamentos e, portanto, o trabalho da carga virtual interna é simplesmente o produto da carga virtual interna por seu deslocamento real. Referindo-nos a essas cargas internas (u) pelos seus símbolos em letras minúsculas n, v, m e t, relacionamos os trabalhos virtuais devidos a carga axial, cisalhamento, momento fletor e momento de torção na coluna direita da Tabela 14.1. A partir desses resultados, podemos escrever a equação do trabalho virtual para um corpo sujeito a carregamento geral como:

$$1 \cdot \Delta = \int \frac{nN}{AE}\,dx + \int \frac{mM}{EI}\,dx + \int \frac{f_c vV}{GA}\,dx + \int \frac{tT}{GJ}\,dx \qquad (14.38)$$

Nas seções que se seguem aplicaremos a equação anterior a problemas que envolvem deflexão de treliças, vigas e elementos mecânicos. Discutiremos, também, como tratar os efeitos provocados por erros de fabricação e diferenças de temperatura. É importante, na aplicação, que se use um conjunto de unidades consistente para todos os termos. Por exemplo, se as cargas reais forem expressas em kN e as dimensões do corpo em metros, deve ser aplicada ao corpo uma força virtual de 1 kN ou um momento (conjugado) virtual de 1 kN · m. Desse modo, o deslocamento calculado Δ será dado em metros e a inclinação calculada em radianos.

[4] Ver *Engineering mechanics: statics*, 9. ed., R.C. Hibbeler, Prentice Hall, Inc., 2001.

*14.6 MÉTODO DAS FORÇAS VIRTUAIS APLICADO A TRELIÇAS

Nesta seção aplicaremos o método das forças virtuais para determinar o deslocamento do nó de uma treliça. Para ilustrar os princípios, determinaremos o deslocamento vertical do nó A da treliça mostrada na Figura 14.30*b*. Tal deslocamento é gerado pelas 'cargas reais' $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ e, como elas provocam somente força axial nos elementos, é necessário considerar apenas o trabalho virtual interno devido à carga axial (Tabela 14.1). Para obter esse trabalho, admitiremos que cada elemento tenha área da seção transversal A constante e que a carga axial n e a carga real N sejam constantes ao longo de todo o seu comprimento. Como resultado, o trabalho virtual interno no elemento será:

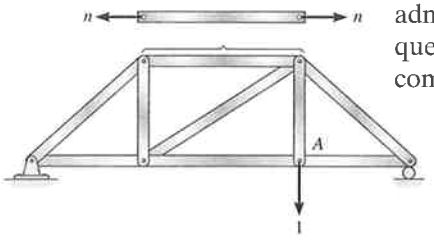
$$\int_0^L \frac{nN}{AE}\,dx = \frac{nNL}{AE}$$

Portanto, a equação do trabalho virtual para toda a treliça é:

$$\boxed{1 \cdot \Delta = \sum \frac{nNL}{AE}} \tag{14.39}$$

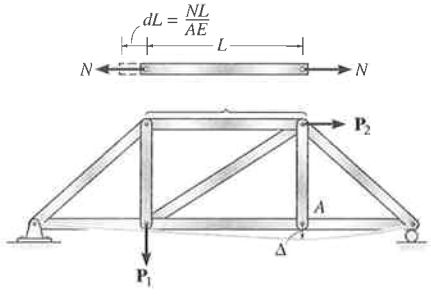
Onde:

- 1 = carga unitária virtual externa que atua no nó da treliça na direção de Δ
- Δ = deslocamento do nó, provocado pelas cargas reais sobre a treliça
- n = força virtual interna no elemento da treliça, provocada pela carga unitária virtual externa
- N = força interna no elemento da treliça, provocada pelas cargas reais
- L = comprimento do elemento
- A = área da seção transversal do elemento
- E = módulo de elasticidade do elemento



Aplicação de carga unitária virtual

(a)



Aplicação de cargas reais

(b)

Figura 14.30

A dedução da equação decorre naturalmente do desenvolvimento da Seção 14.5. Nesse caso, a carga unitária virtual externa cria 'n' forças internas virtuais em cada elemento da treliça (Figura 14.30*a*). Quando as cargas reais são aplicadas à treliça, provocam seu deslocamento Δ na mesma direção da carga unitária virtual (Figura 14.30*b*), e cada elemento sofre um deslocamento NL/AE, na mesma direção de sua respectiva força n. Conseqüentemente, o trabalho virtual externo $1 \cdot \Delta$ é igual ao trabalho virtual interno ou à energia de deformação (virtual) interna armazenada em *todos* os elementos da treliça, isto é, a Equação 14.39.

Mudança de Temperatura. Os elementos da treliça podem mudar de comprimento devido a alterações na temperatura. Se α for o coeficiente de dilatação térmica de um elemento e ΔT for a mudança de temperatura, a mudança de comprimento desse elemento será $\Delta L = \alpha\,\Delta T L$ (Equação 4.4). Podemos então determinar o deslocamento de um nó selecionado da treliça, devido a essa mudança de temperatura, pela Equação 14.36, escrita como:

$$\boxed{1 \cdot \Delta = \Sigma n \alpha\,\Delta T L} \tag{14.40}$$

Onde:

- 1 = carga unitária virtual externa que atua no nó da treliça na direção de Δ

n = força virtual interna no elemento da treliça, provocada pela carga unitária virtual externa
Δ = deslocamento externo do nó, provocado pela mudança de temperatura
α = coeficiente de dilatação térmica do elemento
ΔT = mudança de temperatura do elemento
L = comprimento do elemento

Erros de Fabricação. Ocasionalmente, podem ocorrer erros de fabricação no comprimento dos membros de uma treliça. Se isso acontecer, o deslocamento de um nó em uma direção particular, a partir da posição esperada, pode ser determinado pela aplicação direta da Equação 14.36, escrita como:

$$1 \cdot \Delta = \Sigma n\, \Delta L \tag{14.41}$$

Onde:

1 = carga unitária virtual externa que atua no nó da treliça na direção de Δ
n = força virtual interna no elemento da treliça, provocada pela carga unitária virtual externa
Δ = deslocamento externo do nó, provocado por erro de fabricação
ΔL = diferença no comprimento do elemento em relação ao comprimento especificado, provocada por erro de fabricação

Se cargas externas atuarem na treliça e alguns dos elementos sofrerem mudança de temperatura ou forem fabricados com dimensões erradas, será necessário combinar os lados direitos das equações 14.39 a 14.41.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

Veja a seguir como determinar o deslocamento de qualquer nó de treliça usando o método da força virtual.

Forças Virtuais n.

- Colocar a carga virtual unitária no nó em que o deslocamento precisa ser determinado. A carga deve ser orientada ao longo da linha de ação do deslocamento.
- Calcular a força interna n em cada elemento da treliça, com a carga unitária posicionada como indica o item anterior, e todas as cargas reais *removidas* da treliça. Supor que as forças de tração são positivas e as de compressão negativas.

Forças Reais N.

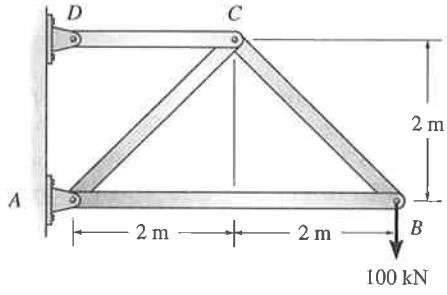
- Determinar as forças N em cada elemento. Essas forças são provocadas somente pelas cargas reais que atuam sobre a treliça. Supor novamente que as forças de tração são positivas e as de compressão negativas.

Equação dos Trabalhos Virtuais.

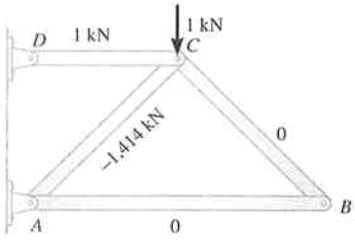
- Aplicar a equação do trabalho virtual para determinar o deslocamento desejado. É importante manter o sinal algébrico das forças correspondentes n e N ao substituir esses termos na equação.
- Se a soma resultante $\Sigma nNL/AE$ for positiva, o deslocamento Δ ocorrerá na mesma direção da carga unitária virtual. Se resultar um valor negativo, Δ terá direção oposta à da carga unitária virtual.
- Ao aplicar $1 \cdot \Delta = \Sigma n\alpha\, \Delta TL$, observar que, se qualquer elemento sofrer *aumento* de temperatura, ΔT será *positivo*, enquanto um *decréscimo* na temperatura resultará em um valor *negativo* de ΔT.
- Para $1 \cdot \Delta = \Sigma n\, \Delta L$, quando um erro de fabricação *aumenta* o comprimento de um elemento, ΔL é *positivo*, enquanto um *decréscimo* no comprimento leva à variação *negativa*.
- Ao aplicar esse método, observar atentamente as unidades de cada quantidade numérica. Notar, no entanto, que qualquer unidade arbitrária (libras, kips, newtons etc.) pode ser designada para a carga unitária virtual, visto que as forças n terão essas *mesmas* unidades e, assim, as unidades da carga unitária virtual e das forças n serão canceladas em ambos os elementos da equação.

EXEMPLO 14.11

Determinar o deslocamento vertical do nó C na treliça de aço da Figura 14.31*a*. A área da seção transversal de cada elemento é $A = 400\ \text{mm}^2$ e $E_{aço} = 200\ \text{GPa}$.

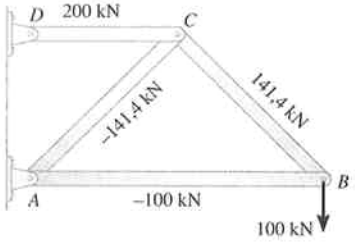


(a)



Forças virtuais

(b)



Forças reais

(c)

Figura 14.31

SOLUÇÃO

Forças Virtuais n. Como se deseja determinar o deslocamento vertical do nó C, deve-se aplicar *apenas* uma carga virtual de 1 kN sobre ele e calcular a força em cada elemento pelo método dos nós. Os resultados dessa análise são mostrados na Figura 14.31*b*. Segundo nossa convenção de sinal, números positivos indicam forças de tração e os negativos forças de compressão.

Forças Reais N. A carga de 100 kN provoca forças nos elementos, que são calculadas pelo método dos nós. Os resultados da análise são mostrados na Figura 14.31*c*.

Equação dos Trabalhos Virtuais. Ordenando os dados em forma tabular, temos:

Elemento	*n*	*N*	*L*	*nNL*
AB	0	−100	4	0
BC	0	141,4	2,828	0
AC	−1,414	−141,4	2,828	565,7
CD	1	200	2	400
				$\Sigma\ 965{,}7\ \text{kN}^2 \cdot \text{m}$

Assim:

$$1\ \text{kN} \cdot \Delta_{C_v} = \sum \frac{nNL}{AE} = \frac{965{,}7\ \text{kN}^2 \cdot \text{m}}{AE}$$

Substituindo os valores numéricos de A e E, temos:

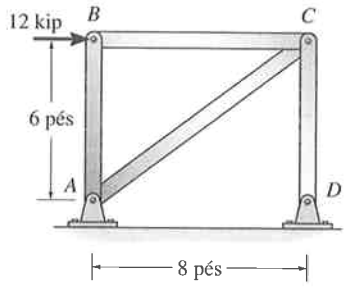
$$1\ \text{kN} \cdot \Delta_{C_v} = \frac{965{,}7\ \text{kN}^2 \cdot \text{m}}{[400(10^{-6})\ \text{m}^2]200(10^6)\ \text{kN/m}^2}$$

$$\Delta_{Cv} = 0{,}01207\ \text{m} = 12{,}1\ \text{mm}$$ ***Resposta***

EXEMPLO 14.12

A área da seção transversal de cada elemento da treliça de aço mostrada na Figura 14.32*a* é $A = 0{,}5\ \text{pol}^2$, e o módulo de elasticidade dos elementos é

$E_{aço} = 29(10^3)$ ksi. (*a*) Determinar o deslocamento horizontal do nó *C* se uma força de 12 kip for aplicada à treliça em *B*. (*b*) Supondo que não atuem cargas externas na treliça, qual é o deslocamento horizontal do nó *C* se o elemento *AC* foi fabricado 0,25 pol mais curto?



(a)

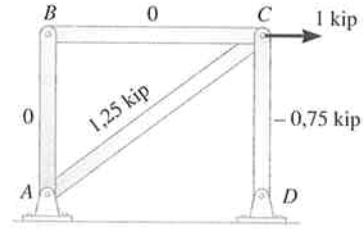
SOLUÇÃO

Parte (a).

Forças Virtuais n. Como se deseja determinar o *deslocamento horizontal* do nó *C*, aplica-se a ele uma força virtual horizontal de 1 kip. A força *n* em cada elemento é determinada pelo método dos nós e mostrada na treliça na Figura 14.32*b*. Como sempre, um número positivo representa uma força de tração e um número negativo uma força de compressão.

Forças Reais N. A força em cada elemento, provocada pela força de 12 kip aplicada externamente, é mostrada na Figura 14.32*c*.

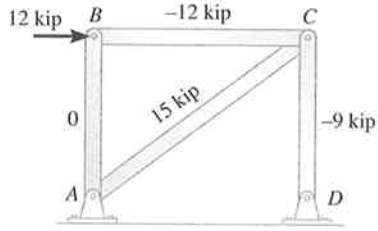
Equação dos Trabalhos Virtuais. Como *AE* é constante, ΣnNL é calculada como segue:



Forças virtuais

(b)

Elemento	*n*	*N*	*L*	*nNL*
AB	0	0	6	0
AC	1,25	15	10	187,5
CB	0	−12	8	0
CD	−0,75	−9	6	40,5
				Σ 228,0 kip² · pés



Forças reais

(c)

Figura 14.32

$$1 \text{ kip} \cdot \Delta_{Ch} = \sum \frac{nNL}{AE} = \frac{228{,}0 \text{ kip}^2 \cdot \text{pés}}{AE}$$

$$1 \text{ kip} \cdot \Delta_{Ch} = \frac{228{,}0 \text{ kip}^2 \cdot \text{pés}(12 \text{ pol/pé})}{(0{,}5 \text{ pol}^2)29(10^3) \text{ kip/pol}^2}$$

$$\Delta_{Ch} = 0{,}189 \text{ pol} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Parte (b). Aqui devemos aplicar a Equação 14.41. Como se deseja determinar o deslocamento horizontal de *C*, podemos usar os resultados da Figura 14.32*b*. Tendo em mente que o elemento *AC* foi *encurtado* $\Delta L = -0{,}25$ pol, temos:

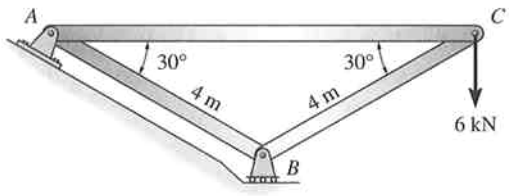
$$1 \cdot \Delta = \Sigma n \Delta L; \qquad 1 \text{ kip} \cdot \Delta_{Ch} = (1{,}25 \text{ kip})(-0{,}25 \text{ pol})$$

$$\Delta_{Ch} = -0{,}312 \text{ pol} = 0{,}312 \text{ pol} \leftarrow \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

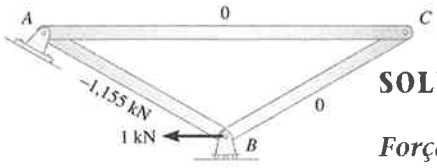
O sinal negativo indica que o nó *C* deslocou-se para a esquerda, direção oposta à carga horizontal de 1 kip.

EXEMPLO 14.13

Determinar o deslocamento horizontal do nó *B* da treliça mostrada na Figura 14.35*a*. Devido a um calor radiante, o elemento *AB* sofre o *aumento* de temperatura $\Delta T = +60°C$. Os elementos são feitos de aço, para o qual $\alpha_{aço} = 12(10^{-6})/°C$ e $E_{aço} = 200$ GPa. A área da seção transversal de cada elemento é de 250 mm².



(a)



Forças virtuais

(b)

SOLUÇÃO

Forças Virtuais n. Uma carga virtual horizontal de 1 kN foi aplicada ao nó B da treliça e, assim, calculadas as forças em cada elemento (Figura 14.33*b*).

Forças Reais N. Como as forças n em AC e BC são *nulas*, as forças N nesses elementos *não* precisam ser calculadas. Por quê? Para melhor entendimento, no entanto, a análise completa das forças 'reais' é mostrada na Figura 14.33*c*.

Equação dos Trabalhos Virtuais. Tanto as cargas como a temperatura afetam a deformação; portanto, as equações 14.39 e 14.40 foram combinadas, o que resultou em:

$$1\ \text{kN} \cdot \Delta_{B_h} = \sum \frac{nNL}{AE} + \Sigma n\alpha\, \Delta TL$$

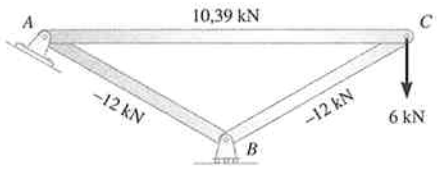
$$= 0 + 0 + \frac{(-1{,}155\ \text{kN})(-12\ \text{kN})(4\ \text{m})}{[250(10^{-6})\ \text{m}^2][200(10^6)\ \text{kN/m}^2]}$$

$$+ 0 + 0 + (-1{,}155\ \text{kN})[12(10^{-6})/°\text{C}](60°\text{C})(4\ \text{m})$$

$$\Delta_{B_h} = -0{,}00222\ \text{m}$$

$$= 2{,}22\ \text{mm} \rightarrow \qquad \textit{Resposta}$$

O sinal negativo indica que o rolete B move-se para a direita, direção oposta à da carga virtual (Figura 14.33*b*).



Forças reais

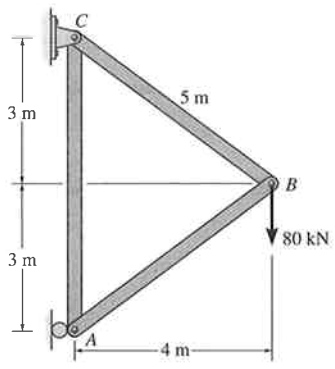
(c)

Figura 14.33

PROBLEMAS

14.59. Determinar o deslocamento vertical do nó B da treliça. Cada elemento tem área da seção transversal de 300 mm^2 e todos são feitos de aço A-36.

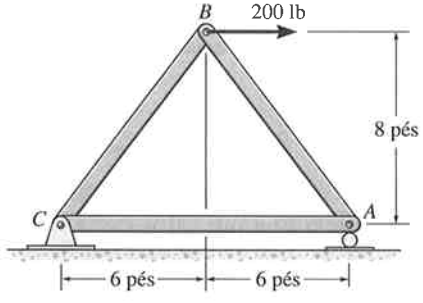
***14.60.** Determinar o deslocamento horizontal do nó B da treliça. Cada elemento tem área da seção transversal de 300 mm^2 e todos são feitos de aço A-36.



Problemas 14.59/14.60

14.61. Determinar o deslocamento horizontal do ponto B. Cada elemento tem área da seção transversal de 2 pol^2 e todos são feitos de aço A-36.

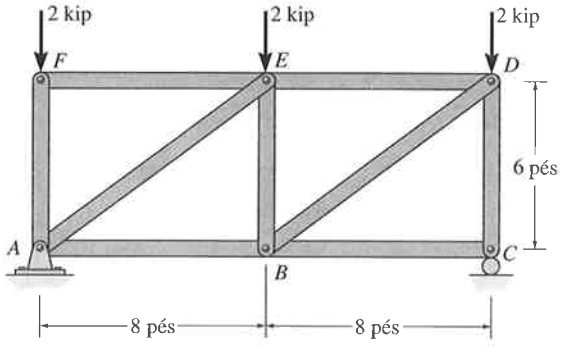
14.62. Determinar o deslocamento vertical do ponto B. Cada elemento tem área da seção transversal de 2 pol^2 e todos são feitos de aço A-36.



Problemas 14.61/14.62

14.63. Determinar o deslocamento vertical do nó B. A = 1,5 pol^2 para cada elemento de aço A-36.

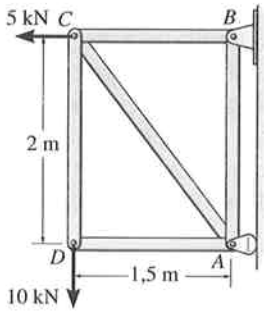
***14.64.** Determinar o deslocamento vertical do nó E. A = 1,5 pol^2 para cada elemento de aço A-36.



Problemas 14.63/14.64

14.65. Determinar o deslocamento horizontal do ponto C. Cada elemento tem área da seção transversal de 400 mm^2 e todos são feitos de aço A-36.

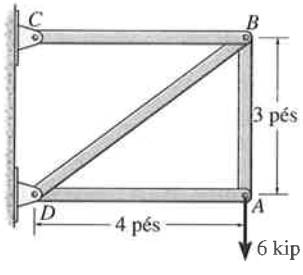
14.66. Determinar o deslocamento vertical do ponto D. Cada elemento tem área da seção transversal de 400 mm^2 e todos são feitos de aço A-36.



Problemas 14.65/14.66

14.67. Determinar o deslocamento vertical do ponto A. Cada elemento tem área da seção transversal de 3 pol^2 e todos são feitos de aço A-36.

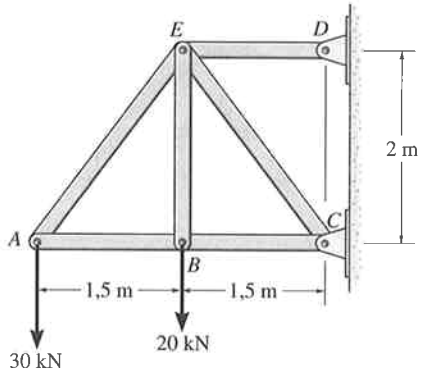
***14.68.** Determinar o deslocamento horizontal do ponto B. Cada elemento tem área da seção transversal de 3 pol^2 e todos são feitos de aço A-36.



Problemas 14.67/14.68

14.69. Determinar o deslocamento vertical do ponto A. Cada elemento tem área da seção transversal de 400 mm^2 e todos são feitos de aço A-36.

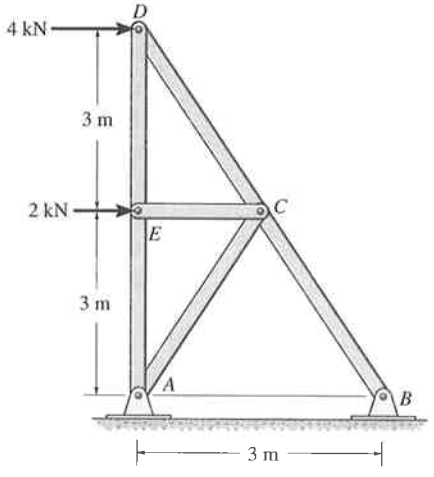
14.70. Determinar o deslocamento vertical do ponto B. Cada elemento tem área da seção transversal de 400 mm^2 e todos são feitos de aço A-36.



Problemas 14.69/14.70

14.71. Determinar o deslocamento horizontal do ponto D. Cada elemento tem área da seção transversal de 300 mm^2 e todos são feitos de aço A-36.

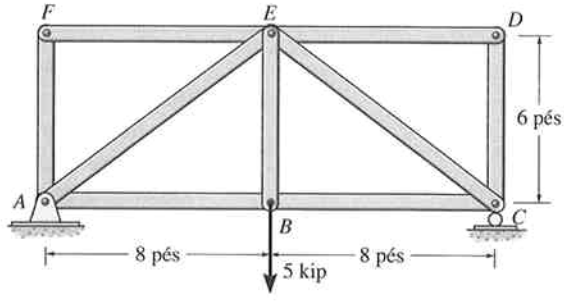
***14.72.** Determinar o deslocamento horizontal do ponto E. Cada elemento tem área da seção transversal de 300 mm^2 e todos são feitos de aço A-36.



Problemas 14.71/14.72

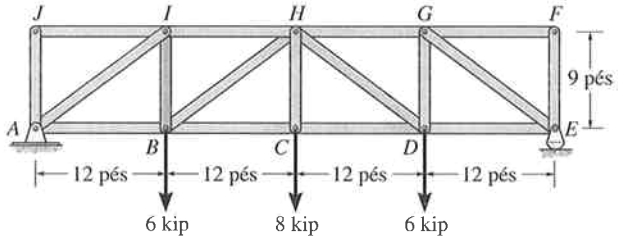
14.73. Determinar o deslocamento vertical do ponto B. Cada elemento tem área da seção transversal de 4,5 pol^2 e todos são feitos de aço A-36, $E_{aço}$ = 29(10^3) ksi.

14.74. Determinar o deslocamento vertical do ponto E. Cada elemento tem área da seção transversal de 4,5 pol^2 e todos são feitos de aço A-36.



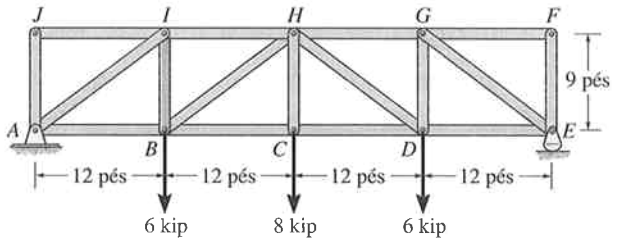
Problemas 14.73/14.74

14.75. Determinar o deslocamento vertical do nó *C*. Cada elemento tem área da seção transversal de 4,5 pol^2 e todos são feitos de aço A-36.



Problema 14.75

***14.76.** Determinar o deslocamento vertical do nó *H*. Cada elemento tem área da seção transversal de 4,5 pol^2 e todos são feitos de aço A-36.



Problema 14.76

*14.7 MÉTODO DAS FORÇAS VIRTUAIS APLICADO A VIGAS

Nesta seção aplicaremos o método das forças virtuais para determinar o deslocamento e a inclinação em um ponto de uma viga. Para ilustrar os princípios, determinaremos o deslocamento Δ do ponto A na viga da Figura 14.34*b*. Esse deslocamento é provocado pela 'carga distribuída real' w; como essa carga provoca tanto cisalhamento quanto momento fletor, devemos considerar o trabalho virtual interno devido a ambos os carregamentos. O Exemplo 14.7 mostrou, no entanto, que as deflexões da viga provocadas por cisalhamento são desprezíveis, quando comparadas com as provocadas por flexão (momento fletor), particularmente se a viga for longa e esbelta. Como esse tipo de viga é o mais usado na prática, consideraremos apenas a energia de deformação virtual devida à flexão (Tabela 14.1). Aplicando-se a Equação 14.36, a equação do trabalho virtual da viga é, portanto:

$$1 \cdot \Delta = \int_0^L \frac{mM}{EI}\, dx \tag{14.42}$$

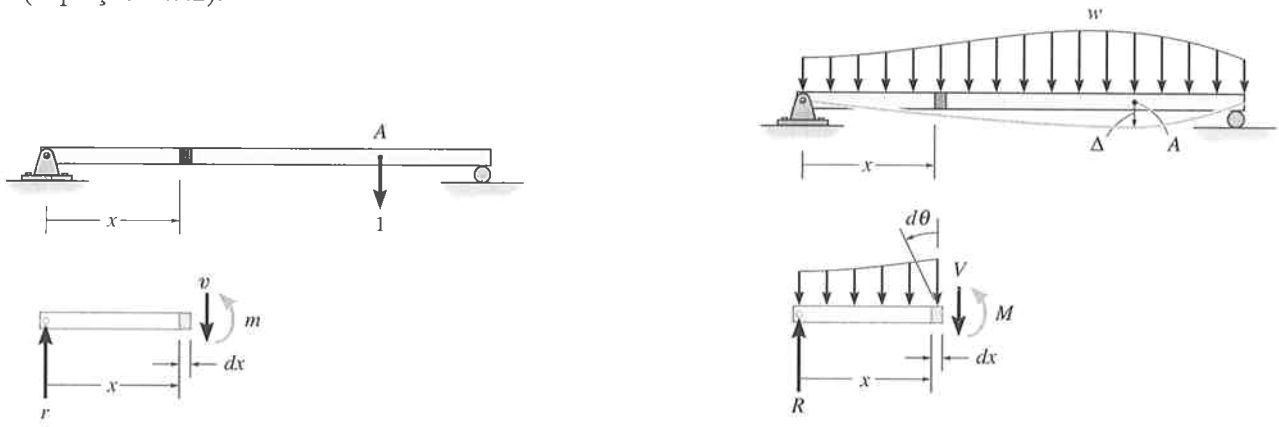
Onde:

1 = carga unitária virtual externa que atua sobre a viga na direção de Δ
Δ = deslocamento provocado pelas cargas reais atuam sobre a viga
m = momento fletor virtual interno na viga, expresso em função de x e provocado pela carga unitária virtual externa
M = momento fletor interno na viga, expresso em função de x e provocado pelas cargas reais
E = módulo de elasticidade do material
I = momento de inércia da área da seção transversal calculado em torno do eixo neutro

De maneira semelhante, se a inclinação θ da tangente em um ponto da linha elástica da viga tiver de ser determinada, será preciso aplicar no ponto um momento virtual unitário e determinar o momento fletor virtual interno $m\theta$ correspondente. Se aplicarmos a Equação 14.37 para esse caso e desprezarmos o efeito das deformações por cisalhamento, teremos:

$$1 \cdot \theta = \int_0^L \frac{m_\theta M}{EI}\, dx \tag{14.43}$$

Observe que a dedução das equações anteriores decorre naturalmente do desenvolvimento da Seção 14.5. Por exemplo: a carga unitária virtual externa cria um momento fletor virtual interno m na posição x da viga (Figura 14.34*a*). Quando a carga real w é aplicada, provoca deformação no elemento dx em x ou gira-o por um ângulo $d\theta$ (Figura 14.34*b*). Desde que o material responda elasticamente, $d\theta$ será igual a $(M/EI)dx$. Conseqüentemente, o trabalho virtual externo $1 \cdot \Delta$ será igual ao trabalho virtual interno de toda a viga, $\int m(M/EI)\,dx$ (Equação 14.42).



Cargas virtuais

(a)

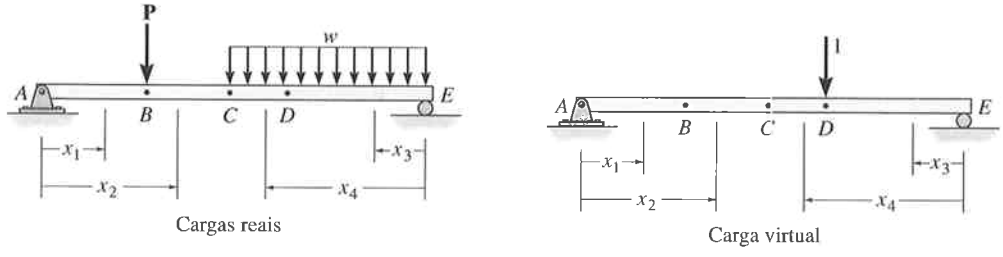
Cargas reais

(b)

Figura 14.34

Ao contrário das vigas, alguns elementos podem estar sujeitos a uma energia de deformação virtual significativa provocada por carga axial, cisalhamento e momento de torção. Nesse caso, devemos incluir nas equações anteriores os termos da energia para essas cargas, como na Equação 14.38.

Ao aplicar as equações 14.42 e 14.43, é importante entender que as integrais do primeiro membro representam a quantidade de energia de deformação por flexão virtual que está *armazenada* na viga. Se cargas concentradas ou momentos atuarem sobre tal viga, ou se a carga distribuída for descontínua, *não será possível* fazer uma única integração em todo o comprimento da viga. Em vez disso, devem ser escolhidas coordenadas x separadas dentro das regiões que não tenham descontinuidade de carga. Não é necessário também que cada x tenha a mesma origem; entretanto, o x selecionado para determinar o momento real M em uma região particular deve ser o *mesmo* x selecionado para determinar o momento virtual m ou m_θ dentro da mesma região. Como exemplo, consideremos a viga mostrada na Figura 14.35. A fim de determinar o deslocamento em D, podemos usar x_1 para calcular a energia de deformação na região AB, x_2 para a região BC, x_3 para a região DE e x_4 para a região DC. Em qualquer caso, as coordenadas x devem ser selecionadas de modo que tanto M como m (ou m_θ) possam ser deduzidos facilmente.



Cargas reais

Carga virtual

Figura 14.35

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

Veja a seguir como determinar o deslocamento e a inclinação em dado ponto da linha elástica de uma viga usando o método dos trabalhos virtuais.

Momentos Virtuais m ou m_θ.

- Colocar a *carga unitária virtual* sobre a viga no ponto e orientá-la ao longo da linha de ação do deslocamento desejado.
- Se a inclinação tiver de ser determinada, colocar um *momento virtual unitário* no ponto.
- Estabelecer coordenadas x apropriadas, válidas dentro das regiões da viga em que não haja descontinuidade da carga real ou virtual.
- Com a carga virtual posicionada e todas as cargas reais *removidas* da viga, calcular o momento interno m ou m_θ em função de cada coordenada x.
- Supor que m ou m_θ atua na direção positiva de acordo com a convenção de sinal estabelecida para as vigas (Figura 6.3).

Momentos Reais.

- Usando as *mesmas* coordenadas x estabelecidas para m ou m_θ, determinar os momentos internos M provocados pelas cargas reais.
- Como se supõe que m ou m_θ positivo atua na 'direção positiva' convencionada, é importante que M positivo atue na *mesma direção*. Essa condição é necessária porque o trabalho virtual interno positivo ou negativo depende da direção de ambas as cargas virtuais, definidas por $\pm m$ ou $\pm m_\theta$, e do deslocamento provocado por $\pm M$.

Equação dos Trabalhos Virtuais.

- Aplicar a equação dos trabalhos virtuais para determinar o deslocamento Δ ou a inclinação θ. É importante manter o sinal algébrico de cada integral calculada dentro de sua região específica.
- Se a soma algébrica de todas as integrais da viga inteira for positiva, Δ ou θ terá a mesma direção da carga virtual unitária ou do momento virtual unitário, respectivamente. Se resultar um valor negativo, Δ ou θ terão direção oposta à da carga unitária virtual ou do momento.

EXEMPLO 14.14

Determinar o deslocamento do ponto B da viga mostrada na Figura 14.36*a*. Considerar EI constante.

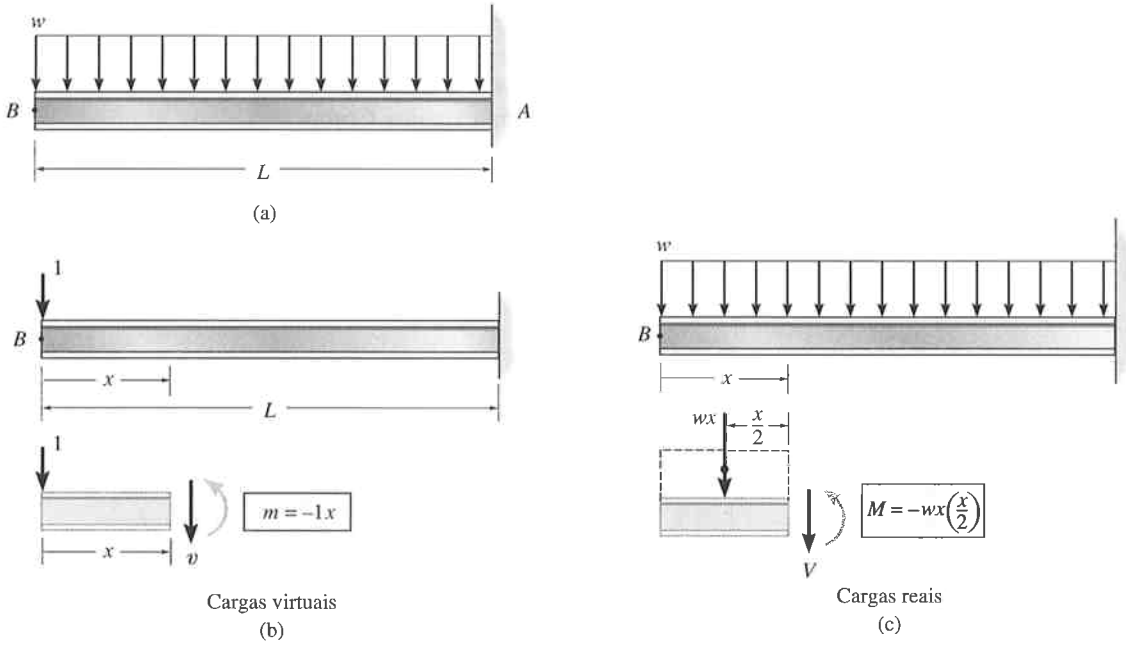


Figura 14.36

SOLUÇÃO

Momento Virtual m. O deslocamento vertical do ponto B é obtido colocando-se uma carga unitária virtual em B (Figura 14.36*b*). Por inspeção, verifica-se que não há descontinuidades *nem* na carga real *nem* na virtual. Desse modo, pode-se usar uma *única* coordenada x para determinar a energia de deformação virtual. Estabeleceremos a origem dessa coordenada em B, visto que desse modo não será preciso determinar as reações em A para calcular os momentos internos m e M. Pelo método das seções, o momento interno m é calculado como mostra a Figura 14.36*b*.

Momento Real M. Usando a *mesma* coordenada x, calcula-se o momento interno M como mostra a Figura 14.36*c*.

Equação dos Trabalhos Virtuais. O deslocamento vertical em B é, então:

$$1 \cdot \Delta_B = \int \frac{mM}{EI}\,dx = \int_0^L \frac{(-1x)(-wx^2/2)\,dx}{EI}$$

$$\Delta_B = \frac{wL^4}{8EI} \qquad \textbf{Resposta}$$

EXEMPLO 14.15

Determinar a inclinação no ponto B da viga mostrada na Figura 14.37*a*. Considerar EI constante.

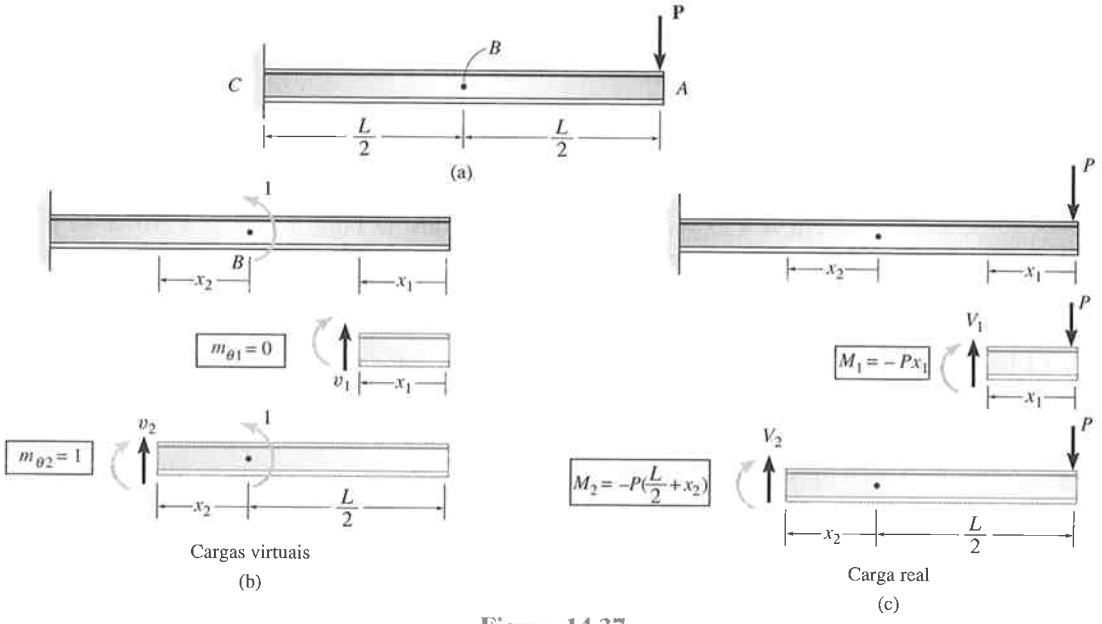


Figura 14.37

SOLUÇÃO

Momentos Virtuais m_θ. A inclinação em B é determinada colocando-se um momento virtual unitário nesse ponto (Figura 14.37*b*). Para determinar a energia de deformação virtual total na viga, é preciso selecionar duas coordenadas x. A coordenada x_1 considera a energia de deformação no segmento AB e a x_2 considera a energia de deformação no segmento BC. Os momentos internos m_θ dentro de cada segmento são calculados pelo método das seções, como mostra a Figura 14.37*b*.

Momentos Reais M. Usando as *mesmas coordenadas* x_1 e x_2 (por quê?), calculam-se os momentos internos M como mostra a Figura 14.37*c*.

Equação dos Trabalhos Virtuais. A inclinação em B é, então:

$$1 \cdot \theta_B = \int \frac{m_\theta M}{EI}\, dx$$

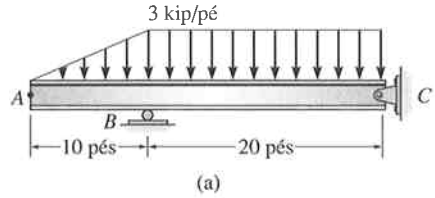
$$= \int_0^{L/2} \frac{0(-Px_1)\, dx_1}{EI} + \int_0^{L/2} \frac{1\{-P[(L/2) + x_2]\}\, dx_2}{EI}$$

$$\theta_B = -\frac{3PL^2}{8EI} \qquad \textbf{Resposta}$$

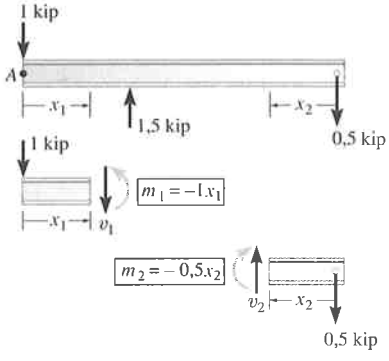
O *sinal negativo* indica que θ_B tem direção *oposta* à do momento virtual mostrado na Figura 14.37*b*.

EXEMPLO 14.16

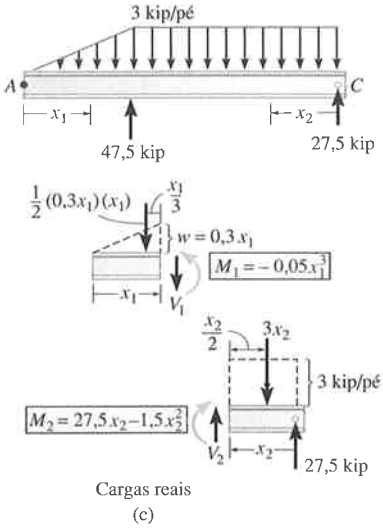
Determinar o deslocamento do ponto A da viga mostrada na Figura 14.38*a*. $I = 450$ pol^4, $E_{est} = 29(10^3)$ ksi.



(a)



Cargas virtuais
(b)



Cargas reais
(c)

Figura 14.38

SOLUÇÃO

Momentos Virtuais m. A viga está submetida a uma carga unitária virtual em A e as reações estão calculadas na Figura 14.38*b*. Verifica-se por inspeção que devem ser escolhidas duas coordenadas x_1 e x_2 para cobrir todas as regiões da viga. Para fins de integração, é mais simples usar origens em A e C. Pelo método das seções, calculam-se os momentos m mostrados na Figura 14.38*b*.

Momentos Reais M. As reações da viga real são calculadas primeiro (Figura 14.38*a*). Então, usando as *mesmas* coordenadas x selecionadas para m, determinam-se os momentos internos.

Equação dos Trabalhos Virtuais. Aplicando a equação dos trabalhos virtuais para a viga, temos:

$$1 \text{ kip} \cdot \Delta_A = \int \frac{mM}{EI}\, dx = \int_0^{10} \frac{(-1x_1)(-0,05x_1{}^3)\, dx_1}{EI}$$

$$+ \int_0^{20} \frac{(-0,5x_2)(27,5x_2 - 1,5x_2{}^2)\, dx_2}{EI}$$

ou:

$$1 \text{ kip} \cdot \Delta_A = \frac{0,010(10)^5}{EI} - \frac{4,583(20)^3}{EI} + \frac{0,1875(20)^4}{EI}$$

$$\Delta_A = \frac{-5.666,7 \text{ kip} \cdot \text{pés}^3}{EI}$$

Substituindo os dados para E e I, obtemos:

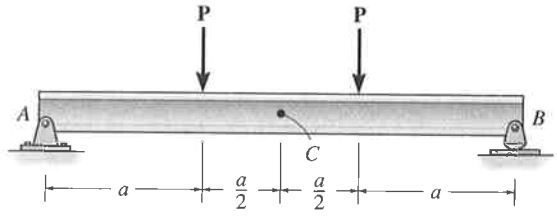
$$\Delta_A = \frac{-5.666{,}7 \text{ kip} \cdot \text{pés}^3(12 \text{ pol/pé})^3}{[29(10^3) \text{ kip/pol}^2]\, 450 \text{ pol}^4}$$

$$= -0{,}750 \text{ pol} \qquad \textit{Resposta}$$

O sinal negativo indica que o ponto A desloca-se para cima.

PROBLEMAS

14.77. Determinar o deslocamento do ponto C. Considerar EI constante.

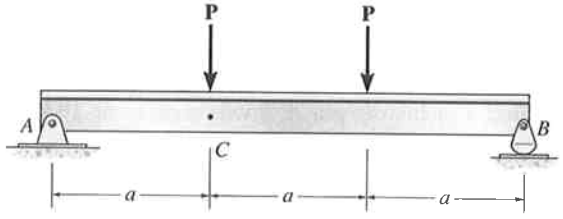


Problema 14.77

14.78. Determinar o deslocamento do ponto C. Considerar EI constante.

14.79. Determinar a inclinação no ponto C. Considerar EI constante.

***14.80.** Determinar a inclinação no ponto A. Considerar EI constante.

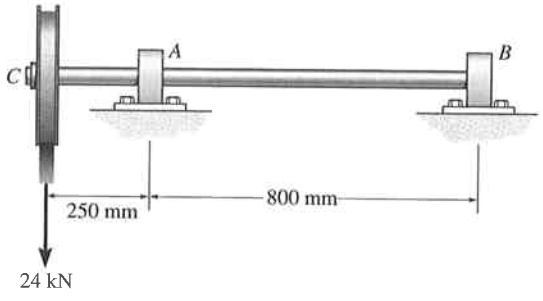


Problemas 14.78/14.79/14.80

14.81. Determinar a inclinação do eixo de aço A-36, que tem 60 mm de diâmetro, no apoio do mancal A.

14.82. Determinar o deslocamento em C do eixo de aço A-36, que tem 60 mm de diâmetro.

14.83. Determinar o deslocamento da polia em C supondo que o eixo de aço A-36 tenha 60 mm de diâmetro.

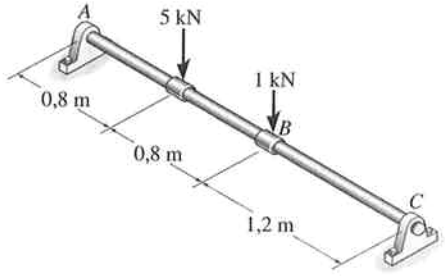


Problemas 14.81/14.82/14.83

***14.84.** Determinar o deslocamento do colar B. O eixo de aço A-36 tem 60 mm de diâmetro.

14.85. Determinar a inclinação em C. O eixo de aço A-36 tem 60 mm de diâmetro.

14.86. Determinar a inclinação em A. O eixo de aço A-36 tem 60 mm de diâmetro.

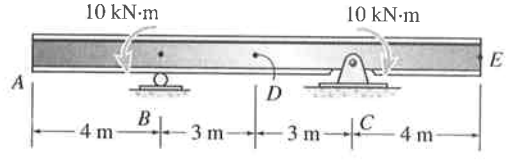


Problemas 14.84/14.85/14.86

14.87. A viga de aço A-36 tem momento de inércia $I = 125(10^6)$ mm^4. Determinar o deslocamento de D.

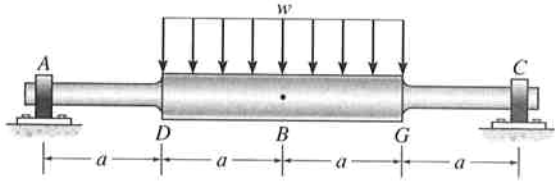
***14.88.** A viga de aço A-36 tem momento de inércia $I = 125(10^6)$ mm^4. Determinar a inclinação em E.

14.89. A viga de aço estrutural A-36 tem momento de inércia $I = 125(10^6)$ mm^4. Determinar sua inclinação em B.



Problemas 14.87/14.88/14.89

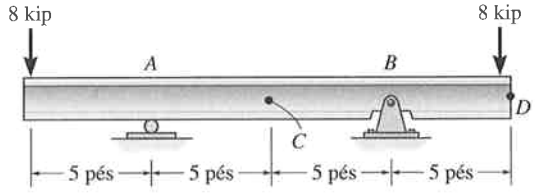
14.90. Determinar o deslocamento do ponto B. O momento de inércia da parte central do eixo DG é $2I$, enquanto os segmentos das extremidades AD e GC têm momento de inércia I. O módulo de elasticidade do material é E.



Problema 14.90

14.91. Determinar o deslocamento do ponto C da viga construída com perfil W14 × 26 e feita de aço A-36.

***14.92.** Determinar a inclinação em A da viga construída com perfil W14 × 26 e feita de aço A-36.

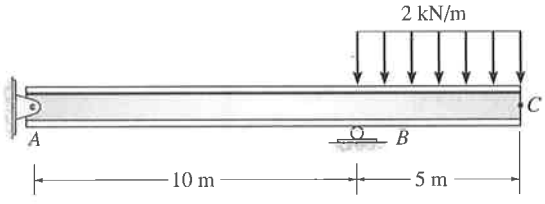


Problemas 14.91/14.92

14.93. Determinar o deslocamento de C na viga de aço A-36. $I = 70(10^6)$ mm^4.

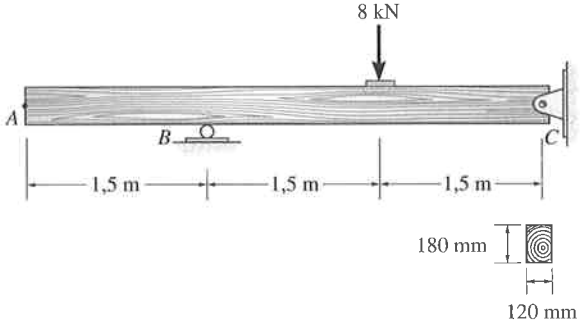
14.94. Determinar a inclinação em A da viga de aço A-36. $I = 70(10^6)$ mm^4.

14.95. Determinar a inclinação em B da viga de aço A-36. $I = 70(10^6)$ mm^4.



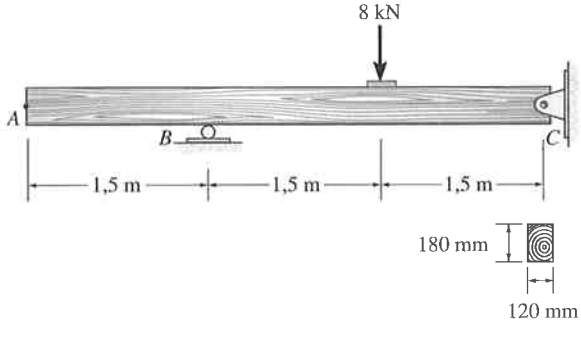
Problemas 14.93/14.94/14.95

***14.96.** A viga é feita de pinho do norte. Determinar o deslocamento de A.



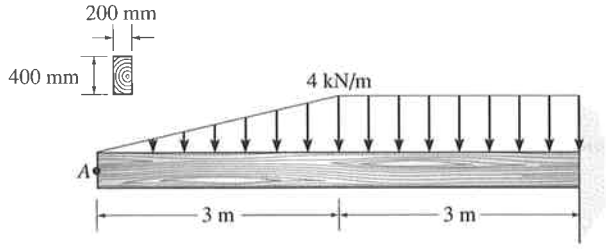
Problema 14.96

14.97. A viga é feita de pinho do norte. Determinar a inclinação em C.



Problema 14.97

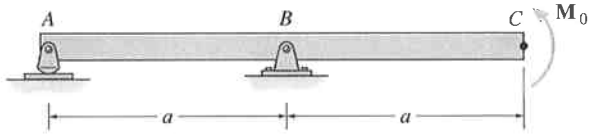
14.98. A viga é feita de carvalho, para o qual $E_{carvalho}$ = 11 GPa. Determinar a inclinação e o deslocamento em A.



Problema 14.98

14.99. Determinar o deslocamento do ponto C. Considerar EI constante.

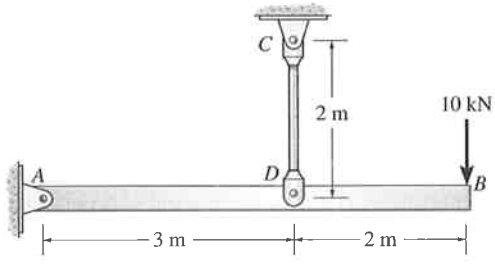
***14.100.** Determinar a inclinação em B. Considerar EI constante.



Problemas 14.99/14.100

14.101. A viga AB tem seção transversal quadrada de 100 mm por 100 mm. A barra CD tem diâmetro de 10 mm. Supondo que ambos os elementos sejam feitos de aço A-36, determinar o deslocamento vertical do ponto B devido à carga de 10 kN.

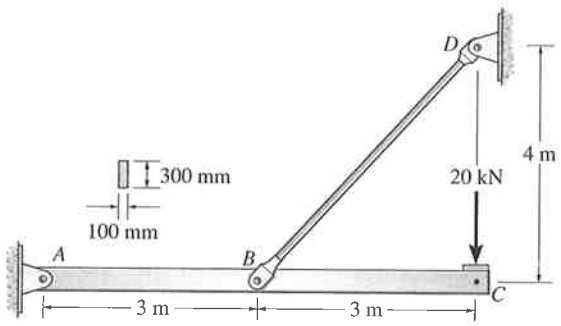
14.102. A viga AB tem seção transversal quadrada de 100 mm por 100 mm. A barra CD tem diâmetro de 10 mm. Supondo que ambos os elementos sejam feitos de aço A-36, determinar a inclinação em A devida à carga de 10 kN.



Problemas 14.101/14.102

14.103. A barra ABC tem seção transversal retangular de 300 mm por 100 mm. A haste acoplada DB tem diâmetro de 20 mm. Supondo que ambos os elementos sejam feitos de aço A-36, determinar o deslocamento vertical do ponto C devido à carga. Considerar apenas o efeito da flexão em ABC e da força axial em DB.

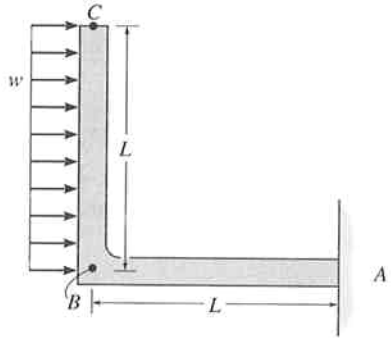
***14.104.** A barra ABC tem seção transversal retangular de 300 mm por 100 mm. A haste acoplada DB tem diâmetro de 20 mm. Supondo que ambos os elementos sejam feitos de aço A-36, determinar a inclinação em A devida à carga. Considerar apenas o efeito da flexão em ABC e da força axial em DB.



Problemas 14.103/14.104

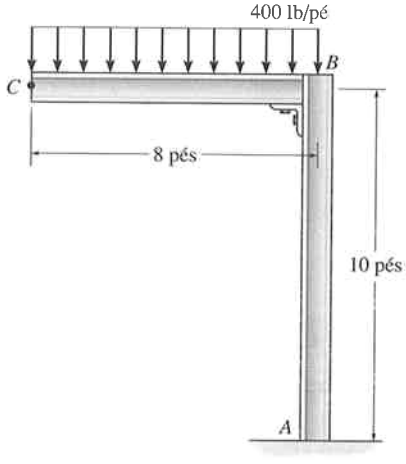
14.105. A estrutura em forma de L compõe-se de dois segmentos, cada um com comprimento L e rigidez à flexão EI. Se é submetida à carga distribuída uniforme, qual o deslocamento horizontal da extremidade C?

14.106. A estrutura em forma de L compõe-se de dois segmentos, cada um com comprimento L e rigidez à flexão EI. Se é submetida à carga distribuída uniforme, qual o deslocamento vertical do ponto B?



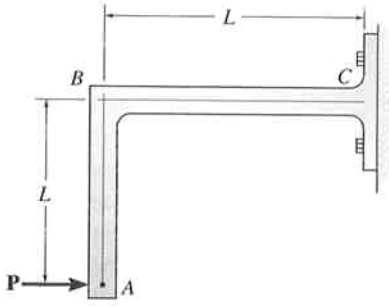
Problemas 14.105/14.106

14.107. Determinar os deslocamentos horizontal e vertical do ponto C. Há um apoio engastado em A e EI é constante.



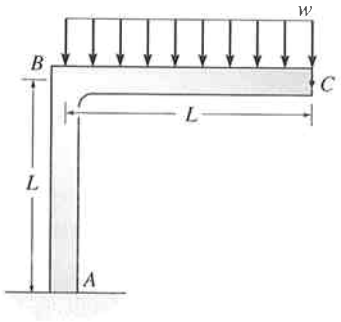
Problema 14.107

***14.108.** Determinar o deslocamento horizontal do ponto A na cantoneira de suporte devido à força concentrada **P**. O suporte está engastado no apoio e EI é constante. Considerar apenas o efeito da flexão.



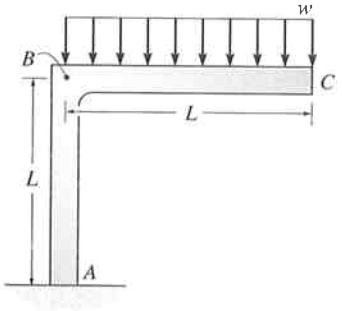
Problema 14.108

14.109. A estrutura compõe-se de dois segmentos, cada um com comprimento L e rigidez à flexão EI. Se é submetida à carga distribuída uniforme, qual o deslocamento vertical do ponto C? Considerar apenas o efeito da flexão.



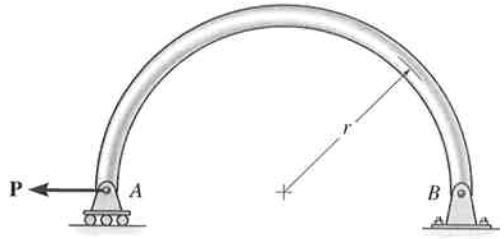
Problema 14.109

14.110. A estrutura compõe-se de dois segmentos, cada um com comprimento L e rigidez à flexão EI. Se é submetida à carga distribuída uniforme, qual o deslocamento horizontal do ponto B? Considerar apenas o efeito da flexão.



Problema 14.110

14.111. A haste semicircular tem momento de inércia I e módulo de elasticidade E. Determinar a deflexão horizontal no rolete devida à flexão.



Problema 14.111

* 14.8 TEOREMA DE CASTIGLIANO

Em 1879, Alberto Castigliano, um engenheiro ferroviário italiano, publicou um livro no qual descrevia um método para determinar o deslocamento e a inclinação de dado ponto em um corpo. Esse método, designado de *segundo teorema de Castigliano*, aplica-se somente a corpos que tenham temperatura constante e material com comportamento linear-elástico. Neles, segundo o teorema, o deslocamento de dado ponto é igual à primeira derivada parcial da energia de deformação no corpo, em relação a uma força que atua sobre o ponto e na direção do deslocamento. De modo semelhante, a inclinação da tangente em determinado ponto do corpo é igual à primeira derivada parcial da energia de deformação, em relação a um momento que atua sobre o ponto e na direção do ângulo da inclinação.

Para deduzir o segundo teorema de Castigliano, consideremos um corpo de qualquer forma arbitrária, que esteja sujeito a uma série de n forças $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$ (Figura 14.39). Como o trabalho externo realizado por essas forças é igual à energia de deformação armazenada no corpo, podemos aplicar a conservação de energia, isto é:

$$U_i = U_e$$

Entretanto, o trabalho externo é função das cargas externas, $U_e = \Sigma \int P\, dx$ (Equação 14.1), de modo que o trabalho interno também é função de forças externas. Então:

$$U_i = U_e = f(P_1, P_2, \ldots, P_n) \tag{14.44}$$

Uma vez que qualquer das forças externas, digamos P_j, aumente uma quantidade infinitesimal dP_j, o trabalho interno também aumentará e, com isso, a energia de deformação vai se tornar:

$$U_i + dU_i = U_i + \frac{\partial U_i}{\partial P_j}\, dP_j \tag{14.45}$$

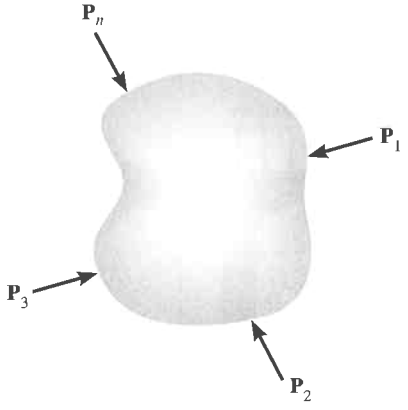


Figura 14.39

Esse valor, no entanto, não deve depender da seqüência com que as n forças são aplicadas ao corpo. Por exemplo: podemos aplicar ao corpo *primeiro* $d\mathbf{P}_j$ e depois as cargas $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$. Nesse caso, $d\mathbf{P}_j$ provocaria o deslocamento infinitesimal $d\Delta_i$ do corpo na direção de $d\mathbf{P}_j$. Pela Equação 14.2 ($U_e = \frac{1}{2} P_j \Delta_j$), o incremento da energia de deformação seria $\frac{1}{2}\, dP_j\, d\Delta_j$. Essa quantidade, porém, é um diferencial de segunda ordem e pode ser desprezada. A aplicação adicional das cargas $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$ provoca o deslocamento Δ_j de $d\mathbf{P}_j$, de modo que a energia de deformação torna-se, então:

$$U_i + dU_j = U_i + dP_j\, \Delta_j \tag{14.46}$$

Nesse caso, como anteriormente, U_i é a energia de deformação interna no corpo, provocada pelas cargas $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$, e $dU_j = dP_j\,\Delta_j$ é a energia de deformação *adicional* provocada por $d\mathbf{P}_j$.

Em resumo, a Equação 14.45 representa a energia de deformação no corpo, determinada primeiro pela aplicação das cargas $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$ e, depois de $d\mathbf{P}_j$; a Equação 14.46, por sua vez, representa a energia de deformação determinada primeiro pela aplicação de $d\mathbf{P}_j$ e depois das cargas $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$. Como essas duas equações devem ser iguais, é preciso que:

$$\Delta_i = \frac{\partial U_i}{\partial P_j} \tag{14.47}$$

o que prova o teorema; ou seja, o deslocamento Δ_j na direção de $\mathbf{P}_j$ é igual à primeira derivada parcial da energia de deformação em relação a $\mathbf{P}_j$.

Deve-se observar que a Equação 14.47 expressa os *requisitos de compatibilidade* do corpo, uma vez que é uma condição relacionada ao deslocamento. Além do mais, a derivação apresentada requer que sejam consideradas para a análise *somente forças conservativas*. Essas forças podem ser aplicadas em qualquer ordem e, além disso, executam trabalho independente da trajetória e, portanto, não criam perda de energia. Desde que o material tenha comportamento linear-elástico, as forças aplicadas serão conservativas e o teorema válido. Saliente-se, também, que o primeiro teorema de Castigliano é semelhante ao segundo; entretanto, aquele relaciona a carga P_j à derivada parcial da energia de deformação em relação ao deslocamento correspondente, ou seja, $P_j = \partial U_i/\partial \Delta_j$. A prova assemelha-se à feita anteriormente. Esse teorema é outra maneira de expressar os *requisitos de equilíbrio* para o corpo; entretanto, tem aplicação limitada e não será discutido aqui.

*14.9 TEOREMA DE CASTIGLIANO APLICADO A TRELIÇAS

Como o elemento da treliça está submetido a carga axial, a energia de deformação é dada pela Equação 14.16, $U_i = N^2L/2AE$. Substituindo essa equação na 14.47 e omitindo o índice i, temos:

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial P}\sum \frac{N^2L}{2AE}$$

Geralmente é mais fácil fazer a derivação antes da soma. Além disso, L, A e E são constantes para um elemento dado e, portanto, podemos escrever:

$$\boxed{\Delta = \sum N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE}} \tag{14.48}$$

Onde:

Δ = deslocamento do nó da treliça
P = força externa de *intensidade variável* aplicada ao nó da treliça na direção de Δ
N = força axial interna em um elemento, provocada *tanto* pela força $\mathbf{P}$ *quanto* pelas cargas sobre a treliça
L = comprimento de um elemento
A = área da seção transversal de um elemento
E = módulo de elasticidade do material

A fim de determinar a derivada parcial de $\partial N/\partial P$, será necessário tratar P como *variável* e não como quantidade numérica específica. Em outras palavras, cada força axial interna N deve ser expressa em função de P.

Por comparação, nota-se que a Equação 14.48 é semelhante à usada para o método do trabalho virtual, Equação 14.39 ($1 \cdot \Delta = \Sigma nNL/AE$), exceto pelo fato de que, aqui, n é substituído por $\partial N/\partial P$. Esses termos, n e $\partial N/\partial P$, no entanto, serão os *mesmos*, uma vez que representam a taxa de mudança da força axial interna em relação à carga P ou, em outras palavras, a força axial por carga unitária.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

Veja a seguir como determinar o deslocamento de qualquer nó em uma treliça usando o segundo teorema de Castigliano.

Força Externa P.

- Colocar uma força **P** no nó da treliça onde se deseja determinar o deslocamento. Admitir que essa força tenha *intensidade variável* e seja orientada ao longo da linha de ação do deslocamento.

Forças Internas N.

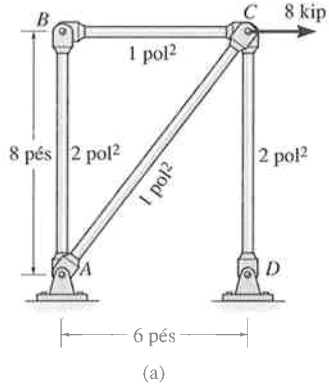
- Determinar a força N em cada elemento, provocada tanto pelas cargas reais (numéricas) quanto pela força variável P. Supor que as forças de tração são positivas e as de compressão, negativas.
- Encontrar a respectiva derivada parcial $\partial N/\partial P$ para cada elemento.
- Depois que N e $\partial N/\partial P$ tiverem sido determinadas, designar a P um valor numérico se ele tiver de fato substituído uma força real na treliça. Caso contrário, definir P igual a zero.

Segundo Teorema de Castigliano.

- Aplicar o teorema de Castigliano para determinar o deslocamento Δ. É importante manter os sinais algébricos para os valores correspondentes de N e $\partial N/\partial P$ ao substituir esses termos na equação.
- Se a soma resultante $\Sigma N(\partial N/\partial P)L/AE$ for positiva, Δ terá a mesma direção de **P**. Se resultar um valor negativo, Δ terá direção oposta à de **P**.

EXEMPLO 14.17

Determinar o deslocamento horizontal do nó C da treliça de aço mostrada na Figura 14.40*a*. A área da seção transversal de cada elemento está indicada. Adotar $E_{aço} = 29(10^3)$ ksi.



(a)

Figura 14.40

SOLUÇÃO

Força Externa P. Como se deseja determinar o deslocamento horizontal de C, aplica-se a esse nó uma força *variável* horizontal **P** (Figura 14.40*b*). Mais tarde essa força será igualada a um valor fixo de 8 kip.

Forças Internas N. Determina-se a força N em cada elemento usando o método das seções. Os resultados aparecem na Figura 14.40*b*. Ordenando os dados em forma tabular, temos:

Elemento	N	$\frac{\partial N}{\partial P}$	$N(P = 8 \text{ kip})$	L	$N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)L$
AB	0	0	0	8	0
BC	0	0	0	6	0
AC	$1{,}67P$	1,67	13,33	10	222,2
CD	$-1{,}33P$	−1,33	−10,67	8	113,8

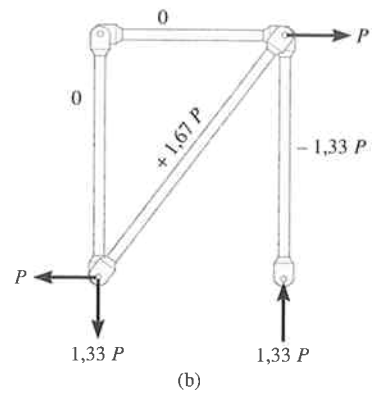
Segundo Teorema de Castigliano. Aplicando a Equação 14.48, temos:

$$\Delta_{Ch} = \Sigma N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE}$$

$$= 0 + 0 + \frac{(222{,}2 \text{ kip} \cdot \text{pés})(12 \text{ pol/pés})}{(1 \text{ pol}^2)\, 29(10^3) \text{ kip/pol}^2} + \frac{(113{,}8 \text{ kip} \cdot \text{pés})(12 \text{ pol/pés})}{(2 \text{ pol}^2)\, 29(10^3) \text{ kip/pol}^2}$$

$$= 0{,}115 \text{ pol}$$

Resposta

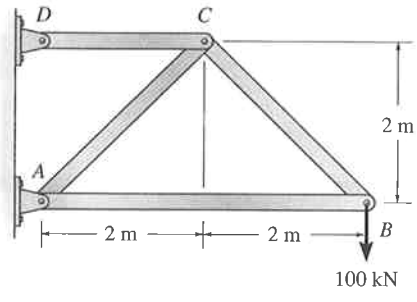


(b)

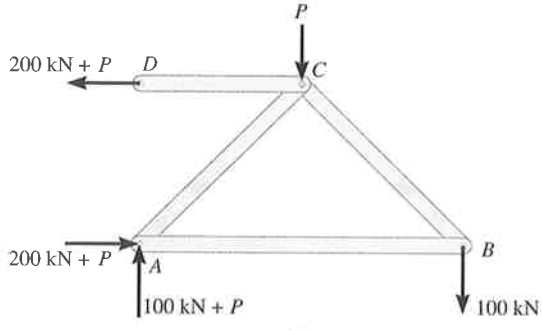
Figura 14.40

EXEMPLO 14.18

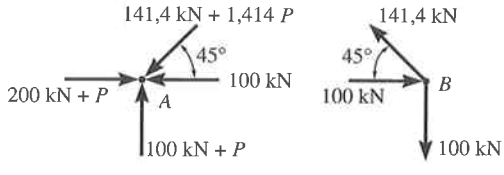
Determinar o deslocamento vertical do nó C da treliça de aço mostrada na Figura 14.41*a*. A área da seção transversal de cada elemento é $A = 400 \text{ mm}^2$ e $E_{est} = 200$ GPA.



(a)



(b)



(c)

Figura 14.41

SOLUÇÃO

Força Externa P. A força vertical **P** é aplicada à treliça no nó C, pois é aí que o deslocamento vertical deve ser determinado (Figura 14.41*b*).

Forças Internas N. As reações nos apoios A e D da treliça foram calculadas, e os resultados são mostrados na Figura 14.41*b*. As forças **N** em cada elemento foram determinadas pelo método dos nós (Figura 14.41*c*).[5] Por conveniência, esses resultados, juntamente com as derivadas parciais $\partial N/\partial P$, estão relacionados sob a forma tabular. Observe que, uma vez que **P** não existe como carga real na treliça, é preciso que $P = 0$.

[5] É mais conveniente analisar a treliça apenas com a carga de 100 kN sobre ela e, depois, analisá-la com a carga **P** aplicada. A soma dos resultados leva às forças **N**.

Elemento	N	$\frac{\partial N}{\partial P}$	$N(P=0)$	L	$N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)L$
AB	-100	0	-100	4	0
BC	141,4	0	141,4	2,828	0
AC	$-141,4 - 1,414\,P$	$-1,414$	$-141,4$	2,828	565,7
CD	$200 + P$	1	200	2	400
					Σ 965,7 kN · m

Segundo Teorema de Castigliano. Aplicando a Equação 14.48, temos:

$$\Delta_{C_v} = \Sigma N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE} = \frac{965{,}7 \text{ kN} \cdot \text{m}}{AE}$$

Substituindo os valores numéricos de A e E, obtemos:

$$\Delta_{C_v} = \frac{965{,}7 \text{ kN} \cdot \text{m}}{[400(10^{-6}) \text{ m}^2]\, 200(10^6) \text{ kN/m}^2}$$

$$= 0{,}01207 \text{ m} = 12{,}1 \text{ mm}$$ ***Resposta***

Esta solução deve ser comparada com a do Exemplo 14.11, por meio do método dos trabalhos virtuais.

PROBLEMAS

***14.112.** Resolver o Problema 14.60 usando o teorema de Castigliano.

14.113. Resolver o Problema 14.59 usando o teorema de Castigliano.

14.114. Resolver o Problema 14.61 usando o teorema de Castigliano.

14.115. Resolver o Problema 14.62 usando o teorema de Castigliano.

***14.116.** Resolver o Problema 14.64 usando o teorema de Castigliano.

14.117. Resolver o Problema 14.63 usando o teorema de Castigliano.

14.118. Resolver o Problema 14.65 usando o teorema de Castigliano.

14.119. Resolver o Problema 14.66 usando o teorema de Castigliano.

***14.120.** Resolver o Problema 14.68 usando o teorema de Castigliano.

14.121. Resolver o Problema 14.67 usando o teorema de Castigliano.

14.122. Resolver o Problema 14.69 usando o teorema de Castigliano.

14.123. Resolver o Problema 14.70 usando o teorema de Castigliano.

***14.124.** Resolver o Problema 14.72 usando o teorema de Castigliano.

14.125. Resolver o Problema 14.71 usando o teorema de Castigliano.

14.126. Resolver o Problema 14.73 usando o teorema de Castigliano.

14.127. Resolver o Problema 14.74 usando o teorema de Castigliano.

***14.128.** Resolver o Problema 14.76 usando o teorema de Castigliano.

14.129. Resolver o Problema 14.75 usando o teorema de Castigliano.

*14.10 TEOREMA DE CASTIGLIANO APLICADO A VIGAS

A energia de deformação interna de uma viga é provocada tanto pela flexão (momento fletor) quanto pelo cisalhamento. Entretanto, como apontado no Exemplo 14.7, se a viga for longa e esbelta, a energia de deformação devida ao cisalhamento é desprezível quando comparada com a provocada pela flexão (momento fletor). Nesse caso, a energia de deformação interna da viga é dada por $U_i = \int M^2\,dx/2EI$ — Equação 14.17. Substituindo em $\Delta_i = \partial U_i/\partial P_i$ (Equação 14.47) e omitindo o índice i, temos:

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial P}\int_0^L \frac{M^2\,dx}{2EI}$$

Em vez de elevar ao quadrado a expressão do momento interno M, integrar e depois calcular a derivada parcial, geralmente é mais fácil diferenciar antes da integração. Desde que E e I sejam constantes, teremos:

$$\boxed{\Delta = \int_0^L M\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)\frac{dx}{EI}} \qquad (14.49)$$

Onde:

Δ = deslocamento do ponto provocado pelas cargas reais que atuam sobre a viga
P = força externa de intensidade variável aplicada à viga na direção de Δ
M = momento interno da viga, expresso em função de x e provocado tanto pela força P quanto pelas cargas sobre a viga
E = módulo de elasticidade do material
I = momento de inércia da área da seção transversal calculado em torno do eixo neutro

Se for necessário determinar a inclinação θ da tangente em um ponto da linha elástica, deve-se calcular a derivada parcial do momento interno M em relação a um momento externo M' que atue no ponto. Nesse caso:

$$\boxed{\theta = \int_0^L M\left(\frac{\partial M}{\partial M'}\right)\frac{dx}{EI}} \qquad (14.50)$$

As equações apresentadas são semelhantes às usadas no método dos trabalhos virtuais (equações 14.42 e 14.43), exceto pelo fato de que m e m_θ foram substituídos aqui por $\partial M/\partial P$ e $\partial M/\partial M'$, respectivamente.

Ressalte-se que, se a carga sobre o elemento provocar nele energia de deformação significativa em virtude de carga axial, cisalhamento, momento fletor e momento de torção, os efeitos de todas essas cargas deverão ser incluídos quando se aplicar o teorema de Castigliano. Para tanto, usamos as funções da energia de deformação desenvolvidas na Seção 14.2, juntamente com suas derivadas parciais associadas. O resultado é:

$$\Delta = \Sigma N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE} + \int_0^L f_c V\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)\frac{dx}{GA} + \int_0^L M\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)\frac{dx}{EI} + \int_0^L T\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)\frac{dx}{GJ} \qquad (14.15)$$

O método de aplicação dessa fórmula geral é semelhante ao usado para aplicar as equações 14.49 e 14.50.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

Veja a seguir como aplicar o segundo teorema de Castigliano.

Força Externa P e Conjugado M'.

- Colocar uma força **P** na viga no ponto e orientada ao longo da linha de ação do deslocamento desejado.
- Se for necessário determinar a inclinação da tangente, colocar um conjugado **M'** no ponto.
- Supor que tanto **P** quanto **M'** tenham intensidade variável.

Momentos Internos M.

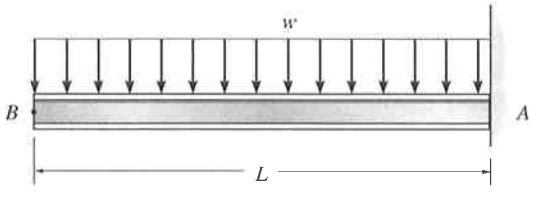
- Estabelecer coordenadas x apropriadas, válidas nas regiões da viga em que não haja descontinuidade de força, carga distribuída ou momento.
- Calcular os momentos internos M em função de P ou de M' e as derivadas parciais $\partial M/\partial P$ ou $\partial M/\partial M'$ para cada coordenada x.
- Depois que M e $\partial M/\partial P$ ou $\partial M/\partial M'$ tiverem sido determinadas, designar um valor numérico da P ou M' se eles de fato substituíram uma força ou conjugado real. Caso contrário, definir P ou M' igual a zero.

Segundo Teorema de Castigliano.

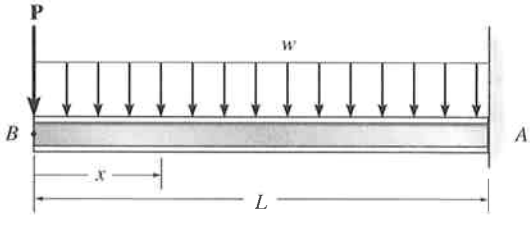
- Aplicar a Equação 14.49 ou a Equação 14.50 para determinar o deslocamento Δ ou θ. É importante manter os sinais algébricos para os valores correspondentes de M e $\partial M/\partial P$ ou $\partial M/\partial M'$.
- Se a soma resultante de todas as integrais definidas for positiva, Δ ou θ terão a mesma direção de **P** ou **M'**. Se resultar um valor negativo, Δ ou θ terão direção oposta à de **P** ou **M'**.

EXEMPLO 14.19

Determinar o deslocamento do ponto B na viga mostrada na Figura 14.42*a*. Considerar EI constante.



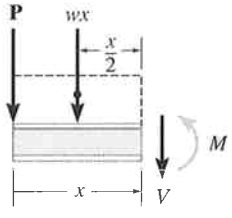
(a)



(b)

SOLUÇÃO

Força Externa P. A força vertical **P** é colocada em B como mostra a Figura 14.42*b*.



(c)

Figura 14.42

Momentos Internos M. É necessária uma única coordenada x para a solução, visto que não há descontinuidades de carregamento entre A e B. Usando o método das seções (Figura 14.42*c*), o momento interno e a derivada parcial são determinados como segue:

$$\circlearrowleft^{+} \Sigma M_{EN} = 0; \qquad M + wx\left(\frac{x}{2}\right) + P(x) = 0$$

$$M = -\frac{wx^2}{2} - Px$$

$$\frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

Definindo $P = 0$, temos:

$$M = \frac{-wx^2}{2} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

Segundo Teorema de Castigliano. Aplicando a Equação 14.49, temos:

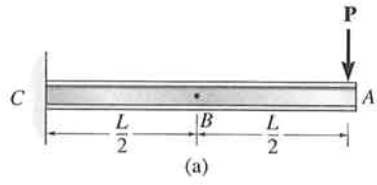
$$\Delta_B = \int_0^L M\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)\frac{dx}{EI} = \int_0^L \frac{(-wx^2/2)(-x)\,dx}{EI}$$

$$= \frac{wL^4}{8EI} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

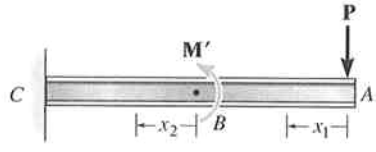
Observe a semelhança entre esta solução e a obtida pelo método dos trabalhos virtuais (Exemplo 14.14).

EXEMPLO 14.20

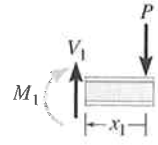
Determinar a inclinação do ponto B na viga mostrada na Figura 14.43*a*. Considerar EI constante.

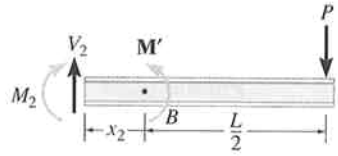


(a)



(b)





(c)

Figura 14.43

SOLUÇÃO

Momento Externo M′. Como se deseja determinar a inclinação no ponto B, coloca-se um momento externo $\mathbf{M}'$ sobre a viga nesse ponto (Figura 14.43*b*).

Momentos Internos M. Devem ser usadas duas coordenadas x_1 e x_2 para determinar os momentos internos na viga, visto que há uma descontinuidade, $\mathbf{M}'$, em B. Como mostra a Figura 14.43*b*, x_1 estende-se de A a B e x_2 de B a C. Pelo método das seções (Figura 14.43*c*), os momentos internos e as derivadas parciais são determinados como segue:

Para x_1,

$$\circlearrowleft^+ \Sigma M_{EN} = 0; \qquad -M_1 - Px_1 = 0$$

$$M_1 = -Px_1$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial M'} = 0$$

Para x_2,

$$\circlearrowleft^+ \Sigma M_{EN} = 0; \qquad -M_2 + M' - P\left(\frac{L}{2} + x_2\right) = 0$$

$$M_2 = M' - P\left(\frac{L}{2} + x_2\right)$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial M'} = 1$$

Segundo Teorema de Castigliano. Definindo $M' = 0$ e aplicando a Equação 14.50, temos:

$$\theta_B = \int_0^L M\left(\frac{\partial M}{\partial M'}\right)\frac{dx}{EI}$$

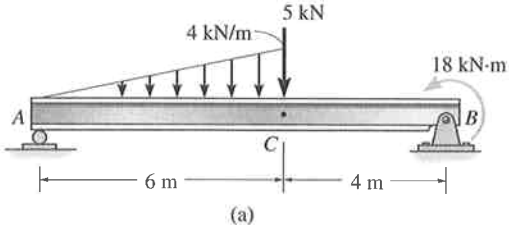
$$= \int_0^{L/2} \frac{(-Px_1)(0)\,dx_1}{EI} + \int_0^{L/2} \frac{-P[(L/2) + x_2](1)\,dx_2}{EI}$$

$$= -\frac{3PL^2}{8EI} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

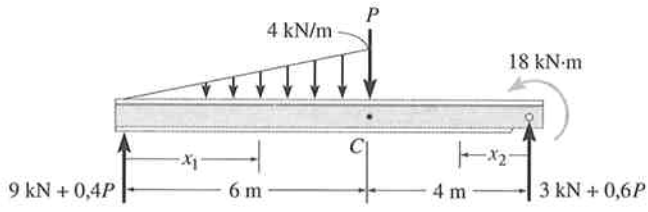
O sinal negativo indica que θ_B tem direção oposta à do momento $\mathbf{M}'$. Observe a semelhança entre esta solução e a do Exemplo 14.15.

EXEMPLO 14.21

Determinar o deslocamento vertical do ponto C na viga de aço mostrada na Figura 14.44*a*. Adotar $E_{est} = 200$ GPa, $I = 125(10^{-6})$ m^4.



(a)

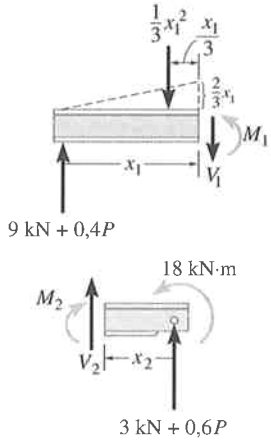


(b)

SOLUÇÃO

Força Externa P. A força vertical **P** é aplicada ao ponto C (Figura 14.44*b*). Posteriormente, essa força será definida como sendo igual ao valor fixo de 5 kN.

Momentos Internos M. Neste caso, são necessárias duas coordenadas x para a integração, visto que a carga é descontínua em C. Os momentos internos e as derivadas parciais são determinados pelo método das seções (Figura 14.44*c*), como segue:



(c)

Figura 14.44

Para x_1,

$$+\Sigma M_{EN} = 0; \quad M_1 + \frac{1}{3}x_1^2\left(\frac{x_1}{3}\right) - (9 + 0{,}4P)x_1 = 0$$

$$M_1 = (9 + 0{,}4P)x_1 - \frac{1}{9}x_1^3$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial P} = 0{,}4x_1$$

Para x_2,

$$\circlearrowleft + \Sigma M_{EN} = 0; \quad -M_2 + 18 + (3 + 0{,}6P)x_2 = 0$$

$$M_2 = 18 + (3 + 0{,}6P)x_2$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial P} = 0{,}6x_2$$

Segundo Teorema de Castigliano. Definindo $P = 5$ kN e aplicando a Equação 14.49, temos:

$$\Delta_{C_v} = \int_0^L M\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)\frac{dx}{EI}$$

$$= \int_0^6 \frac{(11x_1 - \frac{1}{9}x_1^3)(0{,}4x_1)\,dx_1}{EI} + \int_0^4 \frac{(18 + 6x_2)(0{,}6x_2)\,dx_2}{EI}$$

$$= \frac{410{,}9 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{[200(10^6) \text{ kN/m}^2]\,125(10^{-6}) \text{ m}^4}$$

$$= 0{,}0164 \text{ m} = 16{,}4 \text{ mm} \qquad \textit{Resposta}$$

PROBLEMAS

14.130. Resolver o Problema 14.77 usando o teorema de Castigliano.

14.131. Resolver o Problema 14.78 usando o teorema de Castigliano.

***14.132.** Resolver o Problema 14.84 usando o teorema de Castigliano.

14.133. Resolver o Problema 14.83 usando o teorema de Castigliano.

14.134. Resolver o Problema 14.88 usando o teorema de Castigliano.

14.135. Resolver o Problema 14.94 usando o teorema de Castigliano.

***14.136.** Resolver o Problema 14.92 usando o teorema de Castigliano.

14.137. Resolver o Problema 14.102 usando o teorema de Castigliano.

14.138. Resolver o Problema 14.98 usando o teorema de Castigliano.

14.139. Resolver o Problema 14.99 usando o teorema de Castigliano.

***14.140.** Resolver o Problema 14.96 usando o teorema de Castigliano.

14.141. Resolver o Problema 14.103 usando o teorema de Castigliano.

14.142. Resolver o Problema 14.106 usando o teorema de Castigliano.

14.143. Resolver o Problema 14.107 usando o teorema de Castigliano.

***14.144.** Resolver o Problema 14.108 usando o teorema de Castigliano.

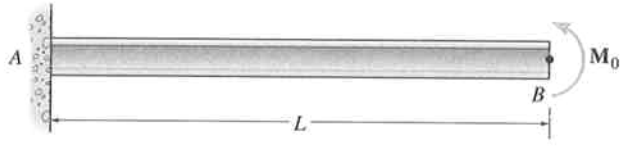
14.145. Resolver o Problema 14.109 usando o teorema de Castigliano.

14.146. Resolver o Problema 14.111 usando o teorema de Castigliano.

PROBLEMAS DE REVISÃO

14.147. A viga em balanço está submetida ao momento $\mathbf{M}_0$ aplicado em sua extremidade. Determinar o deslocamento da viga em B. Considerar EI constante e usar o método dos trabalhos virtuais.

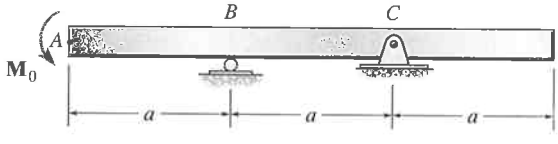
***14.148.** Resolver o Problema 14.147 usando o teorema de Castigliano.



Problemas 14.147/14.148

14.149. Usar o método dos trabalhos virtuais para determinar o deslocamento no ponto A. Considerar EI constante.

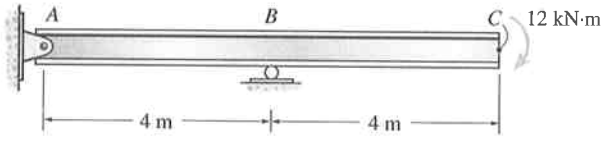
14.150. Resolver o Problema 14.149 usando o teorema de Castigliano.



Problemas 14.149/14.150

14.151. Determinar a inclinação do ponto C da viga de aço A-36. $I = 9{,}50(10^6)$ mm^4. Usar o método dos trabalhos virtuais.

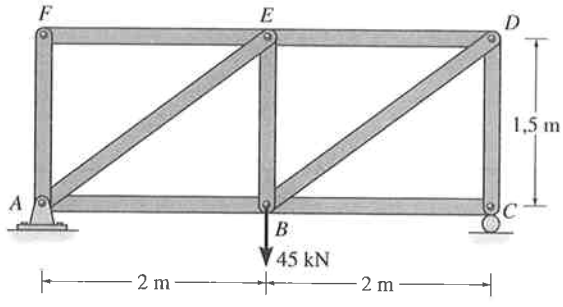
***14.152.** Resolver o Problema 14.151 usando o teorema de Castigliano.



Problemas 14.151/14.152

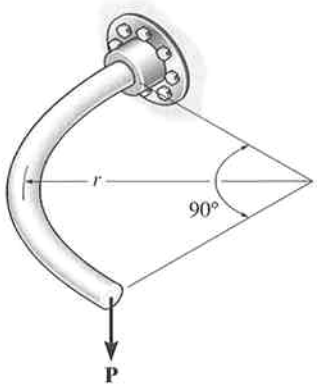
14.153. Determinar o deslocamento vertical da junta E. Para cada elemento, $A = 400$ mm^2, $E = 200$ GPa. Usar o método dos trabalhos virtuais.

14.154. Resolver o Problema 14.153 usando o teorema de Castigliano.



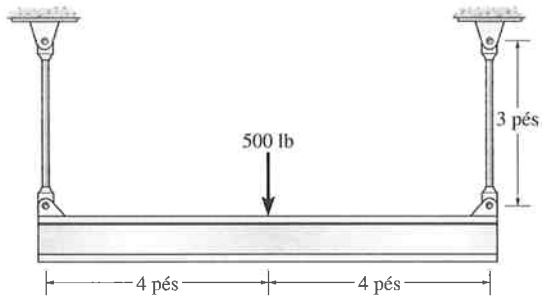
Problemas 14.153/14.154

14.155. Determinar a energia de deformação na barra curva *horizontal* devida à torção. Há uma força *vertical* **P** atuando na extremidade e JG é constante.



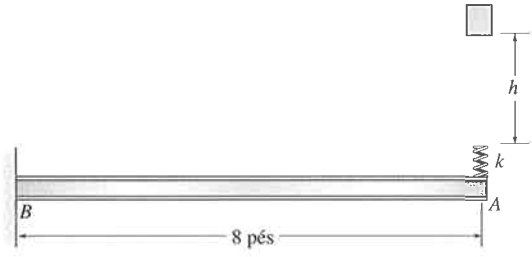
Problema 14.155

***14.156.** Determinar a energia de deformação total no conjunto de aço A-36. Considerar a energia de deformação axial nas duas hastes de 0,5 pol de diâmetro e a energia de deformação por flexão na viga, para a qual $I = 43{,}4\ \text{pol}^4$.



Problema 14.156

14.157. A viga construída com perfil W10 × 12 é feita de aço A-36 e está engastada na parede em B. A mola montada sobre ela tem rigidez k = 1.000 lb/pol. Se um peso de 8 lb for solto sobre a mola de uma altura h = 3 pés, determinar a tensão de flexão máxima desenvolvida na viga.



Problema 14.157

A PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DE UMA ÁREA

A.1 CENTRÓIDE DE UMA ÁREA

O ***centróide*** de uma área refere-se ao ponto que define o centro geométrico dessa área. Se ela tem forma arbitrária, como a da Figura A.1*a*, as coordenadas x e y que definem a localização do centróide C são determinadas por meio destas fórmulas:

$$\bar{x} = \frac{\int_A x\, dA}{\int_A dA} \qquad \bar{y} = \frac{\int_A y\, dA}{\int_A dA} \tag{A.1}$$

Os numeradores nessas equações representam o 'momento de primeira ordem' do elemento de área dA em torno dos eixos y e x, respectivamente (Figura A.1*b*); os denominadores, por sua vez, representam a área total A da forma.

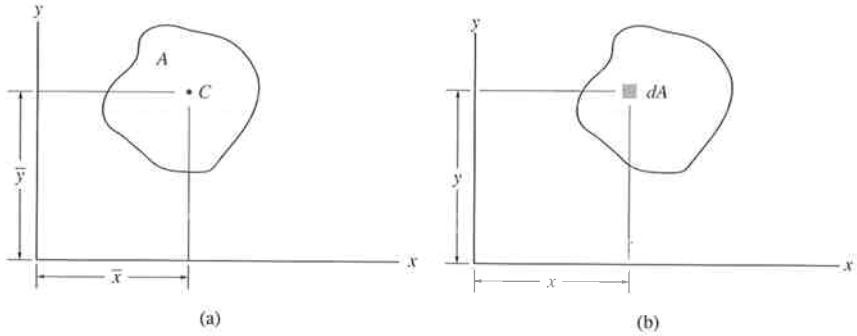


Figura A.1

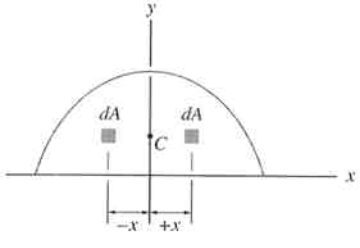


Figura A.2

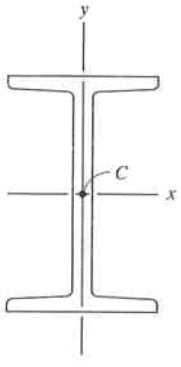


Figura A.3

Oberve que a localização de alguns centróides é especificada parcial ou totalmente pelas condições de simetria. Nos casos em que a área tem um eixo de simetria, seu centróide localiza-se ao longo daquele eixo. Por exemplo: o centróide C da área mostrada na Figura A.2 localiza-se ao longo do eixo y, uma vez que, para cada área elementar dA a uma distância $+x$ para a direita do eixo y, há um elemento idêntico a uma distância $-x$ para a esquerda. O momento total de todos os elementos em torno do eixo de simetria cancela-se; isto é, $\int x\, dA = 0$ (Equação A.1), de modo que $\bar{x} = 0$. Nos casos em que a forma tem dois eixos de simetria, o centróide localiza-se na interseção de tais eixos (Figura A.3). Com base no princípio de simetria ou na Equação A.1, relacionamos a localização do centróide de formas comuns no final do livro.

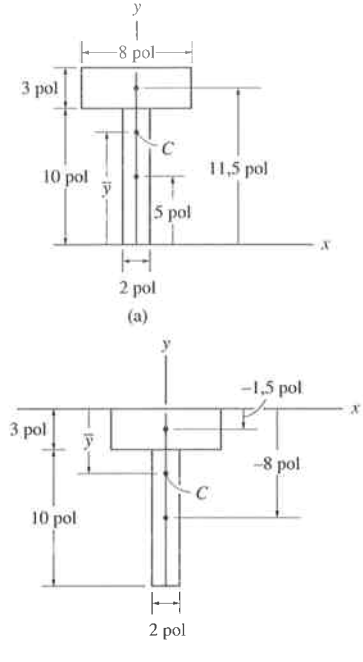
Áreas Compostas. Freqüentemente, uma área pode ser secionada ou dividida em várias partes de forma mais simples. Desde que a área e a localização do centróide de cada uma dessas 'formas compostas' sejam conhecidas, pode-se eliminar a necessidade da integração para determinar o centróide de toda a área. Nesse caso, devem ser usadas equações análogas à A.1, exceto pelo fato de que, aqui, símbolos de somatória finita substituirão os símbolos de integração; ou seja:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x} A}{\Sigma A} \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} A}{\Sigma A} \tag{A.2}$$

Nesse caso, $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ representam as *distâncias algébricas* ou coordenadas x, y do centróide de cada parte componente, e ΣA representa a soma das áreas das partes componentes ou simplesmente a *área total*. Em particular, se houver um furo ou uma região geométrica sem material na parte componente, esse furo ou região serão considerados parte componente adicional de área *negativa*. Além disso, como discutido acima, se a área total é simétrica em relação a um eixo, seu centróide localiza-se em tal eixo.

O exemplo seguinte ilustra a aplicação da Equação A.2.

EXEMPLO A.1



Localizar o centróide C da área da seção transversal da viga T mostrada na Figura A.4*a*.

SOLUÇÃO I

O eixo y foi posicionado ao longo do eixo de simetria, de modo que $\bar{x} = 0$ (Figura A.4*a*). Para obter $\bar{y}$ vamos definir o eixo x (eixo de referência) ao longo da base da área. A área foi dividida em dois retângulos como mostrado e a localização do centróide $\bar{y}$ de cada um foi definida. Aplicando a Equação A.2, temos:

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} A}{\Sigma A} = \frac{[5 \text{ pol}](10 \text{ pol})(2 \text{ pol}) + [11{,}5 \text{ pol}](3 \text{ pol})(8 \text{ pol})}{(10 \text{ pol})(2 \text{ pol}) + (3 \text{ pol})(8 \text{ pol})}$$

$$= 8{,}55 \text{ pol} \qquad \textit{Resposta}$$

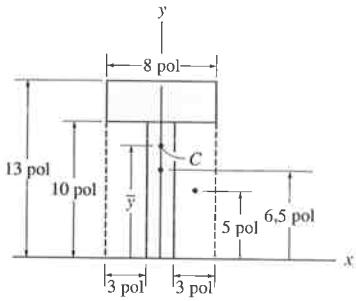
SOLUÇÃO II

Usando a mesma divisão de área, pode-se posicionar o eixo x na parte superior da área como mostra a Figura A.4*b*. Nesse caso:

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} A}{\Sigma A} = \frac{[-1{,}5 \text{ pol}](3 \text{ pol})(8 \text{ pol}) + [-8 \text{ pol}](10 \text{ pol})(2 \text{ pol})}{(3 \text{ pol})(8 \text{ pol}) + (10 \text{ pol})(2 \text{ pol})}$$

$$= -4{,}45 \text{ pol} \qquad \textit{Resposta}$$

O sinal negativo indica que, como esperado, C localiza-se *abaixo* da origem. Observe também que, pelas duas respostas, 8,55 pol + 4,45 pol = 13,0 pol, que é a altura da viga.



(c)

Figura A.4

SOLUÇÃO III

Também é possível considerar que a área da seção transversal seja um retângulo grande *menos* dois retângulos pequenos (Figura A.4*c*). Nesse caso, temos:

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} A}{\Sigma A} = \frac{[6{,}5 \text{ pol}](13 \text{ pol})(8 \text{ pol}) - 2[5 \text{ pol}](10 \text{ pol})(3 \text{ pol})}{(13 \text{ pol})(8 \text{ pol}) - 2(10 \text{ pol})(3 \text{ pol})}$$

$$= 8{,}55 \text{ pol}$$

Resposta

A.2 MOMENTO DE INÉRCIA DE UMA ÁREA

Ao calcular o centróide da área, consideramos o momento de primeira ordem dessa área em torno de um eixo; ou seja, foi necessário calcular uma integral da forma $\int x\, dA$. Alguns tópicos da resistência dos materiais exigem o cálculo de um momento de segunda ordem da área, isto é: $\int x^2 dA$. Essa integral é denominada ***momento de inércia*** da área. Para mostrar formalmente como se define o momento de inércia, consideremos a área A mostrada na Figura A.5, localizada no plano $x-y$. Por definição, os momentos de inércia do elemento infinitesimal dA em torno dos eixos x e y são $dI_x = y^2\, dA$ e $dI_y = x^2\, dA$, respectivamente. O momento de inércia para toda a área é determinado por integração, isto é:

$$I_x = \int_A y^2 dA$$
$$I_y = \int_A x^2 dA \qquad \text{(A.3)}$$

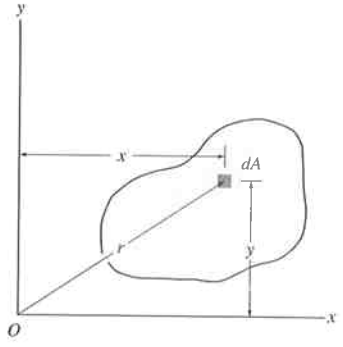


Figura A.5

Podemos também expressar o momento de segunda ordem do elemento infinitesimal em torno do pólo O ou do eixo z (Figura A.5). Isso é denominado *momento polar de inércia* ($dJO = r^2 dA$). Aqui, r é a distância perpendicular do pólo (eixo z) ao elemento dA. O momento polar de inércia para toda a área é:

$$J_O = \int_A r^2 dA = I_x + I_y \qquad \text{(A.4)}$$

A relação entre J_O e I_x, I_y é possível visto que $r^2 = x^2 + y^2$ (Figura A.5).

Pelas deduções acima, vê-se que I_x, I_y e J_O serão *sempre positivos*, visto que envolvem o produto do quadrado da distância pela área. Além disso, as unidades de momento de inércia envolvem o comprimento elevado à quarta potência, isto é, m^4, mm^4 ou $pé^4$, pol^4.

Por meio das equações acima, os momentos de inércia para algumas formas comuns de áreas foram calculados em torno dos *eixos do centróide* e estão relacionados no final do livro.

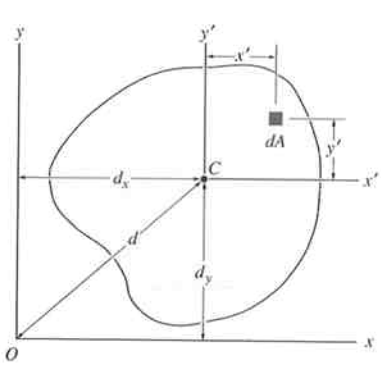


Figura A.6

Teorema do Eixo Paralelo de uma Área. Se o momento de inércia de uma área em torno do eixo do centróide for conhecido, podemos determinar o momento de inércia dessa área em torno de um eixo paralelo correspondente, por meio do *teorema do eixo paralelo*. Para deduzir tal teorema, imaginemos que precisamos determinar o momento de inércia em torno do eixo x da área

sombreada na Figura A.6. Nesse caso, um elemento infinitesimal dA localiza-se a uma distância arbitrária y' do eixo x' do centróide, enquanto a *distância fixa* entre os eixos paralelos x e x' é definida como d_y. Como o momento de inércia de dA em torno do eixo x é $dI_x = (y' + dy)^2 dA$, então, para toda a área:

$$I_x = \int_A (y' + d_y)^2 dA = \int_A y'^2 dA + 2d_y \int_A y' dA + d_y^2 \int_A dA$$

O primeiro termo da direita representa o momento de inércia da área em torno do eixo x', $\bar{I}_{x'}$. O segundo termo é nulo, uma vez que o eixo x' passa através da área do centróide C, isto é, $\int y' dA = \bar{y}A = 0$, pois $\bar{y} = 0$. O resultado final é, portanto:

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2 \tag{A.5}$$

Uma expressão semelhante pode ser escrita para I_y, isto é:

$$I_y = \bar{I}_{y'} + Ad_x^2 \tag{A.6}$$

Finalmente, para o momento polar de inércia em torno de um eixo perpendicular ao plano x–y e passando pelo pólo O (eixo z) — Figura A.6, temos:

$$J_O = \bar{J}_C + Ad^2 \tag{A.7}$$

O formato das equações acima diz que o momento de inércia de uma área em torno de um eixo é igual à área do momento de inércia em torno de um eixo paralelo que passe pelo 'centróide' mais o produto da área pelo quadrado da distância perpendicular entre os eixos.

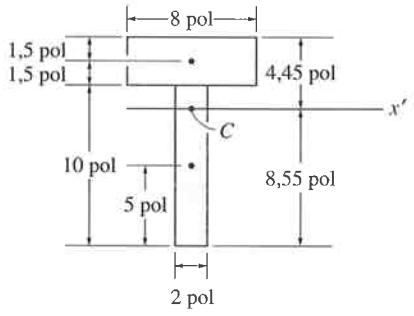
Áreas Compostas. Várias áreas de seção transversal consistem em uma série de formas mais simples interligadas, tais como retângulos, triângulos e semicírculos. Desde que o momento de inércia de cada uma dessas formas seja conhecido, ou possa ser calculado em torno de um eixo comum, o momento de inércia da 'área composta' poderá ser determinado como a *soma algébrica* dos momentos de inércia de suas partes componentes.

A fim de determinar adequadamente o momento de inércia de tal área em torno de um eixo específico, é necessário antes dividi-la em suas partes componentes e indicar a distância perpendicular do eixo de referência ao eixo paralelo do centróide de cada parte. Usando a tabela no final do livro, calcula-se então o momento de inércia de cada parte em torno do eixo do centróide. Se esse eixo não coincidir com o eixo especificado, deve-se usar o teorema do eixo paralelo, $I = \bar{I} + Ad^2$, para determinar o momento de inércia da parte em torno do eixo dado. O momento de inércia de toda a área, em torno desse eixo, é então determinado somando-se os resultados de suas partes componentes. Em particular, se uma parte componente tiver um 'furo', seu momento de inércia será determinado 'subtraindo-se' o momento de inércia do furo do momento de inércia de toda a área incluindo o furo.

Os exemplos seguintes ilustram a aplicação desse método.

EXEMPLO A.2

Determinar o momento de inércia da área da seção transversal em torno do eixo x' do centróide da viga T mostrada na Figura A.7*a*.



(a)

Figura A.7

SOLUÇÃO I

A área foi segmentada em dois retângulos como mostra a Figura A.7*a*, e a distância do eixo x' para cada eixo do centróide foi determinada. Segundo a tabela no final do livro, o momento de inércia de um retângulo em torno do eixo de seu centróide é $I = \frac{1}{12}bh^3$. Aplicando o teorema do eixo paralelo (Equação A.5) a cada retângulo e somando os resultados, temos:

$$I = \Sigma \bar{I}_{x'} + Ad_y^2$$

$$= \left[\frac{1}{12}(2 \text{ pol})(10 \text{ pol})^3 + (2 \text{ pol})(10 \text{ pol})(8{,}55 \text{ pol} - 5 \text{ pol})^2\right]$$

$$+ \left[\frac{1}{12}(8 \text{ pol})(3 \text{ pol})^3 + (8 \text{ pol})(3 \text{ pol})(4{,}45 \text{ pol} - 1{,}5 \text{ pol})^2\right]$$

$$I = 646 \text{ pol}^4 \qquad \textit{Resposta}$$

SOLUÇÃO II

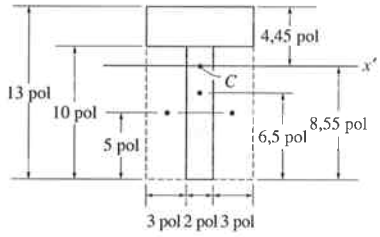
A área pode ser considerada como um retângulo grande menos dois retângulos pequenos, como mostra o tracejado da Figura A.7*b*. Temos:

$$I = \Sigma \bar{I}_{x'} + Ad_y^2$$

$$= \left[\frac{1}{12}(8 \text{ pol})(13 \text{ pol})^3 + (8 \text{ pol})(13 \text{ pol})(8{,}55 \text{ pol} - 6{,}5 \text{ pol})^2\right]$$

$$- 2\left[\frac{1}{12}(3 \text{ pol})(10 \text{ pol})^3 + (3 \text{ pol})(10 \text{ pol})(8{,}55 \text{ pol} - 5 \text{ pol})^2\right]$$

$$I = 646 \text{ pol}^4 \qquad \textit{Resposta}$$



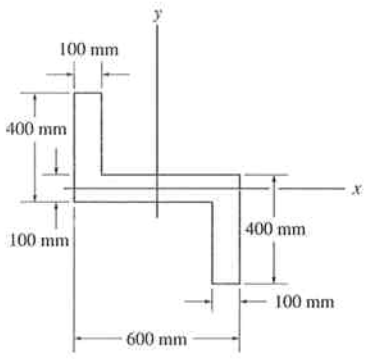
(b)

EXEMPLO A.3

Determinar os momentos de inércia da área da seção transversal em torno dos eixos x e y do centróide da viga mostrada na Figura A.8*a*.

SOLUÇÃO

A seção transversal pode ser considerada como as três áreas retangulares compostas A, B e D mostradas na Figura A.8*b*. Para fins de cálculo, marcou-se na figura o centróide de cada um desses retângulos. Pela tabela no final do livro, o momento de inércia de um retângulo em torno do eixo de seu centróide é $I = \frac{1}{12}bh^3$. Então, aplicando o teorema do eixo paralelo aos retângulos A e D, chegamos aos seguintes cálculos:



(a)

Retângulo A:

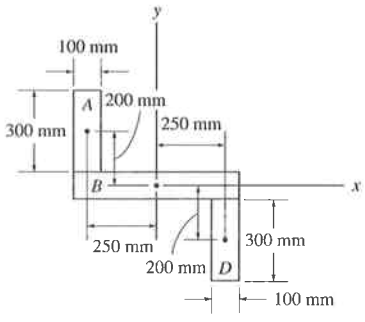
$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2 = \frac{1}{12}(100\text{ mm})(300\text{ mm})^3 + (100\text{ mm})(300\text{ mm})(200\text{ mm})^2$$
$$= 1{,}425\ (10^9)\ \text{mm}^4$$

$$I_y = \bar{I}_{y'} + Ad_x^2 = \frac{1}{12}(300\text{ mm})(100\text{ mm})^3 + (100\text{ mm})(300\text{ mm})(250\text{ mm})^2$$
$$= 1{,}90\ (10^9)\ \text{mm}^4$$

Retângulo B:

$$I_x = \frac{1}{12}(600\text{ mm})(100\text{ mm})^3 = 0{,}05(10^9)\ \text{mm}^4$$

$$I_y = \frac{1}{12}(100\text{ mm})(600\text{ mm})^3 = 1{,}80(10^9)\ \text{mm}^4$$



(b)

Figura A.8

Retângulo D:

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2 = \frac{1}{12}(100\text{ mm})(300\text{ mm})^3 + (100\text{ mm})(300\text{ mm})(200\text{ mm})^2$$
$$= 1{,}425\ (10^9)\ \text{mm}^4$$

$$I_y = \bar{I}_{y'} + Ad_x^2 = \frac{1}{12}(300\text{ mm})(100\text{ mm})^3 + (100\text{ mm})(300\text{ mm})(250\text{ mm})^2$$
$$= 1{,}90\ (10^9)\ \text{mm}^4$$

Os momentos de inércia para toda a seção transversal são:

$$I_x = 1{,}425(10^9) + 0{,}05(10^9) + 1{,}425(10^9)$$
$$= 2{,}90\ (10^9)\ \text{mm}^4 \qquad \textit{Resposta}$$

$$I_y = 1{,}90(10^9) + 1{,}80(10^9) + 1{,}90(10^9)$$
$$= 5{,}60\ (10^9)\ \text{mm}^4 \qquad \textit{Resposta}$$

A.3 PRODUTO DE INÉRCIA DE UMA ÁREA

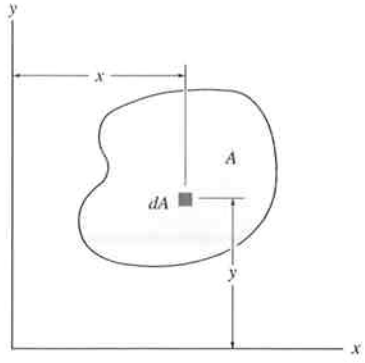


Figura A.9

Em geral, o momento de inércia de uma área é diferente para cada eixo em torno do qual é calculado. Em algumas aplicações de projeto mecânico ou estrutural é necessário conhecer a orientação dos eixos que levam, respectivamente, aos momentos de inércia máximo e mínimo da área. O método de determinação será discutido na Seção A.4. Para aplicá-lo, no entanto, deve-se calcular primeiro o produto de inércia da área, bem como seus momentos de inércia para os eixos dados x e y.

O ***produto de inércia*** do elemento infinitesimal dA da Figura A.9, que está localizado no ponto (x, y), é definido como $dI_{xy} = xy\ dA$. Assim, o produto de inércia para toda a área é:

$$I_{xy} = \int_A xy\ dA \tag{A.8}$$

Como o momento de inércia, o produto de inércia tem unidades de comprimento elevadas à quarta potência, isto é, m^4, mm^4 ou $pé^4$, pol^4. Entretanto, como x ou y podem ser quantidades negativas, enquanto o elemento de área é sempre positivo, o produto de inércia pode ser positivo, negativo ou nulo, dependendo da localização e da orientação dos eixos de coordenadas. Por

exemplo: o produto de inércia I_{xy} de uma área será *nulo* se x ou y forem um eixo de *simetria* da área. Para mostrar esse caso, consideremos a área sombreada da Figura A.10, onde para cada elemento dA localizado no ponto (x, y) há um elemento dA localizado em $(x, -y)$. Como os produtos de inércia desses elementos são, respectivamente, $xy\ dA$ e $-xy\ dA$, sua soma algébrica ou a integração de todos os elementos da área escolhidos dessa maneira farão com que eles se cancelem uns aos outros. Conseqüentemente, o produto de inércia da área total vai se tornar nulo. Resulta também da definição de I_{xy} que o 'sinal' dessa quantidade depende do quadrante onde a área se localiza. Como mostra a Figura A.11, o sinal de I_{xy} muda à medida que a área gira de um quadrante para o próximo.

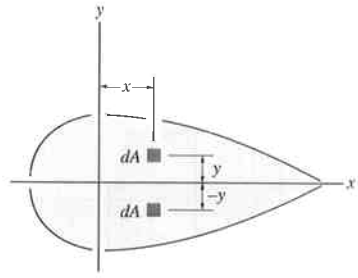


Figura A.10

Teorema do Eixo Pralelo. Consideremos a área sombreada mostrada na Figura A.12, onde x' e y' representam um conjunto de eixos do centróide e x e y representam um conjunto de eixos paralelos. Como o produto de inércia de dA em relação aos eixos x e y é $dI_{xy} = (x' + dx)(y' + dy)\ dA$, então, para toda a área:

$$I_{xy} = \int_A (x' + d_x)(y' + d_y)\ dA$$

$$= \int_A x'y'\ dA + d_x \int_A y'\ dA + d_y \int_A x'\ dA + d_x d_y \int_A dA$$

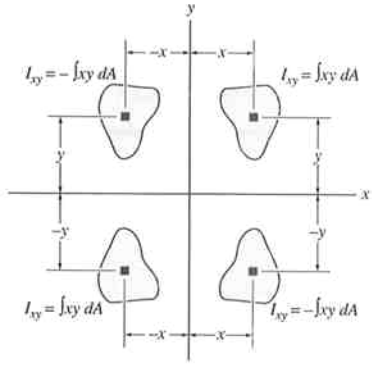


Figura A.11

O primeiro termo da direita representa o produto de inércia da área em relação ao eixo do centróide, $\bar{I}_{x'y'}$. O segundo e terceiro termos são nulos, uma vez que os momentos da área são calculados em torno do eixo do centróide. Compreendendo que a quarta integral representa a área total A, temos como resultado final:

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + A d_x d_y \qquad \text{(A.9)}$$

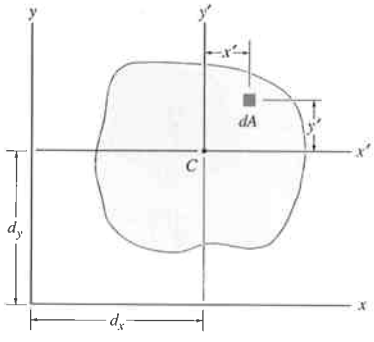


Figura A.12

Observe a semelhança entre essa equação e o teorema do eixo paralelo para momentos de inércia. Em particular, é importante que os *sinais algébricos* de d_x e d_y sejam mantidos quando se aplica a Equação A.9. Como ilustra o exemplo a seguir, o teorema do eixo paralelo encontra aplicação importante na determinação do produto de inércia de uma *área composta* em relação ao conjunto de eixos x e y.

EXEMPLO A.4

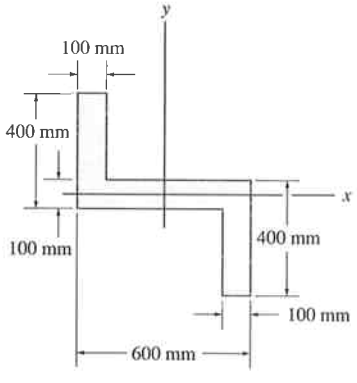
Determinar o produto de inércia da área da seção transversal em torno dos eixos x e y do centróide da viga mostrada na Figura A.13*a*.

SOLUÇÃO

Como no Exemplo A.3, a seção transversal pode ser considerada como três áreas retangulares compostas A, B e D (Figura A.13*b*). As coordenadas do centróide de cada um desses retângulos aparecem na figura. Devido à simetria, o produto de inércia de *cada retângulo* é *nulo* em torno de um conjunto de eixos x', y' que passa pelo centróide do retângulo. Então, a aplicação do teorema do eixo paralelo a cada retângulo resulta em:

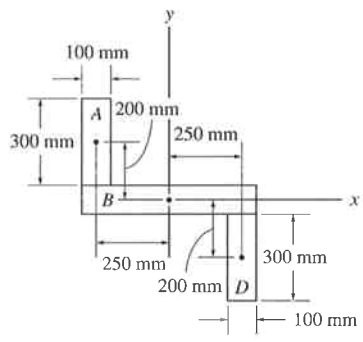
Retângulo A:

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + A d_x d_y$$
$$= 0 + (300\text{ mm})(100\text{ mm})(-250\text{ mm})(200\text{ mm})$$
$$= -1{,}50(10^9)\text{ mm}^4$$



(a)

Figura A.13



(b)

Figura A.13

Retângulo B:

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + Ad_x d_y$$
$$= 0 + 0$$
$$= 0$$

Retângulo D:

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + Ad_x d_y$$
$$= 0 + (300 \text{ mm})(100 \text{ mm})(250 \text{ mm})(-200 \text{ mm})$$
$$= -1{,}50(10^9) \text{ mm}^4$$

O produto de inércia para toda a seção transversal é:

$$I_{xy} = [-1{,}50(10^9)] + 0 + [-1{,}50(10^9)]$$
$$= -3{,}00(10^9) \text{ mm}^{44}$$ ***Resposta***

A.4 MOMENTOS DE INÉRCIA DE UMA ÁREA EM TORNO DE EIXOS INCLINADOS

Em projetos mecânicos ou estruturais, às vezes é necessário calcular os momentos e o produto de inércia $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ para uma área em relação a um conjunto de eixos inclinados x' e y', quando os valores de θ, I_x, I_y e I_{xy} são *conhecidos*. Como mostra a Figura A.14, as coordenadas do elemento de área dA são relacionadas pelas *equações de transformação*:

$$x' = x \cos\theta + y \operatorname{sen}\theta$$
$$y' = y \cos\theta - x \operatorname{sen}\theta$$

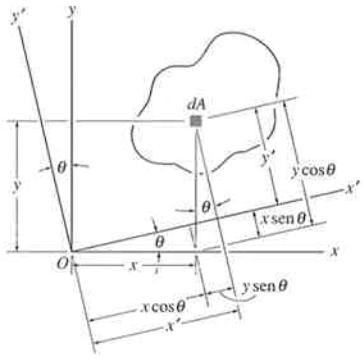


Figura A.14

A partir dessas equações, os momentos e o produto de inércia de dA em torno dos eixos x' e y' tornam-se:

$$dI_{x'} = y'^2\, dA = (y \cos\theta - x \operatorname{sen}\theta)^2\, dA$$
$$dI_{y'} = x'^2\, dA = (x \cos\theta + y \operatorname{sen}\theta)^2\, dA$$
$$dI_{x'y'} = x'y'\, dA = (x \cos\theta + y \operatorname{sen}\theta)(y \cos\theta - x \operatorname{sen}\theta)\, dA$$

Expandindo cada expressão e integrando, entendendo que $I_x = \int y^2\, dA$, $I_y = \int x^2\, dA$ e $I_{xy} = \int xy\, dA$, obtemos:

$$I_{x'} = I_x \cos^2\theta + I_y \operatorname{sen}^2\theta - 2I_{xy} \operatorname{sen}\theta \cos\theta$$
$$I_{y'} = I_x \operatorname{sen}^2\theta + I_y \cos^2\theta + 2I_{xy} \operatorname{sen}\theta \cos\theta$$
$$I_{x'y'} = I_x \operatorname{sen}\theta \cos\theta - I_y \operatorname{sen}\theta \cos\theta + I_{xy}(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$$

Essas equações podem ser simplificadas por meio das identidades trigonométricas $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$ e $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$ e, dessa maneira:

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \operatorname{sen} 2\theta$$
$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \qquad \text{(A.10)}$$
$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$$

Observe que, se somarmos a primeira e a segunda equações, veremos que o momento polar de inércia em torno do eixo z que passa pelo ponto O *independe* da orientação dos eixos x' e y', isto é:

$$J_O = I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y$$

Momentos Principais de Inércia. Pela Equação A.10 pode-se ver que $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ dependem do ângulo de inclinação θ dos eixos x' e y'. Agora vamos determinar a orientação desses eixos em torno dos quais os momentos de inércia da área ($I_{x'}$ e $I_{y'}$) chegam ao máximo e ao mínimo. Esse conjunto de eixos particular é denominado ***eixos principais*** de inércia da área, e os momentos de inércia a eles correspondentes são chamados *momentos de inércia principais*. Em geral, há um conjunto de eixos principais para cada origem escolhida O; entretanto, o centróide da área é a localização mais importante para O.

Determina-se o ângulo $\theta = \theta_p$, que define a orientação dos eixos principais da área, diferenciando a primeira das equações A.10 em relação a θ e igualando o resultado a zero. Assim:

$$\frac{dI_{x'}}{d\theta} = -2\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right) \operatorname{sen} 2\theta - 2\, I_{xy} \cos 2\theta = 0$$

Portanto, em $\theta = \theta_p$:

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{-I_{xy}}{(I_x - I_y)/2} \tag{A.11}$$

Essa equação tem duas raízes, θ_{p_1} e θ_{p_2}, distantes 90° uma da outra e, desse modo, especificam a inclinação de cada eixo principal.

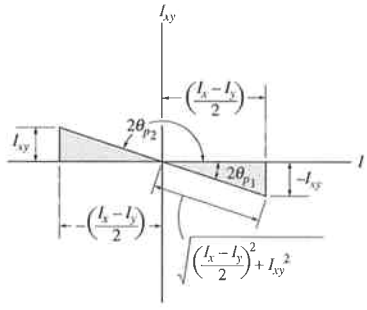


Figura A.15

O seno e o cosseno de $2\theta_{p_1}$ e $2\theta_{p_2}$ são obtidos por meio dos triângulos mostrados na Figura A.15, que se baseiam na Equação A.11. Se essas relações trigonométricas forem substituídas na primeira ou na segunda das equações A.10 e simplificadas, o resultado será:

$$I_{\substack{\text{máx} \\ \text{mín}}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \tag{A.12}$$

Conforme o sinal escolhido, o resultado produz o momento de inércia máximo ou mínimo da área. Além disso, se as relações trigonométricas acima para θ_{p_1} e θ_{p_2} forem substituídas na terceira das equações A.10, veremos que $I_{x'y'} = 0$; ou seja, o *produto de inércia em relação aos eixos principais é nulo*. Como ressaltado na Seção A.3, o produto de inércia é nulo em relação a quaisquer eixos simétricos e, assim, conclui-se que *qualquer eixo simétrico representa um eixo principal de inércia da área*.

Observe também que as equações deduzidas nesta seção são semelhantes às equações de transformação de tensão e deformação desenvolvidas nos capítulos 9 e 10, respectivamente. O exemplo a seguir ilustra sua aplicação.

EXEMPLO A.5

Determinar os momentos principais de inércia para a área da seção transversal da viga mostrada na Figura A.16, em relação a um eixo que passa pelo centróide C.

SOLUÇÃO

Os momentos e o produto de inércia da seção transversal em relação aos eixos x e y foram calculados nos exemplos A.3 e A.4. Os resultados são:

$$I_x = 2{,}90(10^9)\ \text{mm}^4 \quad I_y = 5{,}60(10^9)\ \text{mm}^4 \quad I_{xy} = -3{,}00(10^9)\ \text{mm}^4$$

Usando a Equação A.11, temos que os ângulos de inclinação dos eixos principais x' e y' são:

$$\text{tg}\ 2\theta_p = \frac{-I_{xy}}{(I_x - I_y)/2} = \frac{3{,}00(10^9)}{[2{,}90(10^9) - 5{,}60(10^9)]/2} = -2{,}22$$

$$2\theta_{p_1} = 114{,}2° \quad \text{e} \quad 2\theta_{p_2} = -65{,}8°$$

Assim, como mostra a Figura A.16:

$$\theta_{p_1} = 57{,}1° \quad \text{e} \quad \theta_{p_2} = -32{,}9°$$

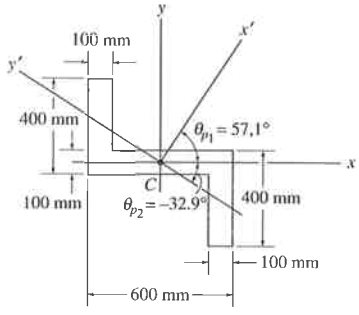


Figura A.16

Os momentos principais de inércia em relação aos eixos x' e y' são determinados pela Equação A.12. Então:

$$I_{\substack{\text{máx}\\\text{mín}}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$= \frac{2{,}90(10^9) + 5{,}60(10^9)}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{2{,}90(10^9) - 5{,}60(10^9)}{2}\right]^2 + [-3{,}00(10^9)]^2}$$

$$= 4{,}25(10^9) \pm 3{,}29(10^9)$$

ou:

$$I_{\text{máx}} = 7{,}54(10^9)\ \text{mm}^4 \quad I_{\text{mín}} = 0{,}960(10^9)\ \text{mm}^4 \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Especificamente, o momento de inércia máximo ($I_{\text{máx}} = 7{,}54(10^9)$) ocorre em relação ao eixo x' (eixo maior), pois, *por inspeção*, nota-se que a maior parte da área da seção transversal está mais afastada desse eixo. Para provar a afirmação, substituir os dados pela primeira das equações A.10, considerando $\theta = 57{,}1°$.

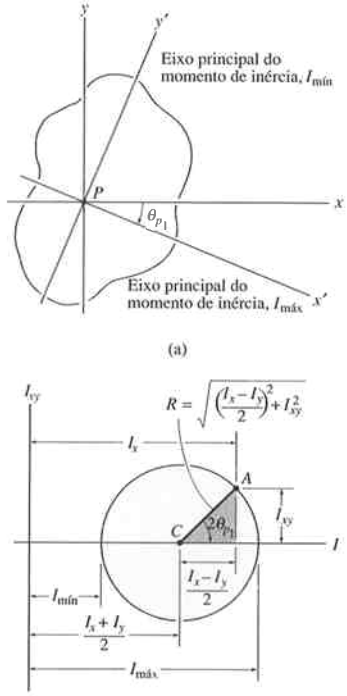


Figura A.17

A.5 CÍRCULO DE MOHR PARA MOMENTOS DE INÉRCIA

A solução gráfica das equações de A.10 a A.12 é conveniente de usar e, em geral, fácil de lembrar. Elevando ao quadrado a primeira e a terceira das equações A.10 e somando, vê-se que:

$$\left(I_{x'} - \frac{I_x + I_y}{2}\right)^2 + I_{x'y'}^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2 \qquad \text{(A.13)}$$

Em qualquer problema, $I_{x'}$ e $I_{x'y'}$ são *variáveis* e I_x, I_y e I_{xy} são *constantes conhecidas*. Desse modo, a Equação A.13 pode ser escrita de forma compacta como:

$$(I_{x'} - a)^2 + I_{x'y'}^2 = R^2$$

Quando essa equação é montada, o gráfico resultante tem a forma de um *círculo* com raio:

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

e cujo centro localiza-se no ponto $(a, 0)$, onde $a = (I_x + I_y)/2$. O círculo assim construído denomina-se *círculo de Mohr*. Sua aplicação é semelhante à usada para as transformações da tensão e da deformação, desenvolvidas nos capítulos 9 e 10, respectivamente.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

Usa-se o círculo de Mohr neste caso sobretudo porque ele representa um modo conveniente de transformar I_x, I_y e I_{xy} nos momentos principais de inércia. Veja a seguir como realizar tal transformação.

Calcular I_x, I_y e I_{xy}. Estabelecer os eixos x, y com origem no ponto de interesse P, usualmente o centróide, e determinar I_x, I_y e I_{xy} (Figura A.17*a*).

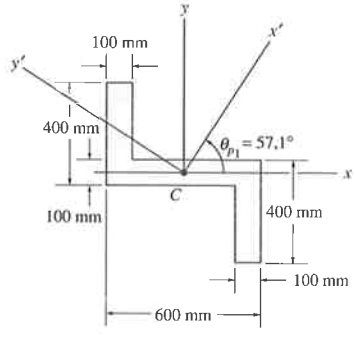
Construir o Círculo. Estabelecer um sistema de coordenadas retangular tal que a abscissa represente o momento de inércia e a ordenada represente o produto de inércia I_{xy} (Figura A.17*b*). Determinar o centro do círculo, C, localizado a uma distância $(I_x + I_y)/2$ da origem, e plotar o 'ponto de referência' A com as coordenadas (I_x, I_{xy}). Por definição, I_x é sempre positivo, enquanto I_{xy} poderá ser positivo ou negativo. Ligar o ponto de referência A ao centro do círculo e determinar a distância CA por trigonometria. Essa distância representa o raio do círculo (Figura A.17*b*). Finalmente, traçar o círculo.

Momentos Principais de Inércia. Os pontos onde o círculo intercepta a abscissa informam os valores dos momentos principais de inércia $I_{mín}$ e $I_{máx}$. Observar que o *produto de inércia será nulo nesses pontos* (Figura A.17*b*).

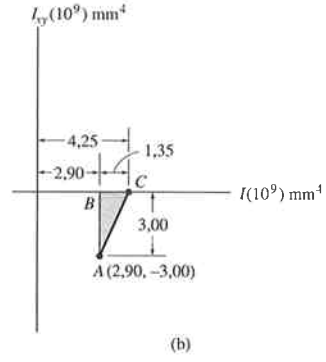
Para encontrar a direção do eixo principal maior, determina-se por trigonometria o ângulo $2\theta_{p_1}$, *medido a partir do raio CA para o eixo I positivo* (Figura A.17*b*). Esse ângulo é o dobro do ângulo entre o eixo x e o eixo do momento de inércia máximo $I_{máx}$ (Figura A.17*a*). Tanto o ângulo no círculo, $2\theta_{p_1}$, como o ângulo na área, θ_{p_1}, *devem ser medidos no mesmo sentido*, como mostra a Figura A.17. O eixo menor define o momento de inércia mínimo $I_{mín}$, o qual é perpendicular ao eixo maior, que define $I_{máx}$.

EXEMPLO A.6

Usar o círculo de Mohr para determinar os momentos principais de inércia da área da seção transversal mostrada na Figura A.18*a*, em relação aos eixos que passam pelo centróide C.



(a)



(b)

Figura A.18

SOLUÇÃO

Cálculo de I_x, I_y e I_{xy}. Os momentos e o produto de inércia em relação aos eixos x, y mostrados na Figura A.18*a* foram determinados nos exemplos A.3 e A.4. Os resultados são $I_x = 2{,}90(10^9)$ mm^4, $I_y = 5{,}60(10^9)$ mm^4 e $I_{xy} = -3{,}00(10^9)$ mm^4.

Construção do Círculo. Os eixos I e I_{xy} são mostrados na Figura A.18*b*. O centro do círculo, C, localiza-se a uma distância $(I_x + I_y)/2 = (2{,}90 + 5{,}60)/2 = 4{,}25$ da origem. Se ligamos o ponto de referência $A(2{,}90, -3{,}00)$ ao ponto C, podemos determinar o raio CA pelo triângulo sombreado CBA por meio do teorema de Pitágoras:

$$CA = \sqrt{(1{,}35)^2 + (-3{,}00)^2} = 3{,}29$$

O círculo foi construído na Figura A.18*c*.

Momentos Principais de Inércia. O círculo intercepta o eixo I nos pontos [(7,54), 0] e [(0,960), 0]. Então:

$$I_{máx} = 7{,}54(10^9) \text{ mm}^4 \qquad \textit{Resposta}$$
$$I_{mín} = 0{,}960(10^9) \text{ mm}^4 \qquad \textit{Resposta}$$

Como mostra a Figura A.18*c*, determina-se o ângulo $2\theta_{p_1}$ com base no círculo, medindo-o no *sentido anti-horário*, a partir de CA e na direção *positiva* do eixo I. Então:

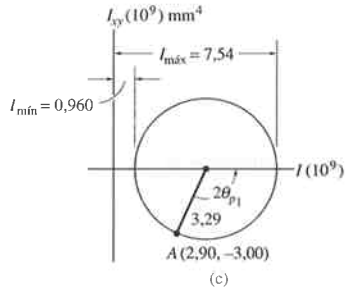


Figura A.18

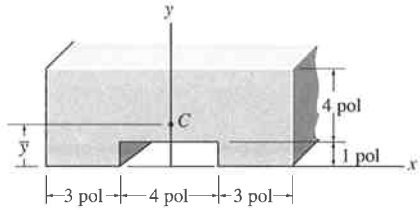
$$2\theta_{p_1} = 180° - \text{tg}^{-1}\left(\frac{|BA|}{|BC|}\right) = 180° - \text{tg}^{-1}\left(\frac{3{,}00}{1{,}35}\right) = 114{,}2°$$

O eixo principal maior (para $I_{máx} = 7{,}54(109)$ mm^4) orienta-se, portanto, com um ângulo $\theta_{p_1} = 57{,}1°$, medido no *sentido anti-horário* a partir do eixo x *positivo*. O eixo menor é perpendicular a este. Os resultados aparecem na Figura A.18*a*.

PROBLEMAS

A.1. Determinar a distância $\bar{y}$ para o centróide C da área da seção transversal da viga. A viga é simétrica em relação ao eixo y.

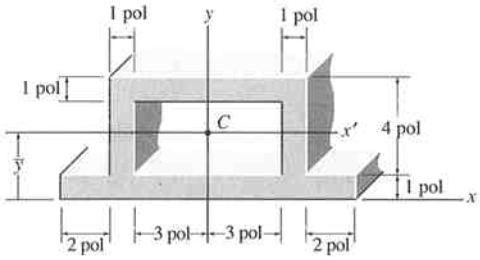
A.2. Determinar I_x e I_y para a área da seção transversal da viga.



Problemas A.1/A.2

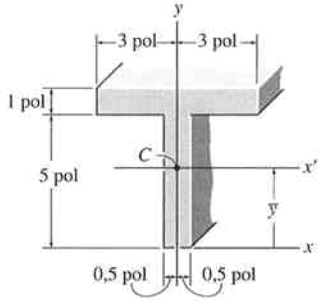
A.3. Determinar a distância $\bar{y}$ para o centróide C da área da seção transversal da viga e depois calcular $\bar{I}_{x'}$.

***A.4.** Determinar $\bar{I}_y$ da área da seção transversal da viga.



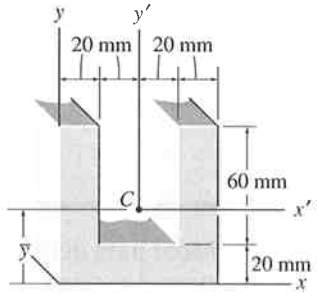
Problemas A.3/A.4

A.5. Determinar $\bar{y}$, que define a localização do centróide, e depois calcular os momentos de inércia $\bar{I}_{x'}$ e $\bar{I}_{y'}$ da viga em T.



Problema A.5

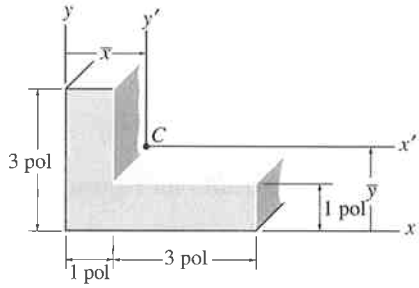
A.6. Determinar $\bar{y}$, que define a localização do centróide, e depois calcular os momentos de inércia $\bar{I}_{x'}$ e $\bar{I}_{y'}$ da área da seção transversal.



Problema A.6

A.7. Determinar a localização $(\bar{x}, \bar{y})$ do centróide C da área da seção transversal da cantoneira e, depois,, calcular os momentos de inércia $\bar{I}_{x'}$ e $\bar{I}_{y'}$.

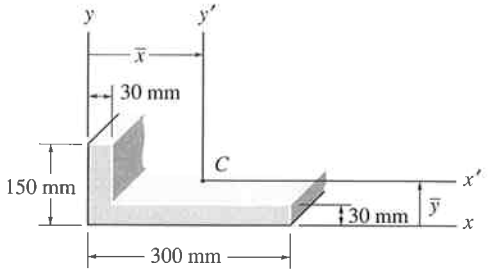
***A.8.** Determinar a localização $(\bar{x}, \bar{y})$ do centróide C da área da seção transversal da cantoneira e, depois, calcular o produto de inércia $\bar{I}_{x'y'}$ em relação aos eixos x' e y'.



Problemas A.7/A.8

A.9. Determinar a localização $(\bar{x}, \bar{y})$ do centróide C da área da seção transversal da cantoneira e, depois, calcular os momentos de inércia $\bar{I}_{x'}$ e $\bar{I}_{y'}$.

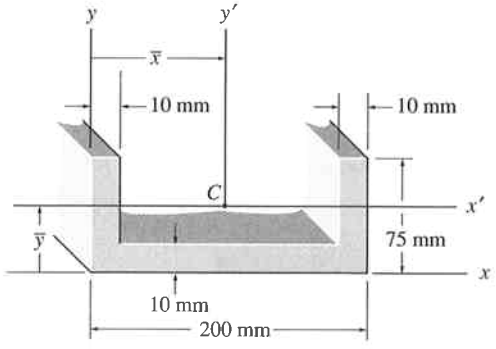
A.10. Determinar a localização $(\bar{x}, \bar{y})$ do centróide C da área da seção transversal da cantoneira e, depois, calcular o produto de inércia $\bar{I}_{x'y'}$ em relação aos eixos x' e y'.



Problemas A.9/A.10

A.11. Determinar a localização $(\bar{x}, \bar{y})$ da área da seção transversal da cantoneira e, depois, calcular os momentos de inércia $\bar{I}_{x'}$ e $\bar{I}_{y'}$.

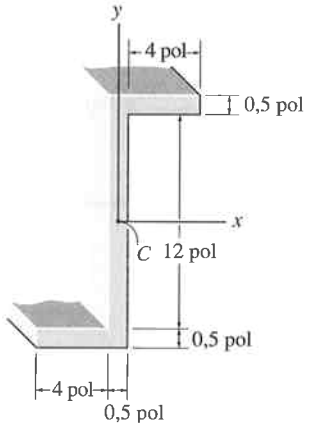
***A.12.** Determinar a localização $(\bar{x}, \bar{y})$ da área da seção transversal da cantoneira e, depois, calcular o produto de inércia $\bar{I}_{x'y'}$ em relação aos eixos x' e y'.



Problemas A.11/A.12

A.13. Determinar os momentos de inércia $\bar{I}_x$ e $\bar{I}_y$ da seção Z. A origem das coordenadas é o centróide C.

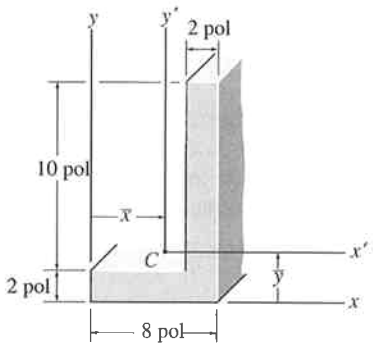
A.14. Determinar o produto de inércia $\bar{I}_{xy}$ da área da seção transversal da seção Z. A origem das coordenadas é o centróide C.



Problemas A.13/A.14

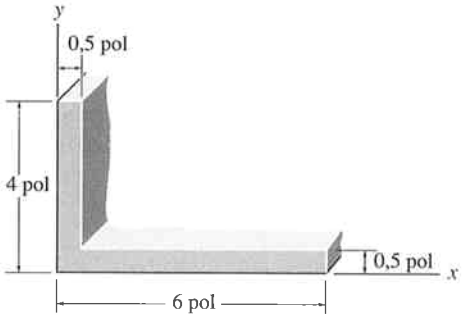
A.15. Determinar a localização $(\bar{x}, \bar{y})$ do centróide C da área da seção transversal, bem como os momentos de inércia $\bar{I}_{x'}$ e $\bar{I}_{y'}$ em relação aos eixos x' e y', que têm sua origem no centróide C.

***A.16.** Determinar a localização $(\bar{x}, \bar{y})$ do centróide C da área da seção transversal, bem como o produto de inércia $I_{x'y'}$ em relação aos eixos x' e y'.



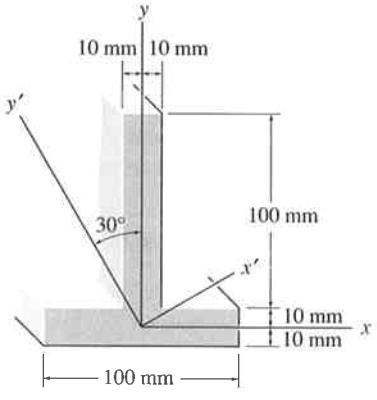
Problemas A.15/A.16

A.17. Determinr o produto de inércia I_{xy} da área da seção transversal em relação aos eixos x e y.



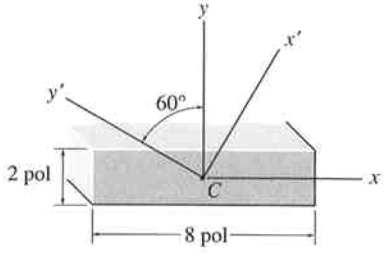
Problema A.17

A.18. Calcular os momentos de inércia $I_{x'}$ e $I_{y'}$ e o produto de inércia $I_{x'y'}$ da área da seção transversal. Usar as equações da Seção A.4.



Problema A.18

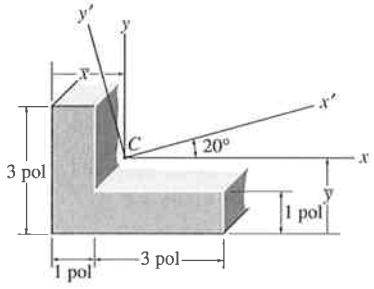
A.19. Determinar os momentos de inércia $I_{x'}$ e $I_{y'}$ e o produto de inércia $I_{x'y'}$ da área retangular. Os eixos x' e y' passam pelo centróide C. Usar as equações da Seção A.4.



Problema A.19

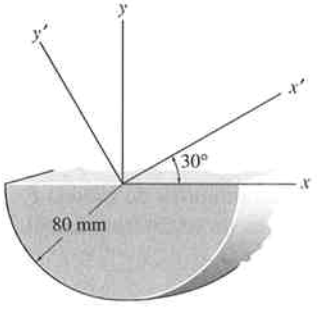
***A.20.** Determinar a localização $(\bar{x}, \bar{y})$ do centróide C da área da seção transversal da cantoneira; em seguida, calcular o produto de inércia $I_{x'y'}$. Usar as equações da Seção A.4.

A.21. Determinar a localização $(\bar{x}, \bar{y})$ do centróide C da área da seção transversal da cantoneira; em seguida calcular os momentos principais de inércia e a orientação dos eixos principais de inércia em relação aos eixos x e y.



Problemas A.20/A.21

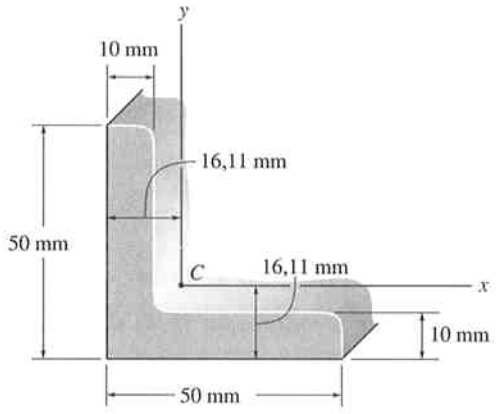
A.22. Determinar os momentos de inércia $I_{x'}$ e $I_{y'}$ e o produto de inércia $I_{x'y'}$ da área semicircular.



Problema A.22

A.23. Determinar os momentos principais de inércia e a orientação dos eixos de inércia principais da área da seção transversal em relação ao conjunto de eixos principais, que têm origem no centróide C. Usar as equações desenvolvidas na Seção A.4.

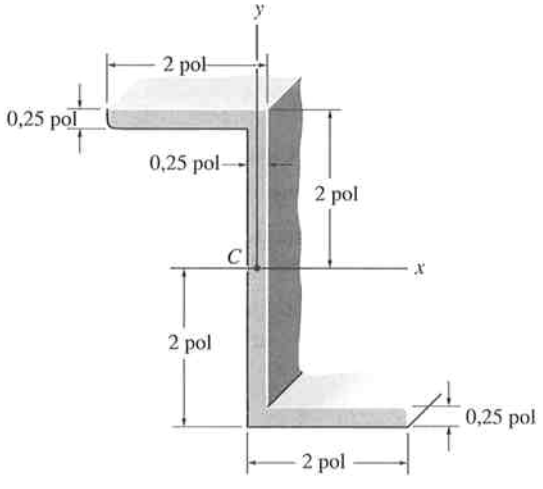
***A.24.** Resolver o Problema A.23 usando o círculo de Mohr.



Problemas A.23/A.24

A.25. Determinar os momentos principais de inércia e a orientação dos eixos principais de inércia da área da seção transversal, os quais têm origem no centróide C. Usar as equações desenvolvidas na Seção A.4.

A.26. Resolver o Problema A.25 usando o círculo de Mohr.

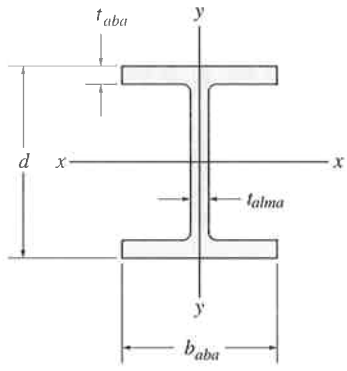


Problemas A.25/A.26

B PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DE PERFIS ESTRUTURAIS

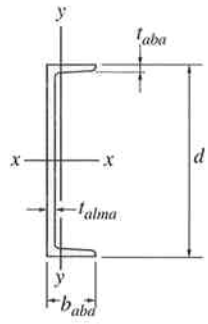
Abas Largas ou Perfis em W Unidades FPS (Pés-Libras-Segundo)

Designação	Área A	Altura d	Espessura da alma t_{alma}	Aba		Eixo $x-x$			Eixo $y-y$		
				Largura b_{aba}	Espessura t_{aba}	I	S	r	I	S	r
pol × lb/pé	pol^2	pol	pol	pol	pol	pol^4	pol^3	pol	pol^4	pol^3	pol
W24 × 104	30,6	24,06	0,500	12,750	0,750	3.100	258	10,1	259	40,7	2,91
W24 × 94	27,7	24,31	0,515	9,065	0,875	2.700	222	9,87	109	24,0	1,98
W24 × 84	24,7	24,10	0,470	9,020	0,770	2.370	196	9,79	94,4	20,9	1,95
W24 × 76	22,4	23,92	0,440	8,990	0,680	2.100	176	9,69	82,5	18,4	1,92
W24 × 68	20,1	23,73	0,415	8,965	0,585	1.830	154	9,55	70,4	15,7	1,87
W24 × 62	18,2	23,74	0,430	7,040	0,590	1.550	131	9,23	34,5	9,80	1,38
W24 × 55	16,2	23,57	0,395	7,005	0,505	1.350	114	9,11	29,1	8,30	1,34
W18 × 65	19,1	18,35	0,450	7,590	0,750	1.070	117	7,49	54,8	14,4	1,69
W18 × 60	17,6	18,24	0,415	7,555	0,695	984	108	7,47	50,1	13,3	1,69
W18 × 55	16,2	18,11	0,390	7,530	0,630	890	98,3	7,41	44,9	11,9	1,67
W18 × 50	14,7	17,99	0,355	7,495	0,570	800	88,9	7,38	40,1	10,7	1,65
W18 × 46	13,5	18,06	0,360	6,060	0,605	712	78,8	7,25	22,5	7,43	1,29
W18 × 40	11,8	17,90	0,315	6,015	0,525	612	68,4	7,21	19,1	6,35	1,27
W18 × 35	10,3	17,70	0,300	6,000	0,425	510	57,6	7,04	15,3	5,12	1,22
W16 × 57	16,8	16,43	0,430	7,120	0,715	758	92,2	6,72	43,1	12,1	1,60
W16 × 50	14,7	16,26	0,380	7,070	0,630	659	81,0	6,68	37,2	10,5	1,59
W16 × 45	13,3	16,13	0,345	7,035	0,565	586	72,7	6,65	32,8	9,34	1,57
W16 × 36	10,6	15,86	0,295	6,985	0,430	448	56,5	6,51	24,5	7,00	1,52
W16 × 31	9,12	15,88	0,275	5,525	0,440	375	47,2	6,41	12,4	4,49	1,17
W16 × 26	7,68	15,69	0,250	5,500	0,345	301	38,4	6,26	9,59	3,49	1,12
W14 × 53	15,6	13,92	0,370	8,060	0,660	541	77,8	5,89	57,7	14,3	1,92
W14 × 43	12,6	13,66	0,305	7,995	0,530	428	62,7	5,82	45,2	11,3	1,89
W14 × 38	11,2	14,10	0,310	6,770	0,515	385	54,6	5,87	26,7	7,88	1,55
W14 × 34	10,0	13,98	0,285	6,745	0,455	340	48,6	5,83	23,3	6,91	1,53
W14 × 30	8,85	13,84	0,270	6,730	0,385	291	42,0	5,73	19,6	5,82	1,49
W14 × 26	7,69	13,91	0,255	5,025	0,420	245	35,3	5,65	8,91	3,54	1,08
W14 × 22	6,49	13,74	0,230	5,000	0,335	199	29,0	5,54	7,00	2,80	1,04



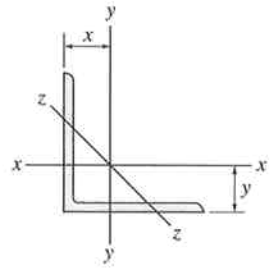
Abas Largas ou Perfis em W Unidades FPS (Pés-Libras-Segundo)

Designação	Área	Altura	Espessura da alma	Aba		Eixo $x-x$			Eixo $y-y$		
				Largura	Espessura						
	A	d	t_{alma}	b_{aba}	t_{aba}	I	S	r	I	S	r
pol × lb/pé	pol^2	pol	pol	pol	pol	pol^4	pol^3	pol	pol^4	pol^3	pol
W12 × 87	25,6	12,53	0,515	12,125	0,810	740	118	5,38	241	39,7	3,07
W12 × 50	14,7	12,19	0,370	8,080	0,640	394	64,7	5,18	56,3	13,9	1,96
W12 × 45	13,2	12,06	0,335	8,045	0,575	350	58,1	5,15	50,0	12,4	1,94
W12 × 26	7,65	12,22	0,230	6,490	0,380	204	33,4	5,17	17,3	5,34	1,51
W12 × 22	6,48	12,31	0,260	4,030	0,425	156	25,4	4,91	4,66	2,31	0,847
W12 × 16	4,71	11,99	0,220	3,990	0,265	103	17,1	4,67	2,82	1,41	0,773
W12 × 14	4,16	11,91	0,200	3,970	0,225	88,6	14,9	4,62	2,36	1,19	0,753
W10 × 100	29,4	11,10	0,680	10,340	1,120	623	112	4,60	207	40,0	2,65
W10 × 54	15,8	10,09	0,370	10,030	0,615	303	60,0	4,37	103	20,6	2,56
W10 × 45	13,3	10,10	0,350	8,020	0,620	248	49,1	4,32	53,4	13,3	2,01
W10 × 39	11,5	9,92	0,315	7,985	0,530	209	42,1	4,27	45,0	11,3	1,98
W10 × 30	8,84	10,47	0,300	5,810	0,510	170	32,4	4,38	16,7	5,75	1,37
W10 × 19	5,62	10,24	0,250	4,020	0,395	96,3	18,8	4,14	4,29	2,14	0,874
W10 × 15	4,41	9,99	0,230	4,000	0,270	68,9	13,8	3,95	2,89	1,45	0,810
W10 × 12	3,54	9,87	0,190	3,960	0,210	53,8	10,9	3,90	2,18	1,10	0,785
W8 × 67	19,7	9,00	0,570	8,280	0,935	272	60,4	3,72	88,6	21,4	2,12
W8 × 58	17,1	8,75	0,510	8,220	0,810	228	52,0	3,65	75,1	18,3	2,10
W8 × 48	14,1	8,50	0,400	8,110	0,685	184	43,3	3,61	60,9	15,0	2,08
W8 × 40	11,7	8,25	0,360	8,070	0,560	146	35,5	3,53	49,1	12,2	2,04
W8 × 31	9,13	8,00	0,285	7,995	0,435	110	27,5	3,47	37,1	9,27	2,02
W8 × 24	7,08	7,93	0,245	6,495	0,400	82,8	20,9	3,42	18,3	5,63	1,61
W8 × 15	4,44	8,11	0,245	4,015	0,315	48,0	11,8	3,29	3,41	1,70	0,876
W6 × 25	7,34	6,38	0,320	6,080	0,455	53,4	16,7	2,70	17,1	5,61	1,52
W6 × 20	5,87	6,20	0,260	6,020	0,365	41,4	13,4	2,66	13,3	4,41	1,50
W6 × 16	4,74	6,28	0,260	4,030	0,405	32,1	10,2	2,60	4,43	2,20	0,966
W6 × 15	4,43	5,99	0,230	5,990	0,260	29,1	9,72	2,56	9,32	3,11	1,46
W6 × 12	3,55	6,03	0,230	4,000	0,280	22,1	7,31	2,49	2,99	1,50	0,918
W6 × 9	2,68	5,90	0,170	3,940	0,215	1,64	5,56	2,47	2,19	1,11	0,905



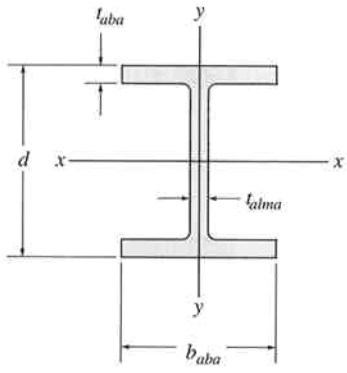
Perfil em C Padrão Americano Unidades FPS (Pés-Libras-Segundo)

Designação	Área A	Altura d	Espessura da alma t_{alma}		Aba: Largura b_{aba}		Aba: Espessura t_{aba}		Eixo $x-x$: I	Eixo $x-x$: S	Eixo $x-x$: r	Eixo $y-y$: I	Eixo $y-y$: S	Eixo $y-y$: r
pol × lb/pé	pol^2	pol	pol		pol		pol		pol^4	pol^3	pol	pol^4	pol^3	pol
C15 × 50	14,7	15,00	0,716	11/16	3,716	3¾	0,650	5/8	404	53,8	5,24	11,0	3,78	0,867
C15 × 40	11,8	15,00	0,520	½	3,520	3½	0,650	5/8	349	46,5	5,44	9,23	3,37	0,886
C15 × 33,9	9,96	15,00	0,400	3/8	3,400	3⅜	0,650	5/8	315	42,0	5,62	8,13	3,11	0,904
C12 × 30	8,82	12,00	0,510	½	3,170	3⅛	0,501	½	162	27,0	4,29	5,14	2,06	0,763
C12 × 25	7,35	12,00	0,387	3/8	3,047	3	0,501	½	144	24,1	4,43	4,47	1,88	0,780
C12 × 20,7	6,09	12,00	0,282	5/16	2,942	3	0,501	½	129	21,5	4,61	3,88	1,73	0,799
C10 × 30	8,82	10,00	0,673	11/16	3,033	3	0,436	7/16	103	20,7	3,42	3,94	1,65	0,669
C10 × 25	7,35	10,00	0,526	½	2,886	2⅞	0,436	7/16	91,2	18,2	3,52	3,36	1,48	0,676
C10 × 20	5,88	10,00	0,379	3/8	2,739	2¾	0,436	7/16	78,9	15,8	3,66	2,81	1,32	0,692
C10 × 15,3	4,49	10,00	0,240	¼	2,600	2⅝	0,436	7/16	67,4	13,5	3,87	2,28	1,16	0,713
C9 × 20	5,88	9,00	0,448	7/16	2,648	2⅝	0,413	7/16	60,9	13,5	3,22	2,42	1,17	0,642
C9 × 15	4,41	9,00	0,285	5/16	2,485	2½	0,413	7/16	51,0	11,3	3,40	1,93	1,01	0,661
C9 × 13,4	3,94	9,00	0,233	¼	2,433	2⅜	0,413	7/16	47,9	10,6	3,48	1,76	0,962	0,669
C8 × 18,75	5,51	8,00	0,487	½	2,527	2½	0,390	3/8	44,0	11,0	2,82	1,98	1,01	0,599
C8 × 13,75	4,04	8,00	0,303	5/16	2,343	2⅜	0,390	3/8	36,1	9,03	2,99	1,53	0,854	0,615
C8 × 11,5	3,38	8,00	0,220	¼	2,260	2¼	0,390	3/8	32,6	8,14	3,11	1,32	0,781	0,625
C7 × 14,75	4,33	7,00	0,419	7/16	2,299	2¼	0,366	3/8	27,2	7,78	2,51	1,38	0,779	0,564
C7 × 12,25	3,60	7,00	0,314	5/16	2,194	2¼	0,366	3/8	24,2	6,93	2,60	1,17	0,703	0,571
C7 × 9,8	2,87	7,00	0,210	3/16	2,090	2⅛	0,366	3/8	21,3	6,08	2,72	0,968	0,625	0,581
C6 × 13	3,83	6,00	0,437	7/16	2,157	2⅛	0,343	5/16	17,4	5,80	2,13	1,05	0,642	0,525
C6 × 10,5	3,09	6,00	0,314	5/16	2,034	2	0,343	5/16	15,2	5,06	2,22	0,866	0,564	0,529
C6 × 8,2	2,40	6,00	0,200	3/16	1,920	1⅞	0,343	5/16	13,1	4,38	2,34	0,693	0,492	0,537
C5 × 9	2,64	5,00	0,325	5/16	1,885	1⅞	0,320	5/16	8,90	3,56	1,83	0,632	0,450	0,489
C5 × 6,7	1,97	5,00	0,190	3/16	1,750	1¾	0,320	5/16	7,49	3,00	1,95	0,479	0,378	0,493
C4 × 7,25	2,13	4,00	0,321	5/16	1,721	1¾	0,296	5/16	4,59	2,29	1,47	0,433	0,343	0,450
C4 × 5,4	1,59	4,00	0,184	3/16	1,584	1⅝	0,296	5/16	3,85	1,93	1,56	0,319	0,283	0,449
C3 × 6	1,76	3,00	0,356	3/8	1,596	1⅝	0,273	¼	2,07	1,38	1,08	0,305	0,268	0,416
C3 × 5	1,47	3,00	0,258	¼	1,498	1½	0,273	¼	1,85	1,24	1,12	0,247	0,233	0,410
C3 × 4,1	1,21	3,00	0,170	3/16	1,410	1⅜	0,273	¼	1,66	1,10	1,17	0,197	0,202	0,404



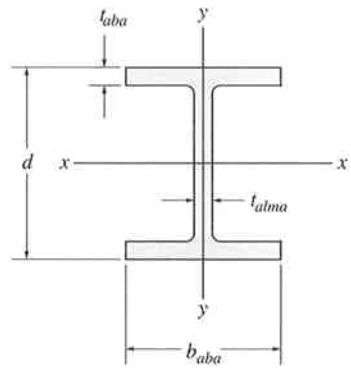
Cantoneiras de Abas Iguais Unidades FPS (Pés-Libras-Segundo)

Tamanho e espessura	Peso por pé	Área A	Eixo x–x				Eixo y–y				Eixo z–z
			I	S	r	y	I	S	r	x	r
pol	pé	pol^2	pol^4	pol^3	pol	pol	pol^4	pol^3	pol	pol	pol
L 8 × 8 × 1	51,0	15,0	89,0	15,8	2,44	2,37	89,0	15,8	2,44	2,37	1,56
L 8 × 8 × ¾	38,9	11,4	69,7	12,2	2,47	2,28	69,7	12,2	2,47	2,28	1,58
L 8 × 8 × ½	26,4	7,75	48,6	8,36	2,50	2,19	48,6	8,36	2,50	2,19	1,59
L 6 × 6 × 1	37,4	11,0	35,5	8,57	1,80	1,86	35,5	8,57	1,80	1,86	1,17
L 6 × 6 × ¾	28,7	8,44	28,2	6,66	1,83	1,78	28,2	6,66	1,83	1,78	1,17
L 6 × 6 × ½	19,6	5,75	19,9	4,61	1,86	1,68	19,9	4,61	1,86	1,68	1,18
L 6 × 6 × ⅜	14,9	4,36	15,4	3,53	1,88	1,64	15,4	3,53	1,88	1,64	1,19
L 5 × 5 × ¾	23,6	6,94	15,7	4,53	1,51	1,52	15,7	4,53	1,51	1,52	0,975
L 5 × 5 × ½	16,2	4,75	11,3	3,16	1,54	1,43	11,3	3,16	1,54	1,43	0,983
L 5 × 5 × ⅜	12,3	3,61	8,74	2,42	1,56	1,39	8,74	2,42	1,56	1,39	0,990
L 4 × 4 × ¾	18,5	5,44	7,67	2,81	1,19	1,27	7,67	2,81	1,19	1,27	0,778
L 4 × 4 × ½	12,8	3,75	5,56	1,97	1,22	1,18	5,56	1,97	1,22	1,18	0,782
L 4 × 4 × ⅜	9,8	2,86	4,36	1,52	1,23	1,14	4,36	1,52	1,23	1,14	0,788
L 4 × 4 × ¼	6,6	1,94	3,04	1,05	1,25	1,09	3,04	1,05	1,25	1,09	0,795
L 3½ × 3½ × ½	11,1	3,25	3,64	1,49	1,06	1,06	3,64	1,49	1,06	1,06	0,683
L 3½ × 3½ × ⅜	8,5	2,48	2,87	1,15	1,07	1,01	2,87	1,15	1,07	1,01	0,687
L 3½ × 3½ × ¼	5,8	1,69	2,01	0,794	1,09	0,968	2,01	0,794	1,09	0,968	0,694
L 3 × 3 × ½	9,4	2,75	2,22	1,07	0,898	0,932	2,22	1,07	0,898	0,932	0,584
L 3 × 3 × ⅜	7,2	2,11	1,76	0,833	0,913	0,888	1,76	0,833	0,913	0,888	0,587
L 3 × 3 × ¼	4,9	1,44	1,24	0,577	0,930	0,842	1,24	0,577	0,930	0,842	0,592
L 2½ × 2½ × ½	7,7	2,25	1,23	0,724	0,739	0,806	1,23	0,724	0,739	0,806	0,487
L 2½ × 2½ × ⅜	5,9	1,73	0,984	0,566	0,753	0,762	0,984	0,566	0,753	0,762	0,487
L 2½ × 2½ × ¼	4,1	1,19	0,703	0,394	0,769	0,717	0,703	0,394	0,769	0,717	0,491
L 2 × 2 × ⅜	4,7	1,36	0,479	0,351	0,594	0,636	0,479	0,351	0,594	0,636	0,389
L 2 × 2 × ¼	3,19	0,938	0,348	0,247	0,609	0,592	0,348	0,247	0,609	0,592	0,391
L 2 × 2 × ⅛	1,65	0,484	0,190	0,131	0,626	0,546	0,190	0,131	0,626	0,546	0,398



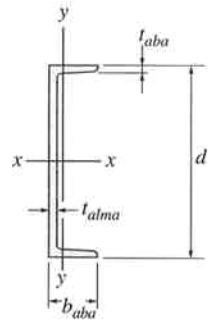
Abas Largas ou Perfis em W **Unidades SI**

Designação	Área A	Altura d	Espessura da alma t_{alma}	Aba		Eixo $x-x$			Eixo $y-y$		
				Largura b_{aba}	Espessura t_{aba}	I	S	r	I	S	r
mm × kg/m	mm²	mm	mm	mm	mm	10^6 mm⁴	10^3 mm³	mm	10^6 mm⁴	10^3 mm³	mm
W610 × 155	19.800	611	12,70	324,0	19,0	1.290	4.220	255	108	667	73,9
W610 × 140	17.900	617	13,10	230,0	22,2	1.120	3.630	250	45,1	392	50,2
W610 × 125	15.900	612	11,90	229,0	19,6	985	3.220	249	39,3	343	49,7
W610 × 113	14.400	608	11,20	228,0	17,3	875	2.880	247	34,3	301	48,8
W610 × 101	12.900	603	10,50	228,0	14,9	764	2.530	243	29,5	259	47,8
W610 × 92	11.800	603	10,90	179,0	15,0	646	2.140	234	14,4	161	34,9
W610 × 82	10.500	599	10,00	178,0	12,8	560	1.870	231	12,1	136	33,9
W460 × 97	12.300	466	11,40	193,0	19,0	445	1.910	190	22,8	236	43,1
W460 × 89	11.400	463	10,50	192,0	17,7	410	1.770	190	20,9	218	42,8
W460 × 82	10.400	460	9,91	191,0	16,0	370	1.610	189	18,6	195	42,3
W460 × 74	9.460	457	9,02	190,0	14,5	333	1.460	188	16,6	175	41,9
W460 × 68	8.730	459	9,14	154,0	15,4	297	1.290	184	9,41	122	32,8
W460 × 60	7.590	455	8,00	153,0	13,3	255	1.120	183	7,96	104	32,4
W460 × 52	6.640	450	7,62	152,0	10,8	212	942	179	6,34	83,4	30,9
W410 × 85	10.800	417	10,90	181,0	18,2	315	1.510	171	18,0	199	40,8
W410 × 74	9.510	413	9,65	180,0	16,0	275	1.330	170	15,6	173	40,5
W410 × 67	8.560	410	8,76	179,0	14,4	245	1.200	169	13,8	154	40,2
W410 × 53	6.820	403	7,49	177,0	10,9	186	923	165	10,1	114	38,5
W410 × 46	5.890	403	6,99	140,0	11,2	156	774	163	5,14	73,4	29,5
W410 × 39	4.960	399	6,35	140,0	8,8	126	632	159	4,02	57,4	28,5
W360 × 79	10.100	354	9,40	205,0	16,8	227	1.280	150	24,2	236	48,9
W360 × 64	8.150	347	7,75	203,0	13,5	179	1.030	148	18,8	185	48,0
W360 × 57	7.200	358	7,87	172,0	13,1	160	894	149	11,1	129	39,3
W360 × 51	6.450	355	7,24	171,0	11,6	141	794	148	9,68	113	38,7
W360 × 45	5.710	352	6,86	171,0	9,8	121	688	146	8,16	95,4	37,8
W360 × 39	4.960	363	6,48	128,0	10,7	102	578	143	3,75	58,6	27,5
W360 × 33	4.190	349	5,84	127,0	8,5	82,9	475	141	2,91	45,8	26,4



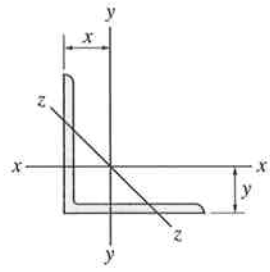
Abas Largas ou Perfis em W Unidades SI

Designação	Área A	Altura d	Espessura da alma t_{alma}	Aba		Eixo $x-x$			Eixo $y-y$		
				Largura b_{aba}	Espessura t_{aba}	I	S	r	I	S	r
mm × kg/m	mm^2	mm	mm	mm	mm	$10^6\ mm^4$	$10^3\ mm^3$	mm	$10^6\ mm^4$	$10^3\ mm^3$	mm
W310 × 129	16.500	318	13,10	308,0	20,6	308	1.940	137	100	649	77,8
W310 × 74	9.480	310	9,40	205,0	16,3	165	1.060	132	23,4	228	49,7
W310 × 67	8.530	306	8,51	204,0	14,6	145	948	130	20,7	203	49,3
W310 × 39	4.930	310	5,84	165,0	9,7	84,8	547	131	7,23	87,6	38,3
W310 × 33	4.180	313	6,60	102,0	10,8	65,0	415	125	1,92	37,6	21,4
W310 × 24	3.040	305	5,59	101,0	6,7	42,8	281	119	1,16	23,0	19,5
W310 × 21	2.680	303	5,08	101,0	5,7	37,0	244	117	0,986	19,5	19,2
W250 × 149	19.000	282	17,30	263,0	28,4	259	1.840	117	86,2	656	67,4
W250 × 80	10.200	256	9,40	255,0	15,6	126	984	111	43,1	338	65,0
W250 × 67	8.560	257	8,89	204,0	15,7	104	809	110	22,2	218	50,9
W250 × 58	7.400	252	8,00	203,0	13,5	87,3	693	109	18,8	185	50,4
W250 × 45	5.700	266	7,62	148,0	13,0	71,1	535	112	7,03	95	35,1
W250 × 28	3.620	260	6,35	102,0	10,0	39,9	307	105	1,78	34,9	22,2
W250 × 22	2.850	254	5,84	102,0	6,9	28,8	227	101	1,22	23,9	20,7
W250 × 18	2.280	251	4,83	101,0	5,3	22,5	179	99,3	0,919	18,2	20,1
W200 × 100	12.700	229	14,50	210,0	23,7	113	987	94,3	36,6	349	53,7
W200 × 86	11.000	222	13,00	209,0	20,6	94,7	853	92,8	31,4	300	53,4
W200 × 71	9.100	216	10,20	206,0	17,4	76,6	709	91,7	25,4	247	52,8
W200 × 59	7.580	210	9,14	205,0	14,2	61,2	583	89,9	20,4	199	51,9
W200 × 46	5.890	203	7,24	203,0	11,0	45,5	448	87,9	15,3	151	51,0
W200 × 36	4.570	201	6,22	165,0	10,2	34,4	342	86,8	7,64	92,6	40,9
W200 × 22	2.860	206	6,22	102,0	8,0	20,0	194	83,6	1,42	27,8	22,3
W150 × 37	4.730	162	8,13	154,0	11,6	22,2	274	68,5	7,07	91,8	38,7
W150 × 30	3.790	157	6,60	153,0	9,3	17,1	218	67,2	5,54	72,4	38,2
W150 × 22	2.860	152	5,84	152,0	6,6	12,1	159	65,0	3,87	50,9	36,8
W150 × 24	3.060	160	6,60	102,0	10,3	13,4	168	66,2	1,83	35,9	24,5
W150 × 18	2.290	153	5,84	102,0	7,1	9,19	120	63,3	1,26	24,7	23,5
W150 × 14	1.730	150	4,32	100,0	5,5	6,84	91,2	62,9	0,912	18,2	23,0



Perfil em C Padrão Americano Unidades SI

Designação	Área	Altura	Espessura da alma	Aba		Eixo $x-x$				Eixo $y-y$			
				Largura	Espessura								
	A	d	t_{alma}	b_{aba}	t_{aba}	I	Z	S	r	I	Z	S	r
mm × kg/m	mm²	mm	mm	mm	mm	10^6 mm⁴	10^3 mm³	10^3 mm³	mm	10^6 mm⁴	10^3 mm³	10^3 mm³	mm
C380 × 74	9.480	381,0	18,20	94,4	16,50	168	1.120	882	133	4,58	134	61,8	22,0
C380 × 60	7.610	381,0	13,20	89,4	16,50	145	937	761	138	3,84	113	55,1	22,5
C380 × 50	6.430	381,0	10,20	86,4	16,50	131	826	688	143	3,38	102	50,9	22,9
C310 × 45	5.690	305,0	13,00	80,5	12,70	67,4	551	442	109	2,14	71,0	33,8	19,4
C310 × 37	4.740	305,0	9,83	77,4	12,70	59,9	479	393	112	1,86	62,9	30,9	19,8
C310 × 31	3.930	305,0	7,16	74,7	12,70	53,7	416	352	117	1,61	57,2	28,3	20,2
C250 × 45	5.690	254,0	17,10	77,0	11,10	42,9	436	338	86,8	1,61	61,9	27,1	17,0
C250 × 37	4.740	254,0	13,40	73,3	11,10	38,0	377	299	89,5	1,40	52,3	24,3	17,2
C250 × 30	3.790	254,0	9,63	69,6	11,10	32,8	316	258	93,0	1,17	44,4	21,6	17,6
C250 × 23	2.900	254,0	6,10	66,0	11,10	28,1	259	221	98,4	0,949	38,5	19,0	18,1
C230 × 30	3.790	229,0	11,40	67,3	10,50	25,3	275	221	81,7	1,01	40,5	19,2	16,3
C230 × 22	2.850	229,0	7,24	63,1	10,50	21,2	221	185	86,2	0,803	33,6	16,7	16,8
C230 × 20	2.540	229,0	5,92	61,8	10,50	19,9	205	174	88,5	0,733	32,0	15,8	17,0
C200 × 28	3.550	203,0	12,40	64,2	9,90	18,3	226	180	71,8	0,824	35,6	16,5	15,2
C200 × 20	2.610	203,0	7,70	59,5	9,90	15,0	179	148	75,8	0,637	28,3	14,0	15,6
C200 × 17	2.180	203,0	5,59	57,4	9,90	13,6	156	134	79,0	0,549	25,9	12,8	15,9
C180 × 22	2.790	178,0	10,60	58,4	9,30	11,3	159	127	63,6	0,574	26,9	12,8	14,3
C180 × 18	2.320	178,0	7,98	55,7	9,30	10,1	138	113	66,0	0,487	23,4	11,5	14,5
C180 × 15	1.850	178,0	5,33	53,1	9,30	8,87	117	99,7	69,2	0,403	20,6	10,2	14,8
C150 × 19	2.470	152,0	11,10	54,8	8,70	7,24	119	95,3	54,1	0,437	22,3	10,5	13,3
C150 × 16	1.990	152,0	7,98	51,7	8,70	6,33	101	83,3	56,4	0,360	18,8	9,22	13,5
C150 × 12	1.550	152,0	5,08	48,8	8,70	5,45	84,1	71,7	59,3	0,288	16,3	8,04	13,6
C130 × 13	1.700	127,0	8,25	47,9	8,10	3,70	71,4	58,3	46,7	0,263	15,0	7,35	12,4
C130 × 10	1.270	127,0	4,83	44,5	8,10	3,12	57,5	49,1	49,6	0,199	12,5	6,18	12,5
C100 × 11	1 370	102,0	8,15	43,7	7,50	1,91	46,0	37,5	37,3	0,180	11,4	5,62	11,5
C100 × 8	1 030	102,0	4,67	40,2	7,50	1,60	37,0	31,4	39,4	0,133	9,32	4,65	11,4
C75 × 9	1.140	76,2	9,04	40,5	6,90	0,862	28,2	22,6	27,5	0,127	8,91	4,39	10,6
C75 × 7	948	76,2	6,55	38,0	6,90	0,770	24,6	20,2	28,5	0,103	7,64	3,83	10,4
C75 × 6	781	76,2	4,32	35,8	6,90	0,691	21,3	18,1	29,8	0,082	6,57	3,32	10,2

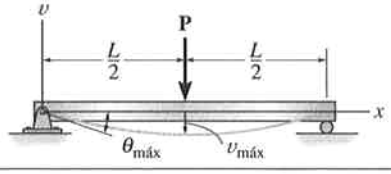
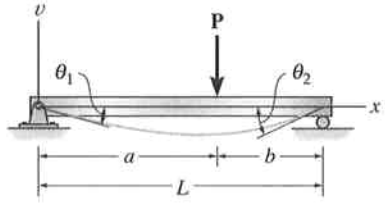
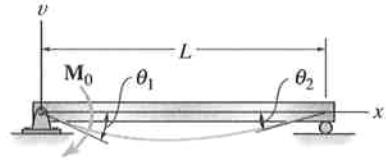
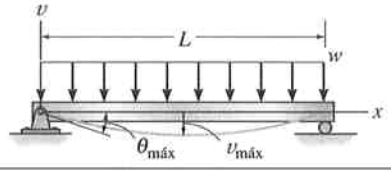
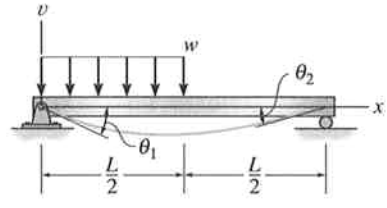
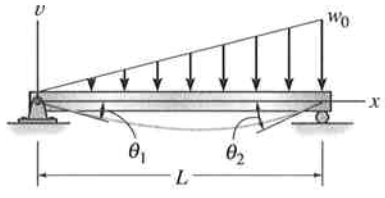


Cantoneiras de Abas Iguais Unidades SI

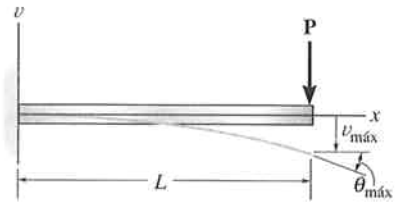
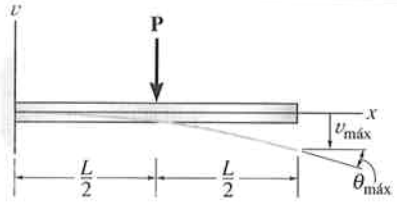
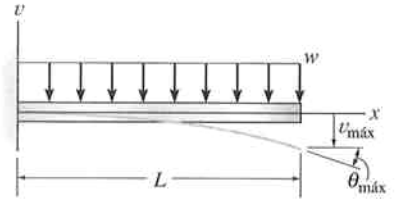
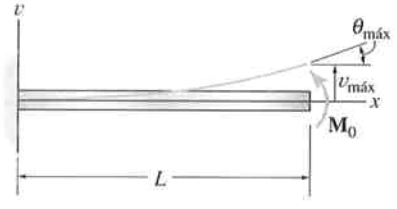
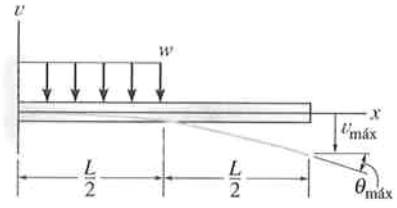
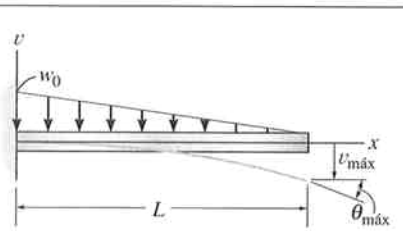
Tamanho e espessura	Peso por pé	Área	Eixo x–x				Eixo y–y				Eixo z–z
			I	S	r	y	I	S	r	x	r
mm	kg	mm²	10^6 mm⁴	10^6 mm⁴	mm	mm	10^6 mm⁴	10^6 mm⁴	mm	mm	mm
L 203 × 203 × 25.4	75,9	9.680	36,9	258	61,7	60,1	36,9	258	61,7	60,1	39,6
L 203 × 203 × 19,0	57,9	7.380	28,9	199	62,6	57,8	28,9	199	62,6	57,8	40,1
L 203 × 203 × 12,7	39,3	5.000	20,2	137	63,6	55,5	20,2	137	63,6	55,5	40,4
L 152 × 152 × 25,4	55,7	7.100	14,6	139	45,3	47,2	14,6	139	45,3	47,2	29,7
L 152 × 152 × 19,0	42,7	5.440	11,6	108	46,2	45,0	11,6	108	46,2	45,0	29,7
L 152 × 152 × 12,7	29,2	3.710	8,22	75,1	47,1	42,7	8,22	75,1	47,1	42,7	30,0
L 152 × 152 × 9,5	22,2	2.810	6,35	57,4	47,5	41,5	6,35	57,4	47,5	41,5	30,2
L 127 × 127 × 19,0	35,1	4.480	6,54	73,9	38,2	38,7	6,54	73,9	38,2	38,7	24,8
L 127 × 127 × 12,7	24,1	3.060	4,68	51,7	39,1	36,4	4,68	51,7	39,1	36,4	25,0
L 127 × 127 × 9,5	18,3	2.330	3,64	39,7	39,5	35,3	3,64	39,7	39,5	35,3	25,1
L 102 × 102 × 19,0	27,5	3.510	3,23	46,4	30,3	32,4	3,23	46,4	30,3	32,4	19,8
L 102 × 102 × 12,7	19,0	2.420	2,34	32,6	31,1	30,2	2,34	32,6	31,1	30,2	19,9
L 102 × 102 × 9,5	14,6	1.840	1,84	25,3	31,6	29,0	1,84	25,3	31,6	29,0	20,0
L 102 × 102 × 6,4	9,8	1.250	1,28	17,3	32,0	27,9	1,28	17,3	32,0	27,9	20,2
L 89 × 89 × 12,7	16,5	2.100	1,52	24,5	26,9	26,9	1,52	24,5	26,9	26,9	17,3
L 89 × 89 × 9,5	12,6	1.600	1,20	19,0	27,4	25,8	1,20	19,0	27,4	25,8	17,4
L 89 × 89 × 6,4	8,6	1.090	0,840	13,0	27,8	24,6	0,840	13,0	27,8	24,6	17,6
L 76 × 76 × 12,7	14,0	1.770	0,915	17,5	22,7	23,6	0,915	17,5	22,7	23,6	14,8
L 76 × 76 × 9,5	10,7	1.360	0,726	13,6	23,1	22,5	0,726	13,6	23,1	22,5	14,9
L 76 × 76 × 6,4	7,3	927	0,514	9,39	23,5	21,3	0,514	9,39	23,5	21,3	15,0
L 64 × 64 × 12,7	11,5	1.450	0,524	12,1	19,0	20,6	0,524	12,1	19,0	20,6	12,4
L 64 × 64 × 9,5	8,8	1.120	0,420	9,46	19,4	19,5	0,420	9,46	19,4	19,5	12,4
L 64 × 64 × 6,4	6,1	766	0,300	6,59	19,8	18,2	0,300	6,59	19,8	18,3	12,5
L 51 × 51 × 9,5	7,0	877	0,202	5,82	15,2	16,2	0,202	5,82	15,2	16,2	9,88
L 51 × 51 × 6,4	4,7	605	0,146	4,09	15,6	15,1	0,146	4,07	15,5	15,1	9,93
L 51 × 51 × 3,2	2,5	312	0,080	2,16	16,0	13,9	0,080	2,16	16,0	13,9	10,1

C Inclinações e Deslocamentos de Vigas

Inclinações e Deslocamentos de Vigas Simplesmente Apoiadas

Viga	Inclinação	Deslocamento	Linha elástica
	$\theta_{máx} = \frac{-PL^2}{16EI}$	$v_{máx} = \frac{-PL^3}{48EI}$	$v = \frac{-Px}{48EI}(3L^2 - 4x^2)$ $0 \le x \le L/2$
	$\theta_1 = \frac{-Pab(L+b)}{6EIL}$ $\theta_2 = \frac{Pab(L+a)}{6EIL}$	$v\Big\|_{x=a} = \frac{-Pba}{6EIL}(L^2 - b^2 - a^2)$	$v = \frac{-Pbx}{6EIL}(L^2 - b^2 - x^2)$ $0 \le x \le a$
	$\theta_1 = \frac{-M_0L}{3EI}$ $\theta_2 = \frac{M_0L}{6EI}$	$v_{máx} = \frac{-M_0L^2}{\sqrt{243}EI}$	$v = \frac{-M_0x}{6EIL}(x^2 - 3Lx + 2L^2)$
	$\theta_{máx} = \frac{-wL^3}{24EI}$	$v_{máx} = \frac{-5wL^4}{384EI}$	$v = \frac{-wx}{24EI}(x^3 - 2Lx^2 + L^3)$
	$\theta_1 = \frac{-3wL^3}{128EI}$ $\theta_2 = \frac{7wL^3}{384EI}$	$v\Big\|_{x=L/2} = \frac{-5wL^4}{768EI}$ $v_{máx} = -0{,}006563\frac{wL^4}{EI}$ em $x = 0{,}4598L$	$v = \frac{-wx}{384EI}(16x^3 - 24Lx^2 + 9L^3)$ $0 \le x \le L/2$ $v = \frac{-wL}{384EI}(8x^3 - 24Lx^2 + 17L^2x - L^3)$ $L/2 \le x < L$
	$\theta_1 = \frac{-7w_0L^3}{360EI}$ $\theta_2 = \frac{w_0L^3}{45EI}$	$v_{máx} = -0{,}00652\frac{w_0L^4}{EI}$ em $x = 0{,}5193$	$v = \frac{-w_0x}{360EIL}(3x^4 - 10L^2x^2 + 7L^4)$

Inclinações e Deslocamentos de Vigas em Balanço

Viga	Inclinação	Deslocamento	Linha elástica
	$\theta_{máx} = \frac{-PL^2}{2EI}$	$v_{máx} = \frac{-PL^3}{3EI}$	$v = \frac{-Px^2}{6EI}(3L - x)$
	$\theta_{máx} = \frac{-PL^2}{8EI}$	$v_{máx} = \frac{-5PL^3}{48EI}$	$v = \frac{-Px^2}{6EI}(\frac{3}{2}L - x) \quad 0 \le x \le L/2$ $v = \frac{-PL^2}{24EI}(3x - \frac{1}{2}L) \quad L/2 \le x \le L$
	$\theta_{máx} = \frac{-wL^3}{6EI}$	$v_{máx} = \frac{-wL^4}{8EI}$	$v = \frac{-wx^2}{24EI}(x^2 - 4Lx + 6L^2)$
	$\theta_{máx} = \frac{M_0 L}{EI}$	$v_{máx} = \frac{M_0 L^2}{2EI}$	$v = \frac{M_0 x^2}{2EI}$
	$\theta_{máx} = \frac{-wL^3}{48EI}$	$v_{máx} = \frac{-7wL^4}{384EI}$	$v = \frac{-wx^2}{24EI}(x^2 - 2Lx + \frac{3}{2}L^2)$ $0 \le x \le L/2$ $v = \frac{-wL^3}{192EI}(4x - L/2)$ $L/2 \le x \le L$
	$\theta_{máx} = \frac{-w_0 L^3}{24EI}$	$v_{máx} = \frac{-w_0 L^4}{30EI}$	$v = \frac{-w_0 x^2}{120EIL}(10L^3 - 10L^2x + 5Lx^2 - x^3)$

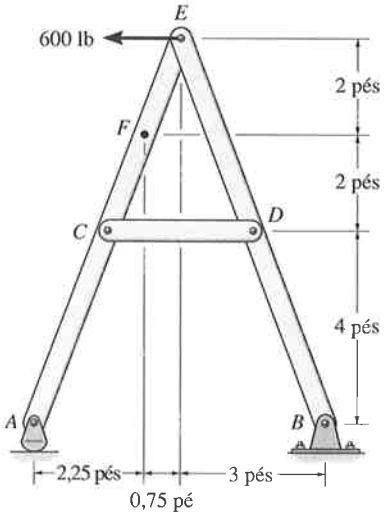
D Revisão dos Fundamentos de Engenharia

Composto por problemas, este Apêndice pode ser utilizado para rever os fundamentos de engenharia na preparação para exames de verificação da qualidade de ensino de cursos de engenharia ou possíveis exames de certificação profissional para engenheiros.

Antes de você resolver qualquer um dos problemas, sugerimos que revise as seções indicadas de cada capítulo, a fim de se familiarizar com as definições em negrito, e também os exemplos dessas seções. Os problemas a seguir estão ordenados na mesma seqüência dos tópicos de cada capítulo e, no fim, são fornecidas soluções parciais.

Capítulo 1 — Revisar Todas as Seções

D.1 Determinar o momento interno resultante no ponto *F* do elemento da estrutura.

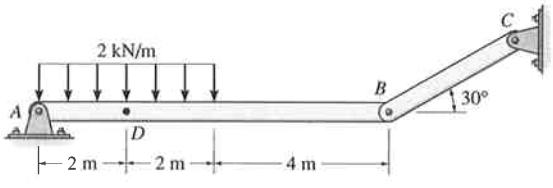


Problema D.1

D.2 A viga é apoiada por um pino em *A* e um elo *BC*. Determinar o cisalhamento interno resultante no ponto *D*.

D.3 A viga é apoiada por um pino em *A* e um elo *BC*. Determinar a tensão de cisalhamento média no pino em *B* supondo que ele tenha diâmetro de 20 mm e esteja sob cisalhamento duplo.

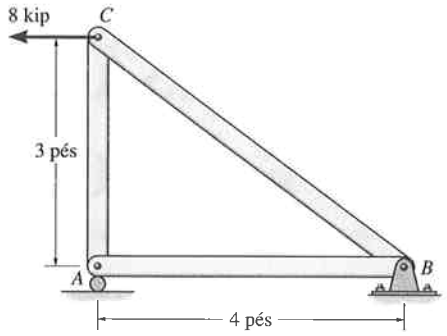
D.4 A viga é apoiada por um pino em *A* e um elo *BC*. Determinar a tensão de cisalhamento média no pino em *A* supondo que ele tenha diâmetro de 20 mm e esteja sob cisalhamento simples.



Problemas D.2/D.3/D.4

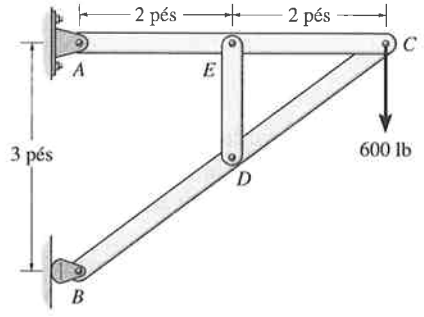
D.5 Quantos componentes independentes de tensão há em três dimensões?

D.6 As barras da treliça têm área da seção transversal de 2 pol^2. Determinar a tensão normal média no elemento *CB*.



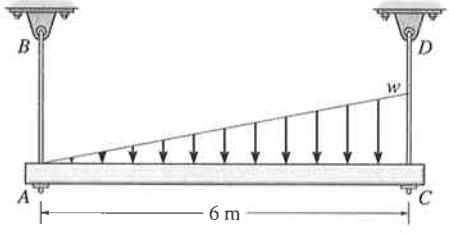
Problema D.6

D.7 A estrutura suporta a carga mostrada. O pino em *A* tem diâmetro de 0,25 pol. Supondo que esteja sujeito a cisalhamento duplo, determinar a tensão de cisalhamento média nele desenvolvida.



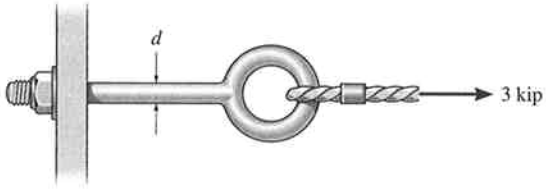
Problema D.7

D.8 A viga uniforme é apoiada por duas hastes *AB* e *CD* com área da seção transversal de 10 mm^2 e 15 mm^2, respectivamente. Determinar a intensidade *w* da carga distribuída de modo que a tensão normal média em cada haste não exceda 300 kPa.



Problema D.8

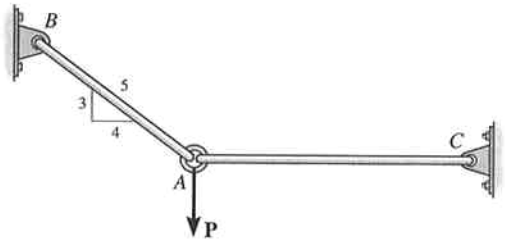
D.9 O parafuso é usado para suportar a carga de 3 kip. Determinar seu diâmetro *d* com aproximação de $\frac{1}{8}$ pol. A tensão normal admissível para o parafuso é $\sigma_{adm} = 24$ ksi.



Problema D.9

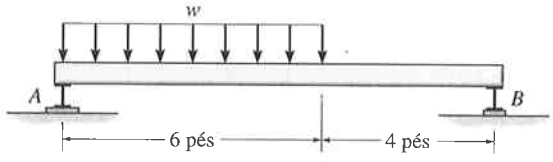
D.10 As duas hastes suportam a força vertical $P = 30$ kN. Determinar o diâmetro da haste AB supondo que o esforço de tração admissível para o material seja $\sigma_{adm} = 150$ MPa.

D.11 As hastes AB e AC têm diâmetros de 15 mm e 12 mm, respectivamente. Determinar a maior força vertical **P** que pode ser aplicada. O esforço de tração admissível para as hastes é $\sigma_{adm} = 150$ MPa.



Problemas D.10/D.11

D.12 A tensão de apoio admissível para o material sob os apoios A e B é $\sigma_{adm} = 500$ psi. Determinar a carga distribuída uniforme máxima w que pode ser aplicada à viga. As chapas de apoio em A e B têm seção transversal quadrada de 3 pol × 3 pol e 2 pol × 2 pol, respectivamente.

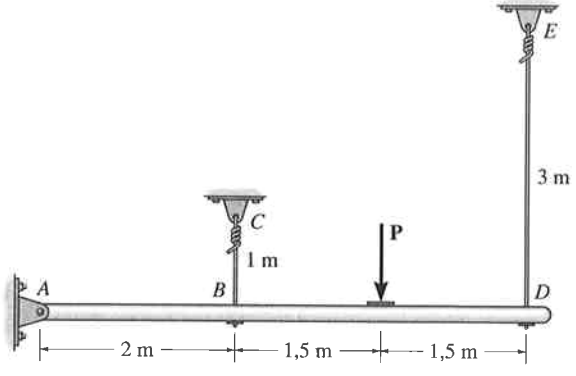


Problema D.12

Capítulo 2 — Revisar Todas as Seções

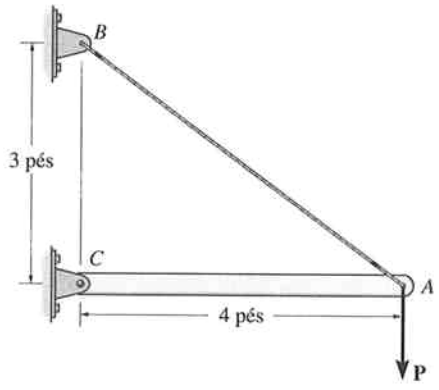
D.13 Uma tira de borracha tem comprimento sem deformação de 9 pol. Se for esticada ao redor de um poste com diâmetro de 3 pol, qual será a tensão normal média nela desenvolvida?

D.14 A haste maciça é suportada por um pino em A e pelos arames BC e DE. Se a tensão normal máxima admissível em cada arame é $\sigma_{adm} = 0{,}003$, qual o deslocamento vertical máximo da carga **P**?



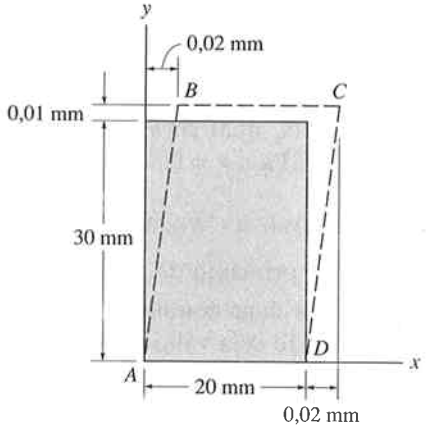
Problema D.14

D.15 A carga **P** provoca uma deformação normal de 0,0045 pol/pol no cabo AB. Determinar o ângulo da rotação da viga maciça devida à carga, supondo que ela esteja inicialmente horizontal antes do carregamento.



Problema D.15

D.16 A peça quadrada do material deforma-se até assumir a posição tracejada. Determinar a deformação por cisalhamento no canto C.

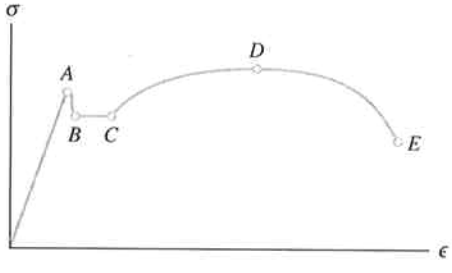


Problema D.16

Capítulo 3 — Revisar as Seções 3.1-3.7

D.17 Definir material homogêneo.

D.18 Indicar no diagrama tensão-deformação os pontos que representam o limite de proporcionalidade e a tensão de ruptura.



Problema D.18

D.19 Definir o módulo de elasticidade E.

D.20 Na temperatura ambiente, o aço doce é um material dúctil. Verdadeiro ou falso?

D.21 Na engenharia, a tensão e a deformação são calculadas usando-se a área da seção transversal e o comprimento *reais* do corpo-de-prova. Verdadeiro ou falso?

D.22 Se uma haste for submetida a carga axial, haverá deformação do material somente na direção da carga. Verdadeiro ou falso?

D.23 Uma haste de 100 mm de comprimento tem diâmetro de 15 mm. Se lhe for aplicada uma carga axial de tração de 100 kN, qual será a mudança em seu comprimento? E = 200 GPa.

D.24 Uma barra tem comprimento de 8 pol e área da seção transversal de 12 pol^2. Determinar o módulo de elasticidade do material supondo que, quando submetido a uma carga axial de tração de 10 kip, ele se alonga 0,003 pol. O material tem comportamento linear-elástico.

D.25 Uma haste de latão com 10 mm de diâmetro tem um módulo de elasticidade E = 100 GPa. Se tiver 4 m de comprimento e for submetida a uma carga axial de tração de 6 kN, qual será seu alongamento?

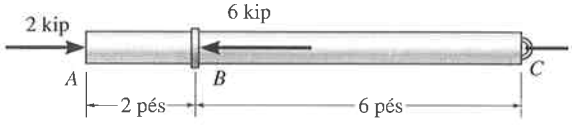
D.26 Uma haste com 100 mm de comprimento tem diâmetro de 15 mm. Se lhe for aplicada uma carga axial de tração de 10 kN, qual será a mudança em seu diâmetro? E = 70 GPa e ν = 0,35.

Capítulo 4 — Revisar as Seções 4.1-4.6

D.27 O que diz o princípio de Saint-Venant?

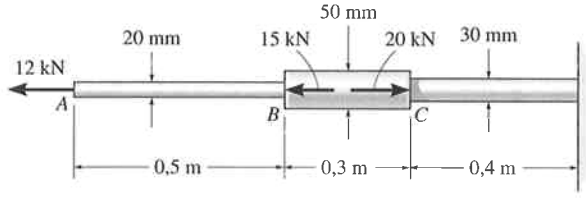
D.28 Quais são as duas condições para que o princípio da superposição seja válido?

D.29 Determinar o deslocamento da extremidade A em relação à extremidade C do eixo. A área da seção transversal é 0,5 pol^2 e $E = 29(10^3)$ ksi.



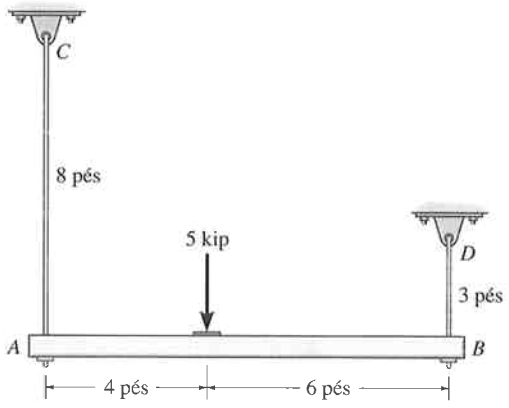
Problema D.29

D.30 Determinar o deslocamento da extremidade A em relação à extremidade C do eixo. Os diâmetros de cada segmento estão indicados na figura. E = 200 GPa.



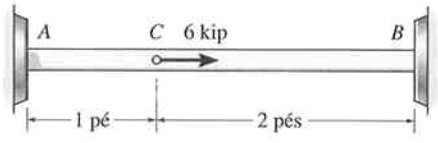
Problema D.30

D.31 Determinar o ângulo de inclinação da viga maciça quando está sujeita a uma carga de 5 kip. Antes do carregamento ela estava na horizontal. Cada haste tem diâmetro de 0,5 pol e $E = 29(10^3)$ ksi.



Problema D.31

D.32 A barra uniforme está submetida à carga de 6 kip. Determinar as reações horizontais nos apoios A e B.

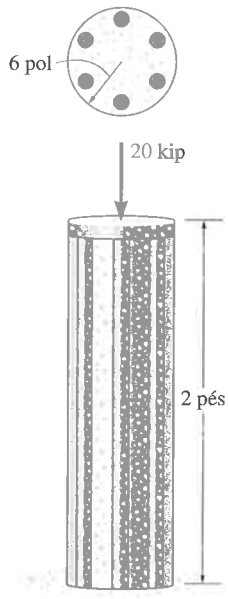


Problema D.32

D.33 O cilindro é feito de aço e tem núcleo de alumínio. Se suas extremidades estiverem submetidas a uma força axial de 300 kN, qual será a tensão normal média no aço? O cilindro tem diâmetro externo de 100 mm e diâmetro interno de 80 mm. $E_{aço}$ = 200 GPa e E_{al} = 73,1 GPa.

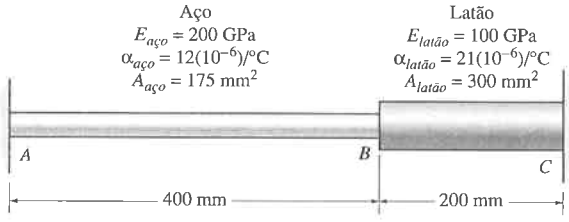
Problema D.33

D.34 A coluna de concreto reforçada por seis barras de aço está sujeita a uma força axial de 20 kip. Determinar a força suportada pelo concreto. Cada barra tem diâmetro de 0,75 pol. $E_c = 4{,}20(10^3)$ ksi e $E_{aço}$ = $29(10^3)$ ksi.



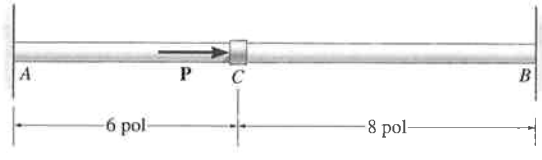
Problema D.34

D.35 Duas barras, cada qual feita de um material diferente, estão acopladas e colocadas entre duas paredes quando a temperatura é $T_1 = 15°$ C. Determinar a força exercida nos apoios (rígidos) quando a temperatura torna-se $T_2 = 25°$ C. As propriedades do material e a área da seção transversal de cada barra são dadas na figura.



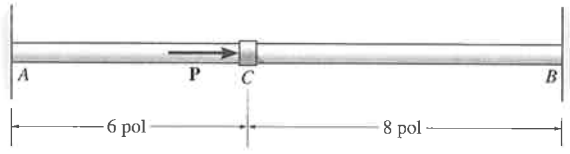
Problema D.35

D.36 A haste de alumínio tem diâmetro de 0,5 pol e está presa a apoios rígidos em A e B quando $T_1 = 80°$ F. Se a temperatura tornar-se $T_2 = 100°$ F e a força axial $P = 1200$ lb for aplicada ao colar rígido como mostrado, quais serão as reações em A e B? $\alpha_{al} = 12{,}8(10^{-6})/°F$ e $E_{al} = 10{,}6(10^6)$ psi.



Problema D.36

D.37 A haste de alumínio tem diâmetro de 0,5 pol e está presa a apoios rígidos em A e B quando $T_1 = 80°$ F. Determinar a força **P** que deve ser aplicada ao colar rígido de modo que, quando $T_2 = 50°$ F, a reação em B seja nula. $\alpha_{al} = 12{,}8(10^{-6})/°F$, $E_{al} = 10{,}6(10^3)$ ksi.

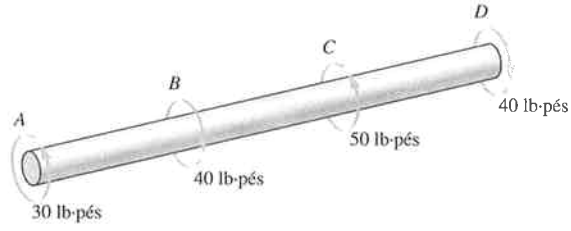


Problema D.37

Capítulo 5 — Revisar as Seções 5.1-5.5

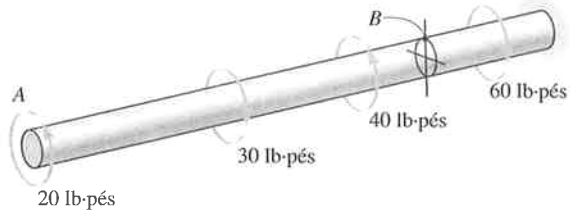
D.38. A fórmula da torção, $\tau = Tc/J$, pode ser usada se a seção transversal não é circular?

D.39. O eixo maciço de 0,75 pol de diâmetro é usado para transmitir os torques mostrados. Determinar a tensão de cisalhamento absoluta máxima nele desenvolvida.



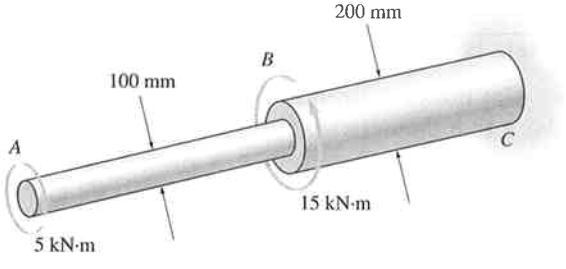
Problema D.39

D.40 O eixo maciço de 1,5 pol de diâmetro é usado para transmitir os torques mostrados. Determinar a tensão de cisalhamento desenvolvida em seu ponto B.



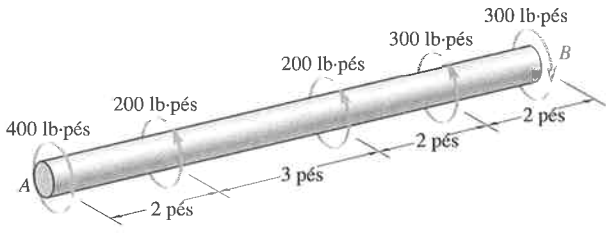
Problema D.40

D.41 O eixo maciço é usado para transmitir os torques mostrados. Determinar a tensão de cisalhamento máxima absoluta nele desenvolvida.



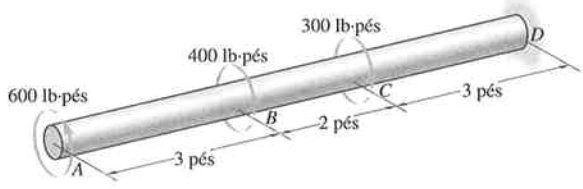
Problema D.41

D.42 O eixo está sujeito aos torques mostrados. Determinar o ângulo de torção da extremidade A em relação à extremidade B. O eixo tem diâmetro de 1,5 pol. $G = 11(10^3)$ ksi.



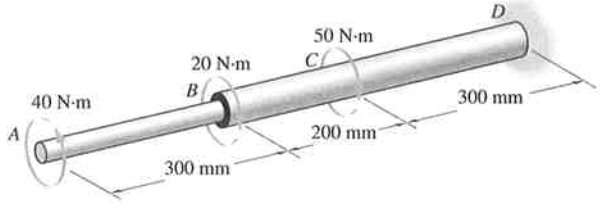
Problema D.42

D.43 Determinar o ângulo de torção na extremidade A de um eixo com 1 pol de diâmetro submetido à carga de torção mostrada. $G = 11(10^3)$ ksi.



Problema D.43

D.44 O eixo consiste em uma seção maciça AB com diâmetro de 30 mm e um tubo BD com diâmetro interno de 25 mm e diâmetro externo de 50 mm. Determinar o ângulo de torção em sua extremidade A quando ele está sujeito à carga de torção mostrada. $G = 75$ GPa.

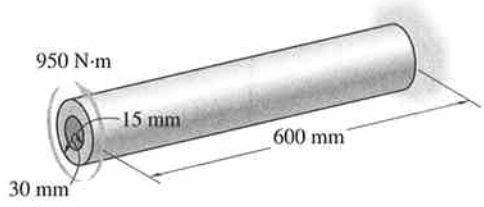


Problema D.44

D.45 Um motor transmite 200 hp a um eixo de aço tubular e tem diâmetro externo de 1,75 pol. Se estiver girando a 150 rad/s, qual o maior diâmetro interno (com aproximação de $\frac{1}{8}$ pol) que ele pode ter, supondo que a tensão de cisalhamento admissível para o material seja $\tau_{adm} = 20$ ksi?

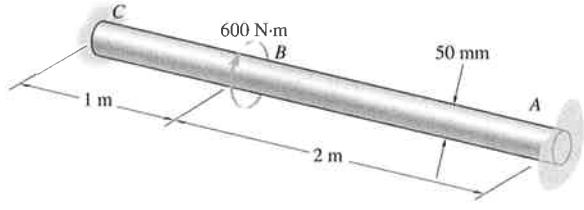
D.46 Um motor transmite 300 hp a um eixo de aço tubular e tem diâmetro externo de 2,5 pol e diâmetro interno de 2 pol. Determinar a menor velocidade angular a que ele pode girar se a tensão de cisalhamento admissível para o material é $\tau_{adm} = 20$ ksi.

D.47 O eixo é feito de um tubo de aço com núcleo de latão. Se estiver engastado em um apoio rígido, qual ângulo de torção ocorrerá em sua extremidade? $G_{aço} = 75$ GPa e $G_{latão} = 37$ GPa.



Problema D.47

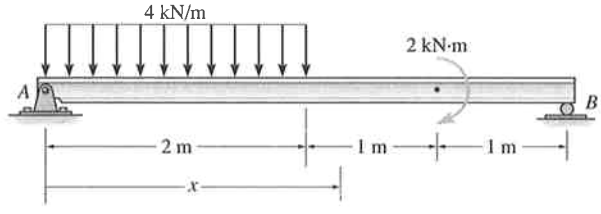
D.48 Determinar a tensão de cisalhamento absoluta máxima no eixo. Considerar JG constante.



Problema D.48

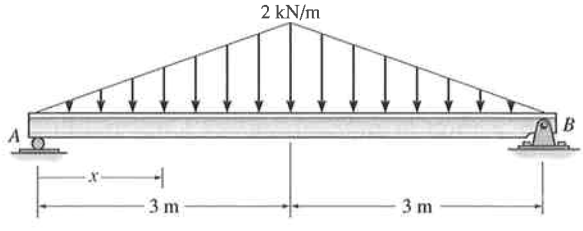
Capítulo 6 — Revisar as Seções 6.1-6.5

D.49 Determinar o momento interno da viga em função de x, onde $2 \text{ m} \leq x \leq 3 \text{ m}$.



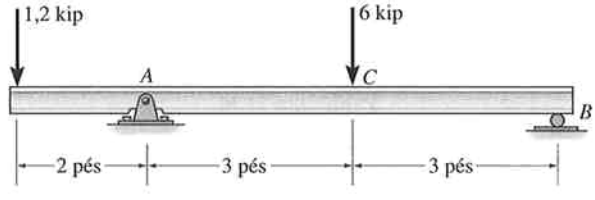
Problema D.49

D.50 Determinar o momento interno da viga em função de x, onde $0 \leq x \leq 3$ m.



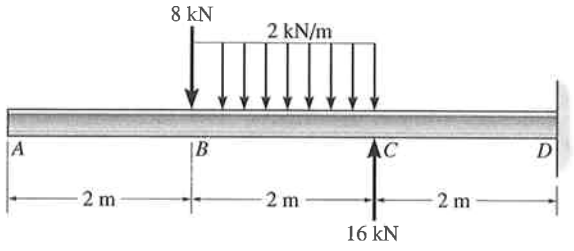
Problema D.50

D.51 Determinar o momento máximo na viga.



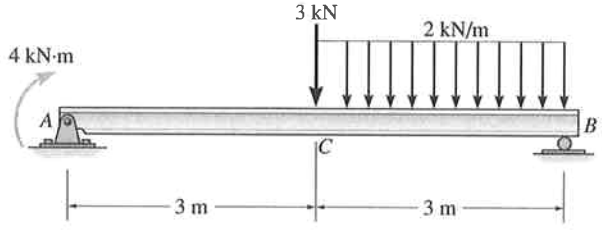
Problema D.51

D.52 Determinar o momento fletor absoluto máximo na viga.



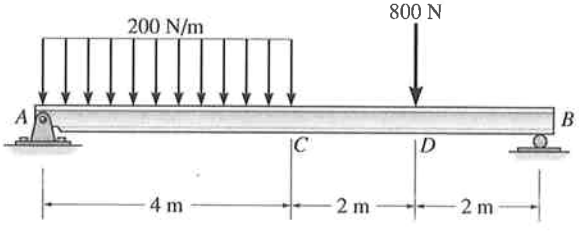
Problema D.52

D.53 Determinar o momento máximo na viga.



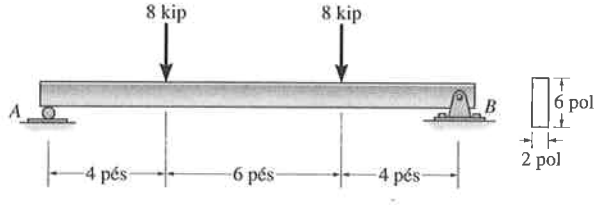
Problema D.53

D.54 Determinar o momento máximo na viga.



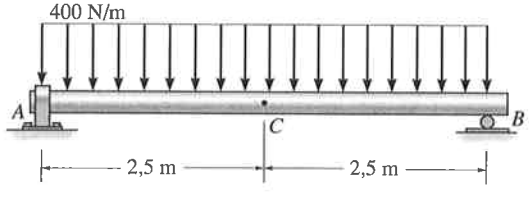
Problema D.54

D.55 Determinar o momento fletor absoluto máximo na viga.



Problema D.55

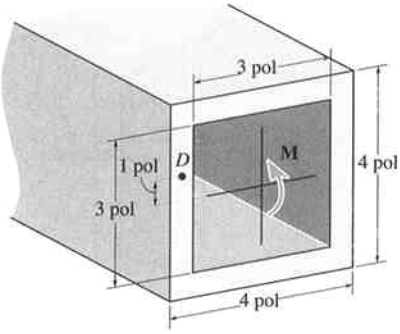
D.56 Determinar a tensão de flexão máxima em C na haste de 50 mm de diâmetro. Há um mancal em A.



Problema D.56

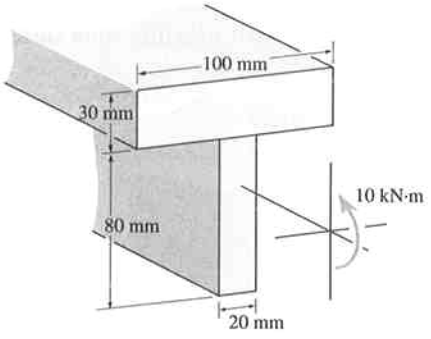
D.57 Qual é a deformação da viga no eixo neutro?

D.58 Determinar o momento M que deve ser aplicado à viga a fim de criar um esforço de compressão de 10 ksi no ponto D.



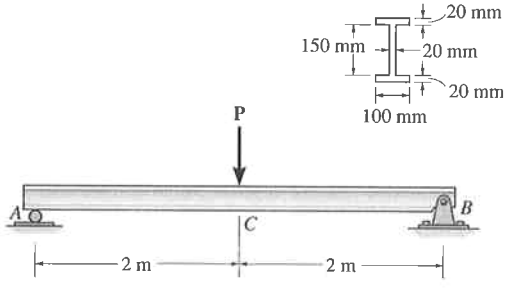
Problema D.58

D.59 Determinar a tensão de flexão máxima na viga.



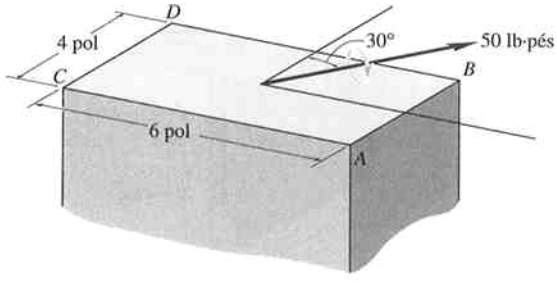
Problema D.59

D.60 Determinar a carga máxima P que pode ser aplicada à viga, cujo material tem tensão de flexão admissível σ_{adm} = 12 MPa.



Problema D.60

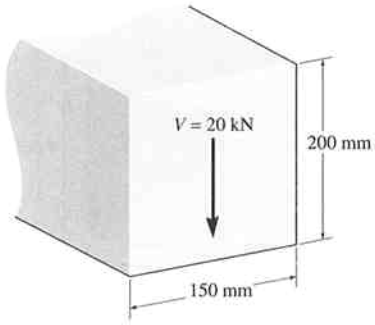
D.61 Determinar a tensão máxima na seção transversal da viga.



Problema D.61

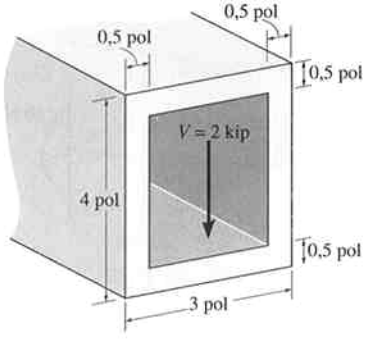
Capítulo 7 — Revisar as Seções 7.1-7.4

D.62 Determinar a tensão de cisalhamento máxima na viga.



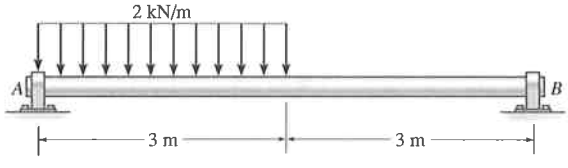
Problema D.62

D.63 A viga tem seção transversal retangular e está submetida a um cisalhamento $V = 2$ kip. Determinar a tensão de cisalhamento máxima nela desenvolvida.



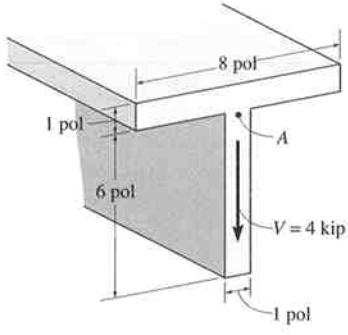
Problema D.63

D.64 Determinar a tensão de cisalhamento máxima absoluta no eixo, cujo diâmetro é de 60 mm. Os apoios em A e B são mancais.



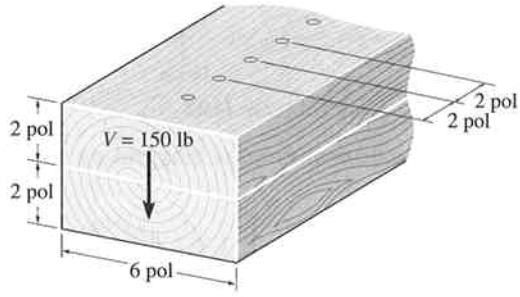
Problema D.64

D.65 Determinar a tensão de cisalhamento no ponto A da viga, localizado no topo da alma.



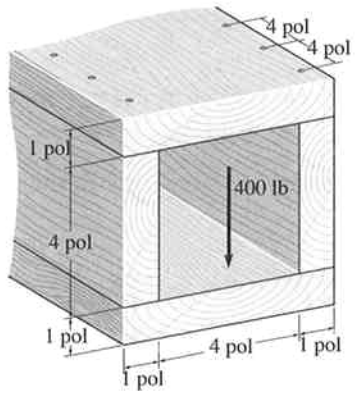
Problema D.65

D.66 A viga compõe-se de duas tábuas pregadas nas partes superior e inferior com pregos espaçados por 2 pol. Se uma força de cisalhamento interna $V = 150$ lb for aplicada às tábuas, qual a força de cisalhamento que cada prego suportará?



Problema D.66

D.67 A viga compõe-se de quatro tábuas pregadas nas partes superior e inferior por duas filas de pregos, distantes 4 pol uns dos outros. Se for aplicada uma força interna de cisalhamento $V = 400$ lb às tábuas, qual a força de cisalhamento que cada prego suportará?



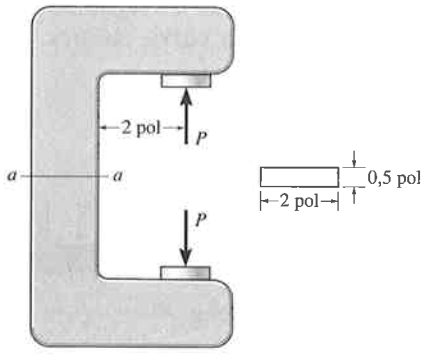
Problema D.67

Capítulo 8 — Revisar Todas as Seções

D.68 Um tanque cilíndrico está submetido a uma pressão interna de 80 psi. Se seu diâmetro interno for 30 pol, qual a tensão normal máxima no material?

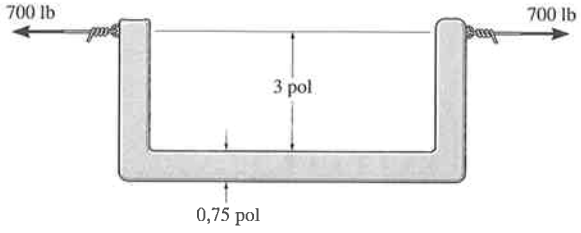
D.69 Um tanque esférico pressurizado de aço tem 0,25 pol de espessura. Se estiver sujeito a uma pressão interna $p = 150$ psi, qual diâmetro interno ele deverá ter para que a tensão normal máxima não exceda 10 ksi?

D.70 Determinar a grandeza da carga P que provocará uma tensão normal máxima $\sigma_{máx} = 30$ ksi no elo ao longo da seção a–a.



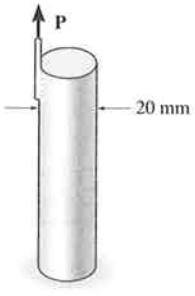
Problema D.70

D.71 Determinar a tensão normal máxima na parte horizontal do suporte, o qual tem espessura de 1 pol e largura de 0,75 pol.



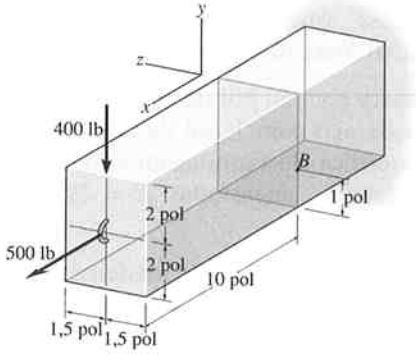
Problema D.71

D.72 Determinar a carga máxima P que pode ser aplicada na haste de modo que a tensão normal nela desenvolvida não exceda $\sigma_{máx} = 30$ MPa.



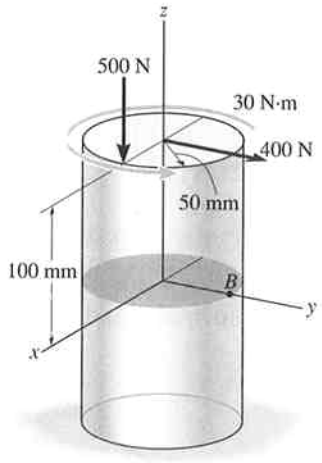
Problema D.72

D.73 A viga tem seção transversal retangular e está sujeita ao carregamento mostrado. Determinar os componentes de tensão σ_x, σ_y e τ_{xy} no ponto B.



Problema D.73

D.74 O cilindro maciço está sujeito ao carregamento mostrado. Determinar os componentes de tensão no ponto B.

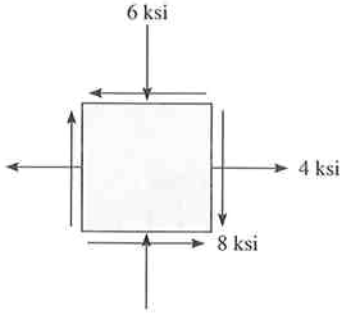


Problema D.74

Capítulo 9 — Revisar as Seções 9.1-9.3

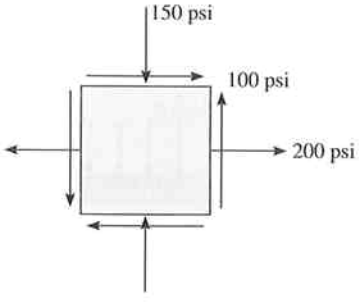
D.75 Quando o estado de tensão é representado pela tensão principal, nenhuma tensão de cisalhamento atua sobre o elemento. Verdadeiro ou falso?

D.76 O estado de tensão em um ponto é mostrado no elemento. Determinar a tensão principal máxima.



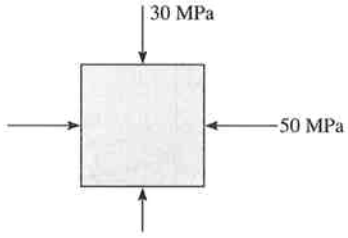
Problema D.76

D.77 O estado de tensão em um ponto é mostrado no elemento. Determinar a tensão de cisalhamento máxima no plano.



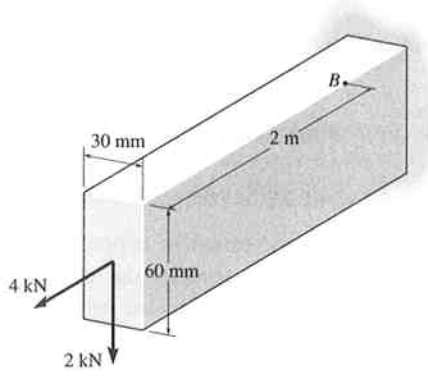
Problema D.77

D.78 O estado de tensão em um ponto é mostrado no elemento. Determinar a tensão de cisalhamento máxima no plano.



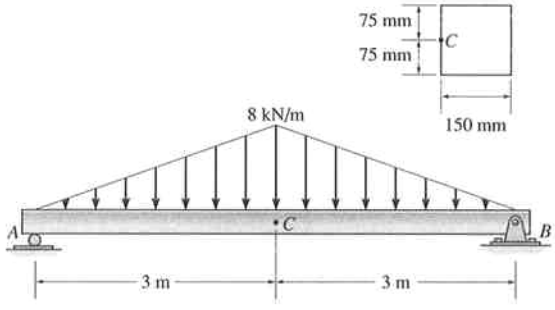
Problema D.78

D.79 A viga está sujeita a carga na extremidade. Determinar a tensão principal máxima no ponto B.



Problema D.79

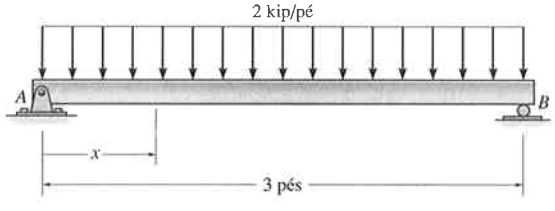
D.80 A viga está sujeita ao carregamento mostrado. Determinar a tensão principal no ponto C.



Problema D.80

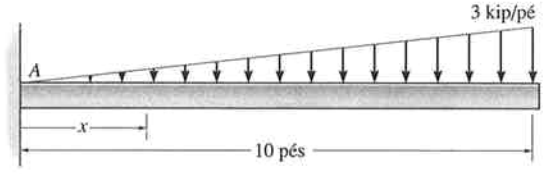
Capítulo 12 — Revisar as Seções 12.1, 12.2 e 12-5

D.81 A viga está submetida ao carregamento mostrado. Determinar a equação da curva elástica. Considerar EI constante.



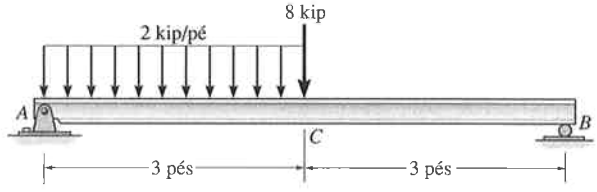
Problema D.81

D.82 A viga está sujeita ao carregamento mostrado. Determinar a equação da curva elástica. Considerar EI constante.



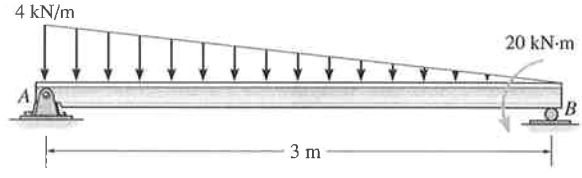
Problema D.82

D.83 Determinar o deslocamento do ponto C na viga mostrada. Usar o método da superposição e considerar EI constante.



Problema D.83

D.84 Determinar a inclinação no ponto A da viga mostrada. Usar o método da superposição e considerar EI constante.



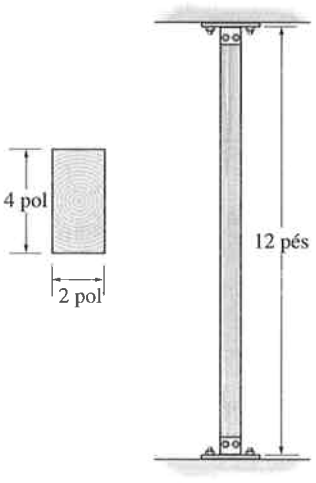
Problema D.84

Capítulo 13 — Revisar as Seções 13.1-13.3

D.85 A carga crítica é a carga axial máxima que uma coluna pode suportar quando está na iminência de flambagem. Essa carga representa um caso de equilíbrio neutro. Verdadeiro ou falso?

D.86 Uma haste com 50 pol de comprimento é feita de uma barra de aço com 1 pol de diâmetro. Determinar a carga crítica de flambagem supondo que as extremidades estejam engastadas. $E = 29(10^3)$ ksi e $\sigma_E = 36$ ksi.

D.87 Uma coluna retangular de madeira com 12 pés tem as dimensões mostradas. Determinar a carga crítica supondo que as extremidades estejam presas por pino. $E = 1{,}6\ (10^3)$ ksi. Não ocorre escoamento.



Problema D.87

D.88 Um tubo de aço está engastado nas duas extremidades. Se tiver 5 m de comprimento, diâmetro externo de 50 mm e espessura de 10 mm, qual carga axial máxima P poderá suportar sem fletir-se. $E_{aço}$ = 200 GPa e σ_E = 250 MPa.

D.89 Um tubo de aço é suportado por pino nas duas extremidades. Supondo que tenha 6 pés de comprimento e diâmetro externo de 2 pol, determinar sua menor espessura de modo que possa suportar uma carga axial P = 40 kip sem fletir-se. $E_{aço} = 29(10^3)$ ksi e σ_E = 36 ksi.

D.90 Determinar o menor diâmetro, com aproximação de $\frac{1}{16}$ pol, de uma haste de aço maciça com 40 pol de comprimento para que suporte uma carga axial de P = 3 kip sem fletir-se. As extremidades estão presas por pino. $E_{aço} = 29(10^3)$ ksi e σ_E = 36 ksi.

SOLUÇÕES E RESPOSTAS PARCIAIS

D.1 Toda a estrutura:
$\Sigma M_B = 0$; $A_y = 800$ lb
CD é um elemento de duas forças
Elemento AE:
$\Sigma M_E = 0$; $F_{CD} = 600$ lb
Segmento ACF:
$\Sigma M_F = 0$; $M_F = 600$ lb · pés *Resposta*

D.2 BC é um elemento de duas forças.
Viga AB:
$\Sigma M_B = 0$; $A_y = 6$ kN
Segmento AD:
$\Sigma F_y = 0$; $V = 2$ kN *Resposta*

D.3 BC é um elemento de duas forças.
Viga AB:
$\Sigma M_A = 0$; $T_{BC} = 4$ kN
Pino B:
$$\tau_B = \frac{T_{BC}/2}{A} = \frac{4/2}{\frac{\pi}{4}(0{,}02)^2} = 6{,}37 \text{ MPa}$$ *Resposta*

D.4 BC é um elemento de duas forças.
Viga AB:
$\Sigma M_A = 0$; $T_{BC} = 4$ kN
$\Sigma F_x = 0$; $A_x = 3{,}464$ kN
$\Sigma F_y = 0$; $A_y = 6$ kN
$F_A = \sqrt{(3{,}4\,64)^2 + (6)^2} = 6{,}928$ kN
$$\tau_A = \frac{F_A}{A} = \frac{6{,}928}{\frac{\pi}{4}(0{,}02)^2} = 22{,}1 \text{ MPa}$$ *Resposta*

D.5 6: σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx} *Resposta*

D.6 Junta C:
$\pm\Sigma F_x = 0$; $T_{CB} = 10$ kip
$$\sigma = \frac{T_{CB}}{A} = \frac{10}{2} = 5 \text{ ksi}$$ *Resposta*

D.7 Toda a estrutura:
$\Sigma F_y = 0$; $A_y = 600$ lb
$\Sigma M_B = 0$; $A_x = 800$ lb
$F_A = \sqrt{(600)^2 + (800)^2} = 1.000$ lb
$$\tau_A = \frac{F_A/2}{A} = \frac{1.000/2}{\frac{\pi}{4}(0.25)^2} = 10{,}2 \text{ ksi}$$ *Resposta*

D.8 Viga:
$\Sigma M_A = 0$; $T_{CD} = 2w$
$\Sigma F_y = 0$; $T_{AB} = w$
Haste AB:
$$\sigma = \frac{P}{A};\ 300(10^3) = \frac{w}{10};\ w = 3 \text{ MN/m}$$
Haste CD:
$$\sigma = \frac{P}{A};\ 300(10^3) = \frac{2w}{15};\ w = 2{,}25 \text{ MN/m}$$ *Resposta*

D.9 $$\sigma = \frac{P}{A};\ 24 = \frac{3}{\frac{\pi}{4}d^2};\ d = 0{,}3989 \text{ pol}$$
Usar d = 0,5 pol *Resposta*

D.10 Junta A:
$\Sigma F_y = 0$; $F_{AB} = 50$ kN
$$\sigma = \frac{P}{A};\ 150(10^6) = \frac{50(10^3)}{\frac{\pi}{4}d^2};\ d = 20{,}6 \text{ mm}$$ *Resposta*

D.11 Junta A:
$\Sigma F_y = 0$; $F_{AB} = 1{,}667P$
$\Sigma F_x = 0$; $F_{AC} = 1{,}333\ P$
Haste AB:
$$\sigma = \frac{P}{A};\ 150(10^6) = \frac{1{,}667\ P}{\frac{\pi}{4}(0{,}015)^2};\ P = 15{,}9 \text{ kN}$$
Haste AC:
$$\sigma = \frac{P}{A};\ 150(10^6) = \frac{1{,}333\ P}{\frac{\pi}{4}(0{,}012)^2};\ P = 12{,}7 \text{ kN}$$ *Resposta*

D.12 Viga:
$\Sigma M_A = 0$; $B_y = 1{,}8\ w$
$\Sigma F_y = 0$; $A_y = 4{,}2\ w$

Em A:

$$\sigma = \frac{P}{A};\ 500 = \frac{4{,}2\ w}{(3)(3)};\ w = 1{,}07 \text{ kip/pé}$$ *Resposta*

Em B:

$$\sigma = \frac{P}{A};\ 500 = \frac{1{,}8\ w}{(2)(2)};\ w = 1{,}11 \text{ kip/pé}$$

D.13 $$\epsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\pi(3) - 9}{9} = 0{,}0472 \text{ pol/pol}$$ *Resposta*

D.14 $(\delta_{DE})_{máx} = \epsilon_{máx}\, l_{DE} = 0{,}003(3) = 0{,}009$ m

Por proporção de A,

$\delta_{BC} = 0{,}009\ (\frac{2}{5}) = 0{,}0036$ m

$(\delta_{BC})_{máx} = \epsilon_{máx}\, l_{BC} = 0{,}003(1) = 0{,}003 \text{ m} < 0{,}0036$ m

Usar $\delta_{BC} = 0{,}003$ m. Por proporção de A,

$$\delta_P = 0{,}003\left(\frac{3{,}5}{2}\right) = 0{,}00525 \text{ m} = 5{,}25 \text{ mm}$$ *Resposta*

D.15 $l_{AB} = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = 5$ pés

$l'_{AB} = 5 + 5(0{,}0045) = 5{,}0225$ pés

O ângulo BCA era inicialmente $\theta = 90°$. De acordo com a lei do cosseno, o novo ângulo BCA (θ') é

$5{,}0225 = \sqrt{(3)^2 + (4)^2 - 2(3)(4)\cos\theta}$

$\theta = 90{,}538°$

Desse modo:

$\Delta\theta' = 90{,}538° - 90° = 0{,}538°$ *Resposta*

D.16 $$\angle BCD = \angle BAD = \text{tg}^{-1}\frac{3{,}5}{2} = 89{,}962°$$

$$\gamma_{xy} = (90° - 89{,}962°)\frac{\pi}{180°} = 0{,}666(10^{-3}) \text{ rad}$$ *Resposta*

D.17 O material tem propriedades uniformes em toda a extensão. *Resposta*

D.18 O limite de proporcionalidade é A. *Resposta*

O esforço de ruptura é D. *Resposta*

D.19 A inclinação inicial do diagrama σ–ϵ. *Resposta*

D.20 Verdadeiro. *Resposta*

D.21 Falso. Usar a área da seção transversal e o comprimento *iniciais*. *Resposta*

D.22 Falso. Também há deformação nas direções perpendiculares devido ao efeito de Poisson. *Resposta*

D.23 $$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \epsilon\frac{P}{AE}$$

$$\delta = \epsilon L = \frac{PL}{AE} = \frac{100(10^3)(0{,}100)}{\frac{\pi}{4}(0{,}015)^2\, 200(10^9)} = 0{,}283 \text{ mm}$$ *Resposta*

D.24 $$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE}$$

$$\delta = \epsilon L = \frac{PL}{AE};\ 0{,}003 = \frac{(10.000)(8)}{12\,E}$$

$E = 2{,}22(10^6)$ psi *Resposta*

D.25 $$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE}$$

$$\delta = \epsilon L = \frac{PL}{AE} = \frac{6(10^3)\,4}{\frac{\pi}{4}(0{,}01)^2\, 100(10^9)} = 3{,}06 \text{ mm}$$ *Resposta*

D.26 $$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{10(10^3)}{\frac{\pi}{4}(0{,}015)^2} = 56{,}59 \text{ MPa}$$

$$\epsilon_{long} = \frac{\sigma}{E} = \frac{56{,}59(10^6)}{70(10^9)} = 0{,}808(10^{-3})$$

$$\epsilon_{lat} = -\nu\epsilon_{long} = -0{,}35(0{,}808(10^{-3})) = -0{,}283(10^{-3})$$

$$\delta d = \epsilon_{lat}(15 \text{ mm}) = -4{,}24 \text{ mm}$$ *Resposta*

D.27 As distribuições de tensão tendem ao ajustamento nas seções mais afastadas da carga. *Resposta*

D.28 1) Material linear-elástico.

2) Sem grandes deformações. *Resposta*

D.29 $$\delta_{A/C} = \sum\frac{PL}{AE} = \frac{-2(2((12)}{0{,}5(29(10^3))} + \frac{4(6)(12)}{0{,}5(29(10^3))}$$

$$= 0{,}0166 \text{ pol}$$ *Resposta*

D.30 $$\delta_{A/C} = \sum\frac{PL}{AE} = \frac{12(10^3)(0{,}5)}{\frac{\pi}{4}(0{,}02)^2\, 200(10^9)}$$

$$+ \frac{27(10^3)(0{,}3)}{\frac{\pi}{4}(0{,}05)^2\, 200(10^9)} = 0{,}116 \text{ mm}$$ *Resposta*

D.31 Viga AB:

$\Sigma M_A = 0;\ F_{BD} = 2$ kip

$\Sigma F_y = 0;\ F_{AC} = 3$ kip

$$\delta_A = \frac{PL}{AE} = \frac{3(8)(12)}{\frac{\pi}{4}(0{,}5)^2\, 29(10^3)} = 0{,}0506 \text{ pol} \downarrow$$

$$\delta_B = \frac{PL}{AE} = \frac{2(3)(12)}{\frac{\pi}{4}(0{,}5)^2\, 29(10^3)} = 0{,}01264 \text{ pol} \downarrow$$

$$\theta = \frac{\Delta\delta}{l_{AB}} = \frac{\delta_A - \delta_B}{l_{AB}} = \frac{0{,}0506 - 0{,}01264}{10(12)}$$

$$= 0{,}000315 \text{ rad} = 0{,}0181°$$ *Resposta*

D.32 Equilíbrio:

$F_A + F_B = 6$

Compatibilidade:

$$\delta_{C/A} = \delta_{C/B};\ \frac{F_A\,(1)}{AE} = \frac{F_B\,(2)}{AE}$$

$F_A = 4$ kip, $F_B = 2$ kip *Resposta*

D.33 Equilíbrio:

$P_{aço} + P_{al} = 300\ (10^3)$

Compatibilidade:

$$\delta_{aço} = \delta_{al};\ \frac{P_{aço}\,L}{[\frac{\pi}{4}(0{,}1)^2 - \frac{\pi}{4}(0{,}08)^2]\, 200(10^9)}$$

$$= \frac{P_{al}\,L}{[\frac{\pi}{4}(0{,}08)^2]\, 73{,}1\ (10^9)}$$

$P_{aço} = 181{,}8$ kN
$P_{al} = 118$ kN

$$\sigma_{aço} = \frac{P_{aço}}{A} = \frac{181{,}8}{[\frac{\pi}{4}(0{,}1)^2 - \frac{\pi}{4}(0{,}08)^2]} = 64{,}3 \text{ MPa}$$ *Resposta*

D.34 Equilíbrio:
$P_c + P_{aço} = 20$
Compatibilidade:

$$\delta_c = \delta_{aço}; \frac{P_c\,(2)}{[\pi\,(6)^2 - 6(\frac{\pi}{4})(0{,}75)^2]\,4{,}20(10^3)}$$

$$= \frac{P_{aço}\,(2)}{6(\frac{\pi}{4})\,(0{,}75)^2\,29\,(10^3)}$$

$P_c = 17{,}2$ kip *Resposta*
$P_{aço} = 2{,}84$ kip

D.35 $\delta_{temp} = \Sigma\alpha\Delta TL$

$$\delta_{carga} = \Sigma\frac{PL}{AE}$$

Compatibilidade: $\delta_{temp} + \delta_{carga} = 0$

$$12(10^{-6})(25 - 15)\,(0{,}4) + 21(10^{-6})(25 - 15)(0{,}2) + \frac{-F(0{,}4)}{175(10^{-6})(200(10^9))} - \frac{F(0{,}2)}{300(10^{-6})(100(10^9))} = 0$$

$F = 4{,}97$ kN *Resposta*

D.36 Equilíbrio:
$F_A + F_B = 1.200$
Compatibilidade:
Remover apoio em B. Requer:
$\delta_B = (\delta_{B/A})_{temp} + (\delta_{B/A})_{carga} = 0$

$$\alpha\Delta TL + \sum\frac{PL}{AE} = 0$$

$$12{,}8(10^{-6})(100 - 80)(14) + \frac{1.200(6)}{\frac{\pi}{4}(0{,}5)^2\,10{,}6\,(10^6)} - \frac{F_B(14)}{\frac{\pi}{4}(0{,}5)^2\,10{,}6\,(10^6)} = 0$$

$F_B = 1{,}05$ kip *Resposta*

$F_A = 153$ lb *Resposta*

D.37 Equilíbrio:
$F_A + F_B = P$
Visto que $F_B = 0$, $F_A = P$
Compatibilidade:
Remover apoio em B. Requer:
$\delta_B = (\delta_{B/A})_{temp} + (\delta_{B/A})_{carga} = 0$

$$\alpha\Delta TL + \frac{PL}{AE} = 0$$

$$12{,}8\,(10^{-6})\,(50 - 80)\,(14) + \frac{P(6)}{\frac{\pi}{4}(0{,}5)^2\,10{,}6\,(10^6)} = 0$$

$P = 1{,}86$ kip *Resposta*

D.38 Não. Ela é válida apenas para seções transversais circulares. As seções não circulares sofrem distorção. *Resposta*

D.39 $T_{máx} = T_{CD} = 40$ lb · pés

$$\tau_{máx} = \frac{Tc}{J} = \frac{40(12)(0{,}375)}{\frac{\pi}{2}(0{,}375)^4} = 5{,}79 \text{ ksi}$$ *Resposta*

D.40 Equilíbrio do segmento AB:
$T_B = 30$ lb · pés

$$T_B = \frac{Tc}{J} = \frac{30(12)(0{,}75)}{\frac{\pi}{2}(0{,}75)^4} = 543 \text{ psi}$$ *Resposta*

D.41 Segmento AB:

$$\tau_{máx} = \frac{Tc}{J} = \frac{5(10^3)(0{,}05)}{\frac{\pi}{2}(0{,}05)^4} = 25{,}5 \text{ MPa}$$ *Resposta*

Segmento BC:

$$\tau_{máx} = \frac{Tc}{J} = \frac{10(10^3)(0{,}1)}{\frac{\pi}{2}(0{,}1)^4} = 6{,}37 \text{ MPa}$$

D.42

$$\phi_{A/B} = \sum\frac{TL}{JG} = \frac{-400(12)(2)(12)}{\frac{\pi}{2}(0{,}75)^4\,11(10^6)} - \frac{200(12)(3)(12)}{\frac{\pi}{2}(0{,}75)^4\,11(10^6)} + 0 + \frac{300(12)(2)(12)}{\frac{\pi}{2}(0{,}75)^4\,11(10^6)}$$

$= -0{,}0211$ rad $= 0{,}0211$, no sentido horário quando visto a partir de A. *Resposta*

D.43

$$\phi_A = \sum\frac{TL}{JG} = \frac{600(12)(3)(12)}{\frac{\pi}{2}(0{,}5)^4 11(10^6)} + \frac{200(12)(2)(12)}{\frac{\pi}{2}(0{,}5)^4\,11(10^6)} - \frac{100(12)(3)(12)}{\frac{\pi}{2}(0{,}5)^4\,11\,(10^6)}$$

$= 0{,}253$, no sentido anti-horário quando visto a partir de A. *Resposta*

D.44

$$\phi_A = \sum\frac{TL}{JG} = \frac{40(0{,}3)}{\frac{\pi}{2}(0{,}015)^4\,75(10^9)} + \frac{20(0{,}2)}{\frac{\pi}{2}[(0{,}025)^4 - (0{,}0125)^4]\,75(10^9)} - \frac{30(0{,}3)}{\frac{\pi}{2}[(0{,}025)^4 - (0{,}0125)^4]\,75(10^9)}$$

$= 1{,}90\,(10^{-3})$, no sentido anti-horário quando visto de A para D. *Resposta*

D.45

$$P = 200 \text{ hp}\left(\frac{550 \text{ pés} \cdot \text{lb/s}}{1 \text{ hp}}\right) = 110.000 \text{ pés} \cdot \text{lb/s}$$

$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{110.000}{150} = 733{,}33 \text{ lb} \cdot \text{pés} = 8.800 \text{ lb} \cdot \text{pol}$$

$$\tau_{adm} = \frac{Tc}{J};\ 20(10^3) = \frac{8.800\,(0{,}875)}{\frac{\pi}{2}[(0{,}875)^4 - r_i^4]}$$

$r_i = 0{,}764$ pol
$d_i = 1{,}53$ pol. Usar $d_i = 1{,}625$ pol $= 1\frac{5}{8}$ pol *Resposta*

D.46

$$P = 300 \text{ hp}\left(\frac{550 \text{ pés} \cdot \text{lb/s}}{1 \text{ hp}}\right) = 165.000 \text{ pés} \cdot \text{lb/s}$$

$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{165.000}{\omega}$$

$$\tau_{máx} = \frac{Tc}{J};\ 20(10^3) = \frac{\frac{165000}{\omega}(12)(1{,}25)}{\frac{\pi}{2}[(1{,}25)^4 - (1)^4]}$$

$\omega = 54{,}7$ rad/s *Resposta*

D.47 Equilíbrio:

$T_{aço} + T_{latão} = 950$

Compatibilidade: $\phi_{aço} = \phi_{latão}$;

$$\frac{T_{aço}\,(0{,}6)}{\frac{\pi}{2}\,[(0{,}03)^4 - (0{,}015)^4]\,75\,(10^9)} = \frac{T_{latão}\,(0{,}6)}{\frac{\pi}{2}\,(0{,}015)^4\,37(10^9)}$$

$T_{latão} = 30{,}25 \text{ N} \cdot \text{m}$

$T_{aço} = 919{,}8 \text{ N} \cdot \text{m}$

$$\phi = \phi_{latão} = \frac{30{,}25(0{,}6)}{\frac{\pi}{2}\,(0{,}015)^4\,37(10^9)} = 0{,}00617 \text{ rad}$$

Resposta

D.48 Equilíbrio:

$T_A + T_C = 600$

Compatibilidade:

$$\delta_{B/C} = \delta_{B/A};\ \frac{T_C\,(1)}{JG} = \frac{T_A\,(2)}{JG}$$

$T_A = 200 \text{ N} \cdot \text{m}$

$T_C = 400 \text{ N} \cdot \text{m}$

$$\tau_{máx} = \frac{Tc}{J} = \frac{400(0{,}025)}{\frac{\pi}{2}\,(0{,}025)^4} = 16{,}3 \text{ MPa}$$

Resposta

D.49 $A_y = 5{,}5 \text{ kN}$

Usar seção de comprimento x.

$$\circlearrowleft + \Sigma M = 0;\ -5{,}5\,x + 4\,(2)(x - 1) + M = 0$$

$M = 8 - 2{,}5\,x$ ***Resposta***

D.50 $A_y = 3 \text{ kN}$

Usar seção de comprimento x.

Intensidade de $w = \frac{2}{3}x$ em x.

$$\circlearrowleft + \Sigma M = 0;\ -3x + \left(\frac{1}{3}\,x\right)\left[\frac{1}{2}(x)\left(\frac{2}{3}x\right)\right] + M = 0$$

$$M = 3x - \frac{x^3}{9}$$ ***Resposta***

D.51 $B_y = 2{,}6 \text{ kip}$

$A_y = 4{,}6 \text{ kip}$

Traçar diagrama M

$M_{máx} = 7{,}80 \text{ kip} \cdot \text{pés}$ (em C) ***Resposta***

D.52 Traçar diagrama M

$M_{máx} = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (em C) ***Resposta***

D.53 $A_y = 2{,}33 \text{ kN}$

$B_y = 6{,}617 \text{ kN}$

Traçar diagrama M

$M_{máx} = 11 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (em C) ***Resposta***

D.54 $A_y = B_y = 800 \text{ N}$

Traçar diagrama M

$M_{máx} = 1.600 \text{ N} \cdot \text{m}$ (dentro de CD) ***Resposta***

D.55 $A_y = B_y = 8 \text{ kip}$

$M_{máx} = 8\,(4) = 32 \text{ kip} \cdot \text{pés}$

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{32(12)(3)}{\frac{1}{12}\,(2)(6)^3} = 32 \text{ ksi}$$ ***Resposta***

D.56 $A_y = B_y = 1.000 \text{ N}$

$M_{máx} = 1.250 \text{ N} \cdot \text{m}$

$$\sigma_{máx} = \frac{Mc}{I} = \frac{1.250(0{,}025)}{\frac{\pi}{4}\,(0{,}025)^4} = 102 \text{ MPa}$$ ***Resposta***

D.57 $\epsilon = 0$ ***Resposta***

D.58 $$\sigma = \frac{My}{I};\ 10(10^3) = \frac{M(1)}{[\frac{1}{12}\,(4)(4)^3 - \frac{1}{12}\,(3)(3)^3]}$$

$M = 145{,}8 \text{ kip} \cdot \text{pol} = 12{,}2 \text{ kip} \cdot \text{pés}$ ***Resposta***

D.59 Da parte inferior da seção transversal:

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} A}{\Sigma A} = \frac{40(80)(20) + 95(30)(100)}{80(20) + 30(100)} = 75{,}870 \text{ mm}$$

$$I = \frac{1}{12}\,(20)(80)^3 + 20(80)(75{,}870 - 40)^2$$

$$+ \frac{1}{12}\,(100)(30)^3 + 100(30)(95 - 75{,}870)^2 = 4{,}235(10^{-6}) \text{ m}$$

$$\sigma_{máx} = \frac{Mc}{I} = \frac{10(10^3)(0{,}075870)}{4{,}235\,(10^{-6})} = 179 \text{ MPa}$$

Resposta

D.60 $A_y = P/2$

$M_{máx} = P/2\,(2) = P$ (em C)

$$I = \frac{1}{12}\,(0{,}02)(0{,}150)^3 + 2\left[\frac{1}{12}\,(0{,}1)(0{,}02)^3\right.$$

$$\left. + (0{,}1)(0{,}02)(0{,}085)^2\right]$$

$= 34{,}66\,(10^{-6}) \text{ m}^4$

$$\sigma = \frac{Mc}{I};\ 12\,(10^6) = \frac{P\,(0{,}095)}{34{,}66\,(10^{-6})}$$

$P = 4{,}38 \text{ kN}$ ***Resposta***

D.61 A tensão máxima ocorre em D ou A.

$$(\sigma_{máx})_D = \frac{(50\cos 30°)\,12\,(3)}{\frac{1}{12}\,(4)\,(6)^3}$$

$$+ \frac{(50\,\text{sen}\,30°)\,12\,(2)}{\frac{1}{12}\,(6)(4)^3} = 40{,}4 \text{ psi}$$ ***Resposta***

D.62 Q é a metade superior ou inferior da seção transversal.

$$\tau_{máx} = \frac{VQ}{It} = \frac{20(10^3)\,[(0{,}05)(0{,}1)(0{,}15)]}{[\frac{1}{12}\,(0{,}150)(0{,}2)^3](0{,}15)} = 1 \text{ MPa}$$

Resposta

D.63 $I = \frac{1}{12}\,(3)(4)^3 - \frac{1}{12}\,(2)(3)^3 = 11{,}5 \text{ pol}^4$

Q é a metade superior ou inferior da seção transversal.

$Q = (1)\,(2)\,(3) - (0{,}75)\,(1{,}5)\,(2) = 3{,}75 \text{ in}^3$

$$\tau_{máx} = \frac{VQ}{It} = \frac{2(3{,}75)}{11{,}5\,(1)} = 0{,}652 \text{ ksi}$$ ***Resposta***

D.64 $A_y = 4{,}5 \text{ kN}$, $B_y = 1{,}5 \text{ kN}$

$V_{máx} = 4{,}5 \text{ kN}$ (em A)

Q é a metade superior ou inferior da seção transversal.

$$\tau_{máx} = \frac{VQ}{It} = \frac{4{,}5(10^3)\,[(\frac{4(0{,}03)}{3\pi})\,\frac{1}{2}\,\pi\,(0{,}03)^2]}{[\frac{1}{4}\,\pi\,(0{,}03)^4]\,(0{,}06)}$$

$= 2{,}12 \text{ MPa}$ ***Resposta***

D.65 Da parte inferior:

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} A}{\Sigma A} = \frac{3(6)(1) + 6{,}5(1)(8)}{6(1) + 1(8)} = 5 \text{ pol}$$

$$I = \frac{1}{12}(1)(6)^3 + 6(1)(5-3)^2 + \frac{1}{12}(8)(1)^3 + 8(1)(6{,}5-5)^2 = 60{,}67 \text{ pol}^4$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{4(10^3)[8(1)(6{,}5-5)]}{60{,}67(1)} = 791 \text{ psi}$$

Resposta

D.66 $I = \frac{1}{12}(6)(4)^3 = 32 \text{ pol}^4$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{150[(1)(6)(2)]}{32} = 56{,}25 \text{ lb/pol}$$

$F = qs = (56{,}25 \text{ lb/pol})(2 \text{ pol}) = 112{,}5 \text{ lb}$ *Resposta*

D.67 $I = \frac{1}{12}(6)(6)^3 - \frac{1}{12}(4)(4)^3 = 86{,}67 \text{ in}^4$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{400(2{,}5)(6)(1)}{86{,}67} = 69{,}23 \text{ lb/pol}$$

Para um prego:
$q = 69{,}23/2 = 34{,}62$ lb/pol
$F = qs = 34{,}62$ lb/pol (4 pol) = 138 lb *Resposta*

D.68 $\sigma = \frac{pr}{t} = \frac{80(15)}{0{,}3} = 4.000 \text{ psi} = 4 \text{ ksi}$ *Resposta*

D.69 $\sigma = \frac{pr}{2t}$; $10(10^3) = \frac{150\,r}{2(0{,}25)}$

$r = 33{,}3$ pol
$d = 66{,}7$ pol *Resposta*

D.70 Na seção que passa pelo eixo do centróide:
$N = P$
$V = 0$
$M = (2+1)P = 3P$

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I}$$

$$30 = \frac{P}{2(0{,}5)} + \frac{(3P)(1)}{\frac{1}{12}(0{,}5)(2)^3}$$

$P = 3$ kip *Resposta*

D.71 Na seção que passa pelo centro do suporte no eixo do centróide:
$N = 700$ lb
$V = 0$
$M = 700(3 + 0{,}375) = 2.362{,}5$ lb · pol

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{700}{0{,}75(1)} + \frac{2.362{,}5(0{,}375)}{[\frac{1}{12}(1)(0{,}75)^3]}$$

$= 26{,}1$ ksi *Resposta*

D.72 Na seção transversal:
$N = P$, $M = P(0{,}01)$

$$\sigma_{máx} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I}$$

$$30(10^6) = \frac{P}{\pi(0{,}01)^2} + \frac{P(0{,}01)(0{,}01)}{\frac{1}{4}\pi(0{,}01)^4}$$

$P = 1{,}88$ *k*N *Resposta*

D.73 Na seção que passa por B:
$N = 500$ lb, $V = 400$ lb
$M = 400(10) = 4.000$ lb · pol
Carga axial:

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{500}{4(3)} = 41{,}667 \text{ psi (T)}$$

Carga de cisalhamento:

$$\tau_{xy} = \frac{VQ}{It} = \frac{400[(1{,}5)(3)(1)]}{[\frac{1}{12}(3)(4)^3]\,3} = 37{,}5 \text{ psi}$$

Momento fletor:

$$\sigma_x = \frac{My}{I} = \frac{4.000(1)}{\frac{1}{12}(3)(4)^3} = 250 \text{ psi (C)}$$

Assim:
$\sigma_x = 41{,}667 - 250 = 208$ psi (C) *Resposta*
$\sigma_y = 0$ *Resposta*
$\tau_{xy} = 37{,}5$ psi *Resposta*

D.74 Na seção B:
$N_z = 500$ N, $V_y = 400$ N, $M_x = 400(0{,}1) = 40$ N · m
$M_y = 500(0{,}05) = 25$ N · m, $T_z = 30$ N · m
Carga axial:

$$\sigma_z = \frac{P}{A} = \frac{500}{\pi(0{,}05)^2} = 63{,}66 \text{ kPa (C)}$$

Carga de cisalhamento:
$\tau_{zy} = 0$ visto que, em B, $Q = 0$.
Momento em torno do eixo x:

$$\sigma_z = \frac{Mc}{I} = \frac{40(0{,}05)}{\frac{\pi}{4}(0{,}05)^4} = 407{,}4 \text{ kPa (C)}$$

Momento em torno do eixo y:
$\sigma_z = 0$ visto que B está no eixo neutro.
Torque:

$$\tau_{zx} = \frac{Tc}{J} = \frac{30(0{,}05)}{\frac{\pi}{2}(0{,}05)^4} = 153 \text{ kPa}$$

Assim:
$\sigma_x = 0$ *Resposta*
$\sigma_y = 0$ *Resposta*
$\sigma_z = -63{,}66 - 407{,}4 = -471$ kPa *Resposta*
$\tau_{xy} = 0$ *Resposta*
$\tau_{zy} = 0$ *Resposta*
$\tau_{zx} = -153$ kPa *Resposta*

D.75 Verdadeiro. *Resposta*

D.76 $\sigma_x = 4$ ksi, $\sigma_y = -6$ ksi, $\tau_{xy} = -8$ ksi
Aplicar a Equação 9.5, $\sigma_1 = 8{,}43$ ksi, $\sigma_2 = -10{,}4$ ksi
Resposta

D.77 $\sigma_x = 200$ psi, $\sigma_y = -150$ psi, $\tau_{xy} = 100$ psi
Aplicar a Equação 9.7, $\tau_{\substack{máx \\ no\ plano}} = 202$ psi
Resposta

D.78 $\sigma_x = -50$ MPa, $\sigma_y = -30$ MPa, $\tau_{xy} = 0$
Aplicar a Equação 9.7, $\tau_{\substack{máx \\ no\ plano}} = 10$ MPa

D.79 Na seção transversal que passa por B:
$N = 4$ kN, $V = 2$ kN, $M = 2(2) = 4$ kN · m

$$\sigma_B = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{4(10^3)}{0{,}03(0{,}06)} + \frac{4(10^3)(0{,}03)}{\frac{1}{12}(0{,}03)(0{,}06)^3} = 224 \text{ MPa (T)}$$

Observe que $\tau_B = 0$, uma vez que $Q = 0$.
Então:
$\sigma_1 = 224$ MPa *Resposta*
$\sigma_2 = 0$ *Resposta*

D.80 $A_y = B_y = 12$ kN

Segmento AC:
$V_C = 0, M_C = 24 \text{ kN} \cdot \text{m}$
$\tau_C = 0$ (visto que $V_C = 0$)
$\sigma_C = 0$ (visto que C está no eixo neutro)
$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ *Resposta*

D.81 $A_y = 3$ kip
Usar a seção de comprimento x.

$$\circlearrowleft + \Sigma M = 0; \quad -3x + 2x\left(\frac{x}{2}\right) + M = 0$$

$$M = 3x - x^2$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = 3x - x^2$$

Integrar duas vezes e usar:
$v = 0$ em $x = 0$, $v = 0$ em $x = 3$ m

$$v = \frac{1}{EI}\left(-\tfrac{1}{12}x^4 + 0{,}5\,x^3 - 2{,}25x\right)$$ *Resposta*

D.82 $A_y = 15$ kip
$M_A = 100$ kip · pés
Usar a seção de comprimento x.

Intensidade de $w = \left(\frac{3}{10}\right)x$ em x.

$$\circlearrowleft + \Sigma M = 0;$$

$$-15x + 100 + \left(\frac{1}{3}x\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{3}{10}x\right)(x)\right] + M = 0$$

$$M = 15x - 0{,}05\,x^3 - 100$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = 15x - 0{,}05\,x^3 - 100$$

Integrar duas vezes e usar:
$v = 0$ em $x = 0$, $dv/dx = 0$ em $x = 0$

$$v = \frac{1}{EI}\left(2{,}5x^3 - 0{,}0025\,x^5 - 50\,x^2\right)$$ *Resposta*

D.83 Pelo Apêndice C, considerar as cargas distribuída e concentrada separadamente.

$$\Delta_C = \frac{5wL^4}{768\,EI} + \frac{PL^3}{48\,EI}$$

$$= \frac{5(2)(6)^4}{768\,EI} + \frac{8\,(6)^3}{48\,EI} = \frac{52{,}875 \text{ kip} \cdot \text{pés}^3}{EI} \downarrow$$ *Resposta*

D.84 Pelo Apêndice C, considerar a carga distribuída e o momento separadamente.

$$\theta_A = \frac{w_0L^3}{45\,EI} + \frac{ML}{6\,EI}$$

$$= \frac{4\,(3)^3}{45\,EI} + \frac{20\,(3)}{6\,EI} = \frac{12{,}4 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \quad \circlearrowright$$ *Resposta*

D.85 Verdadeiro. *Resposta*

D.86. $P = \dfrac{\pi^2\,EI}{(KL)^2} = \dfrac{\pi^2\,(29\,(10^3))\,(\frac{\pi}{4}\,(0{,}5)^4)}{[0{,}5\,(50)]^2} = 22{,}5$ kip

Resposta

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{22{,}5}{\pi(0{,}5)^2} = 28{,}6 \text{ ksi} < \sigma_E \text{ OK}$$ *Resposta*

D.87 $P = \dfrac{\pi^2\,EI}{(KL)^2} = \dfrac{\pi^2\,(1{,}6)(10^3)\,[\frac{1}{12}\,(4)(2)^3]}{[1\,(12)(12)]^2} = 2{,}03$ kip

Resposta

D.88 $A = \pi((0{,}025)^2 - (0{,}015)^2) = 1{,}257\,(10^{-3})$ m^2

$$I = \tfrac{1}{4}\,\pi\,((0{,}025)^4 - (0{,}015)^4) = 267{,}04\,(10^{-9})\text{ m}^4$$

$$P = \frac{\pi^2\,EI}{(KL)^2} = \frac{\pi^2\,(200\,(10^9))(267{,}04)(10^{-9})}{[0{,}5(5)]^2}$$

$= 84{,}3$ kN *Resposta*

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{84{,}3\,(10^3)}{1{,}257\,(10^{-3})} = 67{,}1 \text{ MPa} < 250 \text{ MPa} \quad \text{OK}$$

D.89 $P = \dfrac{\pi^2\,EI}{(KL)^2}$; $40 = \dfrac{\pi^2\,29(10^3)[\frac{\pi}{4}\,(1^4 - r_2^4)]}{[1\,(6)(12)]^2}$

$r_2 = 0{,}528$ pol

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{40}{\pi\,[(1)^2 - (0{,}528)^2]} = 17{,}6 \text{ ksi} < 36 \text{ ksi OK}$$

Assim, $t = 1 - 0{,}528 = 0{,}472$ pol *Resposta*

D.90 $P = \dfrac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$; $3 = \dfrac{\pi^2\,29(10^3)\,(\frac{\pi}{4}\,r^4)}{[1\,(40)]^2}$

$r = 0{,}382$ pol

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{3}{\pi\,(0{,}382)^2} = 6{,}53 \text{ ksi} < 36 \text{ ksi OK}$$

$d = 2r = 0{,}765$

Usar $d = \dfrac{13}{16}$ pol (0,8125 pol) *Resposta*

RESPOSTAS

Capítulo 1

1.1. $T_B = 150$ lb · pés, $T_C = 500$ lb · pés

1.2. $N_A = 77{,}3$ N, $V_A = 20{,}7$ N,
$M_A = -0{,}555$ N · m,
$M_A = -0{,}555$ N · m

1.3. $N_C = 0$, $V_C = 3{,}50$ kip,
$M_C = -47{,}5$ kip · pés,
$N_D = 0$, $V_D = 0{,}240$ kip, $M_D = -0{,}360$ kip · pés

1.5. $N_C = 0$, $M_C = 11{,}2$ kip · pés

1.6. $N_E = 0$, $V_E = 0{,}450$ kip, $M_E = -0{,}675$ kip · pés,
$N_D = 0$, $V_D = 0{,}930$ kip, $M_D = 11{,}0$ kip · pés

1.7. $N_D = 0{,}703$ kN, $V_D = 0{,}3125$ kN,
$M_D = 0{,}3125$ kN · m

1.9. $N_A = 0$, $V_A = 450$ lb,
$M_A = -1.125$ lb · pés $= -1{,}125$ kip · pés,
$N_B = 0$, $V_B = 850$ lb,
$M_B = -6.325$ lb · pés $= -6{,}325$ kip · pés,
$V_C = 0$, $N_C = -1.200$ lb $= -1{,}20$ kip,
$M_C = -8.125$ lb · $= -8{,}125$ kip · pés

1.10. $N_C = -45{,}0$ kip, $V_C = 0$, $M_C = 9{,}00$ kip · pés

1.11. $N_B = 0$, $V_B = 288$ lb,
$M_B = -1.152$ lb · pés $= -1{,}15$ kip · pés

1.13. $V_D = 17{,}3$ N, $N_D = 10$ N,
$M_D = 1{,}60$ N · m,

1.14. $N_B = -0{,}4$ kip, $V_B = 0{,}960$ kip,
$M_B = -3{,}12$ kip · pés

1.15. $N_C = -0{,}4$ kip, $V_C = 1{,}08$ kip,
$M_C = -6{,}18$ kip · pés,
$N_D = 0$, $V_D = 1{,}45$ kip, $M_D = -15{,}7$ kip

1.17. $P = 0{,}5333$ kN $= 0{,}533$ kN, $N_C = -2{,}00$ kN,
$V_C = -0{,}533$ kN, $M_C = 0{,}400$ kN · m

1.18. $N_D = 18$ kN, $V_D = 90$ kN,
$M_D = 21{,}6$ kN · m,
$N_E = 0$, $V_E = 90$ kN, $M_E = 18$ kN · m

1.19. $N_C = -18{,}2$ N, $V_C = 10{,}5$ N, $M_C = -9{,}46$ N · m

1.21. $N_E = 0$, $V_E = 120$ N, $M_E = 48{,}0$ N · m,
$V = 0$, $N = 1{,}39$ kN, $M = 0$

1.22. $N_D = 0$, $V_D = 0{,}750$ kip, $M_D = 13{,}5$ kip · pés,
$N_E = 0$, $V_E = -9{,}00$ kip, $M_E = -24{,}0$ kip · pés

1.23. $N_{a-a} = -2.338$ lb $= -2{,}34$ kip,
$V_{a-a} = -900$ lb $= -0{,}900$ kip,
$M_{a-a} = 3.600$ lb · pés $= 3{,}60$ kip · pés

1.25. $V_{b-b} = 2.475$ lb $= 2{,}475$ kip,
$N_{b-b} = 389{,}7$ lb $= 0{,}390$ kip,
$M_{b-b} = 3.600$ lb · pés $= 3{,}60$ kip · pés

1.26. $(V_C)_x = -250$ N, $(N_C)_y = 0$, $(V_C)_z = -240$ N,
$(M_C)_x = -108$ N · m,
$(T_C)_y = 0$, $(M_C)_z = -138$ N · m

1.27. $(N_D)_x = 0$, $(V_D)_y = 154$ N,
$(V_D)_z = -171$ N, $(T_D)_x = 0$,
$(M_D)_y = -94{,}3$ N · m, $(M_D)_z = -149$ N · m

1.29. $(V_A)_x = 0$, $(V_A)_y = 7{,}20$ kip, $(N_A)_z = 3{,}30$ kip,
$(M_A)_x = -99{,}3$ kip · pés, $(M_A)_y = -9{,}75$ kip · pés,
$(T_A)_z = 46{,}8$ kip · pés

1.30. $V_B = 0{,}785\, w\, r$,
$N_B = 0$, $T_B = 0{,}0783\, w\, r^2$, $M_B = -0{,}293\, w\, r^2$

1.31. $N_A = P\cos\theta$, $V_A = P\text{sen}\,\theta$, $M_A = Pr(1 - \cos\theta)$

1.33. $\sigma = 1{,}82$ MPa

1.34. $P_{\text{adm}} = 6240$ lb $= 6{,}24$ kip

1.35. $\sigma = 15{,}4$ psi

1.37. $\sigma_{\text{máx}} = 357$ psi

1.38. $\theta = 47{,}4°$, $F_{AB} = 34{,}66$ lb, $F_{AC} = 44{,}37$ lb,
$\sigma_{AC} = 353$ psi, $\sigma_{AB} = 177$ psi

1.39. $\sigma_B = 151$ kPa, $\sigma_C = 32{,}5$ kPa, $\sigma_D = 25{,}5$ kPa

1.41. $F = 36$ kN, $d = 110$ mm

1.42. $\tau_{\text{méd}} = 119$ kPa

1.43. $(\tau_B)_{\text{méd}} = 6.053$ psi $= 6{,}05$ ksi

1.45. $(\tau_D)_{\text{méd}} = 6.621$ psi $= 6{,}62$ ksi,
$(\tau_E)_{\text{méd}} = 6.217$ psi $= 6{,}22$ ksi

1.46. $(\tau_D)_{\text{méd}} = 13{,}2$ ksi, $(\tau_E)_{\text{méd}} = 12{,}4$ ksi

1.47. $\bar{x} = 4$ pol, $\bar{y} = 4$ pol, $\sigma = 9{,}26$ psi

1.49. $x = 0{,}4$ m, $\sigma = 306$ MPa

1.50. $\tau_A = 0$, $(\tau_B)_{\text{méd}} = 11{,}0$ ksi

1.51. $\sigma_D = 13{,}3$ MPa (C), $\sigma_E = 70{,}7$ MPa (T)

1.53. $\sigma_{a-a} = 90{,}0$ kPa, $\tau_{a-a} = 52{,}0$ kPa

1.54. 3,71 ksi

1.55. 1,59 ksi

1.57. $\tau_{\text{méd}} = 16$ psi

1.58. $\sigma = \dfrac{P}{A}\,\text{sen}^2\,\theta$, $\tau_{\text{méd}} = \dfrac{P}{2A}\,\text{sen}\,2\,\theta$

1.59. 22,9 ksi

1.61. $P = 6{,}82$ kip

1.62. $\sigma = \dfrac{w_0}{2aA}(2a^2 - x^2)$

1.63. $\sigma = \dfrac{w_0}{2aA}(2a - x)^2$

1.65. $\sigma = (47{,}5 - 20{,}0x)$ MPa

1.66. $\sigma = 102$ psi

1.67. $\sigma_{AB} = 417$ psi (C), $\sigma_{BC} = 469$ psi (T), $\sigma_{AC} = 833$ psi (T)

1.69. $\sigma_{AB} = 16{,}7$ MPa, $\sigma_{BC} = 8{,}64$ MPa

1.70. $\tau_B = 324$ MPa, $F_A = 165$ kN, $\tau_A = 324$ MPa

1.71. 3,70 kN

1.73. $\sigma = 72{,}2$ kPa

1.74. $\sigma = 49{,}5$ kPa

1.75. $\sigma = (238 - 22{,}6z)$ kPa

1.77. $h = 2\frac{3}{4}$ pol

1.78. $P = 90$ kN, $A = 6{,}19\,(10^{-3})\text{m}^2$, $P_{\text{máx}} = 155$ kN

1.79. $d = \frac{5}{8}$ pol, $h = \frac{3}{8}$ pol

1.81. $a = 0{,}253$ pol

1.82. $P = 19{,}8$ kip

1.83. $P = 55{,}0$ kN (*Controles!*)

1.85. $d_A = 0{,}441$ pol, $d_B = 0{,}794$ pol

1.86. $A_{BC} = 0{,}577$ pol^2, $d_A = 0{,}743$ pol, $d_B = 0{,}525$ pol

1.87. $P = 0{,}491$ kip (*Controles!*)

1.89. $d_A = 0{,}155$ pol, $d_B = 0{,}162$ pol

1.90. $h = 1{,}74$ pol

1.91. $d_1 = 44{,}6$ mm,
$d_3 = 26{,}4$ mm,
$t = 15{,}8$ mm

1.93. $w = 0{,}452$ kip/pés (Controles), $w = 0{,}576$ kip/pé

1.94. $t = 0{,}1667$ m $= 167$ mm
$b = 33{,}3$ mm

1.95. $d_B = 0{,}00611$ m, $= 6{,}11$ mm
$d_w = 0{,}0154$ m, $= 15{,}4$ mm

1.97. Placa de $3\frac{1}{2}$ pol $\times$ $3\frac{1}{2}$ pol, placa de $4\frac{1}{2}$ pol $\times$ $4\frac{1}{2}$ pol

1.98. $t = 0{,}001778$ m $= 1{,}78$ mm,
$d_t = 0{,}01185$ m $= 11{,}9$ mm,
$d_r = 0{,}004120$ m $= 4{,}12$ mm

1.99. $w_1 = 5{,}33$ kip/pol, $w_2 = 8{,}00$ kip/pol, $d = 0{,}714$ pol

1.101. $F_{HI} = 20{,}0$ kN, $F_{BF} = F_{AG} = F = 15{,}0$ kN,
$d_{EF} = d_{CG} = 11{,}3$ mm

1.102. $N_D = -2{,}16$ kip, $V_D = 0$, $M_D = 2{,}16$ kip · pés,
$V_E = 0{,}540$ kip, $N_E = 4{,}32$ kip, $M_E = 2{,}16$ kip · pés

1.103. F.S. $= 2{,}71$, F.S. $= 1{,}53$

1.105. $d = 0{,}620$ pol, $P_{\text{máx}} = 7{,}25$ kip

1.106. $t = 0{,}800$ pol, $P_{\text{máx}} = 24{,}0$ kip, $w = 2{,}50$ pol

1.107. $\sigma = 267$ kPa

1.109. $\sigma = 215$ kPa, $\sigma = 192$ kPa, $\sigma = 170$ kPa

1.110. $\tau_{\text{méd}} = 61{,}3$ MPa

1.111. $\tau_{\text{méd}} = 79{,}6$ MPa

1.113. $\sigma = \gamma L^2/8s$

1.114. $d = 5\frac{1}{2}$ pol

1.115. $\tau_{\text{méd}} = 267$ psi

Capítulo 2

2.1. $\varepsilon_{\text{méd}} = 0{,}250$ pol/pol

2.2. $\varepsilon = 0{,}885$ pol/pol

2.3. $(\varepsilon_{AD})_{\text{méd}} = 0{,}250(10^{-3})$ pol/pol,
$(\varepsilon_{BE})_{\text{méd}} = 2{,}87(10^{-3})$ pol/pol,
$(\varepsilon_{CF})_{\text{méd}} = 5{,}49(10^{-3})$ pol/pol

2.5. $\Delta p = 11{,}2$ mm

2.6. $(\varepsilon_{\text{méd}})_{\text{aprox}} = 1{,}50\,\theta$, $(\varepsilon_{\text{méd}})_{\text{aprox}} = 52{,}4(10^{-3})$ m/m

2.7. $\varepsilon_{AB} = 6{,}50\,(10^{-3})$ mm/mm

2.9. $\varepsilon_{AB} = 0{,}152$ pol/pol, $\varepsilon_{AC} = 0{,}0274$ pol/pol

2.10. $\varepsilon_{AB} = 16{,}8(10^{-3})$ m/m

2.11. $\Delta L = \dfrac{kL^2}{2}$

2.13. $\gamma_{xy} = -0{,}0200$ rad

2.14. $\gamma_{x'y'} = -7{,}27\,(10^{-3})$ rad

2.15. $\varepsilon_x = -1{,}25\,(10^{-3})$ pol/pol, $\varepsilon_y = 2{,}50\,(10^{-3})$ pol/pol,
$\varepsilon_{x'} = \varepsilon_{y'} = 0{,}627\,(10^{-3})$ pol/pol

2.17. $(\gamma_B)_{xy} = 0{,}0116$ rad $= 11{,}6(10^{-3})$ rad,
$(\gamma_A)_{xy} = -0{,}0116$ rad $= -11{,}6(10^{-3})$ rad

2.18. $(\gamma_C)_{xy} = -11{,}6(10^{-3})$ rad, $(\gamma_D)_{xy} = 11{,}6(10^{-3})$ rad

2.19. $\varepsilon_{AC} = 1{,}60(10^{-3})$ mm/mm,
$\varepsilon_{DB} = 12{,}8(10^{-3})$ mm/mm

2.21. $\varepsilon_{AC} = 0{,}01665$ mm/mm $= 16{,}7(10^{-3})$ mm/mm,
$\varepsilon_{BD} = 0{,}01134$ mm/mm $= 11{,}3(10^{-3})$ mm/mm

2.22. $(\gamma_B)_{xy} = 5{,}24(10^{-3})$ rad

2.23. $\varepsilon_{AB} = 1{,}61\,(10^{-3})$ mm/mm
$\varepsilon_{CD} = 126\,(10^{-3})$ mm/mm

2.25. $\varepsilon_{AB} = 0{,}0381$ mm/mm $= 38{,}1(10^{-3})$ mm

2.26. $(\gamma_C)_{xy} = -0{,}137$ rad, $(\gamma_D)_{xy} = 0{,}137$ rad

2.27. $\Delta y = 2{,}03$ mm

2.29. $\Delta = \int \varepsilon\, ds = 1{,}69$ pol

2.30. $\varepsilon_{AB} = \dfrac{v_B \operatorname{sen}\theta}{L} - \dfrac{u_A \cos\theta}{L}$

Capítulo 3

3.1. $E_{\text{aprox}} = 3{,}275\,(10^3)$ ksi

3.2. $E = 55{,}3(10^3)$ ksi, $u_r = 9{,}96\,\dfrac{\text{pol} \cdot \text{lb}}{\text{pol}^3}$

3.3. $(u_t)_{\text{aprox}} = 85{,}0\,\dfrac{\text{pol} \cdot \text{lb}}{\text{pol}^3}$

3.5. $(E)_{\text{aprox}} = 229$ GPa, $(\sigma_u)_{\text{aprox}} = 528$ MPa,
$(\sigma_f)_{\text{aprox}} = 479$ MPa

3.6. $(u_t)_{\text{aprox}} = 117$ MJ/m^3

3.7. Quantidade de recuperação elástica $= 0{,}00350$ pol,
Alongamento permanente $= 0{,}1565$ pol

3.9. $(u_t)_{\text{aprox}} = 18{,}0\,\dfrac{\text{pol} \cdot \text{kip}}{\text{pol}^3}$, $u_r = 20$ pol · lb/pol^3

3.10. $E_{\text{aprox}} = 173$ GPa,
$\sigma_{lp} = 260$ MPa, $\sigma_u = 400$ MPa, $u_r = 195$ kJ/m^3,
Recuperação elástica $= 0{,}00208$ mm/mm,
Conjunto permanente $= 0{,}0729$ mm/mm

3.11. 50,0123 pol

3.13. $\Delta P = 50{,}05$ kip

3.14. copolímero

3.15. $E = 28{,}6(10^3)$ ksi

3.17. $A = 0{,}209$ pol^2, $P = 1{,}62$ kip

3.18. $d_{AB} = 3{,}54$ mm, $d_{AC} = 3{,}23$ mm, $L_{AB} = 750{,}49$ mm

3.19. $\varepsilon_{BE} = 0{,}417(10^{-3})$pol/pol, $w = 14{,}5$ lb, $\varepsilon_{CD} = 0{,}250\,(10^{-3})$ pol/pol

3.21. $T = 4{,}50$ kN

3.22. $P = 15{,}0$ kip

3.23. $A_{BC} = 0{,}8$ pol^2, $A_{BA} = 0{,}2$ pol^2, $P = 3{,}02$ kN

3.25. $\delta = 8{,}33$ mm

3.26. $d = 1{,}5034$ pol

3.27. $\delta_C = -0{,}0173$ mm, $d = 20{,}00162$ mm

3.29. $\varepsilon_y = -0{,}0150$ pol/pol, $\varepsilon_x = 0{,}00540$ pol/pol, $\gamma_{xy} = -0{,}00524$ rad

3.30. $C = 50{,}0377$ mm, $d = 12{,}99608$ mm

3.31. $E = 32{,}5(10^3)$ ksi, $P = 2{,}45$ kip

3.33. $\delta = \dfrac{P}{2\pi h G} \ln \dfrac{r_o}{r_i}$

3.34. $\varepsilon = 0{,}000999$ pol/pol, Se a porca está desaparafusada, a carga é nula. Assim, a deformação é $\varepsilon = 0$

3.35. $\delta_h = 3{,}02$ mm

3.37. $P = 205$ lb

3.38. $\varepsilon_b = 0{,}00227$ mm/mm, $\varepsilon_s = 0{,}000884$ mm/mm

3.39. $E_{\text{aprox}} = 32{,}0(10^3)$ ksi, $(\sigma_y)_{\text{aprox}} = 55{,}4$ ksi, $\sigma_u = 110$ ksi, $\sigma_f = 93{,}1$ ksi

3.41. $P = 11{,}3$ kN (*Controles!*), $P = 238{,}8$ kN

Capítulo 4

4.1. $\delta_A = -3{,}64\,(10^{-3})$ mm

4.2. $\delta_A = -0{,}0603$ pol

4.3. $P_1 = 70{,}7$ kip, $P_2 = 141$ kip

4.5. $\delta_{A/C} = 0{,}0298$ pol

4.6. $\delta_B = -0{,}00632$ pol, $\delta_A = 0{,}0670$ pol

4.7. $P_1 = 16{,}4$ kip, $P_2 = 35{,}3$ kip

4.9. $\delta_C = 0{,}00843$ pol, $\delta_E = 0{,}00169$ pol, $\delta_B = 0{,}0333$ pol

4.10. $\delta_C = 0{,}150$ mm

4.11. $P = 13{,}3$ kN

4.13. $\alpha = 0{,}00341°$, $\beta = 0{,}0295°$

4.14. $\delta_B = 0{,}0311$ pol

4.15. $P = 15{,}4$ kip

4.17. 9,69 kN

4.18. $\delta_F = 0{,}0113$ pol

4.19. 0,00878°

4.21. $x = 4{,}24$ pés, $w = 1{,}02$ kip/pé

4.22. $P = 6{,}80$ kip

4.23. $P = 11{,}8$ kip

4.25. $P = 300$ kip, $\delta = 12{,}9$ pés

4.26. $F = 12{,}0$ kN, $\delta_{A/B} = -0{,}864$ mm

4.27. $F = 17{,}0$ kN, $\delta_{A/B} = -1{,}03$ mm

4.29. $\delta = \delta_W + \delta_P = \dfrac{PL}{\pi E r_2 r_1} + \dfrac{\gamma L^2(r_2 + r_1)}{6E(r_2 - r_1)} - \dfrac{\gamma L^2 r_1^2}{3Er_2(r_2 - r_1)}$

4.30. 2,37 mm

4.31. $\Delta = 0{,}0128$ pol

4.33. $\delta = \dfrac{0{,}511P}{\pi r_0 E}$

4.34. $\delta = \dfrac{\gamma L^2}{6E}$

4.35. $x = \dfrac{h}{1 + \dfrac{E_A}{E_B}} = \dfrac{E_B}{E_A + E_B} h$

4.37. $\sigma_{\text{aço}} = 1{,}66$ ksi, $\sigma_{\text{con}} = 0{,}240$ ksi, $\delta = 0{,}0055$ pol

4.38. $A_{\text{aço}} = 18{,}2$ pol^2, $\delta = 0{,}00545$ pol

4.39. $\sigma_{al} = 27{,}5$ MPa, $\sigma_{\text{aço}} = 79{,}9$ MPa

4.41. $d = 2{,}39$ pol

4.42. $\sigma_{\text{aço}} = 65{,}9$ MPa, $\sigma_{\text{con}} = 8{,}24$ MPa

4.43. $d = 36{,}3$ mm

4.44. $F_C = 1/3\ P$, $F_A = 2/3\ P$

4.45. $F_B = \dfrac{P}{3}$, $F_D = \dfrac{2}{3}P$

4.46. $P_c = 35{,}61$ kN, $P_p = 14{,}4$ kN

4.47. $T_{AC} = 0{,}170$ kip, $T_{AB} = 1{,}33$ kip

4.49. $\sigma_D = 13{,}4$ MPa, $\sigma_{BC} = 9{,}55$ MPa

4.50. $\theta = 63{,}7\,(10^{-6})$ rad

4.51. $F_{AC} = 727$ N, $F_{AB} = F_{AD} = 465$ N

4.53. $\sigma_A = 189$ MPa, $\sigma_B = 21{,}4$ MPa

4.54. $P = 1{,}16$ kN

4.55. $a = 0{,}120$ mm

4.57. $\sigma_{AB} = \dfrac{7P}{12A}$, $\sigma_{CD} = \dfrac{P}{3A}$, $\sigma_{EF} = \dfrac{P}{12A}$

4.58. $\delta_B = 0{,}00257$ pol

4.59. $F_{CD} = 0{,}211$ kip, $F_{EF} = 1{,}26$ kip

4.61. $\delta_A = 2{,}27$ mm

4.62. $F_1 = \left(\dfrac{A_1E_1}{2A_1E_1 + A_2E_2}\right)P$, $F_2 = \left(\dfrac{A_2E_2}{2A_1E_1 + A_2E_2}\right)P$

4.63. $A'_1 = \left(\dfrac{E_1}{E_2}\right)A_1$

4.65. $d = 4{,}90$ m

4.66. $s = 0{,}133(10^{-3})$ pol

4.67. $F_B = 16{,}9$ kN, $F_A = 16{,}9$ kN

4.69. $F_A = 25{,}6$ kN, $F_m = 48.836{,}5$ N

4.70. $\delta_A = 4{,}42$ mm

4.71. $F_A = 4{,}09$ kip, $F_B = 2{,}91$ kip

4.73. $F_A = 14{,}0$ kN

4.74. $F = 4{,}20$ kN

4.75. $F = 116$ kip

4.77. $\delta = 0{,}348$ pol, $F = 19{,}5$ kip

4.78. $F = 2{,}54$ kip, $F = 2{,}54$ kip

4.79. $F = 1{,}68$ kip

4.81. $F = 7{,}66$ kip

4.82. $\varepsilon_{\text{máx}} = 8{,}80(10^{-6})$ pol/pol, $\varepsilon_{\text{mín}} = -4{,}40(10^{-6})$ pol/pol

4.83. $\sigma = 5{,}74$ ksi

4.85. $T_2 = 116°$F, $\sigma_{\text{al}} = 11{,}6$ ksi

4.86. $\sigma_{\text{al}} = 25{,}4$ ksi, $L'_{\text{al}} = 8{,}00462$ pol

4.87. $\sigma = 19{,}1$ ksi

4.89. $\sigma_A = 2{,}85$ ksi, $\sigma_C = 4{,}30$ ksi

4.90. $F_{AC} = 10{,}0$ lb, $F_{AD} = 136$ lb

4.91. $\sigma_l = 40{,}1$ MPa, $\sigma_p = 29{,}5$ MPa

4.93. $T_2 = 244°$

4.94. $F = \dfrac{\alpha AE}{2}(T_B - T_A)$

4.95. $P = 5{,}05$ kN (Controles)

4.97. $\sigma_{máx} = 34{,}8$ ksi (Controles!)

4.98. $\sigma_{máx} = 88{,}3$ MPa (Controles!)

4.99. $P = 10{,}9$ kN (Controles!)

4.101. $P = 77.142{,}86$ N $= 77{,}1$ kN, $\delta = 0{,}429$ mm

4.102. $P = 15$ kip, $K = 1{,}60$

4.103. $\sigma_{aço} = 36{,}0$ ksi, $\sigma_{al} = 19{,}3$ ksi

4.105. $\delta = 0{,}432$ pol

4.106. **a)** $\delta_D = 0{,}375$ pol **b)** $\delta_D = 6{,}40$ pol

4.107. **a)** $P = 10{,}9$ kN, **b)** $P = 33{,}0$ kN

4.109. $\delta = \dfrac{\gamma^2 L^3}{3c^2}$

4.110. $w = 21{,}9$ kN/m, $\delta_G = 4{,}24$ mm

4.111. **a)** $w = 18{,}7$ kN/m, **b)** $w = 21{,}9$ kN/m

4.113. $T_2 = 244°C$

4.114. $F_1 = 602$ kN

4.115. $\theta = \dfrac{\delta_{EF} - \delta_{AB}}{2d} = \dfrac{3E_2L(T_2 - T_1)(\alpha_2 - \alpha_1)}{d(5E_2 + E_1)}$

4.117. $\delta_{B/C} = -0{,}0278$ pol

4.118. $\delta_D = 1{,}17$ mm

4.119. $\delta_{B/A} = 0{,}0918$ mm

Capítulo 5

5.1. **a)** $T = 7{,}95$ kip · pol, **b)** $T' = 6{,}38$ kip · pol

5.2. **a)** $r' = 0{,}707\,r$, **b)** $r' = 0{,}707\,r$

5.3. $\tau_{máx} = 6{,}62$ ksi

5.5. $\tau_C = 37{,}7$ MPa, $\tau_D = 75{,}5$ MPa

5.6. $\tau_{AB} = 7{,}82$ ksi, $\tau_{BC} = 2{,}36$ ksi

5.7. $T_1 = 215$ N · m

$(\tau_{máx})_{CD} = 4{,}00$ MPa, $(\tau_{máx})_{DE} = 2{,}58$ MPa

5.9. $(\tau_{BC})_{máx} = 5{,}07$ ksi, $(\tau_{DE})_{máx} = 3{,}62$ ksi

5.10. $(\tau_{EF})_{máx} = 0$, $(\tau_{CD})_{máx} = 2{,}17$ ksi

5.11. $d = 2\frac{1}{2}$ pol

5.13. $\tau_A = 1{,}72$ ksi, $\tau_B = 3{,}02$ ksi

5.14. $\tau_{\substack{máx \\ abs}} = 3{,}59$ ksi

5.15. $\tau_A = 9{,}43$ MPa, $\tau_B = 14{,}1$ MPa

5.17. $d = 0{,}03441$ m $= 34{,}4$ mm

5.18. $\tau_A = 6{,}88$ MPa, $\tau_B = 10{,}3$ MPa

5.19. $\tau_{\substack{máx \\ abs}} = 49{,}7$ MPa

5.21. $\tau_{\substack{máx \\ abs}} = 90{,}7$ MPa, na região $0{,}3$ m $-> x > 0{,}4$

5.22. $d = 33{,}8$ mm

5.23. $d = 1\frac{1}{4}$ pol

5.25. $\tau_{máx} = 856$ psi

5.26. $d = \dfrac{1}{2}$ pol

5.27. $n = \dfrac{2\,r^3}{Rd^2}$

5.29. $d_i = 1\frac{5}{8}$ pol

5.30. $\tau_{máx} = 3{,}44$ MPa

5.31. $d_2 = 2\frac{3}{8}$ pol

5.33. $\tau_{máx} = 6.018$ psi $= 6{,}02$ ksi

5.34. $c = (2{,}98\,x)$ mm

5.35. $T_0 = 670$ N · m, $\tau_{\substack{máx \\ abs}} = 6{,}66$ MPa

5.37. $\tau_{máx} = \dfrac{T\,c}{J} = \dfrac{T\,r}{\pi\,r^4} = \dfrac{2T}{\pi\,r^3}$

$$= \frac{2\,T}{\pi\left[\dfrac{r_A(L - x) + r_B x}{L}\right]^3}$$

$$= \frac{2TL^3}{\pi[r_A(L - x) + r_B x]^3}$$

5.38. $t = 0{,}174$ pol

5.39. $t = 0{,}104$ pol

5.41. $(\tau_{méd})_{máx} = \dfrac{T}{2\pi r_i{}^2 h}$

5.42. $\tau_{máx} = 44{,}3$ MPa, $\phi = 11{,}9°$

5.43. aumento na tensão de flexão $= 6{,}67\%$

aumento em $\phi = 6{,}67\%$

5.45. $\phi_{B/A} = 0{,}578°$

5.46. $\phi_{A/D} = 0{,}638°$

5.47. $\phi_{B/C} = 0{,}129°$

5.49. $\phi_{C/B} = 2{,}72°$

5.50. $\tau_{máx} = 64{,}0$ MPa

5.51. $d = 1\frac{1}{4}$ pol

5.53. $t = 0{,}00753$ m $= 7{,}53$ mm

5.54. $\omega = 131$ rad/s

5.55. $\tau_{\substack{máx \\ abs}} = 65{,}2$ MPa, $\phi_{C/F} = 11{,}4°$

5.57. $\phi_C = 0{,}113°$

5.58. $\phi_B = 1{,}53°$

5.59. $\phi_A = 1{,}78°$

5.61. $\phi_A = 2{,}70°$

5.62. $\phi_{A/C} = 5{,}45°$

5.63. $(\tau_{BC})_{máx} = 10{,}2$ ksi, $(\tau_{BA})_{máx} = 1{,}86$ ksi, $\phi_C = 2{,}66°$

5.65. $\phi = \dfrac{T}{2a\pi G}(1 - e^{-4aL})$

5.66. $\phi_A = 1{,}59°$

5.67. $\phi = \dfrac{7\,t_0\,L^2}{6\,\pi\,c^4 G}$

5.69. $\tau_o = 3{,}18$ MPa, $\tau_i = 1{,}59$ MPa, $\phi_{A/B} = 0{,}730°$

5.70. $\phi_A = |\ 0{,}432°\ |$

5.71. $\phi = \dfrac{7TL}{12\pi r^4 G}$

5.74. $\theta = \dfrac{T}{4\pi\, hG}\left[\dfrac{1}{r_i^2} - \dfrac{1}{r_o^2}\right]$

5.75. $(\tau_{AC})_{máx} = 14{,}3$ MPa, $(\tau_{CB})_{máx} = 9{,}55$ MPa

5.77. $F = 23{,}4$ lb

5.78. $\tau_{máx} = 389$ psi

5.79. $T_D = 385$ N · m, $T_A = 115$ N · m

5.81. $\tau_{\substack{máx \\ abs}} = 3{,}67$ ksi

5.82. $T_A = 19{,}4$ lb · pés, $T_B = 481$ lb · pés

5.83. $T = 1{,}29$ kip · pés

5.85. $T_B = 222$ N · m, $T_A = 55{,}6$ N · m

5.86. $\phi_E = 1{,}66°$

5.87. $\phi_C = 0{,}002019$ rad $= 0{,}116°$,
$(\tau_{aço})_{máx\ BC} = 394{,}63$ psi $= 395$ psi (Máx),
$(\gamma_{aço})_{máx} = 34{,}3(10^{-6})$ rad, $(\tau_{latão})_{máx} = 96{,}1$ psi (Máx),
$(\gamma_{latão})_{máx} = 17{,}2(10^{-6})$ rad

5.89. $T_B = \dfrac{37}{189}T$, $T_A = \dfrac{152}{189}T$

5.90. $T = 7{,}74$ N · m, $\tau_{máx} = 37{,}2$ MPa $< \tau_Y$

5.91. $\tau_{máx} = 24{,}6$ MPa, $\phi_{A/C} = -0{,}04894$ rad $= |\ 2{,}80°\ |$

5.93. $(\tau_{BC})_{máx} = 0{,}955$ MPa, $(\tau_{AC})_{máx} = 1{,}59$ MPa,
$\phi_{B/C} = -0{,}001123$ rad $= |\ 0{,}0643°\ |$

5.94. $(\tau_{máx})_A = 308$ MPa

5.95. $a = 20{,}2$ mm,
$\phi_{A/B} = -0{,}1472$ rad $= |\ 8{,}44°\ |$

5.97. $T_B = 32$ lb · pés, $T_A = 48$ lb · pés, $\phi_C = 0{,}0925°$

5.98. $T = 0{,}0820$ N · m, $\phi = 25{,}5$ rad

5.99. $a = 0{,}0289$ m $= 28{,}9$ mm

5.101. $\tau_{méd} = 3{,}35$ ksi

5.102. $T = 3.360$ N · m $= 3{,}36$ kN · m, $\phi = 11{,}6°$

5.103. $\tau_{méd} = 1{,}19$ MPa

5.105. $b = 0{,}803$ pol

5.106. $(\tau_{méd})_A = 9{,}62$ MPa

5.107. Fator de aumento $= 2{,}85$

5.109. $(\tau_{méd})_A = 357$ kPa

5.110. $a = 12{,}7$ mm

5.111. $(\tau_{máx})_f = 50{,}6$ MPa (Máx)

5.113. $\tau_{máx} = 3{,}98$ MPa

5.114. $r = 0{,}075$ pol

5.115. $T = 8{,}16$ N · m

5.117. $r = 0{,}15$ pol

5.118. $\rho_E = 1{,}16$ pol

5.119. $T = 32{,}46$ kip · pol. $= 2{,}71$ kip · pés,
$T_P = 33{,}51$ kip · pol $= 2{,}79$ kip · pés

5.121. $T_P = 0{,}565$ N · m

5.122. $T_y = 1.256{,}64$ N · m $= 1{,}26$ kN · m, $\phi = 3{,}58°$
$\phi = 4{,}86°$

5.123. $\rho_E = 0{,}01298$ m $= 13{,}0$ mm

5.125. $T = 3{,}27$ kN · m, $\phi = 68{,}8°$

5.126. $T_p = 6{,}98$ kN · m, $\phi_r = 9{,}11°$

5.127. $T = 20{,}8$ kN · m,
$\phi = 34{,}4°$, $\phi_r = 12{,}2°$

5.129. $T_r = 9{,}15$ MPa em $\rho = c$

5.130. $T = 2{,}43$ kN · m, $\phi_r = 7{,}61°$

5.131. $T = 3{,}27$ kN · m, $\phi = 34{,}4°$

5.133. $t = 1{,}60$ mm

5.134. $\omega = 99{,}6$ rad/s

5.135. $F = 26{,}2$ N, $\phi = 1{,}86°$

5.137. $\tau_{máx} = 82{,}0$ MPa

5.138. $P = 1{,}10$ kW, $\tau_{máx} = 825$ kPa

5.140. $T = 71{,}5$ N · m, $\tau_{máx} = 23{,}3$ MPa

5.141. $(\tau_{méd})_{máx} = 2{,}03$ MPa, $\phi = 0{,}258°$

Capítulo 6

6.1. $x = 0{,}25^-$, $V = -24$, $M = -6{,}0$

6.2. $x = 18^-$, $V = -400$, $M = -7.200$

6.3. $x = 1{,}75^-$, $V = -124$, $M = -194$

6.5. $x = 1^-$, $V = -60$, $M = -60$

6.6. $V = 15{,}6$ N, $M = (15{,}6x + 100)$ N · m

6.7. $x = 0{,}2^-$, $V = -4{,}33$, $M = -0{,}866$

6.9. $x = 0{,}4$, $V = -1$, $M = -0{,}4$

6.10. $P = 809$ lb, $C_y = 1.501$ lb, $C_x = 404$ lb,
$x = 8^-$; $V = -701$, $M = -5.604$

6.11. $x = 3^-$, $V = -2.000$, $M = -6.000$

6.13. $x = 6^-$, $V = -800$, $M = -4.800$

6.14. $x = 8$, $V = -6.400$, $M = 2.560$

6.15. $V = 0$, $M = m\,(L - x)$

6.17. $x = 2^-$, $V = 1.000$, $M = 2.400$

6.18. $0 \le x < 6$, $V = 30 - 2x$, $M = -x^2 + 30x - 216$;
$6 < x \le 10$, $V = 8$, $M = 8x - 120$

6.19. $x = 1$, $V = 0$, $M = 2{,}50$

6.21. $0 < x < 8$, $V = \{7{,}60 - 0{,}800x\}$ kip,
$M = \{-0{,}400x^2 + 7{,}60x - 44{,}8\}$ kip · pés, $8 < x \le 16$,
$V = 1{,}20$ kip, $M = \{1{,}20x - 19{,}2\}$ kip · pés

6.22. $0 < x < 4$, $V = -250$ lb, $M = \{-250x\}$ lb · pés,
$4 < x < 10$, $V = \{1.050 - 150x\}$ lb,
$M = \{-75x^2 + 1.050x - 4.000\}$ lb · pés; $10 < x < 14$,
$V = 250$ lb,
$M = \{250x - 3.500\}$ lb · pés

6.23. $T = 120$ kip · pol

6.25. $x = 2{,}54$, $V = 0$, $M = 346$

6.26. $A_y = 9{,}375$ kip, $M_A = 18{,}6$ kip · pés, $A_x = 0$

6.27. $x = L/2$, $V = 0$, $M = 23w_0L^2/216$

6.29. $x = 6^-$, $V = -2$, $M = -12$

6.30. $x = L/2$, $V = 0$, $M = w_0L^2/12$

6.31. $V = \dfrac{w_0}{4}(3L - 4x)$,
$M = \dfrac{w_0}{24}(-12x^2 + 18Lx - 7L^2)$,
$V = \dfrac{w_0}{L}(L - x)^2$, $M = -\dfrac{w_0}{3L}(L - x)^3$

6.33. $w = 40{,}0$ lb/pés

6.34. $w_0 = 1{,}2$ kN/m

6.35. $x = 3^-, V = 20, M = -60$

6.37. $a = 0{,}207L$

6.38. $\%\left(\frac{M'}{M}\right) = 84{,}6\%$

6.39. $M = 36{,}5$ kN · m, $\sigma_{máx} = 40{,}0$ MPa

6.41. $(\sigma_{máx})_t = 2{,}40$ ksi, $(\sigma_{máx})_c = 4{,}80$ ksi

6.42. $\sigma_{máx} = 74{,}7$ MPa, % de eficácia = 53,0%

6.43. $M = 129{,}2$ kip · pol = 10,8 kip · pés

6.45. $F = 3.296{,}5$ lb = 3,30 kip

6.46. $F = 5.494{,}19$ lb = 5,49 kip

6.47. $\sigma_B = 3{,}61$ MPa, $\sigma_C = 1{,}55$ MPa

6.49. $\sigma_{máx} = 86{,}5$ psi

6.50. $F = 846$ lb

6.51. $\sigma_A = 6{,}81$ MPa, $\sigma_B = 1{,}01$ MPa, $\sigma_C = 4{,}14$ MPa

6.53. $F_{R_A} = 0, F_{R_B} = 1{,}50$ kN

6.54. $\sigma_{máx} = 15{,}4$ ksi

6.55. $\sigma_D = 5{,}00$ ksi (Máx), $F_A = 17{,}7$ kip, $F_B = 13{,}7$ kip

6.57. $\sigma_A = 214$ psi, $\sigma_B = 33{,}0$ psi, $\sigma_C = 115$ psi

6.58. **(a)** $\sigma_{máx} = 95{,}0$ MPa, Por comparação, a seção **(b)** terá o menor esforço de flexão, % de eficiência = 38,4%

6.59. $\sigma_{máx} = 244$ MPa

6.61. $\sigma_{máx} = 7{,}59$ ksi

6.62. $\sigma_{máx} = 15{,}1$ ksi

6.63. $\sigma_{máx} = 12{,}2$ ksi

6.65. $a = 66{,}9$ mm

6.66. $a = 3{,}19$ pol

6.67. $\sigma_{máx} = 6{,}26$ MPa

6.69. $b = 1{,}23$ pol, $h = 2b = 2{,}47$ pol

6.70. $d_i = 2{,}56$ pol

6.71. $\sigma_{máx} = 181$ MPa

6.73. $P = 1{,}67$ kN

6.74. $\sigma_{máx} = 9{,}00$ MPa

6.75. $\sigma = 13{,}6$ ksi

6.77. $a = 160$ mm

6.78. $P = 7{,}29$ kip (*Controles*), $P = 9.042$ lb = 9,04 kip

6.79. $P = 5{,}97$ kip (*Controles*)

6.81. $d = 199$ mm

6.82. $\sigma_{máx} = 2{,}70$ ksi

6.83. $a = 0, \sigma_{máx} = \frac{3}{2}\frac{PL}{bd^2}$

6.85. $d_o = 188$ mm, $d_i = 0.8d_o = 151$ mm

6.86. $\sigma_{máx} = 45{,}1$ ksi

6.87. $\varepsilon_{máx} = 0{,}711(10^{-3})$ mm/mm

6.89. $d = 86{,}3$ mm

6.90. $\sigma_{máx} = 6{,}94$ MPa

6.91. $\sigma_{máx} = 25{,}8$ ksi

6.93. $\bar{y} = 0{,}04625$ m, $I = 9{,}90885(10^{-6})$ m^4, $w = 2{,}61$ kN/m

6.94. $b = 4{,}02$ pol

6.95. $\sigma_{máx} = 2{,}18$ ksi

6.97. $\sigma_A = -119$ kPa, $\sigma_B = 446$ kPa, $\sigma_D = -446$ kPa, $\sigma_E = 119$ kPa

6.98. $\bar{y} = 4{,}83$ pol, $M = 75{,}7$ kip · pés(*Controles*!)

6.99. $\bar{y} = 4{,}83$ pol, $\sigma_A = 2{,}35$ ksi (C), $\sigma_B = 2{,}62$ ksi

6.101. $\bar{z} = 36{,}6$ mm, $\sigma_A = 4{,}38$ MPa, $\sigma_B = -1{,}13$ MPa, $\sigma_D = -1{,}977$ MPa, $\sigma_E = 5{,}23$ MPa

6.102. $P = 14{,}2$ kN

6.103. $\sigma_A = 7{,}60$ MPa (T) (Máx), $\sigma_B = 7{,}60$ MPa(C) (Máx)

6.105. $\sigma_{máx} = 66{,}8$ ksi

6.106. $\sigma_{máx} = 161$ MPa

6.107. $d = 28{,}9$ mm

6.109. $d = 62{,}9$ mm

6.110. $a = 0, b = -\left(\frac{M_zI_y + M_yI_{yz}}{I_yI_z - I_{yz}^2}\right), c = \frac{M_yI_z + M_zI_{yz}}{I_yI_z - I_{yz}^2}$,

$$\sigma_x = -\left(\frac{M_zI_y + M_yI_{yz}}{I_yI_z - I_{yz}^2}\right)y + \left(\frac{M_yI_z + M_zI_{yz}}{I_yI_z - I_{yz}^2}\right)z$$

6.111. $\sigma_A = 293$ kPa (C)

6.113. $\sigma_A = 326$ kPa (T)

6.114. $h = 41{,}3$ mm, $M = 6{,}60$ kN · m (*Controles*!), $M = 29{,}2$ kN.

6.115. $M = 6{,}41$ kN · m (*Controles*!), $M = 28{,}4$ kN · m

6.117. $M = 128$ kN · m (*Controles*)

6.118. $M = 12{,}4$ kN · m (*Controles*!)

6.119. $M = 19{,}9$ kN · m (*Controles*!)

6.121. $M = 16{,}4$ kip · pés (*Controles*!)

6.122. $(\sigma_{máx})_{aço} = 15{,}0$ ksi, $(\sigma_{máx})_w = 0{,}578$ ksi, $(\sigma_B)_{aço} = 12{,}0$ ksi

6.123. $M = 11{,}7$ kip · pés (*Controles*!)

6.125. $M = 97{,}5$ kip · pés (*Controles*)

6.126. $(\sigma_{máx})_{aço} = 9{,}42$ MPa, $(\sigma_{máx})_{latão} = 6{,}63$ MPa, $\sigma_{aço} = 1{,}86$ MPa, $\sigma_{latão} = 0{,}937$ MPa

6.127. $\bar{y} = 0{,}08355$ m, $I_{E.N.} = 57{,}62060(10^{-6})$ m^4, $M = 58{,}8$ kN · m (*Controles*!)

6.129. $M = 1{,}14$ kip · pés (*Controles*)

6.130. $\sigma_A = 3{,}82$ MPa (T), $\sigma_B = 9{,}73$ MPa (C)

6.131. $\sigma_C = 2{,}66$ MPa (T)

6.133. $P = 3{,}09$ N (*Controles*!)

6.134. $\sigma_A = 144$ psi (T), $\sigma_B = 106$ psi (C), $\sigma_C = 6{,}11$ psi (C)

6.135. $\sigma_B = 26{,}2$ MPa (C) (Máx)

6.137. $\sigma = \frac{M\bar{r}}{AI}\left(-\frac{yA}{\bar{r}}\right) = -\frac{My}{I}$

6.138. $\sigma_A = 0{,}892$ MP a (T), $\sigma_B = 0{,}447$ MPa (C), Não! Trata-se de uma conseqüência do princípio de Saint-Venant.

6.139. $M = 14{,}0$ kN · m (*Controles*!)

6.141. $\sigma_{máx} = 54{,}4$ MPa

6.142. $\sigma_{máx} = 384$ MPa

6.143. $M = 9{,}11$ N · m

6.145. $\sigma_{máx} = 12{,}5$ ksi
6.146. $\sigma_{máx} = 80{,}6$ MPa
6.147. $M = 347$ lb · pés
6.149. $\sigma_{máx} = 13{,}8$ ksi
6.150. $r = 8{,}0$ mm
6.151. $M_Y = 14{,}3$ kN · m, $M_P = 25{,}6$ kN · m
6.153. $k = 1{,}27$
6.154. $\sigma'_{top} = 67{,}1$ MPa
6.155. $K = 1{,}57$
6.157. $M_Y = 330$ kip · pés, $M_P = 585$ kip · pés
6.158. $Z = 195$ pol^3, $k = 1{,}78$
6.159. $M_P = 172$ kip · pés
6.161. $M_Y = 312{,}5$ kN · m, $M_P = 437{,}5$ kN · m
6.162. $Z = 2{,}75a^3$, $k = 1{,}71$
6.163. $M_Y = 38{,}7$ kip · pés, $M_P = 66{,}0$ kip · pés
6.165. $Z = 0{,}0976bh^2$, $k = 2{,}34$
6.166. $M_Y = 3{,}07$ kN · m, $M_P = 7{,}19$ kN · m
6.167. **a)** $P = 25{,}0$ kN, **b)** $P = 37{,}5$ kN
6.169. $P = 100$ lb
6.170. **a)** $M = 35{,}0$ kip · pés, **b)** $M = 59{,}8$ kip · pés
6.171. $M = \dfrac{nbh^2}{2(2n+1)}\sigma_{máx}$
6.173. $\sigma'_{top} = 25{,}1$ ksi, $y = 2{,}356$ pol
6.174. $x = 4^-, V = 11{,}7\ M = 46{,}7$
6.175. $Z = \dfrac{2}{3}a^3$, $k = 2{,}00$
6.177. $(\sigma_{máx}) = 3{,}43$ MPa (T), $(\sigma_{máx}) = 1{,}62$ MPa (C)
6.178. $\sigma_{máx} = 6{,}44$ ksi
6.179. $x = 0{,}2, V = 217, M = 43{,}3$
6.181. $\sigma = \dfrac{6M}{a^3}(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta), \theta = 45°, \alpha = -45°$
6.182. **a)** $\sigma_A = 2{,}08$ MPa (C),
b) $\sigma = 2{,}08$ MPa (C)
6.183. **a)** $\sigma_{máx} = 0{,}410$ MPa
b) $\sigma_{máx} = 0{,}410$ MPa

Capítulo 7

7.1. $\tau_A = 74{,}7$ MPa
7.2. $\tau_B = 98{,}7$ MPa
7.3. $\tau_{máx} = 0{,}499$ ksi,
$(\tau_{AB})_F = 0{,}166$ ksi, $(\tau_{AB})_W = 0{,}498$ ksi
7.5. $Q_{máx} = 88{,}23$ pol^4,
$\tau_{máx} = 276$ psi, tensão de cisalhamento
7.6. $V_f = 3{,}05$ kip
7.7. $\tau_B = 4{,}41$ MPa
7.9. $V = 9{,}96$ kip
7.10. $V = 32{,}1$ kip
7.11. $\tau_{máx} = 4{,}48$ ksi
7.13. $\tau_{máx} = 190$ kN
7.14. $\tau_{máx} = 3{,}16$ MPa,
$(\tau_A)_w = 1{,}87$ MPa, $(\tau_A)_f = 1{,}24$ MPa
7.15. $\tau_{máx} = \dfrac{4V}{3A}$
7.17. $P = 80{,}1$ kip
7.18. $\tau_{máx} = 99{,}8$ psi
7.19. $\tau_{máx} = 14{,}7$ MPa
7.21. $w = 5{,}69$ kip/pés
7.22. $w = 13{,}3$ kip/pés, $\tau_{máx} = 625$ psi
7.23. $\tau_A = 35{,}7$ psi
7.25. $F_t = 512$ lb
7.26. $\tau_{máx} = 280$ psi
7.33. $F = 675$ lb
7.34. $F = 5{,}31$ kN
7.35. $\tau_B = 646$ psi, $\tau_A = 592$ psi
7.37. $s = 8{,}66$ pol, $s' = 1{,}21$ pol
7.38. $V = 34{,}5$ kip
7.39. $P = 238$ N
7.41. $w = 354$ lb/pés
7.42. $q = 141$ lb/pol
7.43. $\tau_{prego} = 159$ MPa
7.45. $\tau = 14{,}4$ MPa
7.46. $V = 499$ kN
7.47. $s = 13{,}8$ pol
7.51. $q_A = 196$ lb/pol, $q_B = 452$ lb/pol, $q_{máx} = 641$ lb/pol
7.53. $q_A = 13{,}0$ kN/m, $q_B = 9{,}44$ kN/m
7.54. $q_C = 38{,}6$ kN/m
7.55. $q_B = 12{,}6$ kN/m, $q_{máx} = 22{,}5$ kN/m
7.57. $q_A = 0, q_B = 417$ lb/pol
7.58. $q_{máx} = 106$ kN/m
7.59. $q_A = 79{,}5$ kN/m
7.61. $e = 1{,}07$ pol
7.62. $e = \left(\dfrac{h_2^3}{h_1^3 + h_2^3}\right)b$
7.63. $e = \dfrac{3b^2}{2(d + 3b)}$
7.65. $e = 0$
7.66. $e = \dfrac{3(b_2^2 - b_1^2)}{h + 6(b_1 + b_2)}$
7.67. $e = \dfrac{b(6h_1 h^2 + 3bh^2 - 8h_1^3)}{(h + 2h_1)^3 + 6b\,h^2}$
7.69. $e = \dfrac{15}{38}d$
7.70. $e = \dfrac{7}{10}a$
7.71. $e = \left(\dfrac{4 - \pi}{\pi}\right)r$
7.73. $e = 2\,r$
7.74. $e = \left(\dfrac{12}{3\pi + 4}\right)r$
7.75. $\tau_{máx} = 928$ psi
7.77. $V = 4{,}10$ kip
7.78. $V = 749$ lb
7.79. $q_A = 0, q_B = 1{,}21$ kN/m, $q_C = 3{,}78$ kN/m
7.81. $\tau_A = 1{,}99$ MPa, $\tau_B = 1{,}65$ MPa
7.82. $\tau_A = 160$ psi, $\tau_C = 0$
7.83. $\tau_B = 213$ psi

Capítulo 8

8.1. $t = 18{,}75$ mm

8.2. $\sigma_1 = 600$ psi, $\sigma_2 = 0$

8.3. $\sigma_1 = 600$ psi, $\sigma_2 = 300$ psi

8.5. $T = 18{,}2$ kip · pés, $P = 18{,}1$ kip, $F = 9{,}05$ kip

8.6. $\sigma_c = 2{,}69$ ksi

8.7. $p = 25$ psi, $\delta = 0{,}00140$ pol

8.9. $s = 33{,}3$ pol

8.10. $T_1 = 128°\text{F}$, $\sigma_1 = 12{,}1$ ksi, $p = 252$ psi

8.11. $$p = \frac{E(r_2 - r_3)}{\dfrac{r_2^2}{r_2 - r_1} + \dfrac{r_3^2}{r_4 - r_3}}$$

8.13. **a)** $\sigma_1 = 127$ MPa, **b)** $\sigma_1' = 63{,}3$ MPa, **c)** $(\tau_{méd})_b = 258$ MPa

8.14. $\theta = 54{,}7°$

8.15. $\sigma_{máx} = 44{,}0$ ksi (T)

8.17. 2,13 ksi (T), 1,07 ksi (C)

8.18. $\sigma_A = 0{,}533$ ksi (T), $\sigma_B = 1{,}07$ ksi (C), $\tau_A = 0{,}600$ ksi, $\tau_B = 0$

8.19. $w = 79{,}7$ mm

8.21. $\sigma_{máx} = 26{,}7$ MPa (C), $\sigma_{mín} = 13{,}3$ MPa (T)

8.22. $\sigma_{máx} = 53{,}3$ MPa (C), $\sigma_{mín} = 40{,}0$ MPa (T)

8.23. $d = 13{,}1$ mm

8.25. $\sigma_A = 0{,}318$ MPa, $\tau_A = 0{,}735$ MPa

8.26. $\sigma_B = -21{,}7$ MPa, $\tau_B = 0$

8.27. $(\sigma_C)_{máx} = 11{,}0$ MPa, $(\sigma_C)_{mín} = 8{,}33$ MPa

8.29. $T = 2{,}16$ kip

8.30. $T = 2{,}16$ kip

8.31. $\sigma_B = 235{,}1$ psf (C), Uma vez que σ_B está em compressão, a chaminé é *segura*.

8.33. $\sigma_A = 25{,}0$ psi (C), $\sigma_B = 75{,}0$ psi (C)

8.34. $\sigma_A = 25{,}0$ psi (C), $\sigma_B = 75{,}0$ psi (C), $\sigma_C = 25{,}0$ psi (C), $\sigma_D = 25{,}0$ psi (T)

8.35. $\theta = 0{,}286°$

8.37. $\sigma_D = -88{,}0$ MPa, $\tau_D = 0$

8.38. $\sigma_E = 57{,}8$ MPa, $\tau_E = 864$ kPa

8.39. $e_y = \dfrac{r}{4}$

8.41. $\sigma_B = 0{,}522$ MPa (C), $\tau_B = 0$

8.42. Ponto A: $\sigma_A = 107$ MPa, $\tau_A = 15{,}3$ MPa, Ponto B: $\sigma_B = 0$, $\tau_B = 14{,}8$ MPa

8.43. Ponto C: $\sigma_C = 107$ MPa (C), $\tau_C = 15{,}3$ MPa, Ponto D: $\sigma_D = 0$, $\tau_D = 15{,}8$ MPa

8.45. $\sigma_B = 81{,}3$ MPa (C), $(\tau_{xz})_B = 2{,}36$ MPa, $(\tau_{xy})_B = 0$

8.46. $\sigma_C = 103$ MPa (C), $(\tau_{xy})_C = 3{,}54$ MPa, $(\tau_{xz})_C = 0$

8.47. Ponto D: $(\sigma_D)_y = -178$ psi, $(\tau_D)_{yx} = (\tau_D)_{yz} = 0$, Ponto E: $(\sigma_E)_y = 9{,}78$ psi, $(\tau_E)_{yx} = (\tau_E)_{yz} = 0$

8.49. $\sigma_A = 4{,}37$ MPa (C), $\sigma_B = 0{,}318$ MPa (C), $\tau_A = 0$, $\tau_B = 0{,}477$ MPa

8.50. $\sigma_A = 10{,}1$ ksi (T), $\sigma_B = 10{,}3$ ksi (C), $\tau_A = \tau_B = 0$

8.51. $\sigma_E = 1{,}01$ MPa (C), $\sigma_F = 27{,}7$ MPa (C), $\tau_E = 1{,}96$ MPa, $\tau_F = 0$

8.53. $\sigma_D = 21{,}4$ ksi (C), $\sigma_E = 10{,}8$ ksi (C), $\tau_D = \tau_E = 0$

8.54. $\sigma_A = 6{,}61$ ksi (T), $(\tau_{xz})_A = 1{,}39$ ksi, $(\tau_{xy})_A = 0$

8.55. $\sigma_B = 5{,}76$ ksi (C), $(\tau_{xy})_B = 1{,}36$ ksi, $(\tau_{xz})_B = 0$

8.57. $\sigma_A = 360$ kPa (T), $(\tau_{xz})_A = 39{,}1$ kPa, $(\tau_{xy})_A = 0$

8.58. $\sigma_C = 360$ kPa (C), $(\tau_{xz})_C = -9{,}05$ kPa, $(\tau_{xy})_C = 0$

8.59. $6e_y + 18e_z < 5a$

8.61. $\sigma_A = 9{,}88$ kPa (T), $\sigma_B = 49{,}4$ kPa (C), $\sigma_C = 128$ kPa (C), $\sigma_D = 69{,}1$ kPa (C)

8.62. $(\sigma_t)_{máx} = 49{,}0$ ksi (T), $(\sigma_c)_{máx} = 40{,}8$ ksi (C)

8.63. $(\sigma_t)_{máx} = 28{,}8$ ksi (T), $(\sigma_c)_{máx} = 24{,}0$ ksi (C)

8.65. $(\sigma_t)_{máx} = 15{,}5$ ksi (T), $(\sigma_c)_{máx} = 9{,}31$ ksi (C)

8.66. $\sigma_{máx} = \dfrac{1.33P}{a^2}$ (C), $\sigma_{mín} = \dfrac{P}{3a^2}$ (T)

8.67. $\sigma_{máx} = \dfrac{0{,}368P}{r^2}$ (C), $\sigma_{mín} = \dfrac{0{,}0796P}{r^2}$ (T)

8.69. $p = 133{,}3$ kPa, $P = 848$ N

8.70. $p = 3{,}60$ MPa, $n = 113$ parafusos

8.71. $\sigma_1 = 50{,}0$ MPa, $\sigma_2 = 25{,}0$ MPa, $F_b = 133$ kN

8.73. $\sigma_{máx} = 26{,}7$ ksi

8.74. $\sigma_C = 11{,}6$ ksi, $\tau_C = 0$, $\sigma_D = -23{,}2$ ksi, $\tau_D = 0$

8.75. $\sigma_F = 6{,}40$ MPa (C), $\tau_F = 0$

8.77. $\sigma_A = 5{,}89$ ksi (C), $\sigma_B = 1{,}68$ ksi (T), $\tau_A = 0$, $\tau_B = 0{,}397$ ksi

Capítulo 9

9.2. $\sigma_{x'} = -4{,}05$ ksi, $\tau_{x'y'} = -0{,}404$ ksi

9.3. $\sigma_{x'} = -4{,}05$ ksi, $\tau_{x'y'} = -0{,}404$ ksi

9.5. $\sigma_x = -2{,}71$ ksi, $\tau_{x'y'} = 4{,}17$ ksi

9.6. $\sigma_{x'} = -388$ psi, $\tau_{x'y'} = 455$ psi

9.7. $\sigma_{x'} = -388$ psi, $\tau_{x'y'} = 455$ psi

9.9. $\sigma_{x'} = 329$ psi, $\sigma_{y'} = -28{,}9$ psi, $\tau_{x'y'} = -69{,}9$ psi

9.10. **a)** $\sigma_1 = 10{,}1$ ksi, $\sigma_2 = -4{,}07$ ksi, $\theta_{p_1} = -40{,}9°$, $\theta_{p_2} = 49{,}1°$

b) $\tau_{\substack{máx \\ no\ plano}} = 7{,}07$ ksi

$\theta_s = 4{,}07°$ e $-85{,}9°$, $\sigma_{méd} = 3{,}00$ ksi

9.11. $\sigma_{x'} = -19{,}9$ ksi, $\tau_{x'y'} = 7{,}70$ ksi, $\sigma_{y'} = 9{,}89$ ksi

9.13. **a)** $\sigma_1 = 64{,}1$ ksi, $\sigma_2 = -14{,}1$ ksi $\theta_{p1} = -64{,}9°$, $\theta_{p2} = 25{,}1°$

b) $\tau_{\substack{máx \\ no\ plano}} = 39{,}1$ ksi

$\sigma_{méd} = 25{,}0$ ksi, $\theta_s = -19{,}9°$ e $70{,}1°$

9.14. **a)** $\sigma_1 = 474$ psi, $\sigma_2 = -1.034$ psi, $\theta_{p1} = -55{,}9°$, $\theta_{p2} = 34{,}1°$,

b) $\tau_{\substack{máx \\ no\ plano}} = 754$ psi $\theta_s = -10{,}9°$ e $79{,}1°$,

$\sigma_{méd} = -280$ psi

9.15. $\sigma_1 = 40{,}0$ psi, $\sigma_2 = -40{,}0$ psi

9.18. $\sigma_x = 33{,}0$ MPa, $\sigma_y = 137$ MPa, $\tau_{xy} = -30$ MPa

9.19. $\tau_a = -1{,}96$ ksi, $\sigma_1 = 80{,}1$ ksi, $\sigma_2 = 19{,}9$ ksi

9.21. $\sigma_{x'} = 0{,}507$ MPa, $\tau_{x'y'} = 0{,}958$ MPa

9.22. $\sigma_1 = 2{,}29$ MPa, $\sigma_2 = -7{,}20$ kPa

9.23. $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -192$ MPa, $\sigma_1 = 24{,}0$ MPa, $\sigma_2 = -24{,}0$ MPa, $\theta_{p_1} = -45{,}0°$, $\theta_{p_2} = 45{,}0°$

9.25. $\tau_{\substack{máx \\ no\ plano}} = 5$ kPa, $\sigma_{méd} = 0$

9.26. $\sigma_1 = 152$ MPa, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_1 = 0{,}229$ MPa, $\sigma_2 = -196$ MPa, $\theta_{p_1} = 88{,}0°$, $\theta_{p_2} = 1{,}96°$

9.27. $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -87{,}1$ MPa $\sigma_1 = 93{,}9$ MPa, $\sigma_2 = 0$, $\tau_{\substack{máx \\ no\ plano}} = 43{,}6$ MPa, $\tau_{\substack{máx \\ no\ plano}} = 47{,}0$ MPa

9.29. $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = -118$ psi,
$\sigma_1 = 95{,}6$ psi, $\sigma_2 = 0$, $\tau_{\text{máx}}^{\text{no plano}} = 58{,}9$ psi e 47,8 psi

9.30. $\sigma_1 = 150$ MPa, $\sigma_2 = -1{,}52$ MPa, $\sigma_1 = 1{,}60$ MPa,
$\sigma_2 = -143$ MPa

9.31. $\sigma_1 = \frac{2}{\pi d^2}\left(-F + \sqrt{F^2 + \frac{64T_0^2}{d^2}}\right)$,

$\sigma_2 = -\frac{2}{\pi d^2}\left(F + \sqrt{F^2 + \frac{64T_0^2}{d^2}}\right)$,

$\tau_{\text{máx}}^{\text{no plano}} = \frac{2}{\pi d^2}\sqrt{F^2 + \frac{64T_0^2}{d^2}}$

9.33. $M = 8{,}73$ kip · pol

9.34. $\sigma_1 = 4{,}33$ MPa, $\sigma_2 = -13{,}0$ MPa

9.35. $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = -77{,}4$ MPa, $\tau_{\text{máx}}^{\text{no plano}} = 38{,}7$ MPa

9.37. $\sigma_1 = 54{,}6$ MPa, $\sigma_2 = -59{,}8$ MPa, $\tau_{\text{máx}}^{\text{no plano}} = 57{,}2$ MPa

9.38. $\sigma_1 = 1{,}06$ ksi, $\sigma_2 = -0{,}850$ ksi, $\tau_{\text{máx}}^{\text{no plano}} = 0{,}957$ ksi

9.39. $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = -0{,}814$ ksi,
$\tau_{\text{máx}}^{\text{no plano}} = 0{,}407$ ksi

9.41. $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 29{,}5$ MPa, $\sigma_1 = 0{,}541$ MPa,
$\sigma_2 = -1{,}04$ MPa, $\theta_{p_1} = -54{,}2°$, $\theta_{p_2} = 35{,}8°$

9.42. $\sigma_1 = 5{,}50$ MPa, $\sigma_2 = -0{,}611$ MPa

9.43. $\sigma_1 = 1{,}29$ MPa, $\sigma_2 = -1{,}29$ MPa

9.45. $\sigma_1 = 382$ psi, $\sigma_2 = -471$ psi, $\tau_{\text{máx}}^{\text{no plano}} = 427$ psi

9.46. Para o ponto A: $\sigma_1 = 61{,}7$ psi, $\sigma_2 = 0$.
Para o ponto B: $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = -46{,}3$ psi

9.49. $\sigma_{x'} = -4{,}05$ ksi, $\tau_{x'y'} = -0{,}404$ ksi

9.50. $\sigma_{x'} = -2{,}71$ ksi, $\tau_{x'y'} = 4{,}17$ ksi

9.51. $\sigma_{x'} = -388$ psi, $\tau_{x'y'} = 455$ psi

9.53. $\sigma_{\text{méd}} = 3{,}00$ ksi,
a) $\sigma_1 = 10{,}1$ ksi, $\sigma_2 = -4{,}07$ ksi, $\theta_{p_1} = 40{,}9°$
b) $\tau_{\text{máx}}^{\text{no plano}} = -7{,}07$ ksi, $\theta_s = 4{,}07°$

9.54. $\sigma_{x'} = -19{,}9$ ksi, $\tau_{x'y'} = 7{,}70$ ksi,
$\sigma_{y'} = 9{,}89$ ksi

9.55. $\sigma_{\text{méd}} = 25{,}0$ ksi,
a) $\sigma_1 = 64{,}1$ ksi, $\sigma_2 = -14{,}1$ ksi, $\theta_{p_1} = 64{,}9°$
b) $\tau_{\text{máx}}^{\text{no plano}} = -39{,}1$ ksi, $\theta_s = 19{,}9°$

9.57. $\sigma_{\text{méd}} = -280$ psi,
a) $\sigma_1 = 474$ psi, $\sigma_2 = -1034$ psi, $\theta_{p_1} = 55{,}9°$
b) $\tau_{\text{máx}}^{\text{no plano}} = -754$ psi, $\theta_s = 10{,}9°$

9.58. $\sigma_{\text{méd}} = 3{,}50$ MPa, $\tau_{\text{máx}}^{\text{no plano}} = 0{,}500$ MPa

9.59. $\sigma_{x'} = -56{,}3$ ksi, $\sigma_{y'} = 56{,}3$ ksi, $\tau_{x'y'} = 32{,}5$ ksi

9.61. $\sigma_{x'} = 736$ MPa, $\sigma_{y'} = -156$ MPa, $\tau_{x'y'} = 188$ MPa

9.62. $\sigma_{x'} = -421$ MPa, $\tau_{x'y'} = -354$ MPa,
$\sigma_{y'} = 421$ MPa

9.63. **a)** $\sigma_1 = 12{,}3$ ksi, $\sigma_2 = -17{,}3$ ksi, $\theta_p = 16{,}3°$
b) $\tau_{\text{máx}}^{\text{no plano}} = 14{,}8$ ksi, $\sigma_{\text{méd}} = -2{,}5$ ksi, $\theta_s = 28{,}7°$

9.65. $\sigma_{\text{méd}} = 7{,}50$ ksi,
a) $\sigma_1 = 16{,}5$ ksi, $\sigma_2 = -1{,}51$ ksi, $\theta_{p_1} = 16{,}8°$
b) $\tau_{\text{máx}}^{\text{no plano}} = -9{,}01$ ksi, $\theta_s = 28{,}2°$

9.66. **a)** $\sigma_{\text{méd}} = 100$ psi, $R = 700$ psi
b) $\sigma_{\text{méd}} = -1{,}00$ ksi, $R = 1{,}00$ ksi
c) $\sigma_{\text{méd}} = 0$, $R = 20{,}0$ MPa

9.67. $\sigma_x = 33{,}0$ MPa, $\sigma_y = 137$ MPa,
$\tau_{xy} = -30{,}0$ MPa

9.70. $\sigma_1 = 1{,}50$ ksi, $\sigma_2 = -0{,}0235$ ksi

9.71. $\sigma_1 = 0{,}0723$ ksi, $\sigma_2 = -0{,}683$ ksi

9.73. $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = -87{,}1$ MPa, $\tau_{\text{máx}}^{\text{no plano}} = 43{,}6$ MPa,
$\theta_s = 45{,}0°$, $\sigma_1 = 93.9$ MPa,
$\sigma_2 = 0$ MPa, $\tau_{\text{máx}}^{\text{no plano}} = 47{,}0$ MPa,
$\theta_s = 45{,}0°$

9.74. $\sigma_1 = 4{,}15$ ksi, $\sigma_2 = 0$, $\tau_{\text{máx}}^{\text{no plano}} = 2{,}075$ ksi,
$\theta_s = 45{,}0°$, $\sigma_1 = 0$,
$\sigma_2 = -3{,}95$ ksi, $\tau_{\text{máx}}^{\text{no plano}} = 1{,}975$ ksi, $\theta_s = 45{,}0°$

9.75. $\sigma_{\text{méd}} = 4{,}80$ ksi

9.77. $\sigma_1 = 4{,}00$ ksi, $\sigma_2 = -0{,}0317$ ksi

9.78. $\sigma_1 = 0{,}711$ ksi, $\sigma_2 = -0{,}445$ ksi

9.79. $\sigma_1 = 4{,}71$ ksi, $\sigma_2 = -0{,}0262$ ksi

9.81. $\sigma_{x'} = -12{,}5$ kPa, $\tau_{x'y'} = 21{,}7$ kPa

9.82. $\sigma_1 = 141$ MPa, $\sigma_2 = 9{,}05$ MPa, $\tau_{\text{máx}}^{\text{no plano}} = 66{,}0$ MPa

9.83. $\sigma_{x'} = 500$ MPa, $\tau_{x'y'} = 167$ MPa

9.85. **a)** $\sigma_{\text{máx}} = 6$ ksi, $\sigma_{\text{int}} = \sigma_{\text{mín}} = 0$
b) $\sigma_{\text{máx}} = 50$ MPa, $\sigma_{\text{int}} = 0$, $\sigma_{\text{mín}} = -40$ MPa
c) $\sigma_{\text{máx}} = 600$ psi, $\sigma_{\text{int}} = 200$ psi, $\sigma_{\text{mín}} = 100$ psi
d) $\sigma_{\text{máx}} = 0$, $\sigma_{\text{int}} = -7$ ksi, $\sigma_{\text{mín}} = -9$ ksi
e) $\sigma_{\text{máx}} = \sigma_{\text{int}} = \sigma_{\text{mín}} = -30$ MPa

9.86. *Para o Plano x.y:* $\tau_{\text{máx}}^{\text{no plano}} = 4$ ksi, $\sigma_{\text{méd}} = 11$ ksi
Para o Plano x.z: $\tau_{\text{máx}}^{\text{no plano}} = 2$ ksi, $\sigma_{\text{méd}} = 13$ ksi
Para o Plano y.z: $\tau_{\text{máx}}^{\text{no plano}} = 2$ ksi, $\sigma_{\text{méd}} = 9$ ksi

9.87. $\sigma_{\text{máx}} = 7{,}00$ ksi, $\sigma_{\text{int}} = 5{,}00$ ksi,
$\sigma_{\text{mín}} = -5{,}00$ ksi, $\tau_{\text{máx}}^{\text{abs}} = 6{,}00$ ksi

9.89. Para o plano $x.y$: $\tau_{\text{máx}} = 6{,}0$ ksi, $\sigma_{\text{méd}} = -2{,}0$ ksi
Para o Plano $x.z$: $\tau_{\text{máx}} = 3{,}0$ ksi, $\sigma_{\text{méd}} = 7{,}0$ ksi
Para o Plano $y.z$: $\tau_{\text{máx}} = 9{,}0$ ksi, $\sigma_{\text{méd}} = 1{,}0$ ksi

9.90. $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$

9.91. $\sigma_{\text{máx}} = 0{,}615$ kPa, $\sigma_{\text{int}} = 0$, $\sigma_{\text{mín}} = -4{,}62$ MPa,
$\tau_{\text{máx}}^{\text{abs}} = 2{,}31$ MPa

9.93. $\sigma_{\text{máx}} = 48{,}8$ ksi, $\sigma_{\text{int}} = 0$,
$\sigma_{\text{mín}} = -25{,}4$ ksi, $\tau_{\text{máx}}^{\text{abs}} = 37{,}1$ ksi, $\theta_s = 9{,}22°$

9.94. $\sigma_{\text{máx}} = 34{,}7$ ksi, $\sigma_{\text{int}} = 0$
$\sigma_{\text{mín}} = -34.7$ ksi, $\tau_{\text{máx}}^{\text{abs}} = 34{,}7$ ksi

9.95. $\sigma_1 = 233$ psi, $\sigma_2 = -774$ psi, $\tau_{\text{máx}}^{\text{no plano}} = 503$ psi

9.97. $\sigma_{\text{méd}} = 62{,}5$ ksi,
a) $\sigma_1 = 153$ ksi, $\sigma_2 = -27{,}7$ ksi, $\theta_{p_1} = 23{,}1°$
b) $\tau_{\text{máx}}^{\text{no plano}} = 90{,}2$ ksi, $\theta_s = 21{,}9°$

9.98. $\sigma_{máx} = 153$ ksi, $\sigma_{int} = 0$, $\sigma_{mín} = -27{,}7$ ksi, $\tau_{\substack{máx \\ abs}} = 90{,}2$ ksi

9.99. $M = 81{,}8$ lb · pés, $T = 231$ lb · pés

9.101. $\sigma_{x'} = -0{,}611$ ksi, $\tau_{x'y'} = 7{,}88$ ksi, $\sigma_{y'} = -3{,}39$ ksi

9.102. $\sigma_{méd} = 0$, $\tau_{\substack{máx \\ no\ plano}} = 5{,}00$ kPa

9.103. $\sigma_{x'} = -22{,}9$ kPa, $\tau_{x'y'} = -13{,}2$ kPa

Capítulo 10

10.2. $\epsilon_{x'} = -309(10^{-6})$, $\epsilon_{y'} = -541(10^{-6})$, $\gamma_{x'y'} = -423(10^{-6})$

10.3. $\epsilon_{x'} = -116(10^{-6})$, $\epsilon_{y'} = 466(10^{-6})$, $\gamma_{x'y'} = 393(10^{-6})$

10.5. $\epsilon_{x'} = 649(10^{-6})$, $\gamma_{x'y'} = -85.1(10^{-6})$, $\epsilon_{y'} = 201(10^{-6})$

10.6. **a)** $\epsilon_1 = 368(10^{-6})$, $\epsilon_2 = 182(10^{-6})$, $\theta_{p_1} = -52{,}8°$, $\theta_{p_2} = 37{,}2°$

b) $\gamma_{\substack{máx \\ no\ plano}} = 187(10^{-6})$, $\theta_s = -7{,}76°$, e $82{,}2°$, $\epsilon_{méd} = 275(10^{-6})$

10.7. **a)** $\epsilon_1 = 1039(10^{-6})$, $\epsilon_2 = 291(10^{-6})$, $\theta_{p1} = 30{,}2°$, $\theta_{p2} = 120°$

b) $\gamma_{\substack{máx \\ no\ plano}} = 748(10^{-6})$, $\epsilon_{méd} = 665(10^{-6})$, $\theta_s = -14{,}8°$ e $75{,}2°$, $\gamma_{x'y'} = 748(10^{-6})$

10.9. **a)** $\epsilon_1 = 385(10^{-6})$, $\epsilon_2 = 195(10^{-6})$, $\theta_{p_1} = 54{,}2°$, $\theta_{p2} = -35{,}8°$

b) $\gamma_{\substack{máx \\ no\ plano}} = 190\,(10^{-6})$, $\theta_s = 9{,}22°, -80{,}8°$, $\epsilon_{méd} = 290(10^{-6})$

10.10. **a)** $\epsilon_1 = 138(10^{-6})$, $\epsilon_2 = -198(10^{-6})$, $\theta_{p_1} = 13{,}3°$, $\theta_{p_2} = -76{,}7°$

b) $\gamma_{\substack{máx \\ no\ plano}} = 335(10^{-6})$, $\epsilon_{méd} = -30{,}0(10^{-6})$, $\theta_s = 39{,}8°$ e $130°$, $\gamma_{x'y'} = 417(10^{-6})$

10.13. $\epsilon_{x'} = -116(10^{-6})$, $\gamma_{x'y'} = -393(10^{-6})$, $\epsilon_{y'} = 466(10^{-6})$

10.14. $\epsilon_{x'} = 466(10^{-6})$, $\epsilon_{y'} = -116(10^{-6})$ $\gamma_{x'y'} = -393(10^{-6})$

10.15. $\epsilon_{x'} = 649(10^{-6})$, $\gamma_{x'y'} = -85{,}1(10^{-6})$ $\epsilon_{y'} = 201(10^{-6})$

10.17. $\epsilon_{méd} = 275(10^{-6})$, $\epsilon_1 = 368(10^{-6})$, $\epsilon_2 = 182(10^{-6})$, $\theta_{p_1} = 52{,}8°$, $\gamma_{\substack{máx \\ no\ plano}} = -187(10^{-6})$, $\theta_s = 7{,}76°$

10.18. $\epsilon_{méd} = 665(10^{-6})$, $\epsilon_1 = 1.039(10^{-6})$, $\epsilon_2 = 291(10^{-6})$, $\theta_{p_1} = 30{,}2°$, $\gamma_{\substack{máx \\ no\ plano}} = 748(10^{-6})$, $\theta_s = 14{,}8°$

10.19. $\epsilon_{méd} = 290(10^{-6})$, $\epsilon_1 = 385(10^{-6})$, $\epsilon_2 = 195(10^{-6})$, $\theta_{p_1} = 54{,}2°$ $\gamma_{\substack{máx \\ no\ plano}} = 190(10^{-6})$, $\theta_s = 9{,}22°$

10.21. $\gamma_{\substack{máx \\ no\ plano}} = -1.015(10^{-6})$, $\epsilon_{máx} = 418(10^{-6})$, $\epsilon_{int} = 0$, $\epsilon_{mín} = -598(10^{-6})$, $\gamma_{\substack{máx \\ abs}} = 1.015(10^{-6})$

10.22. $\gamma_{\substack{máx \\ no\ plano}} = 168(10^{-6})$, $\epsilon_{máx} = 289(10^{-6})$, $\epsilon_{int} = 121(10^{-6})$, $\epsilon_{mín} = 0$, $\gamma_{\substack{máx \\ abs}} = 289(10^{-6})$

10.23. $\gamma_{\substack{máx \\ no\ plano}} = 740(10^{-6})$, $\varepsilon_{máx} = 0$, $\varepsilon_{int} = -65{,}1(10^{-6})$, $\varepsilon_{mín} = -805(10^{-6})$, $\gamma_{\substack{máx \\ abs}} = 805(10^{-6})$

10.25. $\gamma_{\substack{máx \\ no\ plano}} = 465(10^{-6})$, $\varepsilon_{máx} = 870(10^{-6})$, $\varepsilon_{int} = 405(10^{-6})$, $\varepsilon_{mín} = 0$, $\gamma_{\substack{máx \\ abs}} = 870(10^{-6})$

10.26. $\gamma_{\substack{máx \\ no\ plano}} = -320(10^{-6})$, $\varepsilon_{máx} = 0$, $\varepsilon_{int} = -140(10^{-6})$, $\varepsilon_{mín} = -460(10^{-6})$, $\gamma_{\substack{máx \\ abs}} = 460(10^{-6})$

10.27. **a)** $\varepsilon_1 = 773(10^{-6})$, $\varepsilon_2 = 76{,}8(10^{-6})$,

b) $\gamma_{\substack{máx \\ no\ plano}} = 696(10^{-6})$ **c)** $\gamma_{\substack{máx \\ abs}} = 773(10^{-6})$

10.29. **a)** $\varepsilon_1 = 192(10^{-6})$, $\varepsilon_2 = -152(10^{-6})$,

b,c) $\gamma_{\substack{máx \\ abs}} = 344(10^{-6})$

10.30. **a)** $\varepsilon_1 = 1.434(10^{-6})$, $\varepsilon_2 = -304(10^{-6})$,

b) $\gamma_{\substack{máx \\ no\ plano}} = 1.738(10^{-6})$, $\varepsilon_{méd} = 565(10^{-6})$

10.31. $\varepsilon_1 = 1.046(10^{-6})$, $\varepsilon_2 = -306(10^{-6})$, $\theta_p = 15{,}4°$

10.35. $k = 7{,}78(10^3)$ ksi

10.37. $\nu_{pvc} = 0{,}614$

10.38. $\varepsilon_{máx} = 30{,}5(10^{-6})$, $\varepsilon_{int} = \varepsilon_{mín} = -10{,}7(10^{-6})$

10.39. $p = 0{,}967$ ksi, $\gamma_{\substack{máx \\ no\ plano}} = 1{,}30(10^{-3})$

10.41. $\varepsilon_{máx} = 0{,}755(10^{-3})$, $\varepsilon_{int} = 0{,}621(10^{-3})$, $\varepsilon_{mín} = -1{,}31(10^{-3})$

10.42. $E_p = 769$ ksi, $e = 0{,}254(10^{-3})$

10.43. $E = 17{,}4$ GPa, $\delta d = 12{,}65(10^{-6})$ mm

10.45. $\nu = 0{,}309$, $E = 28{,}1(10^3)$ ksi

10.46. $p = 3{,}43$ MPa, $\tau_{\substack{máx \\ no\ plano}} = 0$, $\tau_{\substack{máx \\ abs}} = 85{,}7$ MPa

10.47. $\sigma_1 = 8{,}37$ ksi, $\sigma_2 = 6{,}26$ ksi

10.49. $\varepsilon_{máx} = 289(10^{-6})$, $\varepsilon_{int} = 0$, $\varepsilon_{mín} = -289(10^{-6})$

10.50. $\Delta d = 0{,}800$ mm, $\sigma_{AB} = 315$ MPa

10.51. $p = 0{,}432$ ksi, $\gamma_{\substack{máx \\ no\ plano}} = 0{,}294(10^{-3})$, $\gamma_{\substack{máx \\ abs}} = 0{,}587(10^{-3})$

10.53. $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$, $T = 41{,}3$ N · m

10.54. $\delta V = \dfrac{1 - 2\nu}{2E}(2PL + w_0L^2)$

10.57. $k = 1{,}35$

10.59. $\varepsilon_1 = \dfrac{pr}{2Et}(2 - \nu)$, $\delta d = 2{,}72$ mm, $\varepsilon_2 = \dfrac{pr}{2Et}(1 - 2\nu)$, $\delta L = 1{,}60$ mm

10.61. $\sigma_x = \sigma_y = -70{,}0$ ksi, $\sigma_z = -55{,}2$ ksi

10.62. $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$, $\varepsilon_z = 5{,}44(10^{-3})$

10.63. $\Delta T = 67{,}7°$F

10.65. $\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_Y^2$

10.66. Sim.

10.67. Sim.

10.69. $\sigma_1 = 11{,}6$ ksi

10.70. $\sigma_2 = 38{,}9$ ksi

10.71. $\sigma_2 = 23{,}9$ MPa

10.73. F.S. = 1,59

10.74. F.S. = 1,80

10.75. $d = 2{,}03$ pol

10.77. $a = 1{,}78$ pol

10.78. F.S. = 5,38

10.79. $\sigma_e = 19{,}7$ ksi

10.81. **a)** $\tau = 32{,}5$ ksi, **b)** $\tau = 37{,}5$ ksi

10.82. $M_e = \sqrt{M^2 + T^2}$

10.83. $\sigma_e = 94{,}3$ ksi

10.85. **a)** $\sigma_1 = 924$ MPa (*Controles!*), **b)** $\sigma_1 = 1.067$ MPa

10.86. $d = 0{,}942$ pol

10.87. $d = 0{,}988$ pol

10.89. $d = 0{,}833$ pol

10.90. $d = 0{,}794$ pol

10.91. **a)** $p = \frac{t}{r}\sigma_e$ (*Controles!*), **b)** $p = \frac{2t}{\sqrt{3}r}\sigma_e$

10.93. $\sigma_e = 32{,}0$ ksi

10.94. $d = 1{,}68$ pol

10.95. O material não falhará, de acordo com a teoria da energia de distorção máxima.

10.97. Não.

10.98. **a)** $\varepsilon_1 = 482(10^{-6})$, $\varepsilon_2 = 168(10^{-6})$,
b) $\gamma_{\substack{\text{máx} \\ \text{lb·plano}}} = 313(10^{-6})$ **c)** $\gamma_{\substack{\text{máx} \\ \text{abs}}} = 482(10^{-6})$

10.101. **a)** $\varepsilon_1 = 441(10^{-6})$, $\varepsilon_2 = -641(10^{-6})$,
$\theta_{p_1} = -24{,}8°$, $\theta_{p_2} = 65{,}2°$
b) $\gamma_{\substack{\text{máx} \\ \text{no plano}}} = 1{,}08(10^{-3})$, $\theta_s = 20{,}2$ e $-69{,}8°$,
$\varepsilon_{\text{méd}} = -100(10^{-6})$

10.102. $\Delta b = 1{,}2(10^{-3})$pol, $\Delta b = -1{,}2(10^{-3})$pol

10.103. $k_r = 3{,}33$ ksi, $k_g = 5{,}13(10^3)$ksi

10.105. $\varepsilon_{\text{méd}} = 83{,}3(10^{-6})$,
a) $\varepsilon_1 = 880(10^{-6})$, $\varepsilon_2 = -713(10^{-6})$, $\theta_{p_1} = 54{,}8°$
b) $\gamma_{\substack{\text{máx} \\ \text{no plano}}} = -1.593(10^{-6})$, $\theta_s = 9{,}78°$

Capítulo 11

11.1. $h = 6$ pol

11.2. $h = 4\frac{3}{4}$ pol

11.3. $b = 3{,}40$ pol

11.5. W12 × 16

11.6. W12 × 26

11.7. Sim.

11.9. $h = 5\frac{1}{4}$ pol

11.10. $h = 4\frac{1}{2}$ pol

11.11. 0,394 pol

11.13. Não, a viga se rompe devido ao critério da tensão de flexão

11.14. W24 × 62

11.15. A seção W12 × 14 não suporta com segurança o carregamento devido à tensão de flexão.

11.17. 11,4 mm

11.18. 13,0 mm

11.19. $P = 12{,}5$ kip, $\tau_{\text{nec}} = 466$ psi

11.21. $b = 4{,}00$ pol

11.22. $b = 5{,}00$ pol

11.23. $d = 1\frac{1}{4}$ pol

11.25. 4,25 pol

11.26. W12 × 22

11.27. 0,595 pol

11.29. $\sigma_{\text{máx}} = \frac{3PL}{8bh_0^2}$

11.30. $w = \frac{w_0}{L}x$

11.31. $\sigma_{\text{máx}} = \frac{16PL}{27\pi r_0^3}$

11.33. $d = h\sqrt{\frac{x}{L}}$

11.34. A viga tem forma semi-elíptica

11.35. $\sigma = \frac{3PL}{2b_0t^2}$, A tensão de flexão independente de x. Por isso, a tensão é constante ao longo da viga

11.37. $\sigma_{\text{máx}} = \frac{8PL}{27\pi r_0^3}$

11.38. $d = 1\frac{1}{4}$ pol

11.39. $d = 36$ mm

11.41. $d = 1\frac{1}{2}$ pol

11.42. $d = 1\frac{5}{8}$ pol

11.43. $d = 1\frac{1}{8}$ pol

11.45. $d = 20$ mm

11.46. $d = 21$ mm

11.47. $T = 100$ N · m, $d = 29$ mm

11.49. $d = 21$ mm

11.50. $s = \frac{5}{8}$ pol, $s' = \frac{1}{2}$ pol, $s'' = 2\frac{3}{4}$ pol

11.51. $y = \left[\frac{4P}{\pi\sigma_{\text{adm}}}x\right]^{\frac{1}{3}}$

11.53. W10 × 12

11.54. W10 × 12

11.55. $\sigma_{\text{máx}} = wL^2/4bh_0^2$

Capítulo 12

12.1. $\sigma = 100$ MPa

12.2. $\sigma = 582$ MPa

12.3. $v_1 = \frac{Pb}{6EIL}(x_1^3 - (L^2 - b^2)x_1)$,
$v_2 = \frac{Pa}{6EIL}[3x_2^2L - x_2^3 - (2L^2 + a^2)x_2 + a^2L]$

12.5. $\theta_A = \frac{Pa(a - L)}{2EI}$, $v_1 = \frac{Px_1}{6EI}[x_1^2 + 3a(a - L)]$,
$v_2 = \frac{Pa}{6EI}[3x(x - L) + a^2]$,
$v_{\text{máx}} = \frac{Pa}{24EI}(4a^2 - 3L^2)$

12.6. $v_1 = \frac{Px_1}{12EI}(-x_1^2 + L^2)$,
$v_2 = \frac{P}{24EI}(-4x_2^3 + 7L^2x_2 - 3L^3)$, $v_{\text{máx}} = \frac{PL^3}{8EI}$

12.7. $v_1 = \frac{-Pb}{6aEI}[x_1^3 - a^2x_1]$,
$v_2 = \frac{P}{6EI}[-x_2^3 + (-2ab + 3b^2)x_2 - 2(b^3 + ab^2)]$

12.9. $\theta_A = \frac{Pab}{2EI}$,
$v_1 = \frac{P}{6EI}[-x_1^3 + 3a(a + b)x_1 - a^2(2a + 3b)]$,
$v_3 = \frac{Pax_3}{2EI}(-x_3 + b)$, $v_C = \frac{Pab^2}{8EI}$

12.10. $\theta_A = \frac{M_0a}{2EI}$, $v_{\text{máx}} = -\frac{5M_0a^2}{8EI}$

12.11. $\rho = 336$ pés, $\theta_{\text{máx}} = \frac{M_0L}{EI}$, $v_{\text{máx}} = -\frac{M_0L^2}{2EI}$

12.13. $\theta_{\text{máx}} = \frac{-M_0L}{EI}$, $v = -\frac{-M_0x^2}{2EI}$, $v_{\text{máx}} = -\frac{M_0L^2}{2EI}$

12.14. $\theta_{máx} = \frac{M_0 L}{3EI}$, $v_{máx} = -\frac{\sqrt{3} M_0 L^2}{27EI}$

12.15. $|\theta_{máx}| = \frac{M_0 L}{2EI}$, $v = \frac{M_0 x}{2EI}(x - L)$, $v_{máx} = -\frac{M_0 L^2}{8EI}$

12.17. $\theta_A = -\frac{3}{8}\frac{PL^2}{EI}$, $v_C = \frac{-PL^3}{6EI}$

12.18. $v_B = -\frac{11PL^3}{48EI}$

12.19. $\theta_A = 0{,}0611$ rad, $v_A = -3{,}52$ pol

12.21. $v_C = -\frac{PL^3}{32EI_C}$

12.22. $\theta_A = \frac{\gamma L^3}{3r^2 E}$, $v_{A|x=0} = -\frac{\gamma L^4}{6r^2 E}$

12.23. $v_{máx} = \frac{6PL^3}{Ebt^3}$

12.25. $v = \frac{1}{EI}[-0{,}25x^4 + 0{,}208 \langle x - 1{,}5\rangle^3 + 0{,}25 \langle x - 1{,}5\rangle^4 + 4{,}625 \langle x - 4{,}5\rangle^3 + 25{,}1x - 36{,}4]$ kN · m³

12.26. $v_{máx} = 6{,}83$ mm

12.27. $\theta_B = 0{,}0313$ rad, $v = \frac{1}{EI}\{50x^3 - 50 \langle x - 0{,}2\rangle^3 - 50 \langle x - 0{,}5\rangle^3 - 15{,}0x\}$ N · m³

12.29. $v = \frac{P}{12EI}\{-2x^3 + 3 \langle x - a\rangle^3 - 2 \langle x - 2a\rangle^3 + 3 \langle x - 3a\rangle^3 + 15a^2 x - 13a^3\}$,
$v_{máx} = -\frac{13Pa^3}{12EI}$

12.30. $\theta_B = \frac{3Pa^2}{4EI}$, $v|_{x=2a} = \frac{Pa^3}{3EI}$

12.31. $v = \frac{1}{EI}\{4{,}10x^3 - 0{,}125x^4 + 0{,}125 \langle x - 4\rangle^4 - 8{,}33 \langle x - 7\rangle^3 - 279x\}$ kN · m³

12.33. $\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI}[2{,}25x^2 - 0{,}5x^3 + 5{,}25 \langle x - 5\rangle^2 + 0{,}5 \langle x - 5\rangle^3 - 3{,}125]$ kN · m²,
$v = \frac{1}{EI}[0{,}75x^3 - 0{,}125x^4 + 1{,}75 \langle x - 5\rangle^3 + 0{,}125 \langle x - 5\rangle^4 - 3{,}125x]$ kN · m³

12.34. $v = \frac{1}{EI}\{11{,}1x^3 - 0{,}5x^4 - 5 \langle x - 3\rangle^3 - 378x\}$ kN · m³

12.35. $\theta_A = -\frac{378 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI}$, $\theta_B = \frac{359 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI}$,
$v_C = -\frac{874 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI}$

12.37. $\theta_A = -\frac{3wa^3}{16EI}$, $\theta_B = \frac{7wa^3}{48EI}$,
$v = \frac{w}{48EI}\{6ax^3 - 2x^4 + 2 \langle x - a\rangle^4 - 9a^3 x\}$

12.38. $v = \frac{1}{EI}[-0{,}00556x^5 + 12{,}9 \langle x - 9\rangle^3 + 0{,}00556 \langle x - 9\rangle^5 - 256x + 2.637]$ kip · pés³

12.39. $v = \frac{1}{EI}\left[-31{,}5x^2 + \frac{8}{3}x^3 - \frac{x^4}{12} + \frac{1}{12} \langle x - 3\rangle^4 - \frac{2}{3} \langle x - 4{,}5\rangle^3\right]$ kN · m³,
$\theta_B = -0{,}705°$, $v_B = -51{,}7$ mm

12.41. $\theta_A = \frac{302 \text{ kip} \cdot \text{pé}^2}{EI}$, $v_C = -\frac{3.110 \text{ kip} \cdot \text{pé}^3}{EI}$

12.42. $\theta_C = \frac{3.937{,}5}{EI}$, $\Delta_C = \frac{50\,625}{EI}$

12.43. $\theta_A = \frac{M_0 L}{24EI}$, $\theta_C = \theta_A = \frac{M_0 L}{24EI}$, $\Delta_{máx} = \frac{\sqrt{3} M_0 L^2}{216EI}$

12.45. $\theta_B = \frac{3Pa^2}{EI}$, $\Delta_C = \frac{4Pa^3}{3EI}$

12.46. $\theta_C = \frac{5Pa^2}{2EI}$, $\Delta_B = \frac{25Pa^3}{6EI}$

12.47. $\theta_A = \frac{5M_0 a}{12EI}$, $\Delta_C = \frac{M_0 a^2}{4EI}$

12.49. $\theta_{máx} = \frac{5PL^2}{16EI}$, $\Delta_{máx} = \frac{3PL^3}{16EI}$

12.50. $a = \frac{3}{16}L$

12.51. $\Delta_C = \frac{84}{EI}$, $\theta_A = \frac{8}{EI}$, $\theta_B = \frac{16}{EI}$, $\theta_C = \frac{40}{EI}$

12.53. $\theta_A = \frac{5PL^2}{8EI}$, $\theta_B = \frac{PL^2}{2EI}$, $\Delta_A = \frac{7PL^3}{16EI}$, $\Delta_B = \frac{7PL^3}{48EI}$

12.54. $a = 0{,}152L$

12.55. $\Delta_{máx} = 8{,}16$ mm

12.57. $\Delta_{máx} = \frac{11Pa^3}{48EI}$

12.58. $\Delta_D = 4{,}98$ mm

12.59. $\theta_B = \frac{7Pa^2}{4EI}$, $\Delta_C = \frac{9Pa^3}{4EI}$

12.61. $\theta_B = \frac{M_0(b^3 + 3ab^2 - 2a^3)}{6EI(a + b)^2}$, $\Delta_C = \frac{M_0 a\, b(b - a)}{3EI(a + b)}$

12.62. $\theta_B = \frac{3Pa^2}{4EI}$, $\Delta_C = \frac{13Pa^3}{12EI}$

12.63. $t_{C/A} = \frac{40}{EI}$

12.65. $F = \frac{P}{4}$

12.66. $\Delta_D = \frac{Pa^3}{12EI}$

12.67. $\Delta_D = \frac{9Pa^3}{4EI}$, $\Delta_E = \frac{19Pa^3}{12EI}$

12.69. $\Delta_{máx} = 2{,}12$ pol

12.70. $\theta_C = \frac{a^2}{6EI}(12P + wa)$, $\Delta_C = \frac{a^3}{24EI}(64P + 7wa)$

12.71. $\theta_B = \theta_A = 0{,}175°$

12.73. $\theta_C = \frac{wa^3}{EI}$, $\Delta_B = \frac{41wa^4}{24EI}$

12.74. $\Delta_A = 0{,}933$ pol

12.75. $\Delta_C = 0{,}895$ pol

12.77. $\Delta_A = 0{,}781$ pol

12.78. W16 × 50

12.79. $F = 0{,}349$ N, $a = 0{,}800$ mm

12.81. $\Delta_A = \frac{Pa^2(3b + a)}{3EI}$

12.82. $\Delta = PL^2\left(\frac{1}{k} + \frac{L}{3EI}\right)$

12.83. $\Delta_A = PL^3\left(\frac{1}{12EI} + \frac{1}{8JG}\right)$

12.85. $\Delta_A = \frac{72}{EI}$, $\theta_A = \frac{36}{EI}$

12.86. $(\Delta_A)_v = 0{,}0737$ pol, $(\Delta_A)_h = 0{,}230$ pol

12.87. $(\Delta_A)_v = \frac{PL^3}{24}\left(\frac{2}{EI} + \frac{3}{JG}\right)$

12.89. $A_y = \frac{11}{16}P$, $M_A = \frac{3PL}{16}$

12.90. $A_x = 0, M_A = \frac{PL}{2}, A_y = \frac{3P}{2}, B_y = \frac{5P}{2}$

12.91. $B_y = \frac{3wL}{8}, A_y = \frac{5wL}{8}, M_A = \frac{wL^2}{8}$

12.93. $C_x = 0, A_y = 12{,}0$ kN, $B_y = 40{,}0$ kN, $C_y = 12{,}0$ kN

12.94. $A_x = 0, C_y = \frac{w_0L}{10}, B_y = \frac{4w_0L}{5}, A_y = \frac{w_0L}{10}$

12.95. $A_x = 0, B_y = \frac{w_0L}{10}, A_y = \frac{2w_0L}{5}, M_A = \frac{w_0L^2}{15}$

12.97. $T_{AC} = \frac{3A_2E_2wL_1^4}{8(A_2E_2L_1^3 + 3E_1I_1L_2)}$

12.98. $M_A = \frac{Pab^2}{L^2}, M_B = \frac{Pa^2b}{L^2}$

12.99. $a = 0{,}414L$

12.101. $A_y = \frac{3M_0}{2L}, C_y = \frac{3M_0}{2L}, B_y = \frac{3M_0}{L}, C_x = 0$

12.102. $M_B = \frac{wL^2}{6}, M_A = \frac{wL^2}{3}.$

12.103. $M_A = \frac{M_0}{3}, M_B = \frac{M_0}{3}$

12.105. $M_A = \frac{5wL^2}{192}, M_B = \frac{11wL^2}{192}$

12.106. $M_A = 0{,}639$ kip · pol, $M_B = 1{,}76$ kip · pol

12.107. $d = 0{,}708$ pol

12.109. $A_x = 0, B_y = 35{,}0$ kip, $A_y = 15{,}0$ kip, $M_A = 40{,}0$ kip · pés

12.110. $T_{AC} = \frac{3wA_2E_2L_1^4}{8[3E_1I_1L_2 + A_2E_2L_1^3]}$

12.111. $C_x = 0, B_y = \frac{2P}{3}, C_y = \frac{P}{3}$

12.113. $A_y = 2{,}15$ kN

12.114. $A_x = 0, B_y = \frac{5wL}{4}, C_y = \frac{3wL}{8}$

12.115. $F_m = \frac{5wkL^4}{4(6EI + kL^3)}$

12.117. $B_y = 634$ lb, $A_y = 243$ lb, $C_y = 76{,}8$ lb

12.118. $F_m = \frac{3kwL^4}{24EI + 8kL^3}$

12.119. $R = \left(\frac{8\Delta EI}{9w_0}\right)^{\frac{1}{4}}, a = L - \left(\frac{72\Delta EI}{w_0}\right)^{\frac{1}{4}}$

12.121. $v = \frac{1}{EI}[-30x^3 + 46{,}25\langle x - 12\rangle^3 - 11{,}7\langle x - 24\rangle^3 + 38.700x - 412.560]$

12.122. $\theta_B = 0{,}0100$ rad, $v_C = 0{,}200$ pol

12.123. $\theta_B = 0{,}0100$ rad, $\Delta_C = 0{,}200$ pol

12.125. $B_y = 138$ N, $A_y = 81{,}3$ N, $C_y = 18{,}8$ N

12.126. $\theta_B = \frac{Pa^2}{4EI}, \Delta_C = \frac{Pa^3}{4EI}$

12.127. $a = \frac{3L}{16}$

12.129. $M_B = \frac{w_0L^2}{30}, B_y = \frac{3w_0L}{20}, M_A = \frac{w_0L^2}{20}, A_y = \frac{7w_0L}{20}$

Capítulo 13

13.1. $P_{cr} = \frac{5\,k\,L}{4}$

13.2. $d = \frac{5}{8}$ pol

13.3. $P_{cr} = 35{,}1$ kip

13.5. $d = \frac{9}{16}$ pol

13.6. $P_{cr} = 22{,}7$ kN

13.7. $P_{cr} = 46{,}4$ kN

13.9. $P_{cr} = 70{,}4$ kip

13.10. $P_{cr} = 1{,}30$ MN

13.11. $P_{cr} = 325$ kN

13.13. $d = 1{,}81$ pol

13.14. $P_{cr} = 2{,}92$ kip

13.15. $P_{cr} = 5{,}97$ kip

13.17. F.S. = 2,19

13.18. $P = 475$ kip

13.19. $P = 83{,}6$ lb

13.21. $P_{cr} = 28{,}4$ kip

13.22. $P_{cr} = 58{,}0$ kip

13.23. $P = 4{,}23$ kip

13.25. $P = 5{,}79$ kip (Controles)

13.26. $d = 1\frac{3}{4}$ pol

13.27. $P = 4{,}57$ kip

13.29. $P = 29{,}9$ kN

13.30. $P = 207$ lb (Controles)

13.31. $P = 2{,}42$ kip

13.33. Não, AB romperá.

13.34. F.S. = 2,12

13.35. $P = 63{,}6$ kip

13.37. $W = 5{,}24$ kN, $d = 1{,}64$ m

13.38. F.S. = 1,24

13.39. $w = 18{,}3$ lb/pés

13.41. $P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{4 L^2}$

13.45. $v_{máx} = \frac{wEI}{P^2}\left[\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right) - \frac{PL^2}{8EI} - 1\right]$

$M_{máx} = \frac{wEI}{P}\left[\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right) - 1\right]$

13.46. $v_{máx} = 0{,}387$ pol

13.47. $\sigma_{máx} = 4{,}57$ ksi

13.49. $\sigma_{máx} = 6{,}24$ ksi

13.50. $P' = 97{,}4$ kip

13.51. $P = 139$ kip, a coluna suportaria $2{,}29\left(\frac{P'}{P}\right)$ vezes mais carga se o carregamento P atuasse concentricamente.

13.53. $P = 6{,}75$ kN

13.54. $P = 20{,}1$ kN

13.55. $L = 1{,}71$ m (*Controles*!)

13.57. F.S. = 1,12

13.58. Sim.

13.59. $P_{máx} = 343$ kip (*Controles*!)

13.61. $P = 113$ kip (*Controles*)

13.62. $P' = 390$ kip, $P = 139$ kip (*Controles*)

13.63. $P_{adm} = 7{,}89$ kN (*Controles*)

13.65. $\sigma_{máx} = 178$ MPa, $v_{máx} = 10{,}8$ mm

13.66. $E_t = 14{,}6(10^3)$ ksi

13.67. $P_{cr} = 157$ kN
13.69. $P_{cr} = 39{,}2$ kN
13.71. $L = 18{,}0$ pés
13.73. Adequado.
13.74. Não adequado.
13.75. W8 × 48
13.77. $L = 6{,}86$ pés
13.78. $L = 33{,}9$ pés
13.79. Adequado
13.81. W8 × 24
13.82. $L = 18{,}9$ pés
13.83. $L = 10{,}9$ pés
13.85. $L = 1{,}92$ pé
13.86. $L = 3{,}84$ pés
13.87. $L = 6{,}07$ pés
13.89. $d = 1{,}42$ pol
13.90. $d = 1{,}00$ pol
13.91. $P_{adm} = 129$ kip
13.93. $P_{adm} = 109$ kip
13.94. $d = 1{,}30$ pol
13.95. $a = 5\frac{1}{2}$ pol
13.97. $P = 38{,}4$ kip
13.98. $P = 68{,}3$ kip
13.99. $L = 5{,}03$ pés
13.101. $P = 29{,}6$ kip
13.102. $P = 1{,}48$ kip
13.103. $P = 0{,}967$ kip
13.105. Não adequado.
13.106. Não adequado.
13.107. $P = 8{,}83$ kip
13.109. $P = 15{,}0$ kip
13.110. $P = 33{,}1$ kip
13.111. $P = 57{,}7$ kip
13.113. Sim.
13.114. Não.
13.115. $P = 703$ lb
13.117. $P = 341$ lb
13.118. $P_{adm} = 57{,}6$ kip
13.119. $a = 103$ mm
13.121. $M = 44{,}2$ kN · m
13.122. $M = 60{,}5$ kN · m
13.123. $w = 1{,}17$ kN/m
13.125. Adequado.
13.126. Adequado.
13.127. $t = 5{,}92$ mm

Capítulo 14

14.1. $\dfrac{U_i}{V} = \dfrac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu\sigma_x\sigma_y) + \dfrac{\tau_{xy}^2}{2G}$

14.3. $\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y} = \nu$

14.5. **a)** $U_i = 4{,}31$ kip · pol, **b)** $U_i = 4{,}31$ kip · pol

14.6. $U_i = \dfrac{M_0^2 L}{24EI}$

14.7. $U_i = \dfrac{M_0 L}{2EI}$

14.9. **a)** $U_i = \dfrac{w^2L^5}{240EI}$, **b)** $U_i = \dfrac{w^2L^5}{240EI}$

14.10. $U_i = \dfrac{w_0^2 L^5}{945EI}$

14.11. $U_i = 496$ J

14.13. $(U_i)_a = 0{,}477\,(10^{-3})$ J, $(U_i)_b = 0{,}0171$ J

14.14. $(U_i)_{sp} = 1{,}00$ J, $(U_i)_b = 0{,}400$ J

14.15. $U_i = 45{,}5$ pés · lb

14.17. $U_i = \dfrac{w_0^2 L^5}{504EI}$

14.18. $a = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}r$

14.21. $\Delta_D = \dfrac{3{,}50PL}{AE}$

14.22. $(\Delta_D)_v = \dfrac{3{,}50PL}{AE}$

14.23. $\Delta_B = \dfrac{PL}{15}\left(\dfrac{15\cos^2\theta}{AE} + \dfrac{5L^2\text{sen}^2\theta}{EI} + \dfrac{18\,\text{sen}^2\theta}{GA}\right)$

14.25. $\Delta_B = 1{,}82$ pol

14.26. $\theta_C = 1{,}93°$

14.27. $\Delta = \dfrac{3PL}{10bhG}$

14.29. $\theta_A = \dfrac{4M_0 a}{3EI}$

14.30. $\Delta_A = \dfrac{3\pi Pr^3}{2EI}$

14.31. $\Delta = \dfrac{64nPR^3}{d^4G}$

14.33. $U_i = 267$ pés · lb

14.34. $d = 5{,}35$ pol

14.35. $\sigma_{máx} = 359$ MPa

14.37. $v = 0{,}499$ m/s

14.38. $L = 850$ mm

14.39. Sim, $\sigma_{máx}$ excedeu 175 MPa.

14.41. $\sigma_{máx} = 3{,}06$ ksi

14.42. $\sigma_{máx} = 414$ MPa

14.43. $h = 95{,}6$ mm

14.45. $n = 115$, $\sigma_{máx} = 17{,}7$ ksi

14.46. $h = 11{,}6$ pés

14.47. $\sigma_{máx} = 4{,}55$ ksi $< \sigma_e$, $\Delta_C = 0{,}799$ pol

14.49. $\sigma_{máx} = 5{,}88$ ksi

14.50. $h = 3{,}73$ pol

14.51. $\sigma_{máx} = 2{,}34$ ksi, $(\Delta_D)_{máx} = 0{,}370$ pol

14.53. $h = 4{,}20$ pés

14.54. $\sigma_{máx} = 35{,}2$ ksi

14.55. $(\Delta_A)_{máx} = 15{,}4$ pol

14.57. $\Delta_{máx} = 5{,}45$ pol, $\sigma_{máx} = 33{,}1$ ksi

14.58. $n = 17{,}8$

14.59. $\Delta_{B_v} = 11{,}3$ mm

14.61. $(\Delta_B)_h = 0{,}699(10^{-3})$ pol

14.62. $(\Delta_B)_v = 0{,}0931(10^{-3})$ pol

14.63. $\Delta_{B_v} = 0{,}0132$ pol

14.65. $(\Delta_C)_h = 0{,}234$ mm

14.66. $(\Delta_D)_v = 1{,}16$ mm

14.67. $(\Delta_A)_v = 0{,}0199$ pol

14.69. $\Delta_{C_v} = 6{,}23$ mm

14.70. $\Delta_{H_v} = 3{,}79$ mm

14.71. $(\Delta_D)_h = 4{,}12$ mm

14.73. $(\Delta_B)_v = 0{,}0124$ pol

14.74. $(\Delta_E)_v = 0{,}00966$ pol

14.75. $(\Delta_C)_v = 0{,}163$ pol

14.77. $\Delta_C = \frac{23Pa^3}{24EI}$

14.78. $\Delta_C = \frac{5Pa^3}{6EI}$

14.79. $\theta_C = \frac{Pa^2}{2EI}$

14.81. $\theta_A = 0{,}0126$ rad

14.82. $\Delta_C = 4{,}13$ mm

14.83. $\theta_C = 0{,}0185$ rad

14.85. $\theta_C = 0{,}0174$ rad

14.86. $\theta_B = 0{,}0216$ rad

14.87. $\Delta_D = 1{,}80$ mm

14.89. $\theta_B = 1{,}20(10^{-3})$ rad

14.90. $\Delta_B = \frac{65wa^4}{48EI}$

14.91. $\Delta_C = 0{,}122$ pol

14.93. $\Delta_C = 40{,}9$ mm

14.94. $\theta_A = 0{,}00298$ rad

14.95. $\theta_B = 0{,}00595$ rad

14.97. $\theta_C = 5{,}89(10^{-3})$ rad

14.98. $\Delta_A = 27{,}4$ m, $\theta_A = 5{,}75(10^{-3})$ rad

14.99. $\Delta_C = \frac{5M_0a^2}{6EI}$

14.101. $\Delta_B = 43{,}5$ mm

14.102. $\theta_A = 0{,}00529$ rad

14.103. $\Delta_C = 17{,}9$ mm

14.105. $\Delta_{C_h} = \frac{5wL^4}{8EI}$

14.106. $\Delta_{B_v} = \frac{wL^4}{4EI}$

14.107. $\Delta_{C_h} = \frac{640.000 \text{ lb} \cdot \text{pés}^3}{EI}$, $\Delta_{C_v} = \frac{1.228.800 \text{ lb} \cdot \text{pés}^3}{EI}$

14.109. $(\Delta_C)_v = \frac{5wL^4}{8EI}$

14.110. $(\Delta_B)_h = \frac{wL^4}{4EI}$

14.111. $\Delta = \frac{\pi Pr^3}{2EI}$

14.113. $(\Delta_B)_v = 11{,}3$ mm

14.114. $(\Delta_B)_h = 0{,}699(10^{-3})$ pol

14.115. $0{,}0931(10^{-3})$ pol

14.117. $(\Delta_B)_v = 0{,}0132$ pol

14.118. $(\Delta_C)_h = 0{,}234$ mm

14.119. $(\Delta_D)_v = 1{,}16$ mm

14.121. $(\Delta_A)_v = 0{,}0199$ pol

14.122. $(\Delta_A)_v = 6{,}23$ mm

14.123. $(\Delta_B)_v = 3{,}79$ mm

14.125. $(\Delta_D)_h = 4{,}12$ mm

14.126. $(\Delta_B)_v = 0{,}0124$ pol

14.127. $(\Delta_E)_v = 0{,}00966$ pol

14.129. $(\Delta_C)_v = 0{,}163$ pol

14.130. $\Delta_C = \frac{23PL^3}{24EI}$

14.131. $\Delta_C = \frac{5Pa^3}{6EI}$

14.133. $\theta_C = 0{,}0185$ rad

14.134. $\theta_E = 0{,}00120$ rad

14.135. $\theta_A = 0{,}00298$ rad

14.137. $\theta_A = 0{,}00529$ rad

14.138. $\Delta_A = 27{,}4$ m, $\theta_A = 5{,}75(10^{-3})$ rad

14.139. $\Delta_C = \frac{5M_0a^2}{6EI}$

14.141. $\Delta_C = 17{,}9$ mm

14.142. $\Delta_B = \frac{wL^4}{4EI}$

14.143. $(\Delta_C)_h = \frac{640(10^3) \text{ lb} \cdot \text{pés}^3}{EI}$, $(\Delta_C)_v = \frac{1.228.800 \text{ lb} \cdot \text{pé}^3}{EI}$

14.145. $(\Delta_C)_v = \frac{5wL^4}{8EI}$

14.146. $\Delta_A = \frac{\pi Pr^3}{2EI}$

14.147. $\Delta_B = \frac{M_0L^2}{2EI}$

14.149. $\Delta_A = \frac{5M_0a^2}{6EI}$

14.150. $\Delta_A = \frac{5M_0a^2}{6EI}$

14.151. $\theta_C = 0{,}0337$ rad

14.153. $\Delta_{E_v} = 2{,}95$ mm

14.154. $\Delta_{E_v} = 2{,}95$ mm

14.155. $U_i = \frac{P^2r^3}{8GJ}(3\pi - 8)$

14.157. $\sigma_{\text{máx}} = 6{,}20$ ksi

Apêndice A

A.1. 2,67 pol

A.2. $I_x = 415 \text{ pol}^4$, $I_y = 411 \text{ pol}^4$

A.3. 2,19 pol, 83,7 pol^4

A.5. $\bar{y} = 4{,}14$ pol, $\bar{I}_{x'} = 35{,}5 \text{ pol}^4$, $\bar{I}_{y'} = 18{,}4 \text{ pol}^4$

A.6. 34,0 mm, $\bar{I}_{x'} = 2{,}31(10^6) \text{ mm}^4$, $\bar{I}_{y'} = 3{,}09(10^6) \text{ mm}^4$

A.7. $\bar{y} = 1{,}00$ pol, $\bar{x} = 1{,}50$ pol, $\bar{I}_{x'} = 4{,}00 \text{ pol}^4$, $\bar{I}_{y'} = 8{,}50 \text{ pol}^4$

A.9. $\bar{y} = 36{,}4$ mm, $\bar{x} = 111$ mm, $\bar{I}_{x'} = 19{,}5(10^6) \text{ mm}^4$, $\bar{I}_{y'} = 115(10^6) \text{ mm}^4$

A.10. $\bar{y} = 36{,}4$ mm, $\bar{x} = 111$ mm, $\bar{I}_{x'y'} = -26{,}1(10^6) \text{ mm}^4$

A.11. $\bar{y} = 19{,}8$ mm, $\bar{x} = 100$ mm, $\bar{I}_{x'} = 1{,}58(10^6) \text{ mm}^4$, $\bar{I}_{y'} = 18{,}4(10^6) \text{ mm}^4$

A.13. $\bar{I}_x = 248 \text{ pol}^4$, $\bar{I}_y = 25{,}7 \text{ pol}^4$

A.14. $\bar{I}_{xy} = 56{,}25 \text{ pol}^4$

A.15. $\bar{y} = 4{,}33$ pol, $\bar{x} = 5{,}67$ pol, $\bar{I}_{x'} = 492 \text{ pol}^4$, $\bar{I}_{y'} = 172 \text{ pol}^4$

A.17. $\bar{I}_{xy} = 3{,}23 \text{ pol}^4$

A.18. $I_{x'} = 7{,}13(10^6) \text{ mm}^4$, $I_{y'} = 3{,}53(10^6) \text{ mm}^4$, $I_{x'y'} = 3{,}12(10^6) \text{ mm}^4$

A.19. $I_{x'} = 65{,}3 \text{ pol}^4$, $I_{y'} = 25{,}3 \text{ pol}^4$, $I_{x'y'} = -34{,}6 \text{ pol}^4$

A.21. $\bar{y} = 1{,}00$ pol, $\bar{x} = 1{,}50$ pol, $I_{\text{máx}} = 10{,}0 \text{ pol}^4$, $I_{\text{mín}} = 2{,}50 \text{ pol}^4$, $\theta_{p1} = 63{,}4°$, $\theta_{p2} = -26{,}6°$

A.22. $I_{x'} = 16{,}1(10^6) \text{ mm}^4$, $I_{y'} = 16{,}1(10^6) \text{ mm}^4$, $I_{x'y'} = 0$

A.23. $I_{\text{máx}} = 308(10^3) \text{ mm}^4$, $I_{\text{mín}} = 85{,}3(10^3) \text{ mm}^4$, $\theta_{p_1} = 45{,}0°$, $\theta_{p_2} = -45{,}0°$

A.25. $I_{\text{máx}} = 5{,}09 \text{ pol}^4$, $I_{\text{mín}} = 0{,}428 \text{ pol}^4$, $\theta_{p_1} = 22{,}4°$, $\theta_{p_2} = -67{,}6°$

A.26. $I_{\text{máx}} = 5{,}09 \text{ pol}^4$, $I_{\text{mín}} = 0{,}428 \text{ pol}^4$, $\theta_{p_1} = 22{,}4°$

ÍNDICE

A

Aço, 17-18, 67
Acoplamentos de cisalhamento simples, 24
Alongamento longitudinal, 80-81
Análise de pequenas deformações, 54
Ângulo de torção, 153-166
  convenção de sinais, 155-156
  torque constante e área da seção transversal, 154-155
Apoios de pino, coluna ideal com, 512-515
Área:
  centróide de uma, 611-613
    áreas compostas, 612
  da seção transversal, 17
    de um acoplamento submetido a cisalhamento, 37
    de um elemento de tração, 37
  momento(s) de inércia de uma, 613-616
    áreas compostas, 614
    círculo de Mohr para, 620-622
    em torno de eixos inclinados, 618-620
    teorema do eixo paralelo, 613-614
  produto de inércia de uma, 616-618
    teorema do eixo paralelo, 617
  propriedades geométricas de uma, 611-624
Arqueamento, 172

B

Barra prismática, 17, 19
Bernoulli, John, 582
Borracha natural, 67, 68

C

Carga axial, 90-136
  concentrações de tensão, 121-124
  deformação axial inelástica, 125-129
  deformação elástica de um elemento com carregamento axial, 92-102
  energia de deformação elástica para, 559
  membro com carga axial estaticamente indeterminado, 103-114
  princípio da superposição, 102-103
  princípio de Saint-Venant, 90-92
  tensão residual, 129-136
  tensão térmica, 114-121
Carga crítica, 510-512, 516
  ponto de bifurcação, 512
Carga de impacto, 574-582
Carga linear distribuída, 2
Carga plástica, 126-127
Cargas combinadas, 320-341
  estado de tensão provocado por, 325-340
  vasos de pressão com paredes finas, 320-324
    vasos cilíndricos, 320-321
    vasos esféricos, 321-322
Cargas distribuídas, 466
Cargas externas, 1, 6
Carregamento concêntrico:
  e colunas de aço, 538-539
  e colunas de alumínio, 539-540
  e colunas de madeira, 540
  projeto de colunas para, 538-546
Carregamento excêntrico:
  projeto de colunas para, 546-552
    fórmula da interação, 547-548
    uso das fórmulas disponíveis para colunas, 546
Carregamento triangular e funções de Macaulay, 466
Carregamento uniforme e funções de Macaulay, 466
Castigliano, Alberto, 600
Centro de cisalhamento, 309-317
Centro de curvatura, 451
Centro de flexão, 309-317
Centróide, 5, 6
  de uma área, 611-613
Chapas de assento, 426
Círculo de Mohr, 360-367, 373-376, 397-398, 620
  estado plano de deformações, 390-396
  estado plano de tensões, 360-367
  para momentos de inércia, 620-622
Cisalhamento direto, 24
Cisalhamento duplo, 25
Cisalhamento em elementos retos, 283-284
Cisalhamento puro, 26, 82
Cisalhamento simples, 24
Cisalhamento transversal, 283-319
  centro de cisalhamento, 309-317
  cisalhamento em elementos retos, 283-284
  energia de deformação elástica para, 563-565
  fluxo de cisalhamento em estruturas compostas por vários elementos, 298-305
  fórmula do cisalhamento, 284-286
    limitações no uso da, 288-289
  tensões de cisalhamento em vigas, 286-289
    seção transversal retangular, 286-288
    viga de abas largas, 288
Coeficiente de Poisson, 80-82, 86, 224
Coeficiente linear de expansão térmica, 115
Coluna(s):
  axialmente carregadas, 538
  com vários tipos de apoio, 517-526
  curtas, 532
  de aço e carregamento concêntrico, 538-539
  de alumínio e carregamento concêntrico, 539-540
  de madeira e carregamento concêntrico, 540
  esbeltas longas, falhas em, 532
  esbeltas, falhas em, 532
  flambagem de, 510-554
  ideal, 512-515
  intermediárias, 532
    falhas em, 532
  postes, 532
  projeto de:
    para carregamento concêntrico, 538-546
    para carregamento excêntrico, 546-552
Componentes cartesianos da deformação, 53-54
Comportamento da tensão-deformação:
  de materiais dúcteis, 67-68
  de materiais frágeis, 68-69
Comportamento do material, 1
Comportamento elástico, 261-262
Comportamento elástico não-linear, 67
Comportamento linear-elástico, 71
Comportamento perfeitamente plástico, 65, 187, 189
Comprimento de referência, 62
Comprimento efetivo, 518
Concentrações de tensão, 121-124, 183-185, 261-267, 288
  fator de concentração de tensões de torção, 183
Condição cinemática, 104
Condições de compatibilidade, 104, 490, 499, 583
Condições de continuidade, 454-455
Condições de contorno, 454-455
Condições de equilíbrio, 583
Conjugado (momento binário), 2-3, 6, 566
  trabalho de um, 556
  virtual, 584
Conservação da energia, 569-574, 583
Contração lateral, 80-81
Critério de falha de Mohr, 417
Curvas de concordância, 183
Curvatura, raio de, 451

D

Deflexão de vigas e eixos, 449-509
  funções de descontinuidade, 465-473
    funções de Macaulay, 466
    funções de singularidade, 466-468
  inclinação e deslocamento pelo método da integração direta, 452-465
    condições de contorno e continuidade, 454-455
    convenção de sinal e coordenadas, 454
  inclinação e deslocamento pelo método dos momentos de áreas, 473-483
  linha elástica, 449-452

relação momento-curvatura, 450-452
método da superposição, 484-489
vigas e eixos estaticamente indetermina dos, 490
método da integração direta, 490-493
método da superposição de efeitos, 499-508
método dos momentos de áreas, 494-499
Deformação, 1, 51-61
análise de pequenas deformações, 54
componentes cartesianos da deformação, 53-54
estado de, 53-54
unidades, 52
Deformação axial inelástica, 125-129
Deformação de engenharia, 63-64
Deformação de recuperação máxima, 276
Deformação elástica, 126
carga constante e área da seção transversal, 93
convenção de sinais, 94
de um elemento com carregamento axial, 92-102
Deformação localizada, 90
Deformação nominal, 63-64
Deformação normal, 52, 53, 54, 254, 385-386
Deformação normal média, 52
Deformação permanente, 65, 71
Deformação por cisalhamento, 52-53, 54, 138, 385-386, 566
variação linear na, 139
Deformação por cisalhamento máxima absoluta, 396-399
Deformação por cisalhamento máxima no plano, 387
Deformação real, 65
Deformações principais, 386-387, 396-397
Densidade da energia de deformação, 72, 415
Deslizamento, 413-414
Deslocamento, 449, 450, 555, 566, 633-634
estático, 576
pelo método da integração direta, 452-465
pelo método dos momentos de áreas, 473-483
relativo, 92
Diagrama de força axial, 19
Diagrama de força normal, 19
Diagrama de torque, 440
Diagrama *M/EI*, 475, 494
Diagrama *S-N*, 86
Diagrama tensão-ciclo, 86
Diagrama tensão-deformação, 63-66
convencional, 63-65
comportamento elástico, 64
endurecimento por deformação, 65
escoamento, 65
estricção, 65
de cisalhamento, 82-84, 86
real, 65-66
Diagrama de corpo livre e método das seções, 6
Diagramas de força cortante (cisalhamento) e momento fletor, 199-206
método gráfico para construir os, 206-221
regiões de carga distribuída, 207-208
regiões de força concentrada e momento fletor, 208-209
Diagramas de momento fletor, 440
Dilatação, 405-406
Distorção, 283
Distorções localizadas, 17
Distribuição da deformação normal linear, 268, 271
Distribuição de carga interna, 6, 15
Distribuição de tensão constante, 320
Distribuição de tensão uniforme, 320
Distribuição parabólica da tensão de cisalhamento, 287, 369

E

Eixos de inércia principais, 239, 240, 441
Eixos de simetria, 309
Eixos inclinados, momentos de inércia de uma área em torno de, 618-620
Eixos principais, 619
Eixos sólidos não-circulares, 172-174
Elástica, 452
Elástico perfeitamente plástico, material, 125
Elastoplástico, material, 125
Elemento de tração, área da seção transversal de um, 37
Elementos estaticamente indeterminados carregados com torque, 166-171
Endurecimento por deformação, 65, 71
Energia cinética, 575
Energia de deformação, 72-73, 418, 556-558, 566
elástica, 558-569
para carga axial, 559-560
para cisalhamento transversal, 563-565
para momento de torção, 565-566
para momento fletor, 560-563
módulo de resiliência, 72, 73
módulo de tenacidade, 72, 73
tensão de cisalhamento, 557
tensão multiaxial, 558
tensão normal, 556-557
Energia de distorção, 415
Engenharia, revisão dos fundamentos de, 635-650
Entortadura, 172
Equação de Engesser, 533
Equação do trabalho virtual, 584-585, 587
Equações de equilíbrio, 3-4
e método das seções, 6
Equilíbrio:
de forças, 3
estável, 511
instável, 511
neutro, 512, 514, 516
tensão de cisalhamento média, 25-26
tensão normal média, 18-19
Equilíbrio da força, 122
Equilíbrio de momentos, 3
Equilíbrio de um corpo deformável, 2-15
carga interna resultante, 4-5
cargas coplanares, 6
equações de equilíbrio, 3-4
forças externas, 2
força de corpo, 2
forças de superfície, 2
reações de apoio, 2-3
Esbeltez, índice de, 515, 516
Escoamento, 65, 413, 414
Estabilidade, 1
Estado de tensão, 16-17
provocado por cargas combinadas, 325-340
Estado plano de deformações, 383-384, 397-398
círculo de Mohr, 390-396
Estado plano de tensões, 342-346, 360-367, 375-376, 441
círculo de Mohr, 360-367
definição, 342
estado geral, 342-343
Estaticamente indeterminado, membro com carga axial, 103-114
Estaticamente indeterminado, uso do termo, 104
Estaticamente indeterminados, vigas e eixos, 490
método da integração direta, 490-493
método da superposição de efeitos, 499-508
método dos momentos de áreas, 494-499
diagramas de momento construídos pelo método da superposição de efeitos, 494-496
Estricção, 65
Expansão térmica, coeficiente linear de, 115
Extensômetro, 63
Extensômetro de resistência elétrica, 63, 399-400

F

Fadiga
falha de materiais devido à, 85-86
limite de, 86
Falha:
teorias da, 413-423
materiais dúcteis, 413-416
materiais frágeis, 416-417
Fator de comprimento efetivo, 518
Fator de concentração de tensão, 122
Fator de concentração de tensões de torção, 183
Fator de impacto, 576-577
Fator de segurança (F.S.), 36, 39
Fator de transformação, 248
Fator forma, 270-271
Ferro fundido, 68, 69
Flambagem de colunas, 510-554
carga crítica, 510-512
ponto de bifurcação, 512
carregamento concêntrico, projeto de colunas para, 538-546
carregamento excêntrico, projeto de colunas para, 546-552
coluna ideal com apoios de pino, 512-515
colunas com vários tipos de apoio, 517-526
comprimento efetivo, 518
flambagem inelástica (plástica), 532-537
fórmula da secante, 526-532
índice de esbeltez, 515, 516
menor momento de inércia, 514
raio de giração, 515
Flambagem inelástica (plástica), 532-537
Flexão, 199-282
assimétrica, 237-246
momento aplicado ao longo do eixo principal, 238-239

momento aplicado arbitrariamente, 239-240
orientação do eixo neutro, 240
concentrações de tensão, 261-267
de vigas, 199-200
convenção de sinal, 200
deformação por flexão de um membro reto, 221-224
diagramas de cisalhamento e momento fletor, 199-206
método gráfico para construir os, 206-221
fórmula da flexão, 224-237, 257
inelástica, 268-275
distribuição da deformação normal linear, 268
fator forma, 270-271
força resultante nula, 268
localização do eixo neutro, 268, 271
momento elástico máximo, 268-269
momento plástico, 269-271
momento resistente, 271
momento resultante, 268
tensão residual, 275-280
vigas compostas, 247-251
fator de transformação, 248
vigas curvas, 253-260
fórmula da viga curva, 256-257
tensão circunferencial, 256-257
tensão radial, 256-257
vigas de concreto armado, 251-253
Fluência, falha de materiais devido à, 85, 86
Fluxo de cisalhamento, 174-175
definição, 298
em estruturas compostas por vários elementos, 298-305
Força(s), 449, 566
axial interna, 94, 559
concentrada, 2, 466-467
coplanares, 3, 5
de cisalhamento, 5, 37
de superfície, 2, 6
do corpo, 2
internas (cargas), 1, 4-5, 6
determinação das, usando o método das seções, 6
normal, 5
Fórmula da flexão, 224-237, 257
Fórmula da secante, 526-532
Fórmula de Euler, 526
Fórmula do cisalhamento, 284-286
limitações no uso da, 288-289
Funções de descontinuidade, 465-473
funções de Macaulay, 466
funções de singularidade, 466-468
Funções de Macaulay, 466
Funções de singularidade, 466-468
Fundamentos de engenharia, revisão dos, 635-650

G

Galileu, 1
Giração, raio de, 515
Grandeza adimensional, 52
Grau de indeterminação, 490

H

Histerese mecânica, 71
Hooke, Robert, 70
Huber, M., 415

I

Impacto, definição, 574, 577
Inclinação, 449, 633-634
pelo método da integração direta, 452-465
pelo método dos momentos de áreas, 473-483
Índice de esbeltez, 515, 516
Instabilidade plástica e colunas intermediárias, 532
Integração direta, inclinação e deslocamento pelo método da, 452-465
Intensidade da força interna, 19
Intensidade média da força, 556

L

Latão, 67
Lei de Hooke, 70-71, 90, 92, 94, 121, 143, 154, 557, 558
endurecimento por deformação, 71
Limite de elasticidade, 64
Limite de escoamento (ponto de escoamento), 65
inferior, 65
superior, 65
Limite de fadiga, 86
Limite de fluência, 85
Limite de proporcionalidade, 64
Limite de resistência ao cisalhamento, 82
Linha elástica, 449-452
relação momento-curvatura, 450-452
Linhas de Lüder, 414
Localização do eixo neutro, 268, 271

M

Madeira, 68
Materiais dúcteis, 67-68, 184
comportamento da tensão-deformação de, 67-68
porcentagem de alongamento, 67
porcentagem de redução de área, 67
teorias da falha, 413-416
teoria da energia de distorção máxima, 415-416
teoria da tensão de cisalhamento máxima, 413-415, 418
Materiais frágeis, 68-69, 184
comportamento da tensão-deformação de, 68-69
teorias da falha, 416-417
critério de falha de Mohr, 417
teoria da tensão normal máxima, 416-417
Materiais, resistência dos, 1
Material anisotrópico, 18
Material coeso, 15
Material contínuo, 15
Material homogêneo, 17, 82
Material isotrópico, 17, 82
Material linearmente elástico, 64
Mega, 17
Menor momento de inércia, 514, 516
Método da força, 499
Método das forças virtuais, 584-585
aplicado a treliças, 586-587
aplicado a vigas, 592-599
Método das seções, 4
determinação de forças (cargas) internas usando o, 6
Método de deformação residual, 67
Método de deslocamentos virtuais, 584-585
Método dos momentos de áreas, 449, 473-483
vigas e eixos estaticamente indeterminados, 494-499
Métodos de energia, 555-610
carga de impacto, 574-582
conservação de energia, 569-574
energia de deformação, 556-558
elástica, 558-569
tensão de cisalhamento, 557
tensão multiaxial, 558
tensão normal, 556-557
método das forças virtuais, 584-585
aplicado a treliças, 586-587
aplicado a vigas, 592-599
teorema de Castigliano, 555, 600-601
aplicado a treliças, 601-604
aplicado a vigas, 605-609
trabalho externo, 555-558
trabalho virtual, 582-585
externo, 584
interno, 584, 585
trabalho:
de um momento (conjugado), 556
de uma força, 555-556
Módulo da tangente, 533-534
Módulo de compressibilidade, 405-406
Módulo de elasticidade, 70
Módulo de elasticidade ao cisalhamento, 82
Módulo de resiliência, 72, 73
Módulo de resistência, 426
Módulo de rigidez, 82
Módulo de ruptura, 276
Módulo de tenacidade, 72, 73
Módulo de Young, 70
Mohr, Otto, 417
Molibdênio, 67
Momento, 449
Momento (conjugado) virtual, 584
Momento de torção, 5
energia de deformação elástica para, 565-566
Momento elástico máximo, 268-269
Momento fletor, 5
energia de deformação elástica para, 560-563
Momento plástico, 269-271
Momento resistente, 271
Momento(s) de inércia, 225, 613-616
círculo de Mohr para, 620-622
de uma área em torno de eixos inclinados, 618-620
menor, 514-515
polar, 140
principais, 619-620

N

Navier, 1

P

Paredes finas, definição de, 320
Pascal, 17

Perfis estruturais, propriedades geométricas de, 625-632
Peso do corpo, 2
Poisson, 1
Poisson, S. D., 80
Polímero, 67
Ponto de bifurcação, 512
Ponto de inflexão, 449-450
Porcentagem de redução de área, materiais dúcteis, 67
Postes, 532
Potência, definição, 147
Pressão manométrica, 320
Princípio da superposição, 102-103
Porcentagem de alongamento, materiais dúcteis, 67
Produto de inércia, 616-618
  teorema do eixo paralelo, 617
Projeto de eixos, 440-446
  diagrama de torque, 440
Projeto de viga:
  base para o, 425-426
  chapas de assento, 426
  e deflexão, 426
  prismática, 426-428
    perfis de aço, 427
    seções compostas, 428
    seções de madeira, 427-428
  vigas totalmente solicitadas, 436-440
Propriedades geométricas:
  de perfis estruturais, 625-632
  de uma área, 611-624
Propriedades mecânicas dos materiais, 62-89
  coeficiente de Poisson, 80-82, 86
  comportamento da tensão-deformação:
    de materiais dúcteis, 67-68
    de materiais frágeis, 68-69
  diagrama tensão-deformação de cisalhamento, 82-84, 86
  diagrama tensão-deformação, 63-66
  energia de deformação, 72-73, 418
  extensômetro por resistência elétrica, 63
  extensômetro, 63
  fadiga, falha de materiais devido à, 85-86
  fluência, falha de materiais devido à, 85, 86
  lei de Hooke, 70-71
  teste de tração e compressão, 62-63

Q

Quilo, 17
Quilolibra, 17

R

Raio de curvatura, 451
Raio de giração, 515
Rankine, W., 417
Rasgos de chaveta, 183
Razão de excentricidade, 529
Reações do apoio, 2-3, 6
Reações, 2, 3
Recuperação elástica, 276
Redundantes, 490
Regra da mão direita, 5
Regra do terço médio, 333
Relação carga-deslocamento, 104
Relações material-propriedade, 403-413
  dilatação e módulo de compressibilidade, 405-406
  lei de Hooke generalizada, 403-405
Resistência ao escoamento, 67
Resistência dos materiais, 1, 6
  evolução histórica, 1
Revisão dos fundamentos de engenharia, 635-650
Rigidez à flexão, 451
Rosetas, 399-403
Rotação, 449
Ruptura
  módulo de, 276
  tensão de, 65

S

Saint-Venant, Barré de, 1, 91
Saint-Venant, princípio de, 90-92, 440
Seção transversal, 5
Seções compostas, 428
Seções transversais de vigas, 222
Sentido axial, 320
Sentido circunferencial, 320
Sentido longitudinal, 320
Sentido tangencial, 320
Shanley, F. R., 534
Sistema de unidades Pés-Libras-Segundo, 17, 52
Sistema de unidades usual norte-americano, 17
Superposição, 102-103, 484-489
  diagramas de momento construídos pelo método da, de efeitos, 494-496

T

Tensão(ões) de cisalhamento, 16, 19, 557
  em vigas, 286-289
    seção transversal retangular, 286-288
    viga de abas largas, 288
  máxima absoluta, 373-381
    estado plano de tensões, 375-376
  máxima no plano, 351
  média, 23-35, 175-176
    acoplamentos de cisalhamento simples, 24
    cisalhamento direto, 24
    cisalhamento duplo, 25
    cisalhamento puro, 25-26
    cisalhamento simples, 24
    definição, 23-24
    equilíbrio, 25-26
  variação linear na, 139
Tensão(ões), 1-50
  admissível, 35-36
  biaxial, 322
  circunferencial, 256-257
  conceito de, 15-17
  crítica, 533
  de apoio, 38
  de compressão, 16
    máxima, 369
  de engenharia, 63
  de ruptura, 65
  de tração máxima, 369, 416
  definição, 15-16
  elástica, 529
  estado geral da, 16-17
  estado plano de, 342-346, 360-367
  limite de resistência ao cisalhamento, 82
  média *versus* tensão elástica, 515
  multiaxial, 558
    viga com carregamentos múltiplos, determinação da equação da linha elástica de, 465
  nominal, 63
  normal média:
    distribuição da, 18
    em uma barra com carga axial, 17-23
    equilíbrio, 18-19
    máxima, 19
  normal, 16, 19, 349, 556-557, 560
  principais, 349-351, 413-415
    definição, 351
    no plano, 349-351
  projeto de acoplamentos simples, 36-39
    área da seção transversal de um acoplamento submetido a cisalhamento, 37
    área da seção transversal de um elemento de tração, 37
    área requerida para resistir ao apoio, 38
    área requerida para resistir ao cisalhamento provocado por carga axial, 38
  radial, 256-257, 322
  real, 65
  residual, 129-136, 191-198, 275-280
  resistência dos materiais, 1
  térmica, 114-121
  triaxial, 374
  uniaxial, 18
  unidades, 17
Teorema de Castigliano, 555, 600-601
  aplicado a treliças, 601-604
  aplicado a vigas, 605-609
Teorema do eixo paralelo:
  e momento de inércia, 613-614, 617
  e produto de inércia, 617
Teoria da elasticidade, 2
Teoria da energia de distorção máxima, 415-416, 418
Teoria da plasticidade, 2
Teoria da tensão de cisalhamento máxima, 413-415, 418
Teoria da tensão normal máxima, 416-417, 418
Teoria de Shanley, 534
Teorias da falha:
  materiais dúcteis, 413-416
    teoria da energia de distorção máxima, 415-416, 418
    teoria da tensão de cisalhamento máxima, 413-415, 418
  materiais frágeis, 416-417
    critério de falha de Mohr, 417
    teoria da tensão normal máxima, 416-417, 418
Teste de compressão, 62-63
Teste de torção, 416
Teste de tração, 62-63, 416
Torque, 5, 137
Torção, 137-198
  ângulo de torção, 153-166
    convenção de sinais, 155-156
    torque constante e área da seção transversal, 154-155
  concentração de tensão, 183-185
    fator de concentração de tensões de torção, 183
  deformação por torção de um eixo circular, 137-139
  diagrama de torque, 142
  eixos sólidos não-circulares, 172-174
  elementos estaticamente indeterminados carregados com torque, 166-171

fórmula da torção, 139-147
eixo sólido, 141
eixo tubular, 142
tensão de torção máxima absoluta, 142
inelástica, 185-191
torque elástico máximo, 186
torque elastoplástico, 186-188
torque máximo, 188
tensão residual, 191-198
torque, 137
transmissão de potência, 147-153
projeto do eixo, 147
tubos de parede fina com seções transversais fechadas, 174-182
fluxo de cisalhamento, 174-175
tensão de cisalhamento média, 175-176
Torque elástico máximo, 186
Torque elastoplástico, 186-188
Torque máximo, 188
Torque plástico, 187-188, 189
Trabalho:
de um momento (conjugado), 556
de uma força, 555-556
Trabalho externo, 555-558
Trabalho virtual, 555, 582-585
externo, 584
interno, 584, 585
Transformação da deformação, 383-424
círculo de Mohr, 390-396
deformação por cisalhamento máxima absoluta, 396-399
equações gerais de transformação para o estado plano de deformações, 384-390
estado plano de deformações, 383-384
relações material-propriedade, 403-413
rosetas, 399-403
teorias da falha, 413-423
materiais dúcteis, 413-416
materiais frágeis, 416-417
Transformação de tensão, 342-382
círculo de Mohr, 360-367
tensão de cisalhamento máxima absoluta, 373-381
tensão de cisalhamento máxima no plano, 351
tensão em eixos que se deve à carga axial e à torção, 368
tensões principais no plano, 349-351
transformação no estado plano de tensões, 342-346
equações gerais, 346-349
variações de tensão ao longo de uma viga prismática, 369-373
Transformação no estado plano de tensões, 342-346
equações gerais, 346-349
componentes das tensões normal e de cisalhamento, 347-348
convenção de sinal, 346-347
Transformação para o estado plano de deformações:
equações gerais de, 384-390
convenção de sinal, 384-385
deformação normal e por cisalhamento, 385-386
deformação por cisalhamento máxima no plano, 387
deformações principais, 386-387
Transmissão de potência, 147-153
projeto do eixo, 147
Treliças:
método das forças virtuais aplicado a, 586-587
erros de fabricação, 587
mudança de temperatura, 586-587
teorema de Castigliano aplicado a, 601-604
Tresca, critério do escoamento de, 414
Tresca, Henri, 414
Tubos de parede fina com seções transversais fechadas, 174-182
fluxo de cisalhamento, 174-175
tensão de cisalhamento média, 175-176

U

Unidades:
deformação, 52
tensão, 17

V

Variação linear da deformação normal, 224
Variação linear na tensão de cisalhamento, 139
Variação linear na tensão normal, 224
Vasos cilíndricos, 320-321
Vasos de pressão com paredes finas, 320-324
vasos cilíndricos, 320-321
vasos esféricos, 321-324
Vasos esféricos, 321-322
Viga(s), 199-200, 201
apoiadas com extremidades em balanço, 199
com carregamentos múltiplos, método para encontrar a equação da linha elástica de, 465
compostas, 247-251
fator de transformação, 248
contínua, 490
conveção de sinal de, 200
curvas, 253-260
fórmula da viga curva, 256-257
tensão circunferencial, 256-257
tensão radial, 256-257
de abas largas, 288
de concreto armado, 251-253
de lâminas coladas, 428
definição, 425
deflexão de, 449-509
em balanço, 199
mestra de chapa, 428
método das forças virtuais aplicado a, 592-599
primária, 499
seções transversais de, 222
simplesmente apoiada, 199
teorema de Castigliano aplicado a, 605-609
totalmente solicitadas, 436-440
Viga(s) prismática(s), 369-373, 426-428
projeto de, 426-428
perfis de aço, 427
seções compostas, 428
seções de madeira, 427-428
variações de tensão ao longo de uma, 369-373
Vigas não-prismáticas, 436-437
Volume, 19

Y

Young, Thomas, 70

Z

Zinco, 67

Equações Fundamentais da Resistência dos Materiais

Carga Axial

Tensão Normal

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

Deslocamento

$$\delta = \int_0^L \frac{P(x)dx}{A(x)E}$$

$$\delta = \Sigma \frac{PL}{AE}$$

$$\delta_T = \alpha \Delta T L$$

Torção

Tensão de cisalhamento em eixo circular

$$\tau = \frac{T\rho}{J}$$

onde

$J = \frac{\pi}{2}c^4$ seção transversal do maciço

$J = \frac{\pi}{2}(c_o^4 - c_i^4)$ seção transversal tubular

Potência

$$P = T\omega = 2\pi f T$$

Ângulo de torção

$$\phi = \int_0^L \frac{T(x)dx}{J(x)G}$$

$$\phi = \Sigma \frac{TL}{JG}$$

Esforço de cisalhamento médio em um tubo de parede fina

$$\tau_{\text{méd}} = \frac{T}{2tA_m}$$

Fluxo de Cisalhamento

$$q = \tau_{\text{méd}} t = \frac{T}{2A_m}$$

Flexão

Tensão normal

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

Flexão assimétrica

$$\sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}, \qquad \text{tg}\,\alpha = \frac{I_z}{I_y}\,\text{tg}\,\theta$$

Cisalhamento

Tensão média de cisalhamento direto

$$\tau_{\text{méd}} = \frac{V}{A}$$

Tensão de cisalhamento transversal

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

Fluxo de cisalhamento

$$q = \tau t = \frac{VQ}{I}$$

Tensão em um Vaso de Parede Fina

Cilindro

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t} \qquad \sigma_2 = \frac{pr}{2t}$$

Esfera

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2t}$$

Equações de Transformação de Tensão

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\,\text{sen}\,2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\,\text{sen}\,2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

Tensão Principal

$$\text{tg}\,2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Tensão de cisalhamento máxima no plano

$$\text{tg}\,2\theta_s = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}}$$

$$\tau_{\text{máx}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{\text{méd}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

Tensão de cisalhamento máxima absoluta

$$\tau_{\substack{\text{máx} \\ \text{abs}}} = \frac{\sigma_{\text{máx}} - \sigma_{\text{mín}}}{2}$$

$$\sigma_{\text{méd}} = \frac{\sigma_{\text{máx}} + \sigma_{\text{mín}}}{2}$$

Relações de Propriedades do Material

Coeficiente de Poisson

$$\nu = -\frac{\epsilon_{\text{lat}}}{\epsilon_{\text{long}}}$$

Lei de Hooke Generalizada

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}, \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx}$$

onde

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Relações entre *w, V, M*

$$\frac{dV}{dx} = -w(x), \qquad \frac{dM}{dx} = V$$

Curva Elástica

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = -w(x)$$

$$EI\frac{d^3v}{dx^3} = V(x)$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M(x)$$

Flambagem

Carga axial crítica

$$P_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$$

Tensão crítica

$$\sigma_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 E}{(KL/r)^2}, r = \sqrt{I/A}$$

Fórmula da secante

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{L}{2r}\sqrt{\frac{P}{EA}}\right)\right]$$

Métodos de Energia

Conservação de energia

$$U_e = U_i$$

Energia de deformação

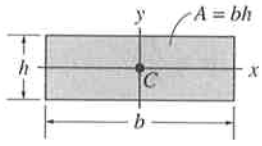
$$U_i = \frac{N^2L}{2AE} \quad \textit{carga axial constante}$$

$$U_i = \int_0^L \frac{M^2dx}{EI} \quad \textit{momento fletor}$$

$$U_i = \int_0^L \frac{f_sV^2dx}{2GA} \quad \textit{cisalhamento transversal}$$

$$U_i = \int_0^L \frac{T^2dx}{2GJ} \quad \textit{momento de torção}$$

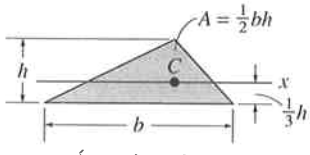
Propriedades Geométricas dos Elementos de Área



Área retangular

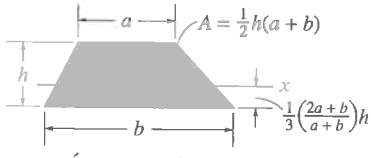
$I_x = \frac{1}{12}bh^3$

$I_y = \frac{1}{12}hb^3$

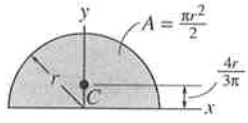


Área triangular

$I_x = \frac{1}{36}bh^3$



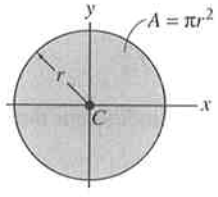
Área trapezoidal



Área semicircular

$I_x = \frac{1}{8}\pi r^4$

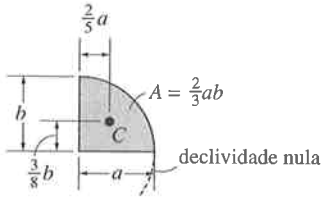
$I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$



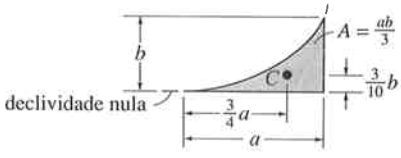
Área circular

$I_x = \frac{1}{4}\pi r^4$

$I_y = \frac{1}{4}\pi r^4$



Área semiparabólica



Área parabólica

Propriedades Mecânicas Médias de Materiais Típicos de Engenharia[a]
(Unidades Americanas Usuais)

Materiais		Densidade γ (lb/pol^3)	Módulo de Elasticidade E (10^3) ksi	Módulo de Elasticidade Transversal G (10^3) ksi	Tensão de Escoamento (ksi) σ_E Tração	Comp.[b]	Cisalha.	Limite de Resistência (ksi) σ_r Tração	Comp.[b]	Cisalha.	% de Elongamento em Corpo de Prova de 2 pol	Coeficiente de Poisson ν	Coeficiente de Dilatação Térmica α (10^{-6})/°F
Metálicos													
Ligas Forjadas de Alumínio	2014-T6	0,101	10,6	3,9	60	60	25	68	68	42	10	0.35	12,8
	6061-T6	0.098	10,0	3,7	37	37	19	42	42	27	12	0,35	13,1
Ligas de Ferro Fundido	Cinza ASTM 20	0,260	10,0	3,9	–	–	–	26	97	–	0,6	0,28	6,70
	Maleável ASTM A-197	0,263	25,0	9,8	–	–	–	40	83	–	5	0,28	6,60
Ligas de Cobre	Latão Vermelho C83400	0,316	14,6	5,4	11,4	11,4	–	35	35	–	35	0,35	9,80
	Bronze C86100	0,319	15.0	5,6	50	50	–	95	95	–	20	0.34	9,60
Liga de Magnésio	[Am 1004-T61]	0,066	6,48	2,5	22	22	–	40	40	22	1	0,30	14,3
Ligas de Aço	Estrutural A36	0,284	29,0	11,0	36	36	–	58	58	–	30	0,32	6,60
	Inoxidável 304	0,284	28,0	11,0	30	30	–	75	75	–	40	0.27	9,60
	Ferramentas L2	0,295	29,0	11,0	102	102	–	116	116	–	22	0,32	6,50
Liga de Titânio	[Ti-6A1-4V]	0,160	17,4	6,4	134	134	–	145	145	–	16	0,36	5,20
Não metálicos													
Concreto	Baixa Resistência	0,086	3,20	–	–	–	1,8	–	–	–	–	0,15	6,0
	Alta Resistência	0,086	4,20	–	–	–	5,5	–	–	–	–	0,15	6,0
Plástico Reforçado	Kevlar 49	0,0524	19,0	–	–	–	–	104	70	10.2	2.8	0,34	–
	30% Vidro	0,0524	10,5	–	–	–	–	13	19	–	–	0,34	–
Madeira Selecionada Grau Estrutural	Abeto Douglas	0.017	1,90	–	–	–	–	0,30[c]	3,78[d]	0,90[d]	–	0,29[c]	–
	Abeto Branco	0,130	1,40	–	–	–	–	0,36[c]	5,18[d]	0,97[d]	–	0,31[c]	–

[a] Os valores específicos podem variar para um material em particular devido à composição da liga ou do mineral, ao processamento mecânico da amostra ou ao tratamento térmico. Para se obter valor mais exato devem ser consultados livros de referência do material.

[b] A tensão de escoamento e o limite de resistência para materiais dúcteis podem ser admitidos como iguais tanto para a tração quanto para a compressão.

[c] Medida perpendicular ao grão.

[d] Medida paralela ao grão.

[e] Deformação medida perpendicular ao grão quando a carga é aplicada ao longo deste.

Propriedades Mecânicas Médias de Materiais Típicos de Engenharia[a] (Unidades SI)

Materiais		Densidade γ (t/m³)	Módulo de Elasticidade E (GPa)	Módulo de Elasticidade Transversal G (GPa)	Tensão de Escoamento (MPa) σ_E			Limite de Resistência (MPa) σ_r			% de Elongamento em Corpo de Prova de 50 mm	Coeficiente de Poisson ν	Coeficiente de Dilatação Térmica α $(10^{-6})/°C$
					Tração	Comp.[b]	Cisalha.	Tração	Comp.[b]	Cisalha.			
Metálicos													
Ligas Forjadas de Alumínio	2014-T6	2,79	73,1	27	414	414	172	469	469	290	10	0,35	23
	6061-T6	2,71	68,9	26	255	255	131	290	290	186	12	0,35	24
Ligas de Ferro Fundido	Cinza ASTM 20	7,19	67,0	27	–	–	–	179	669	–	0,6	0,28	12
	Maleável ASTM A-197	7,28	172	68	–	–	–	276	572	–	5	0,28	12
Ligas de cobre	Latão Vermelho C83400	8,74	101	37	70,0	70,0	–	241	241	–	35	0,35	18
	Bronze C86100	8,83	103	38	345	345	–	655	655	–	20	0,34	17
Liga de Magnésio	[Am 1004-T61]	1,83	44,7	18	152	152	–	276	276	152	1	0,30	26
Ligas de Aço	Estrutural A36	7,85	200	75	250	250	–	400	400	–	30	0,32	12
	Inoxidável 304	7,86	193	75	207	207	–	517	517	–	40	0,27	17
	Ferramentas L2	8,16	200	75	703	703	–	800	800	–	22	0,32	12
Liga de Titânio	[Ti-6A1-4V]	4,43	120	44	924	924	–	1,000	1,000	–	16	0,36	9,4
Não metálicos													
Concreto	Baixa Resistência	2,38	22,1	–	–	–	12	–	–	–	–	0,15	11
	Alta Resistência	2,38	29,0	–	–	–	38	–	–	–	–	0,15	11
Plástico Reforçado	Kevlar 49	1,45	131	–	–	–	–	717	483	20,3	2,8	0,34	–
	30% Vidro	1,45	72,4	–	–	–	–	90	131	–	–	0,34	–
Madeira Selecionada Grau Estrutural	Abeto Douglas	0,47	13,1	–	–	–	–	2,1[c]	26[d]	6,2[d]	–	0,29[e]	–
	Abeto Branco	3,60	9,65	–	–	–	–	2,5[c]	36[d]	6,7[d]	–	0,31[e]	–

[a] Os valores específicos podem variar para um material em particular devido à composição da liga ou do mineral, ao processamento mecânico da amostra ou ao tratamento térmico. Para se obter valor mais exato devem ser consultados livros de referência do material.

[b] A tensão de escoamento e o limite de resistência para materiais dúcteis podem ser admitidos como iguais tanto para a tração quanto para a compressão.

[c] Medida perpendicular ao grão.

[d] Medida paralela ao grão.

[e] Deformação medida perpendicular ao grão quando a carga é aplicada ao longo deste.